الفصل السادس

البيانـات المستوية (Planar Graphs)

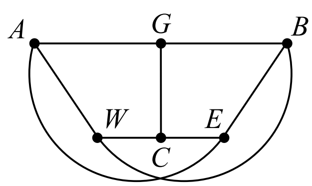
1.6. المتضمنات وصيغة أويلر (Embeding and Euler's Formula)

تُعدُّ نظرية البيان (الطبوغرافية) وبحسب فهم الكثيرين وتصورهم دراسة لتصميم البيانات. ويعزى الحافز (الدافع) الأولي لهذا الفهم إلى مسألة الألوان الأربعة الشهيرة ، وهي: هل يمكن تلوين كلّ خارطة على الكرة الأرضية بأربعة ألوان بحيث تكون ألوان المناطق التي بينها حدود مشتركة مختلفة؟ وفيما بعد، اشتملت الحوافز على تصميم (الدارات: Ciccuits) أو الحلقات على رقاقات السليكون. إن تقاطع الأسلاك يسبب بعض المشاكل في التصميمات. لذا، نسأل: ما الدارات التي لها تصميمات دون تقاطعات؟

الرُّسوم في المستوى (Drawings in the plane)

مشكلة الذكاء الآتية قديمة قدِم ددني ([1917] Dudeney).

1.1.6. مثال: غاز، ماء، كهرباء. افترض أن A، و B، و C ثلاثة أعداء يعيشون بين الأشجار. ونريد أن نجد مسارات لكلّ منهم لكي تصله منفعة من المنافع الثلاثة وهي عادة؛ الغاز والماء والكهرباء.ومن أجل تجنب المواجهة بينهم؛ فإننا نرغب في إيجاد مسارات لهم لا تتقاطع.والسؤال هو: هل يمكن عمل ذلك؟ لاحظ أن هذه المسألة تعني: هل يمكن رسم $K_{3,3}$ في المستوى دون تقاطعات بين أضلاعه؟ سنثبت أنَّ هذا غير ممكن.■



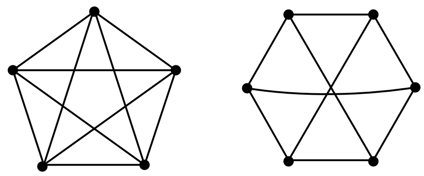
تستند التعليلات والحجج التي تقال عن رسم البيانات في المستوى إلى حقيقة أن كلّ منحنى مغلق يفصل المستوى إلى منطقتين (داخل المنحنى وخارجه). وفي نظرية البيانات الأولية، يُعدُّ هذا الأمر حقيقة حدسية مسلمًا بها، ولكن التفاصيل التوبولوجية صعبة جدًّا. قبل أن نناقش طريقًا لجعل التعليلات دقيقة لنظرية البيان، سنوضّح بطريقة غير رسمية كيفية استخدام هذه النتيجة لإثبات استحالة سوية بعض البيانات (أي استحالة رسم هذه البيانات في المستوى دون تقاطع أضلاعها).

2.1.6. قضية : لا يمكن رسم K_5 و $K_{3,3}$ دون تقاطعات.

الإثبات: خذ في الحسبان رسمًا للبيان K_5 أو $K_{3,3}$ في المستوى. افترض أنَّ C حلقة مولدة، إذا كان الرسم لا يحوي أضلاعًا متقاطعة، فإن C تمثِّل منحنى مغلقًا، ويجب أن تُرسم أوتار C داخل هذا المنحنى أو خارجه.

لاحظ أن هناك وترين يتعارضان إذا كان ترتيب رؤوسهما متناوبًا بين الزوجي والفردي، وعندما يتعارض وتران، نستطيع رسم أحدهما فقط داخل C، والثاني خارج C.

تحتوي الحلقة السداسية في $K_{3,3}$ على ثلاثة أوتار متعارضة، وباستطاعتنا وضع وترين على الأكثر؛ الأول داخلها والآخر خارجها. لذا، يستحيل إتمام عملية طمر $K_{3,3}$ في المستوى. والآن، إذا كانت C حلقة خماسية في K_5، فإنه يوجد وتران على الأكثر داخل C، ووتران آخران خارجها.وبما أنه يوجد خمسة أوتار، فإن إتمام عملية طمر K_5 في المستوى غير ممكنة. لذا، فإن كلًّا من هذين البيانين بيانٌ غير سويٍّ. ■



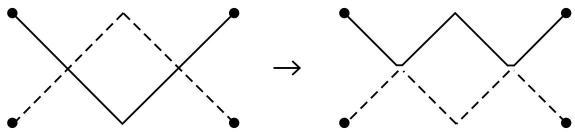
لاحظ أننا نحتاج إلى مفهوم واضح ودقيق عن الرسم. لقد استخدمنا المنحنيات للتدليل على الأضلاع. إن استخدام المنحنيات التي تشكلها القطع المستقيمة يجنبنا الصعوبات التوبولوجية. وأن هذه القطع تُقرِّب أي منحنى بدرجة كبيرة جدًّا؛ حيث إن العين المجردة لا تلحظ الفرق.

3.1.6. تعريف: يعرّف المنحنى على أنه مدى دالة متصلة من $[0.1]$ إلى $\mathbb{R}^2$. ويعرف منحنى المضلع على أنه منحنى مكوّن من عدد منتهٍ من القطع المستقيمة. ويُسمّى بالمنحنى المضلع من u إلى v إذا بدأ عند u وانتهى عند v.

إن رسم البيان هو دالة f معرَّفة على $V(G) \cup E(G)$ بحيث تحدد لكلّ رأس v نقطة $f(v)$ في المستوى، وتحدد لكلّ ضلع طرفيه u و v منحنى من $f(u)$ إلى $f(v)$. إن صور الرؤوس تكون مختلفة، وأن أي نقطة على الشكل $f(e) \cap f(e')$. تكون نقطة تقاطع إذا لم تكُ رأسًا مشتركًا.

من الشائع استعمال الاسم نفسه للبيان G، أو لرسم معين للبيان G مع الأخذ في الحسبان تسمية النقاط والمنحنيات بالرؤوس والأضلاع للبيان G. وبما أن علاقة النقاط الطرفية بين النقاط والمنحنيات هي نفسها علاقة الوقوع بين الرؤوس والأضلاع، فيمكن رؤية رسم البيان على أنه أحد عناصر صفّ التَّشاكل الذي يحوي G.

وبتحريك الأضلاع قليلاً، نستطيع التأكيد على عدم اشتراك ثلاثة أضلاع بنقطة داخلية، وأن أي ضلع لا يحوي رؤوسًا عدا طرفيه، وكذلك عدم وجود ضلعين متماسين. إذا تقاطع ضلعان أكثر من مرة، فنستطيع تعديلهما كما في الشكل أدناه لتقليل عدد التقاطعات بينهما. لذا، فإننا نشترط كذلك أن الضلعين يتقاطعان مرة واحدة على الأكثر، وسنلزم أنفسنا بالتعامل مع رسوم تحقق هذه الخواص.



4.1.6. تعريف: نقول: إنَّ البيانَ سويٌّ إذا وُجد له رسمٌ في المستوى دون تقاطعات بين أضلاعه ويُسمّى مثل هذا الرسم طمرًا سويًّا للبيان G ونعرِّف بيان المستوى على أنه طمر سويّ معين لبيان سويّ.

ونقول: إن المنحنى مغلق إذا بدأ في النقطة نفسها وانتهى بها. ونقول: إنه بسيط، إذا لم يوجد فيه نقاط مكررة إلا في حالة كانت نقطة البداية = نقطة النهاية.

إنَّ الطّمر السوي للبيان يقطع المستوى إلى قطع هي مواضيع أساسية للدراسة.

5.1.6. تعريف: المجموعة المفتوحة في المستوى هي مجموعة جزئية $U \subseteq \mathbb{R}^2$ بحيث يتحقق أنه إذا كانت $p \in U$، فإن النقاط جميعها التي تبعد عن p بمقدار قليل تكون موجودة أيضًا في U. ونعرِّف المنطقة على أنها مجموعة مفتوحة U تحوي منحنى مضلعًا من u إلى v لكلّ زوج $u,v \in U$.

نعرِّف وجوه بيان المستوى على أنها مناطق أعظمية من المستوى لا تحوي أيًّا من النقاط التي استخدمت في الطّمر.

إنَّ لبيان المستوى G المنتهي وجهًا واحدًا غير محدود (يُسمّى كذلك الوجه الخارجي). وتكون الوجوه منفصلة زوجًا زوجًا. إن النقطتين p و q تكونان في الوجه نفسه إذا وفقط إذا وُجِدَ منحنى مضلع من p إلى q لا يقطع أيًّا من أضلاع البيان.

وفي بيان المستوى، تكون كلّ حلقة مطمورة في صورة منحنى مغلق، وتقع بعض الوجوه في داخلها، أما بعضها الآخر فيقع خارجها، وهذا يعتمد على حقيقة أن المنحنى المغلق البسيط يفصل المستوى إلى منطقتين.

وكما اقترحنا، فإن هذا ليس صعبًا كثيرًا للمنحنيات المضلعة. وسنعرض بعض تفاصيل هذه الحالة من أجل توضيح كيفية حساب إمكانية وجود النقطة في الداخل أو في الخارج.

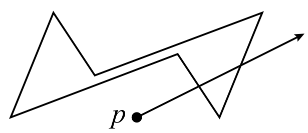
يظهر هذا الإثبات في (تفربرج [1980] Tverberg).

6.1.6. نظرية*. (حالة خاصة لنظرية منحنى جوردان: Restricted Jordan Curve theorem) إن منحنى المضلع المغلق البسيط C الذي يتألف من عدد منتهٍ من القطع المستقيمة يقسم المستوى إلى وجهين حيث تكون C حدودًا لكلّ منها.

الإثبات: بما أنَّ عدد القطع المستقيمة منته، فإنَّ القطع غير المتقاطعة لا تكون قريبة اعتباطيًّا. لذا، نستطيع مغادرة الوجه عندما نقطع C فقط. وإذا تتبعنا C، فإن النقاط التي تكون موجودة عن يميننا تقع في وجه واحد، وكذلك الأمر بالنسبة إلى النقاط التي تقع عن يسارنا. (يوجد معنى جبري دقيق لليسار واليمين هنا). إذا كانت $x \notin C$، وكانت $y \in C$، فإن القطعة xy أولاً تقطع C في مكان ما عندما تقترب من C من اليمين إلى اليسار. لذا، فإن كل نقطة لا تقع على C، فإنها تقع في الوجه نفسه مع إحدى المجموعتين الموصوفتين أعلاه على الأقل.

ولإثبات أنَّ النقاط على كلّ من اليسار واليمين تقعان في وجوه مختلفة، خذ في الحسبان أشعة في المستوى. ونقول: إنَّ الشعاعَ المنبعثَ من نقطة p رديءٌ إذا احتوى نقطة طرفية لإحدى القطع المستقيمة في C. وبما أنَّ

عددَ القطع المستقيمة في C منته، فإن هناك عددًا منتهيًا من الأشعة الرديئة المنطلقة من p وبما أنَّ عددَ القطع منته، فإن كلّ شعاع جيد مِن p يقطع C عددٌ منته من المرات، وكلّما تغير الاتجاه، فإن عدد التقاطعات فقط يتغير في اتجاه رديء لاحظ أن نوعية عدد التقاطعات هي نفسها قبل مثل هذا الاتجاه وبعده. ونقول: إن p نقطة زوجية عندما يقطع الشعاع الجيد المنبعث من p C عددًا زوجيًّا من المرات. وبخلاف ذلك تكون p نقطة فردية.



إذا كان لدينا نقطتان x و y في الوجه نفسه لـ C، فاجعل P هي المنحنى المضلع من x إلى y الذي لا يقطع C. وبما أن C يحوي عددًا منتهيًا من القطع المستقيمة، فإنه يمكن إجراء تعديل طفيف على النقاط الطرفية للقطع المستقيمة الموجودة في P، بحيث تصبح الأشعة المارة عبر قطع P جيدة لنقاطها الطرفية. لاحظ أن قطعة من P تنتمي إلى شعاع ينبعث من إحدى النقاط الطرفية، ويمر بالطرف الآخر إضافة إلى أن لكلّ من النقطتين أشعة جيدة في الاتجاه نفسه. وبما أن النقطة المستقيمة لا تقطع C، فإن للنقطتين النوعية نفسها. لذا، فإن لكلّ نقطتين في الوجه نفسه النوعية نفسها.

وبما أن النقاط الطرفية لأي قطعة قصيرة تقطع C مرة واحدة فقط تمتلك نوعيات متضادة، إذن، يوجد وجهان مختلفان، وأن كلًّا من النقاط الزوجية والفردية تشكل الوجهين الخارجي والداخلي على الترتيب. ■

البيانات الثَّنَويّة (Dual Graphs)

تُعدُّ الخارطة على المستوى أو على الكرة بيانًا مستويًا فيه المقاطعات هي الوجوه، والرؤوس هي الأماكن التي تلتقي فيها الحدود. أمّا الأضلاع فهي أجزاء الحدود التي تربط بين رأسين. ونسمح بالحالة العامة من حيث وجود العرى والأضلاع المكررة. ونستطيع تكوين بيان مستوٍ يرتبط ببيان المستوى G حيث يُسمّى البيانَ الثَّنَوي للبيان G.

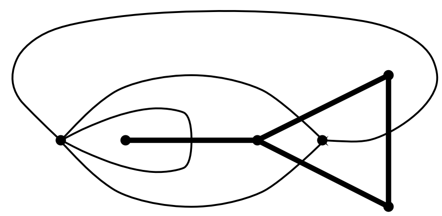
7.1.6. تعريف: يعرف البيان الثنوي G^* لبيانٍ مستوٍ G على أنه بيان مستوٍ ترتبط رؤوسه بوجوه G (رأس في كلّ وجه) وترتبط أضلاع G^* بأضلاع G على الصورة التالية: إذا كان e ضلعًا في G حيث الوجه X على أحد جانبي e، في حين يكون Y الوجه على الجانب الآخر، فإن النقاط الطرفية للضلع الثنوي $e^* \in E(G^*)$ هما الرأسان x و y في G^* التي تمثّل الوجهين X و Y من وجوه G. فضلًا عن أن ترتيب الأضلاع التي تقع على $x \in V(G^*)$ في المستوى هو ترتيب الأضلاع نفسه التي تحدّ الوجه X في ممرٍّ حول حدود هذا الوجه.

8.1.6. مثال: يحوي كلّ طمر سويّ للبيان K_4 أربعة وجوه تشترك بأضلاع حدودية زوجًا زوجًا. لذا، فإن البيان الثنوي للبيان K_4 هو نسخة أخرى من K_4 نفسه.

ولكلّ طمر سوي للمكعب Q_3 8 رؤوس، و12 ضلعًا، و6 وجوه، وأن الوجوه المتضادة لا تشترك بحدود. إن البيان الثّنويّ لهذا البيان هو طمر سويّ للبيان $K_{2,2,2}$ الذي له 6 رؤوس و 12 ضلعًا و8 وجوه.

لاحظ أن إيجاد البيان الثّنويّ لبيان يمكن أن يُنْتِجَ عرى وأضلاعًا مكررة؛ فعلى سبيل المثال، اجعل G كفًّا (paw). في الشكلّ أدناه، رسمنا الكفَّ بوصفه بيانًا مستويًا بالخط الغامق، في حين رُسِمَ البيان الثنوي بالخطوط

العادية المتصلة، وبما أن للبيان G أربعة رؤوس، وأربعة أضلاع، ووجهين، فإنه يوجد للبيان G^* 4 وجوه، و4 أضلاع، ورأسان. ■



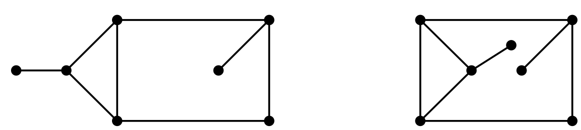
9.1.6. ملاحظة:

1) يوضّح المثال 8.1.6. أنه يمكن أن يكون للبيان الثنوي لبيان بسيط عرى أو أضلاع مكررة. حيث إن ضلع القطع في G يصبح عروة في G^* وذلك لوجود الوجه نفسه على جانبيه. وتظهر الأضلاع المكررة في البيان الثنوي في حالة وجود أكثر من ضلع حدودي مشترك بين الوجوه المختلفة.

2) تتطلب بعض التعليلات والحجج وصفَ البيان الثنوي هندسيًّا بصورة حذرة. ولكلّ وجه X في G نضع رأسًا x للبيان الثنوي داخل هذا الوجه، وبذلك فإن كلّ وجه من وجوه G يحوي رأسًا واحدًا من رؤوس G^*. ونرسم منحنى من x إلى نقطة e لكلّ ضلع في حدود X، إضافة إلى أن هذه المنحنيات لا تتقاطع، ويلتقي كلّ منحنى من هذه المنحنيات بمنحنى آخر من الجانب الآخر للضلع e، وعند النقطة نفسها لتشكيل ضلع من أضلاع G^*، وهذا هو الضلع الثنوي الذي يقابل الضلع e. ولا يوجد أضلاع أخرى تدخل X. لذا، فإن G^* بيان مستوى، وكلّ ضلع من G^* في هذا التصميم يقطع ضلعًا واحدًا بالضبط من أضلاع G.

تؤدّي مثل هذه التعليلات إلى إثبات أن $(G^*)^*$ يشاكل G إذا وفقط إذا كان G بيانًا مترابطًا (التمرين 18). يستخدم الرياضيون كلمة "ثنوي" عادة في الحالة التي يؤدي فيها إجراء العملية مرتين إلى استعادة الشيء الأصلي الذي نبدأ به. ■

10.1.6. مثال: إذا وُجد لدينا طمران لبيان سويٍّ، فمن المحتمل جدًّا أن تكون البيانات الثنوية لهذين الطّمرين غير متشاكلة، ويوجد لكلّ من الطّمرين الموضحين أدناه ثلاثة أوجه. لذا، ففي كلّ حالة يوجد للبيان الثنوي لكلّ منهما ثلاثة رؤوس. في الطّمر الموجود عن اليمين، لاحظ أن درجة الرأس المرتبط بالوجه الخارجي تساوي 4، في حين يخلو البيان الثنوي للطّمر الموجود عن اليسار من أي رؤوس درجتها تساوي 4. ولا يحدث هذا في البيانات المترابطة من الدرجة 3. وهناك طمرٌ واحدٌ فقط لكلّ بيان سوي مترابط من الدرجة 3 (انظر التمرين 45.2.8). ■



عندما يكون البيان السوي مترابطًا، فإن حدود كلّ وجه ممرّ مغلق، وفي الحالة التي لا يكون فيها البيان مترابطًا، فإنه يوجد أوجه حدودها مكونة من أكثر من ممرّ مغلق.

11.1.6. تعريف: إن طول الوجه لبيان مستوٍ G هو الطول الكلّي للممرات المغلقة التي تحدّ هذا الوجه.

12.1.6.مثال ينتمي ضلع القطع لحدود وجه واحد فقط، ويسهم مرتين في طول هذا الوجه. ولكلّ بيان في

المثال 10.1.6 ثلاثة وجوه، أطوالها في الطّمر الموجود عن اليسار هي: 3،و 6،و 7، أما أطوال الوجوه التي عن اليمين فهي: 3، و 4، و 9، ومجموع هذه الأطوال يساوي 16 في كلّ حالة، وهذا يشكلّ ضعف عدد الأضلاع. ■

13.1.6. قضية : إذا كان $l\ (Fi)$ يمثّل طول الوجه Fi في بيان G، فإن $2\ e(G) = \sum l(F_i)$.

الإثبات: إن أطوال الوجوه هي نفسها درجات رؤوس البيان الثّنوي، وبما أنّ $e\ (G) = e\ (G^*)$، فإنّ العبارة $2\ e(G) = \sum l\ (F_i)$ هي الصيغة نفسها لجمع الدرجات $2\ e\ (G^*) = \sum d^*_G(x)$ للبيان الثنوي G^*، (إن كلًّا من المجموعتين تحسب ضعف عدد الأضلاع). ■

توضّح القضيّة 13.1.6. أنّ العبارات المتعلقة ببيانات المستوى المترابطة تصبح عبارات عن البيان الثنوي من خلال تبديل الأدوار بين الرؤوس والأوجه؛ لأنّ الأضلاع التي تقع على رأس معين تصبح أضلاعًا حدودية لوجه والعكس بالعكس. لذا، فإن أطوال الوجوه ودرجات الرؤوس تتبادل الأدوار.

ويمكننا كذلك تفسير تلوين G^*. وتمثّل أضلاع G^* حدودًا مشتركة لوجوه G. وأن العدد اللوني لـ G^* يساوي عدد الألوان اللازمة لتلوين أوجه G تلوينًا فعليًّا. وبما أنه إذا كان G بيانًا مترابطًا، فإن $G = (G^*)^*$. وهذا يعني أن أربعة ألوان تكفي لإعطاء تلوين فعليّ لكلّ خارطة مستوى إذا وفقط إذا كان العدد اللونيّ لأيّ بيان مستوٍ يساوي 4 على الأكثر.

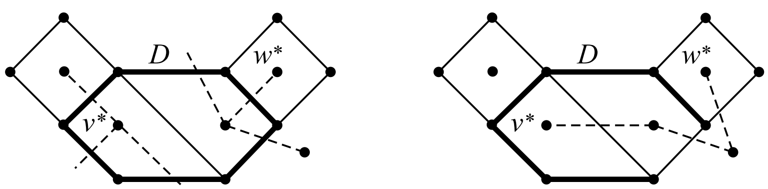
وتنصّ نظرية منحنى جوردان على أنّ كلّ بيان بسيط مغلق يعطي قطعًا بين داخله وخارجه. لاحظ أن مبدأ الثنوية بين منحنى وقطع يصبح مبدأ ثنوية بين الحلقات والروابط وذلك فيما يخص بيانات المستوى.

14.1.6. نظرية : إذا كان G بيانًا مستويًا، فإن مجموعة من أضلاعه تشكّل حلقة في G إذا وفقط إذا كانت الأضلاع الثنوية المرتبطة بهذه الأضلاع تشكل رابطة في G^*.

الإثبات: افترض أن $D \subseteq E(G)$. إذا خلت D من الحلقات في G، فإن D لا تحيط بأي منطقة، لذا يمكن الوصول إلى وجه G غير المحدود من أي وجه آخر دون أن نقطع D. لذلك، فإن G^*-D^* يكون مترابطًا، وأن D^* لا تحوي ضلع قطع.

إذا كانت D مجموعة أضلاع حلقة في G، فإن مجموعة الأضلاع $D^* \subseteq E(G^*)$ المناظرة لأضلاع D في G^* تحوي الأضلاع الثنوية جميعها التي تربط بين كلّ من الوجوه الموجودة داخل D وخارجها (تضمن نظرية منحنى جوردان وجود ضلع واحد على الأقل لكلّ حالة). لذا، فإن D^* تحوي قطعًا ضلعيًّا.

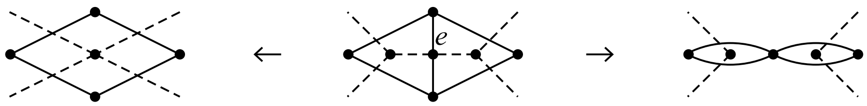
إذا حَوَت D حلقة أو أكثر، فإن D^* تحوي قطعًا ضلعيًّا أو أكثر. لذا، فإن D^* هي أصغر قطع ضلعي إذا وفقط إذا كانت D حلقة. ■



تؤدي الملاحظة الآتية إلى إثبات استقرائيٍّ للنظرية 14.1.6 (التمرين 19).

15.1.6. ملاحظة : لاحظ أنَّ حذف ضلع (لا يمثل ضلع قطع) من G له الأثر نفسه لتقليص أحد أضلاع G^*، لأن هناك وجهين يتداخلان لإعطاء وجه واحد. وأنَّ تقليص ضلع ليس عروة في G له الأثر نفسه لحذف ضلع في G^*. وتجد في البيان الموضح في الشكل أدناه أنَّ G هو البيان الموجود في الوسط، و $G - e$ عن اليسار، و $G.e$ عن اليمين.

لاحظ أنه من أجل المحافظة على الثنوية، فإننا نُبقى على الأضلاع المكررة والعرى التي تنتج عن تقليص أضلاع البيانات المستوية.



تسمح لنا الحدود بتوصيف البيانات المستوية الثنائية الفرع. ويمكن برهنة هذا التوصيف بالاستقراء. (التمرين 20).

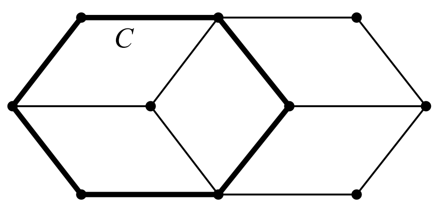
16.1.6. نظرية : العبارات الآتية متكافئة وذلك لبيانٍ مستوٍ G.

a) G ثنائيُّ الفرع.
b) طولُ كلّ وجه من أوجه G عددٌ زوجيٌّ.
c) البيانُ الثنويُّ G^* بيانٌ أويلري.

الإثبات: $A \Rightarrow B$. تتكون حدود أي وجه من ممرات مغلقة. وكلّ ممر مغلق فردي يحوي حلقة فردية، لذا تكون مساهماتُ الوجوه جميعُها في الطول زوجيةً في بيان مستوٍ ثنائيّ الفرع.

$B \Rightarrow A$. افترض أن C حلقة في G، وبما أن G يخلو من التقاطعات، فإنها بيان بسيط مغلق. اجعل F هي المنطقة التي حدودها C. لذا، فإن كلّ منطقة في G إما أن تكون كاملة داخل F أو كاملةً خارجها. وإذا جمعنا أطوال وجوه المناطق الموجودة داخل F، فإننا نحصل على عدد زوجي؛ لأنَّ طولَ كلّ وجه عددٌ زوجيٌّ. ويحسب هذا المجموع كلّ ضلع من أضلاع C مرة واحدة، وكذلك يحسب كلّ ضلع داخل F مرتين لأن كلّ ضلع من هذه الأضلاع ينتمي مرتين إلى وجوه F. لذا، فإن نوعية طول C هي نوعية كامل المجموع نفسه، وهي زوجية.

$B \Rightarrow C$. البيان الثنوي G^* مترابط، ودرجات رؤوسه هي أطوال أوجه G. ■



إن العديد من الأسئلة المتعلقة بالبيانات السَّويَّة العامة تكون سهلة الإجابة لبعض صفوف البيانات الخاصة.

17.1.6. تعريف: نقول: إن البيان سوي خارجي إذا وُجد له طمر بحيث يقع كلّ رأس من رؤوسه على حدود الوجه غير المحدود. ونعرِّف بيان المستوى الخارجي على أنه طمر لبيان سوي خارجي.

إن البيان الموجود في المثال 10.1.6 هو سوي خارجي، ولكننا نحتاج إلى طمر آخر لإثبات ذلك.

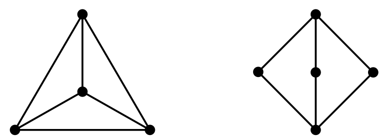
18.1.6. قضية : إن حدود الوجه الخارجي لبيان مستوٍ خارجي مترابط من الدرجة 2 هي حلقة مولدة.

الإثبات: تحوي هذه الحدودُ الرؤوسَ جميعها. فإذا كانت حلقة، فإنها تمر عبر أحد الرؤوس أكثر من مرة، وسيكون مثل هذا الرأس رأس قطع.

19.1.6. قضية : K_4 و $K_{2,3}$ بياناتٌ سويّةٌ وليست سويّة خارجيّة.

الإثبات: لإثبات أن هذه البيانات ليست سوية خارجية، لاحظ أنها مترابطة من الدرجة 2. لذا، فإن الطّمر في مستوى خارجي يتطلب وجود حلقة مولدة، ولا توجد حلقة مولدة لـ $K_{2,3}$؛ لأن طولها سيساوي 5 في بيان ثنائي الفرع إن وُجدت.

توجد حلقة مولدة في K_4، ولكن النقاط الطرفية للضلعين الباقيين تتناوب على هذه الحلقة. لذا، فإن هذين الوترين يتعارضان، ولا يمكن رسمهما معًا داخل هذه الحلقة. بالإضافة إلى أن رسم وتر خارجي يفصل رأسًا عن الوجه الخارجي. ■

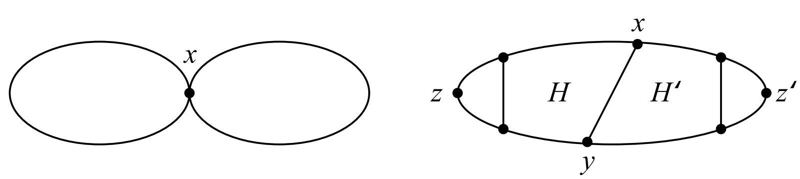


20.1.6. قضية : يوجد لكلّ بيان سوي خارجي بسيط رأسٌ درجته تساوي 2 على الأكثر.

الإثبات: يكفي أن نبرهن النتيجة للبيانات المترابطة. نستخدم الاستقراء على $n(G)$. عندما $n(G) \leq 3$، فإن درجة كلّ رأس تساوي 2 على الأكثر. لذا، افترض أن $n(G) \geq 4$. سنبرهن عبارة أقوى وهي وجود رأسين غير متجاورين درجة كلّ منهما تساوي 2 على الأكثر للبيان G.

إذا كان $n(G) > 4$ ، فيوجد لـ G رأس قطع x. لذا، فإن لكلّ فلقة -$\{x\}$ من G رأسًا درجته تساوي 2 على الأكثر، وهذا الرأس مختلف عن x، وهذان الرأسان غير متجاورين في G.

إذا كان G مترابطًا من الدرجة 2، فإن حدود الوجه الخارجي هي حلقة C. وإذا خلت C من الأوتار، فإن G منتظم من الدرجة 2. وإذا كان xy وترًا في C، فإن كلّ مجموعة من مجموعتي رؤوس المسارين من x إلى y تولد بيانًا جزئيًّا سويًّا خارجيًّا. وباستخدام فرضية الاستقراء، فإن هذه البيانات الجزئية H و H' تحوي الرأسين z و z' درجة كلّ منهما تساوي 2 على الأكثر، وهذان الرأسان لا ينتميان إلى المجموعة $\{x,y\}$ (هذا يشمل الحالة عندما يكون H أو H' مساويًا للبيان K_3). وبما أنه لا يوجد أي وتر من C يمكن رسمه خارجه، أو يمكن أن يقطع xy، فإن $z \nleftrightarrow z'$. لذا، فإن z و z' هما زوج الرؤوس المنشود. ■



صيغة أويلر (Euler's Formula)

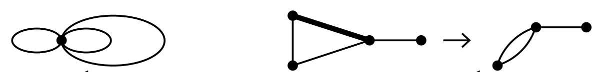
تُعدُّ صيغة أويلر ($n - e + f = 2$) أداة الحساب الرئيسة التي تربط بين رؤوس البيانات السَّوِيَّة وأضلاعها وأوجهها.

21.1.6. نظرية : (Euler [1758]) افترض أن G بيان مستوٍ مترابط، وكانت n هي عدد رؤوسه، و e عدد أضلاعه، و f عدد الوجوه فيه، فإن $n-e + f = 2$.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على n. إذا كان$(n = 1)$ $G:$ باقة من العرى يمثل كلّ منها منحنى مغلقًا في الطّمر. إذا كانت $e = 0$، فإن $f = 1$ وتتحقق الصيغة. فكلّ عروة مُضافة تمرّ خلال وجه وتقطعه لوجهين (هذا يتبع من نظرية منحنى جوردان). فهذا يزيد من عدد الأضلاع وعدد الوجوه بمقدار 1. وبذلك تصمد المعادلة وتصبح صحيحة عندما تكون $n = 1$ لأي عدد من الأضلاع.

إن هذا يوسّع عدد كلّ من الأضلاع والأوجه بمقدار 1 لكلّ منهما. لذا، فإن الصيغة تتحقق عندما $n = 1$ بغض النظر عن عدد الأضلاع. الآن، افترض أن $n > 1$، وبما أن G مترابط، فبإمكاننا أن نجد ضلعًا بحيث لا يكون هذا الضلع عروة. وبتقليص هذا الضلع؛ نحصل على بيان مستوٍ G' له n' من الرؤوس، و e' من الأضلاع، و f' من الوجوه. لاحظ أن تقليص الضلع لا يغير عدد الوجوه (لقد أنقصنا الحدود فقط)، ولكنه يغير عدد كلّ من الأضلاع والرؤوس بمقدار 1. لذا، فإن $n' = n - 1$، $e' = e - 1$ و $f' = f$ وبتطبيق فرضية الاستقراء، نجد أن:

$$n - e + f = n' + 1 - (e' + 1) + f' = n' - e'f' = 2 \qquad \blacksquare$$



$n = 1$ $\qquad$ $n > 1$

22.1.6. ملاحظة :

1) نستنتج من صيغة أويلر أن لكلّ الطمورات السَّوِيَّة لبيان مترابط G عددَ الأوجه نفسه. وعلى الرّغم من أن البيان الثنوي قد يعتمد على الطّمر الذي تم اختياره للبيان G، إلا أن عدد الرؤوس لا يبقى هو نفسه.

2) إن صيغة أويلر أعلاه تفشل في حالة البيانات غير المترابطة.

إذا كان لبيان G k مركبة، فإن إضافة $k - 1$ ضلعًا للبيان G تنتج بيانًا مستويًا مترابطًا دون تغيير عدد الأوجه. لذا، نستطيع تعميم صيغة أويلر لبيانات المستوى التي لها k مركبة لتصبح $n-e+f = k + 1$ (فعلى سبيل المثال، خذْ في الحسبان البيانَ الذي له n من الرؤوس ويخلو من الأضلاع). $\blacksquare$

يوجد لصيغة أويلر العديد من التطبيقات، وعلى وجه الخصوص بيانات المستوى البسيطة حيث لكلّ وجه طول يساوي 3 على الأقل.

23.1.6. نظرية : إذا كان G بيانًا مستويًا بسيطًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، فإن $e(G) \geq 3n(G) -6$. وكذلك إذا كان G يخلو من المثلثات، فإن $e(G) \leq 2n(G) -4$.

الإثبات: يكفي أن نتعامل مع البيانات المترابطة، وبخلاف ذلك تستطيع إضافة أضلاع. لاحظ أن صيغة أويلر تربط بين $n(G)$ و $e(G)$ في الحالة التي نستطيع فيها التخلص من f. تعطينا القضية 13.1.6. متباينة بين e و f. إن كلّ حدود وجه في بيان بسيط تحوي على الأقل ثلاثة أضلاع $(n(G) \geq 3)$. وبجعل $\{f_i\}$ تمثّل قائمة أطوال الوجوه، فإننا نحصل على أن $2e = \sum f_i \geq 3f$، وبالتعويض بصيغة أويلر، نحصل على أن $e \leq 3n - 6$.

إذا خلال البيان G من المثلثات، فإن طول كلّ وجه يساوي 4 على الأقل. وفي هذه الحالة، نجد أن $2e = \sum f_i \geq 4f$. وباستخدام هذا بصيغة أويلر نجد أن $e \leq 2n\text{-}4$.

24.1.6. مثال: إن عدم سوية K_5 و $K_{3,3}$ تتبع مباشرة من النظرية 23.1.6. فللبيان K_5 نجد أن $e = 10 > 9 = 3n\text{-}6$، وللبيان $K_{3,3}$ الذي يخلو من المثلثات، نجد أن $e=9 > 8 = 2n\text{-}4$. لذا، فإن لهذه البيانات عددًا كبيرًا من الأضلاع مما يؤدي إلى استحالة سويتها. ■

25.1.6. تعريف: نعرِّف البيان السوي الأعظمي على أنه بيان سوي وليس بيانًا جزئيًا مولدًا لبيان آخر، علاوة على أن البيان المثلثاتي هو بيان المستوى البسيط الذي تحيط حلقة ثلاثية بكلّ وجه من أوجهه.

26.1.6. قضية: إذا كان G بيانًا مستويًا بسيطًا له n من الرؤوس، فإن العبارات الآتية تكون متكافئة:

A) يوجد لـ G $3n\text{-}6$ ضلعًا.

B) بيان مثلثاتي.

C) بيان مستوى أعظمي.

الإثبات: $A \Leftrightarrow B$. بما أن G بيان مستو بسيط، فإن الإثبات 23.1.6. يوضح أن وجود $3n\text{-}6$ ضلعًا يكافئ العبارة $2e = 3f$، والتي تحدث فقط عندما يكون كلّ وجه محاط بحلقة ثلاثية.

$B \Leftrightarrow C$. يوجد وجه طوله أطول من حلقة ثلاثية إذا وفقط إذا وُجدت طريقة لإضافة ضلع إلى الرسم والحصول على بيان مستوٍ بسيط أكبر من البيان الموجود. ■

27.1.6. ملاحظة: ينطمر البيان في المستوى إذا وفقط إذا انطمر على كُرَة. إذا أُعطينا طمرًا على كرة، فبإمكاننا خرق هذه الكرة داخل وجه، وإسقاط هذا الطّمر على مستوى مماس للكرة عند النقطة المضادة لنقطة الخرق. إن هذا يعطينا طمرًا سويًّا يصبح فيه الوجه المخروق هو الوجه غير المحدود في المستوى. وهذه العملية قابلة للعكس.

28.1.6. تطبيق. متعدد السطوح المنتظم. بطريقة غير رسمية، نفكر في متعدد السطوح المنتظم على أنه مجسم حدوده مؤلفة من مضلعات منتظمة لها الطول نفسه، ولها عدد الوجوه نفسه التي تلتقي عند كلّ رأس. عندما نمدد المسطح على كرة، ثمَّ نضع الرسم في المستوى كما في الملاحظة 27.1.6، فإننا نحصل على بيان مستوٍ منتظم طول أوجهه متساوية. لذا، فإن البيان الثنوي أيضًا يكون بيانًا منتظمًا.

افترض أن G بيان، عدد رؤوسه n، وعدد أضلاعه e، وعدد أوجهه f. وافترض أيضًا أن G منتظم من الدرجة k، وطول كلّ وجه من وجوهه يساوي l. إن صيغة جمع الدرجات لكلّ من G و G^* تعطينا أن $kn = 2e = lf$.

وبالتعويض عن n و f في صيغة أويلر، نحصل على $2 = e\left(2/k - 1 + 2/l\right)$. وبما أن كلًّا من 2 و e أعداد موجبة، فإن المعامل الآخر يجب أن يكون موجبًا أيضًا. وبذا، نحصل على أن $2/k - 1 + 2/L > 0$، ومنها نجد أن $\frac{2}{k} + \frac{2}{L} > 1$ أي أن $2l+2k > kl$. إن هذه المتباينة تكافئ المتباينة $4 > (k\text{-}2)\ (l\text{-}2)$.

بما أن البيان الثنوي لبيان منتظم من الدرجة 2 ليس بسيطًا، فإننا نطلب أن يكون $k,l \geq 3$. الآن $(k\text{-}2)\ (l\text{-}2) <$ 4 وهذا يتطلب أيضًا أن يكون $k,l \leq 5$. إن أزواج الأعداد الصحيحة (k, l) التي تفي بهذه المتطلبات هي: (3,3)، (3,4)، (3,5)، (4,3) و (5,3).

وإذا حدّدنا k و l، فإن هناك طريقة واحدة فقط لرسم البيان المستوي عندما نبدأ بأي وجه. لذا فهناك خمسة مجسمات (مسطحات) أفلاطونية فقط، كما في القائمة التالية، واحد لكلّ زوج (k,l) يحقق المتطلبات.

الاسم	f	n	e	$(k$-2) $(L$-2)	l	k
الرّباعيّ السّطوح	4	4	6	1	3	3
المكعّب	6	8	12	2	4	3
الثّماني السّطوح	8	6	12	2	3	4
الثنعشريّ السّطوح	12	20	30	3	5	3
العشرينيّ السّطوح	20	12	30	3	3	5

تمارين

1.1.6. (–): أثبت أو انقض:

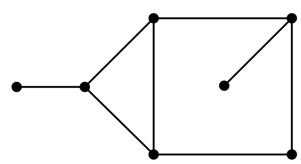
a) كلّ بيان جزئيّ لبيان سويّ يكون سويًّا.

b) كلّ بيان جزئيّ لبيان غير سويّ يكون غير سويّ.

2.1.6. (–) أثبت أن البيانات المشكلة بحذف ضلع واحد من K_5 و $K_{3,3}$ تكون بيانات سويّة.

3.1.6. (–) جد قيم r و s التي تجعل $K_{r,s}$ سويًّا.

4.1.6. (–) جد عدد صفوف تشاكل البيانات السَّويَّة التي يمكن الحصول عليها كبيان ثنويّ سويّ للبيان الموجود في الشكل أدناه.



5.1.6. (–) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: يوجد رأس قطع للبيان السوي إذا وفقط إذا كان الممرُّ المحيط بأي وجه حلقةً.

7.1.6. (–) يُعَرَّفُ البيان السوي الخارجي الأعظمي على أنه بيان سوي خارجي بسيط بحيث لا يكون بيانًا جزئيًّا مولدًا لبيان سوي خارجي بسيط أكبر. افترض أن G بيان سوي خارجي أعظمي له ثلاثة رؤوس على الأقل. أثبت أن G مترابط من الدرجة 2.

8.1.6. (–) أثبت أنه يوجد رأس درجته تساوي 5 على الأكثر في كلّ بيان سوي بسيط.

9.1.6. (–) استخدم النظرية 23.1.6 لتبرهن أن كلّ بيان بسيط سوي عدد رؤوسه أقل من 12 يحوي رأسًا درجته تساوي 4 على الأكثر.

10.1.6. (–) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: لا يوجد بيان سوي ثنائي الفرع بسيط درجته الصغرى تساوي 4 على الأقل.

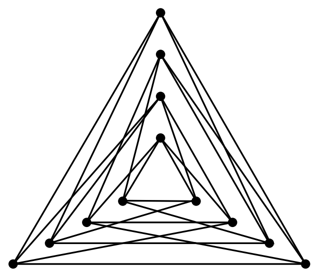
11.1.6. (–) افترض أن G بيان سوي أعظمي. أثبت أن G^* مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 ومنتظم من الدرجة 3.

12.1.6. (–) ارسم متعددات السّطوح الخمسة كبيانات سوية. ثم أثبت أنَّ ثُمانيَّ السّطوح هو البيان الثنوي

للمكعب، وأنَّ العشريني هو البيان الثنوي للثنعشري.

• • • • •

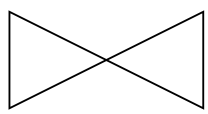
13.1.6. جدْ طمرًا سويًّا للبيان في الشكل أدناه.



14.1.6. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: لكلّ $n \in \mathbb{N}$ يوجد بيان سوي منتظم من الدرجة 4 مترابط وبسيط وله أكثر من n رأسًا.

15.1.6. ابن (جد) بيانًا سويًّا منتظمًا من الدرجة 3 قطره 3 وله 12 رأسًا. (تعليق: أثبت T.Barcume أنَّ مثل هذا البيَان ليس له أكثر من 12 رأسًا).

16.1.6. افترض أن F هو البيان الذي يمكن رسمه في المستوى على نحو متواصل (باستمرار) دون المرور على أي ضلع مرة ثانية في أثناء عملية الرسم، ومنتهيًا عند نقطة البداية (يمكن اعتبار هذا بيانًا أويلريًّا). أثبت أنه يمكن رسم F دون السماح للقلم بقطع مكان رُسمَ سابقًا. فعلى سبيل المثال، توجد للشكل أدناه طريقتان للرسم أو التتبع؛ أحدهما يقطع نفسه والآخر لا يقطَع نفسه.



17.1.6. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كان G بيانًا مستويًا بسيطًا مترابطًا من الدرجة 2 درجته الصغرى 3، فإن البيان الثنوي G^* يكون بيانًا بسيطًا.

18.1.6. ليكن G بيانًا مستويًا معطى. ارسم البيان الثنوي G^* بحيث يقطع كلُّ ضلع ثنوي الضلعَ المناظر له في G، ولا يقطع أيَّ ضلع آخر. أثبت ما يلي:

(a G^* مترابط.

(b إذا كان G مترابطًا، فإن كلّ وجه لـ G^* يحوي رأسًا واحدًا فقط من رؤوس G.

(c $(G^*)^* = G$ إذا وفقط إذا كان G مترابطًا.

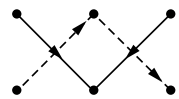
19.1.6. افترض أن G بيانٌ مستو. استخدم الاستقراء على $e(G)$ لتبرهن النظرية 14.1.6 التي نصُّها: تشكل المجموعة $D \subseteq E(G)$ حلقة في G إذا وفقط إذا كانت المجموعة المناظرة $D^* \subseteq E\left(G^*\right)$ تُشكل رابطة في G^*. (مساعدة: قلِّص ضلعًا من أضلاع D، وطبِّق الملاحظة 15.1.6).

20.1.6. أثبت بالاستقراء على عدد الأوجه أن البيان المستوي G يكون ثنائي الفرع إذا وفقط إذا كان طولُ كلّ وجه عددًا زوجيًّا.

21.1.6. (!) أثبت أن مجموعة من الأضلاع في بيان مستو مترابط G تشكل شجرة مولدة لـ G إذا وفقط كانت الأضلاع الثنوية للأضلاع المتبقية في G تشكل شجرةً مولدة لـ G^*.

22.1.6. البيان الثنوي الضعيف (WeaK dual) للبيان G هو البيان الذي نحصل عليه من G^* بحذف الرأس الموجود في الوجه غير المحدود من أوجه G. أثبت أن البيان الثنوي الضعيف لبيان مستو خارجي عبارة عن غابة.

23.1.6. (!) البيانات المستوية الموجهة. افترض أن G بيانٌ مستو، وأن D توجيه لَـ G. إن البيان الثنوي D^* عبارة عن توجيه للبيان G^* بحيث إنه عندما يتم تتبع ضلع من أضلاع D من الذيل إلى الرأس، فإن الضلع الثنوي في D^* يقطعه من اليمين إلى اليسار. فعلى سبيل المثال، إذا كانت الأضلاع المتصلة في البيان أدناه في G، تكون الأضلاع المنقطة في D^*.



أثبت أنه إذا كان D مترابطًا بقوة، فلا توجد أيّ حلقة في D^*، وأن $\delta^-(D^*) = \delta^+(D^*) = 0$. استنتج أنه إذا كان D مترابطًا بقوة، فإنه يوجد لـ G وجه تشكل أضلاعه حلقة مع اتجاه عقارب الساعة، كما يوجد وجه آخر تشكل أضلاعه حلقة مع عكس اتجاه عقارب الساعة.

24.1.6. (!). إثبات بديل لصيغة أويلر:

a) استخدم المنحنيات المضلعة (ليست صيغة أويلر) للإثبات بالاستقراء على $n(G)$ أن كلّ طمر سوي لشجرة G يحوي وجهًا واحدًا.

b) أثبت صيغة أويلر بالاستقراء على عدد الحلقات.

25.1.6. (!) أثبت أن كلّ بيانٍ مستو على n من الرؤوس يشاكل بيانه الثنوي يجب أن يحوي $2n$-2 ضلعًا. ولكلّ $n \geq 4$ جد بيانًا مستويًا بسيطًا علىً n من الرؤوس يشاكل بيانه الثنوي.

26.1.6. لكلّ $n \geq 2$، جد أكبر عدد من الأضلاع في بيان خارجي بسيط له n من الرؤوس بإعطاء ثلاثة براهين كالآتي:

a) بالاستقراء على n.

b) باستخدام صيغة أويلر.

c) باضافة رأس في الوجه غير المحدود، واستخدام النظرية 23.1.6.

27.1.6. افترض أن G بيانٌ مستو منتظم من الدرجة 3، ومترابط بحيث يقع كلّ رأس من رؤوسه في وجه واحد طوله يساوي 4، وكذلك في وجه واحد طوله 6، وفي وجه واحد طوله 8 أيضًا:

a) حدد عدد الأوجه من كلّ طول بدلالة $n(G)$.

b) استخدم صيغة أويلر وفرع (a) لتحديد عدد أوجه G.

28.1.6. افترض أن C منحنى مغلق يحيط بمنطقة محدبة في المستوى، وافترض أيضًا أنه تم رسم m وترًا في C بحيث لا يوجد أيّ ثلاثة منها تشترك بنقطة، ولا يوجد أيّ اثنين منها يشتركان بنقطة طرفية. اجعل p تساوي عدد أزواج الأوتار التي تتقاطع. بدلالة m و p احسب عدد القطع المستقيمة، وعدد المناطق المُشكلة داخل C (Alexanderson – Wetzel [1977]).

29.1.6. أثبت أن متممة البيان السوي البسيط الذي له 11 رأسًا على الأقل هي بيان غير سوي. ابن بيانًا سويًّا بسيطا على ثمانية رؤوس بحيث يكون هذا البيان ذاتي التتام (Self Complementary) أي أن مَتممته هي البيان نفسه.

30.1.6. (!) افترض أن G بيان سوي بسيط على n من الرؤوس خصره يساوي k. أثبت أن عدد أضلاع G يساوي $\frac{k}{k-2}(n\text{-}2)$ على الأكثر. استخدم هذا لإثبات أنَّ بيانَ بيترسون بيانٌ غيرُ سويٍّ.

31.1.6. افترض أن G بيانٌ بسيطٌ رؤوسه $v_1, \ldots, v_n$، وأضلاعه $\{v_i v_j : |i - j| \leq 3\}$. أثبت أنَّ G بيانٌ سويٌّ أعظميٌّ.

32.1.6. افترض أن G بيان سويّ أعظمي. أثبت أنه إذا كانت S مجموعة ثلاثية فاصلة للبيان G^*، فإن G^*-S يحوي مركبتين (chappell).

33.1.6. (!) افترض أن G بيان مثلثاتي، وافترض أيضًا أن n_i هو عددُ رؤوس G التي درجتها تساوي i. أثبت أن $\sum (6 - i)\, n_i = 12$.

34.1.6. ابن عائلة غير منتهية من البيانات السَّويَّة البسيطة التي درجتها الصغرى تساوي 5 بحيث يكون لكلّ منها 12 رأسًا درجة كلّ منها تساوي 5 (مساعدة: عدِّل الثنعشري).

35.1.6. (!) أثبت أنه إذا كان G بيانًا سويًّا بسيطًا له أربعة رؤوس على الأقل، فيوجد فيه أربعة رؤوس على الأقل درجة كلّ منها أقل من 6 لكلّ قيمة من قيم n الزوجية حيث $n \geq 8$، جد بيانًا سويًّا بسيطًا على n من الرؤوس له أربعة رؤوس بالضبط، درجة كلّ منها أقل من 6، ([1963] Grünbaum – MotzKin).

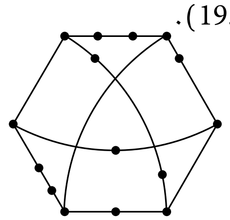
36.1.6. افترض أن S مجموعة n من النقاط في المستوى بحيث تساوي المسافة بين x و y في المستوى 1 على الأقل لكلّ $x,y \in S$. أثبت أنه يوجد على الأكثر $3n - 6$ زوجًا v,u في S بحيث تساوي المسافة في المستوى بين u و بالضبط 1v.

37.1.6. إذا أُعطيتَ أعدادًا صحيحة $k \geq 2$ و $l \geq 1$ بحيث إن kl عدد زوجي، فابنِ بيانًا سويًّا له K وجهًا بالضبط، وطول كلّ وجه من هذه الوجوه يساوي l.

2.6. توصيف البيانات المستوية

ما البيانات التي تنطمر في المستوى؟ لقد برهنّا أن K_5 و $K_{3,3}$ لا ينطمران. في الحقيقة، إن هذه البيانات هي البيانات الحاسمة التي قادت إلى توصيف البيانات السَّويَّة. وهذا التوصيف معطى من خلال نظرية كواراتوسكي (Theorem KuratowsKi's). في إحدى المرات، وجّه كاسمير كواراتوسكي سؤالا إلى فرانك هراري عن أصل الرمزين K_5 و $K_{3,3}$، فردّ هراري "بأن K في K_5 هو الحرف الأول من كاسمير، وأن K في $K_{3,3}$ هو الحرف الأول من كواراتوسكي".

تذكر أن جزء البيان هو بيان نحصل عليه من البيان الأصلي بأن نستبدل الأضلاع بمسارات زوجية منفصلةً داخليًّا زوجًا زوجًا (التعريف 19.2.5).



جزئية في $K_{3,3}$

1.2.6. قضية : إذا وُجد لبيان G بيان جزئي يمثل تقسيمًا لـ K_5 أو $K_{3,3}$، فإن G بيان غير سوي.

الإثبات: كلّ بيان جزئي لبيان سوي يكون سويًّا. لذا، يكفي برهنة أن تقسيمات K_5 و $K_{3,3}$ غير سوية. لاحظ أن تقسيم الأضلاع لا يؤثر في سوية البيان. كما أن المنحنيات المستخدمة في طمر لتقسيم لـ G يمكن استخدامها للحصول على طمر للبيان G والعكس صحيح. ■

من القضية 1.2.6. نجد أنَّ خلوَّ البيان من تقسيمات K_5 و $K_{3,3}$ شرطٌ ضروريٌّ ليكون البيان سويًّا. لقد أثبت كواراتوسكي TONCAS.

2.2.6. نظرية: (KuratowsKi [1930]). يكون البيان سويًّا إذا وفقط إذا خلا من تقسيم لـ K_5 و $K_{3,3}$. ■

إن نظرية كواراتوسكي هي هدفنا في النصف الأول من هذا الجزء. وبعد ذلك، سنقوم بالتعليق على توصيفات أخرى للبيانات السَّويَّة. وعندما يكون G بيانًا سويًّا، فإننا نبحث عن طمر سوي بخواص إضافية. لقد قام واجنر Wagner [1936] وفاري Fa′ry [1948] وستاين Stein [1951] بإثبات أنه يوجد لكلّ بيان سوي بسيط طمرٌ تكون فيه الأضلاع جميعها عبارة عن قطع مستقيمة؛ وهذا معروف باسم نظرية فاري (التمرين 6).

أما فيما يخص البيانات المترابطة من الدرجة 3، فسنبرهن خاصية أقوى، وهي أنه يوجد طمرٌ يكون كلّ وجه فيه عبارة عن متعدد أضلاع محدب.

التحضير لنظرية كواراتوسكي

سوف نستخدم أسماء قصيرة للبيانات الجزئية التي تبرهن عدم السَّويَّة للبيانات.

3.2.6. تعريف: نعرِّف البيان الجزئي الكواراتوسكي للبيان G على أنه بيان جزئي من G بحيث يكون تقسيما لـ K_5 أو $K_{3,3}$. ونعرِّف البيان غير السوي الأصغري على أنه بيان غير سوي بحيث يكون أيُّ بيان جزئي فعلي منه بيانًا سويًّا.

سنبرهن أن البيان غير السوي الأصغري الذي ليس بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًّا يجب أن يكون مترابطًا من الدرجة 3. وإذا برهنا أن كلّ بيان مترابط ثلاثي خالٍ من بيان جزئي كواراتوسكي يكون سويًّا، فإننا نكون قد أكملنا إثبات نظرية كواراتوسكي.

4.2.6. تمهيدية. إذا كانت F مجموعة أضلاع وجه في طمرٍ سوي للبيان G، فإن هناك طمرًا تكون فيه F مجموعة أضلاع الوجه غير المحدود.

الإثبات: أسقط الطّمر على الكرة، حيث تبقى مجموعة أضلاع المناطق هي نفسها، وتكون المناطق جميعها محدودة. وبعد ذلك، ارجع إلى المستوى من خلال الإسقاط من داخل الوجه الذي تحيط به F ■

5.2.6. تمهيدية. كلّ بيان غير سوي أصغري يكون مترابطًا من الدرجة 2.

الإثبات: افترض أن G بيان غير سوي أصغري. إذا كان G غير مترابط، فإننا نطمر أحد مركباته داخل أحد الوجوه لطمر المركبات الأخرى. وإذا وُجد لـ G رأس قطع v، فاجعل $G_1,\dots,G_k$ تمثّل فلق G المعتمدة على v ($\{v\}$ − Lobes). ومن أصغرية G، نعلم أن G_i كلّه يكون سويًّا. وباستخدام التمهيدية 4.2.6، نستطيع طمر G_i بحيث يكون v على الوجه الخارجي. ونقوم بضغط كلّ طمر ليكون موجودًا داخل زاوية مقدارها $\frac{360^\circ}{k}$ عند v، وبعد ذلك نضم هذه الطُّمورات عند v لنحصل على طمر للبيان G.

6.2.6. تمهيدية. لتكن $S = \{x,y\}$ مجموعة فصل بعنصرين للبيان G.

إذا كان G غير سوي، فإن إضافة ضلع xy لفلقة S − من G تعطي بيانًا غير سوي.

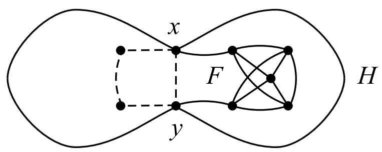
الإثبات: افترض أن $G_1,\dots, G_K$ هي فلق S − للبيان G. واجعل $H_i = G_i \cup xy$. إذا كان H_i سويًّا، فباستخدام التمهيدية 4.2.6 يوجد طمر لـ H_i، بحيث يكون xy على الوجه الخارجي. ولكلّ $i > 1$ لاحظ أن هذا يسمح لـ H_i أن يلصق بطمر لـ $\cup_{j=1}^{i-1} H_j$ وذلك بطمر H_i في وجه يحوي xy على حدوده. بعد ذلك، لاحظ أن حذف الضلع xy إذا كان غير موجود في G يعطي طمرًا سويًّا للبيان G. ■

إن التمهيدية التالية تسمح لنا بحصر اهتمامنا بالبيانات المترابطة من الدرجة 3 من أجل إثبات نظرية كواراتوسكي. إن البيان المفترض غير موجود، وإذا وُجد وجب أن يكون مترابطًا من الدرجة 3.

7.2.6. تمهيدية. إذا كان G بيانًا عدد أضلاعه أقل ما يمكن من بين البيانات غير السَّويَّة جميعها التي ليس لها بيانات جزئية كواراتوسكية، فإنه مترابط من الدرجة 3.

الإثبات: إن حذف ضلع من G لا ينتج بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًّا في G، ويضمن الفرض أن حذف ضلع واحد ينتج بيانًا جزئيًّا سويًّا. لذا، فإن G بيان غير سوي أصغري. ومن التمهيدية 5.2.6 نجد أن G مترابط من الدرجة 2 افترض أنه يوجد في G مجموعة فصل بعنصرين $S = \{x,y\}$. بما أن G غير سوي، فإن اتحاد xy مع فلقة $S-$ يكون غير سوي (التمهيدية 6.2.6)، افترض أن H هو هذا البيان. بما أن عدد أضلاع H أقل من عدد أضلاع G، فإن أصغرية G تجبر وجود بيان جزئي كواراتوسكي F في H. تظهر F كلّها في G ما عدا الضلع xy ربما.

بما أنَّ S مجموعةُ قطع رؤوس صغرى، فإن هناك جيرانًا لكلّ من x و y في كلّ فلقة $S-$. لذا، باستطاعتنا تغيير xy في F للمسار من x إلى y من خلال فلقة $S-$ أخرى وذلك من أجل الحصول على بيان جزئي كواراتوسكي من G، وهذا يناقض فرض عدم وجود بيانات جزئية كواراتوسكية من G. لذا، لا توجد لـ G مجموعة فصل بعنصرين. ■



الطُّمورات المحدَّبة

لإتمام إثبات نظرية كواراتوسكي؛ يكفي برهنة أن كلّ بيان مترابط من الدرجة 3 وخالٍ من بيان جزئي كواراتوسكي يكون سويًّا. سنستخدم الاستقراء. ومن أجل تسهيل إثبات خطوة الاستقراء، فإن من المفيد إثبات نتيجة أقوى.

8.2.6. تعريف: الطّمر المحدّب لبيان هو طمر سويّ فيه كلّ وجه محاط بمتعدد أضلاع محدّب.

لقد أثبت توت (Tutte [1960,1963]) أنّ لكلّ بيان سوي مترابط من الدرجة 3 طمرًا محدّبًا. إن هذا أفضل ما يمكن الوصول إليه بدلالة الترابط، وذلك لأنه إذا كانت $n \geq 4$، فإنه لا يوجد طمرٌ محدَّبٌ للبيان $K_{2,n}$ السوي المترابط من الدرجة 2.

سنتبع طريقة ثوماسين (Thomassen) لإثبات نظرية كواراتوسكي من خلال إثبات نتيجة توت الأقوى المتعلقة بالبيانات المترابطة من الدرجة 3 التي ليس لها بيانات جزئية كواراتوسكية. (هناك إثبات آخر لنتيجة توت أساسه التفكيكات المقبضية – Kelmans [2000]).

سنبرهن نظرية توت هذه باستخدام الاستقراء على $n(G)$. إن النموذج لإثبات العبارات الشرطيّة بالاستقراء (الملاحظة 25.3.1) يخبرنا عن التمهيدات التي نحتاج إليها. إن فرضياتنا هنا هي: "مترابط من الدرجة 3» «وليس له بيانات جزئية كواراتوسكية"، والنتيجة المنشودة هي «طمر محدب». للبيان G الذي يحقق الفرضيات، نحتاج إلى إيجاد بيان أصغر G' يحقق هذه الفرضيات لكي نستطيع تطبيق فرضية الاستقراء.

تسمح لنا التمهيدية الأولى (6. 2. 9) بالحصول على بيان أصغر G' مترابط من الدرجة 3، عن طريق تقليص أحد أضلاع G. في حين توضّح التمهيدية الثانية (6. 2. 10) أن G' يخلو من بيان جزئي كوراتوسكي؛ أيْ أنه يحقق القضية الثانية.

وسوف يتم إكمال الإثبات بالحصول على طمر محدّب للبيان G من خلال وجود طمر محدّب للبيان G'.

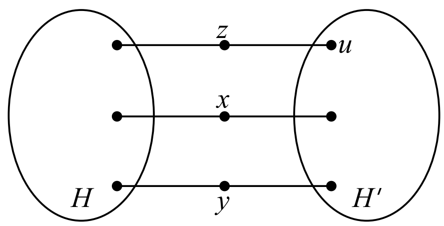
9.2.6. تمهيدية. (Thomassen [1980]). إذا كان G بيانًا مترابطًا من الدرجة 3 وله خمسة رؤوس على الأقل، فيوجد فيه ضلع e، بحيث إن $G.e$ مترابط من الدرجة 3.

الإثبات: سنستخدم التناقض ومبدأ التطرفية (القيم القصوى). خذ في الحسبان ضلعًا e طرفاه x و y. فإذا كان $G.e$ غير مترابط من الدرجة 3، فإنَّ له مجموعة فصل بعنصري S. بما أن G مترابط من الدرجة 3، فإن S يجب أن تحوي الرّأس الناتج عن تقليص e. افترض أنَّ z الرّأسُ الثاني في S، وسمِّه رفيقَ الزوج المتجاور x و y. ولاحظ أن $\{x,y,z\}$ هي مجموعة فصل لـ G بثلاثة عناصر.

افترض أنه لا يوجد في G ضلع بحيث يعطي تقليصه بيانًا مترابطًا من الدرجة 3. لذا، فإن لكلّ زوج متجاور رفيقًا. ومن بين أضلاع G، اختر $e = xy$ ورفيقها z بحيث إن للبيان غير المترابط الناتج $G - \{x,y.z\}$ مركبة H رتبتها أكبر ما يمكن. اجعل H' مركبة أخرى من مركبات $G\text{-}\{x,y,z\}$ (انظر الشكل أدناه). بما أن $\{x,y,z\}$ مجموعة فصل صغرى، فيوجد لكلّ من x,y,z جارٌ في كلّ من H و H'. اجعل u جارًا لـ z في H'، واجعل v رفيقَ الزوج u,z. ومن تعريف "الرفيق"، نجد أن $G\text{-}\{z ,u,v\}$ غير مترابط، أما البيان الجزئي من G المولد من $V(H) \cup \{x,y\}$ فهو مترابط.

إن حذف v من هذا البيان الجزئي (إن وُجد فيه) لا يـVعل هذا البيان الجزئي غير مترابط، لأنه عندئذ يكون $G\text{-}\{z,v\}$ غير مترابط. لذا، فإن $G_{v(H)\cup\{x,y\}}\text{-}v$ محتوى في مركبة من مركبات $G\text{-}\{z,u,v\}$

بحيث إن عدد رؤوس هذه المركبة أكبر من عدد رؤوس H. وهذا يناقض خيار x,y,z. ■



وفيما يلي نحتاج إلى برهنة أن تقليص ضلع يحافظ على غياب البيانات الجزئية الكواراتوسكية. سنعرِّف مصطلحًا جديدًا وهو رؤوس التفريع (التغصين) في تقسيم H' لـ H الذي يشير إلى الرؤوس التي درجتها تساوي 3 على الأقل في H'.

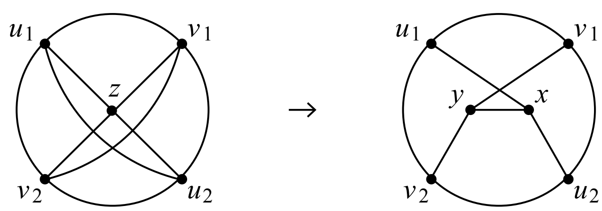
10.2.6. تمهيدية. إذا كان G بيانًا خاليًا من البيانات الجزئية الكواراتوسكية، فإن $G.e$ أيضًا خالٍ من البيانات الجزئية الكواراتوسكية.

الإثبات: سنبرهن المكافئ العكسي: إذا حوى $G.e$ بيانًا ، فإن G أيضًا يحوي بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًّا. افترض أن z هو رأس $G.e$ الذي نحصل عليه بتقليص الضلع $e = xy$.

إذا كان z لا ينتمي إلى H، فإن H نفسه يكون بيانًا جزئيًّا كوراتوسكيًّا من G. وإذا كان $z \in V(H)$ لكن z ليس رأس تفريع لـ H، فإننا نحصل على بيان جزئي كوراتوسكي لـ G من H بأن يحل x أو y أو الضلع xy محل z.

وبالمثل، إذا كان z رأس تفريع في H، وكان ضلع واحد على الأكثر يقع على z في H ويقع على x في G، فإن تمديد z إلى xy يطيل هذا المسار، ويكون y هو رأس التفريع لبيان جزئي كوراتوسكي في G.

في الحالة المتبقية (الموضحة أدناه) يمثّل H تقسيمًا لـ K_5، و z رأس تفريع، والأضلاع الأربعة الواقعة على z في H مكونة من ضلعين واقعين على y في G. في هذه الحالة، افترض أن u_1 و u_2 هما رأسا التفريع في H الموجودان على الأطراف الأخرى للمسارات المغادرة لـ z من خلال أضلاع واقعة على x في G، واجعل v_1 و v_2 رأسي تفريع H الموجودين على الأطراف الأخرى للمسارات المغادرة لـ z من خلال أضلاع واقعة على y في G، وبحذف المسارين من u_1 إلى u_2، ومن v_1 إلى v_2 من H، نحصل على تقسيم لـ $K_{3,3}$ في G، حيث y,u_1,u_2 تمثّل رؤوس تفريع لإحدى مجموعتي تجزئة رؤوسه، أما x,v_1,v_2 فتمثّل رؤوس تفريع المجموعة الأخرى. ■



تقسيم K_5 من G تقسيم $K_{3,3}$ في G

الآن، سنبرهن نظرية توت.

11.2.6. نظرية: (Tutte [1960 , 1963]) إذا كان G بيانًا مترابطًا من الدرجة 3، ولا يحوي تقسيمًا لـ K_5 أو $K_{3,3}$، فإن له طمرًا محدبًا في المستوى، بحيث لا يوجد له ثلاثة رؤوس على خط مستقيم.

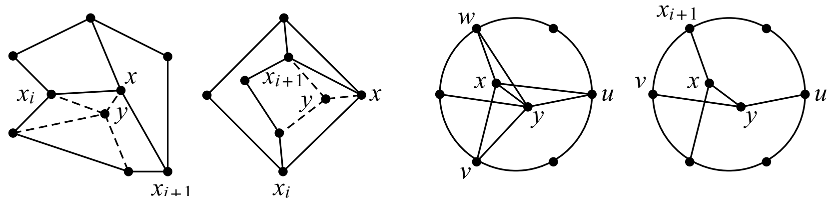
الإثبات: (Thamassen [1980, 1981]) نستخدم الاستقراء على $n(G)$. إذا كان $n(G) \leq 4$، فإن البيان الوحيد المترابط من الدرجة 3 بحيث إن عدد رؤوسه يساوي 4 على الأكثر هو K_4، والذي يوجد له مثل هذا الطّمر.

لذا، افترض أن $n(G) \geq 5$. خذ e ضلعًا في G بحيث إن $G.e$ مترابط من الدرجة 3، كما هو مؤكد في التمهيدية 9.2.6. وليكن z هو الرأس الذي نحصل عليه بتقليص e. من التمهيدية 10.2.6 نعلم أن $G.e$ لا يحوي بيانًا جزئيًّا كوراتوسكيًا. ونحصل من فرضية الاستقراء على طمر محدّب لـ $H = G.e$ بحيث لا يوجد أيُّ ثلاثة رؤوس على خط واحد.

في هذا الطّمر، يتحقق أن للبيان الجزئي الذي نحصل عليه بحذف الأضلاع الواقعة على z وجهًا يحوي z (ربما غير محدود). وبما أن $H - z$ مترابط من الدرجة 2، فإن حدود هذا الوجه عبارة عن حلقة C. إن جيران z جميعها تقع على C، وهذه الجيران ربما تكون في G جيرانًا لـ x، أو y، أو لكليهما، حيث y,x هما الطرفان الأصليان للضلع e.

إن الطّمر المحدّب لـ H يشمل قطعًا مستقيمة من z إلى جيرانها جميعها. اجعل $x_1,...,x_n$ جيرانَ x في ترتيب حلقي على C. إذا وقعت جيران y في جزء C من x_i إلى X_{i+1}، فإننا نحصل على طمر محدّب

لـ G بوضع x عند z في H، ووضع y عند نقطة قريبة من z داخل الزاوية المشكلة من xx_i و xx_{i+1} كما يظهر في الشكل الموجود في الحالة 0 أدناه. وإنْ لم يحدث هذا، فإما: أن يشترك y مع x في ثلاثة جيران هي: u,v,w. أو 2 يوجد لـ y جاران هما: u,v يتناوبان على C مع جاري x هما: x_i و x_{i+1}. في الحالة الأولى، يشكّل C مع xy ومع الأضلاع من $\{x,y\}$ إلى $\{u,v,x\}$ تقسيمات لـ K_5. أما في الحالة الثانية، فإن C يشكّل مع المسارات $uy\,v$ و $x_i \times x_{i+1}$ و xy تقسيمًا لـ $K_{3,3}$. وبما أننا نتعامل فقط مع بيانات تخلو من بيانات جزئية كوراتوسكية، فإن الحالة 0 هي التي يجب أن تحدث.



الحالة 0 الحالة 1 الحالة 2

إن التمهيدية 7.2.6 والنظرية 11.2.6 معًا تعطيان نظرية كوراتوسكي (النظرية 2.2.6). ويمكن الحصول على نظرية فاري على حدة: إذا وُجِدَ لبيانٍ طمرٌ سويٌّ، فيوجد لهذا البيان طمرٌ سويّ كخطوط مستقيمة (التمرين 6).

وفيما يخص تطبيقات الحاسوب، فإننا نرغب أكثر في الحصول على طمر سوي على شكل خطوط مستقيمة، رؤوسه تقع عند النقاط الصحيحة (النقاط التي إحداثياتها أعداد صحيحة).

لشبكة صغيرة نسبيًّا، أثبت شنايدر ([Schnyder [1992) أنه يوجد لكلّ بيان سوي على n من الرؤوس طمرٌ كخطوط مستقيمة، رؤوسه تقع عند النقاط الصحيحة للشبكة $[n-1] \times [n-1]$.

لقد تم إثبات العديد من توصيفات البيانات السَّويَّة، حيث تناولنا بعضها في التمارين. وسنقوم بوصف توصيفين إضافيين.

12.2.6. * تعريف: نقول: إن البيان H هو تصغير أو فرع (Minor) للبيان G إذا أمكن الحصول على H من G بحذف (بالحذف والتقليص) بعض أضلاع G أو تقليصها.

فعلى سبيل المثال، يُعَدُّ K_5 تصغيرًا لبيان بيترسون، علمًا بأن هذا البيان لا يحوي تقسيمًا لـ K_5.

13.2.6. * ملاحظة. يمكن إجراء حذف الأضلاع أو تقليصها بأي ترتيب نريده إذا حافظنا على معرفة ما يحدث للأضلاع في أثناء هذه العمليات. لذا، فإن تصغيرات G تُعدُّ «تقليصات لبيانات جزئية من G».

إذا وُجِدَ في G تقسيم H' لـ H، فإن H أيضًا هي تصغير لـ G تم الحصول عليه بحذف أضلاع G غير الموجودة في H'، ومن ثم تقليص الأضلاع الواقعة على رؤوس درجتها تساوي 2. إذا كانت الدرجة الكبرى لـ G تساوي 3، فإن H تصغير لـ G إذا وفقط إذا وُجِدَ في G تقسيم لـ H (التمرين 11).

لقد أثبت واجنر ([wagner [1937) أن بيان G يكون سويًّا إذا وفقط إذا لم يكن K_5 أو $K_{3,3}$ تصغيرًا لـ G. إن تمرين 12 يحصل على هذه النتيجة من نظرية كوراتوسكي. ■

14.2.6. * ملاحظة. تُنْسَبُ بعض التوصيفات بدرجة كبيرة إلى طمورات حقيقية. فعلى سبيل المثال، عندما يُرسَم بيان ثلاثي الترابط في المستوى، فإن حذف مجموعة رؤوس حلقة محيطة بوجه معين يترك بيانًا جزئيًّا مترابطًا.

ونقول: إن حلقة في بيان هي حلقة غير فاصلة إذا لم تكن مجموعة رؤوسها مجموعة فصل. لقد أثبت كيلمانز (Kelmans [1980,1981b]) أن أيَّ تقسيم لبيان ثلاثي الترابط يكون سويًّا إذا وفقط إذا وقع كلّ ضلع e في حلقتين غير فاصلتين. وقد قام كيلمانز العام [1993] بعمل مسح للمادة المتصلة بذلك. ■

اختبارات مستوية البيانات (اختياري)

لقد أعطى ديراك وشوستر (Schuster) العام 1954 أول إثبات قصير لنظرية كواراتوسكي. وقد ظهر هذا الإثبات في (Harary [1969, 109-112]). وفي (Bondy –Marty [1976, p 153 – 156]) وفي (Chartrand – LesniaK [1986 , p 96 – 48])، ويَسْتخدم هذا الإثبات بعض البيانات الجزئية الخاصة للبيان.

15.2.6. تعريف: في الحالة التي يكون فيها H بيانًا جزئيًّا من G، فإن شظية H– من G تعرّف على أنها:

a) ضلع ليس في H، أما طرفاه ففي H. أو:

b) مركبة من مركبات $G\text{-}V(H)$ بالإضافة إلى مجموعة الأضلاع (ورؤوس الروابط) التي تربطها بـ H.

يشكل البيان الجزئي H بالإضافة للشظية H– تفكيكًا لـ G.

إن شظايا $- H$ هي عبارة عن "القطع" التي يجب إضافتها إلى طمر لـ H للحصول على طمر لـ G. قديمًا، استخدم المصطلح جسر H–، إلا أننا نستخدم شظية H– لتجنب الإشكالات التي تنتج عن الاستخدامات الأخرى "للجسر".

تختلف شظية $- H$ عن الفلقة $- V(H)$؛ لأن الأولى تحذف أضلاع H (لا تحوي أي ضلع من أضلاع H)، وكذلك يمكن لشظية H– أن تتكون من ضلع واحد غير موجود في H، إلا أنه يربط بين رأسين من رؤوس H، وذلك لأنه يجب ألا يكون H بيانًا جزئيًّا مستحدثًا.

أما فيما يخص الحالة التي يكون فيها البيان مترابطًا من الدرجة 3 من حالات نظرية كواراتوسكي، فقد قام ديراك وشوستر (Schuster) باعتبار بيان G مترابطا من الدرجة 3 أصغريًّا يخلو من بيان جزئي كواراتوسكي. إن حذف ضلع e يعطينا بيانًا سويًّا مترابطًا من الدرجة 2. وبعد اختيار حلقة C تمر بطرفي e، نستطيع إضافة e إلى الطّمر، إلا إذا وُجِدَت شظية C– مطمورة داخل C، «وتتعارض» مع e. كما في إثبات النظرية 11.2.6، فإن هذا ينتج بيانًا جزَئيًّا كواراتوسكيًّا من G.

لقد استخدم توت فكرة شظايا C– المتعارضة للحصول على توصيف آخر للبيانات السَّويَّة.

16.2.6. تعريف: افترض أن C حلقة في بيان G نقول: إن شظيتي C– ، A و B تتعارضان إذا وُجد لهما ثلاثة رؤوس مشتركة للربط مع C، أو إذا وُجد لهما أربعة رؤوس هي: v_1، و v_2 و v_3، و v_4 في ترتيب حلقي على C، بحيث إن v_1 و v_3 هما رأسا الربط مع A. وأن v_2 و v_4 هما رأسا الربط مع B. إن بيان تعارض C هو بيان رؤوسه شظايا $- C$ من G، بحيث تكون شظايا C– المتعارضة متجاورة.

لقد أثبت توت عام 1958م أن البيان G يكون سويًّا إذا وفقط إذا كان بيان تعارض كلّ حلقة في G عبارة عن بيان ثنائي الفرع (التمرين 13). لقد استخدمنا هذه الفكرة في إثباتنا الأول الذي برهنا فيه أن K_5 و $K_{3,3}$ بيانان غير سويين (القضية 2.1.6). إن بيان التعارض لحلقة مولدة للبيان $K_{3,3}$ هو C_3، إلا أن بيان التعارض لحلقة مولدة للبيان K_5 هو C_5.

يوجد للبيانات المترابطة من الدرجة 3 غير السَّويَّة بياناتٌ جزئيةٌ كواراتوسكية من نوع خاص. لقد قدم كيلمانز (Kelmans [1981b]) تخمينًا لتعميم نظرية كواراتوسكي، وقد أثبت هذا التخمين من قبل كيلمانز

(Kelmans [1983, 1984b]) وثوماسين (Thomassen [1984]) كلّ على حدة. والتخمين هو: كل بيان غير سوي مترابط من الدرجة 3 له ستة رؤوس على الأقل يحوي حلقة لها ثلاثة أوتار متقاطعة زوجًا زوجًا.

إن إيجاد توصيفات للبيانات السَّويَّة قادنا إلى البحث عن خوارزمية سريعة لاختبار سوية البيانات. لقد قام كلّ من هوبكرفت وترجان (Hopcroft-Tarjan [1974]) وبوث ولوكر (Booth –LuecKer [1976]) بتقديم عروض خوارزميات خطية بالنسبة إلى الزمن ومعقدة، إلا أن بوير ومايرفولد (Boyer-Myrvold [1999]) قدما خوارزمية أسهل. وقام جولد (Gould [1988,p177 – 185]) بمناقشة أفكار خوارزمية هوبكرفت وترجان. إن الخوارزمية التي كانت موجودة قبل ذلك أبسط، إلا أنها ليست خطية زمنيًّا، لأن زمن تشغيلها يتغير بحسب كثيرة حدود، وتعود هذه الخوارزمية إلى كلّ من ديموكرون (Demoucron) وما لجرانج (malgrange) وبيرتوست [1964] (pertuiset)، حيث إنها تستخدم شظايا H-.

تتضمن هذه الفكرة ما يلي: إذا أمكن تمديد طمر سوي لـ H ليصبح طمرًا سويًّا لـ G، فإن هذا التمديد يحقق أن كلّ شظية H من G تظهر داخل وجه واحد من H . وإذا كان G سويًا، فإننا نبني بتزايد بيانات جزئية من G بحيث تكون سوية وأكبر، ويمكن تمديدها لتصبح طمرًا للبيان G ونحاول عادة توسيع (تكبير) H من خلال اتخاذ قرارات صغيرة لا تقود إلى مشاكل.

ولتوسيع H، نختار وجهًا F يقبل شظية $H-$، ولنقلْ إن هذه الشظية هي B. إن حدود F يجب أن تحوي رؤوس الربط جميعها مع B، وعلى الرغم من أننا لا نعرف أفضل طريق لطمر B في F. إلا أنه يوجد طريق واحد فقط لإضافة مسار في B عبر F، بحيث يصل هذا المسار بين رؤوس رابط مع نفسه، لذا نضيف مثل هذا المسار. إن تفاصيل اختيار F و B تظهر في الخوارزمية أدناه، حيث تعمل هذه الخوارزمية كالخوارزميات التي ذُكرت، حيث إنها تؤدي إلى طمر إذا كان G بيانًا سويًّا.

17.2.6. خوارزمية. (اختبار سويّة البيانات)

المدخلات: بيان مترابط من الدرجة 2 (بما أن G سوي إذا وفقط إذا كان كلّ قالب من قوالبه سويًّا. وبما أن الخوارزمية 23.1.4 تحسب عدد القوالب، فيمكن الافتراض بأنَّ G قالب له ثلاثة رؤوس على الأقل).

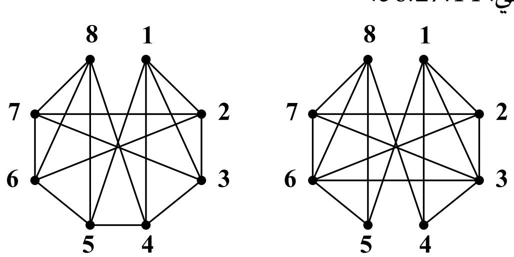
الفكرة: أضف مسارات بالتتابع من الشظايا الحالية. وحافظ على مجموعات الرؤوس التي تشكل حدودًا للبيان الجزئي الذي طُمِرَ سابقًا.

البداية: بعد إيجاد G_i وتحديدها، جدْ G_{i+1} كالتالي:

1. للقالب G، عيِّن شظايا $G_i -$ جميعها وحددها.
2. لكلّ شظية B - G_i، حدِّد أوجه G_i جميعها التي تحوي رؤوس الربط جميعها مع B، وسمِّ هذه المجموعة $F(B)$.
3. إذا كانت $F(B)$ مجموعة خالية لبعض B، فإننا نحصل على الحالة التي يكون فيها البيان غير سوي. إذا كان $|F(B)| = 1$ لبعض B، فاختر B. إذا كانت $|F(B)| > 1$ لكلّ B فاختر أي B.
4. اختر مسارًا P بين رأسين لرابط للشظية B - G_i التي تم اختيارها. اطمر P عبر وجه في $F(B)$. سمِّ البيان الناتج G_{i+1}، وحدِّث قائمة حدود الأوجه.
5. إذا كان $G_{i+1} = G$، فاحصل على بيان سوي، وبخلاف ذلك، وَسِّع I، وعُدْ إلى الخطوة الأولى.

18.2.6. مثال: خذ في الحسبان البيانين المرسومين أدناه.

(من Bondy – Murty [1976, p 165 – 166]). إن الخوارزمية 17.2.6 تقود إلى طمر سوي للبيان الموجود عن اليسار، ولكنها تنتهي في الخطوة 3. للبيان الموجود عن اليمين، يوجد للحلقة 12348765 ثلاثة أوتار متقاطعة زوجًا زوجًا وهي: 36.27.14. ■



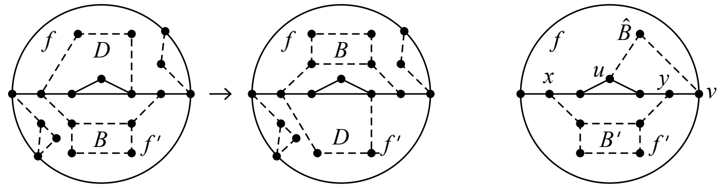
19.2.6. نظرية : (Demourcron – Malgrange – Pertuiset [1964]) إن الخوارزمية 17.2.6 تنتج طمرًا سويًّا إذا كان البيان G سويًّا.

الإثبات: يمكننا افتراض أنَّ G مترابط من الدرجة 2 لاحظ أن أي حلقة تظهر على شكل منحنى مغلق بسيط في كلّ طمر سوي. وبما أنه يمكننا عكس المستوى، فإن كلّ طمر لحلقة في بيان سوي G قابل للتمديد ليصبح طمرًا للبيان G لذا، يمكن تمديد G_0 لطمر سوي للبيان G إذا كان G سويًّا. لاحظ أنه يكفي برهنة ما إذا كان بيان مستوٍ G_i قابلاً للتمديد لطمر سوي للبيان G، وكانت الخوارزمية تنتج بيانًا مستويًا G_{i+1} من G_i، فإن G_{i+1} أيضًا يكون قابلاً للتمديد لطمرٍ سوي للبيان G لاحظ أنه يوجد لكلّ شظية $- G_i$ رأسًا ربط؛ لأن G مترابط من الدرجة 2.

إذا وُجدتْ شظية B - G_i بحيث إن $| F(B) | = 1$، فإن وجهًا واحدًا فقط يوجد لـ G_i يمكن أن يحوي P في تمديد لـ G_i إلى طمرٍ سوي للبيان G. تضع الخوارزمية P في هذا الوجه للحصول على G_{i+1}. لذا، فإن G_{i+1} قابل للتمديد في هذه الحالة.

تظهر المشاكل فقط في الحالة التي يكون فيها $| F(B) | > 1$ لكل B حيث نقوم باختيار الوجه الخطأ لنطمر فيه مسارًا P من الشظية التي تم اختيارها. افترض أننا: (1) طمرنا P في وجه$(f \in F(B))$، (2) مددنا G_i لطمر سوي $\hat{G}$ لـ G فيه P داخل الوجه $f' \in F(B)$. نعدِّل $\hat{G}$ لإثبات أنه يمكن تمديد G_i لطمر آخر G' لـ G تكون فيه P داخل f'. وهذا يوضح أن خيارنا لا يسبب مشاكل، وأن G_{i+1} الذي بُنِيَ قابل للتمديد.

لتكن C مجموعة الرؤوس الموجودة على حدود f و f'، وهذا يشكل الرؤوس الموجودة في ربط لـ B. نرسم G' من خلال التبديل بين f و f' لشظايا $- G_i$ جميعها التي تضعها $\hat{G}$ في f أو f'، والتي تقع رؤوس ربطها في C إن هذا موضح في الشكل الموجود عن اليسار أدناه، حيث إن أضلاع G غير الموجودة في G_i هي القطع المنقطة.



$\hat{G}$ G'

يبدِّل هذا التغيير B، ويعطينا الطّمر المنشود G' إلا إذا وجدت شظية $\hat{B}$ -G_i غير مستبدلة تتعارض مع شظية مستبدلة. وبما أن التبديل متماثل في f و f' ويغير داخلهما فقط، فإننا نستطيع افتراض أن $\hat{B}$ يظهر في f في $\hat{G}$. تعني كلمة "تعارض" أنه يوجد لـ $\hat{G}$ B' في f' والتي نحاول تحريكها إلى f، بحيث يكون $\hat{B}$ و B' متجاورين في بيان التعارض لـ f.

اجعل $\hat{A}$ و A' ترمزان إلى مجموعات الرؤوس التي يتم عندها ربط $\hat{B}$ و B' إلى حدود f. وبما أن $\hat{B}$ و B' تشكلان تعارضًا، فإما أن يوجد لـ $\hat{A}$ و A' ثلاثة رؤوس مشتركة، أو أربعة رؤوس متناوبة على حدود f. وبما أن $A' \subseteq C$ و $\hat{A} \not\subseteq C$، فإن الاحتمالية الأولى تعطي الاحتمالية الثانية. اجعل x, u, y و v تمثِّل هذا التناوب الذي فيه $x,y \in A' \subseteq$ ، و $u,v \in A'$ كما هو واضح عن اليمين أعلاه: إذا لم يوجد مثل هذا التناوب، فإن $\hat{B}$ و B' لا تتعارضان أو أنه يمكن تبديل $\hat{B}$ إلى f'.

وبما أن $u \notin C$، و y بين u و v على f، فإنه لا يوجد وجه آخر يحوي كلًّا من u و v. لذا، فإن $\hat{B}$ تفشل في أن تكون رؤوس ربطها محتواة في وجهين على الأقل، وهذا يناقض فرض أن $|F(\hat{B})| > 1$. ■

نستطيع أن نبدأ باختيار وجود $3n - 6$ ضلعًا على الأكثر للبيان G، محافظين على قوائم لحدود الوجوه.

ونقوم بإجراء عمليات أخرى من خلال بحث خطي (يعتمد على معادلة خطية). لذا، فإن هذه الخوارزمية تشتغل بزمن تربيعي. إن الإثبات الذي قدمه كلوتز (Klotz [1989]) لنظرية كواراتوسكي يعطي أيضًا خوارزمية تربيعية لاختبار سوية بيان معين، وتجد بيانًا جزئيًّا كواراتوسكيًّا عندما يكون G بيانًا غير سوي.

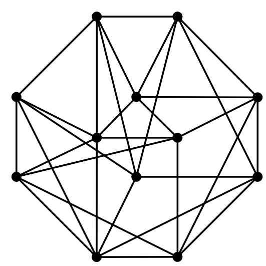
تمــــارين

1.2.6. (−) أثبت أنَّ متممةَ البيان Q_3 بيانٌ غير سوي.

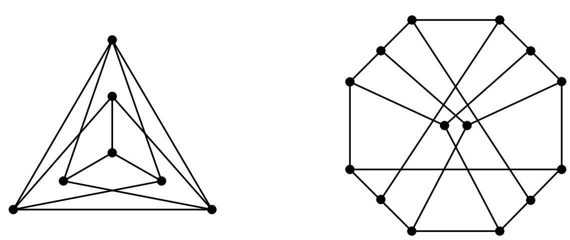
2.2.6. (1) أعطِ ثلاثة براهين لإثبات أن بيان بيترسون غير سوي باستخدام:

a) نظرية كواراتوسكي.
b) صيغة أويلر وحقيقة أن خصر بيان بيترسون يساوي 5
c) خوارزمية ديموكرون ومالجرانج وبيرتوست الخاصة باختبار سوية البيانات.

3.2.6. (−) جد طمرًا محدبًا في المستوى للبيان أدناه.



4.2.6. (−) أثبت عدم السَّويَّة، أو أعطِ طمرًا محدبًا لكلّ بيان من البيانات الموضحة أدناه.



5.2.6. حدد أقل عدد من الأضلاع يمكن حذفه من بيان بيترسون للحصول على بيان جزئي سوي.

6.2.6. (!) نظرية فاري. افترض أن R منطقة محاطة بمتعدد أضلاع بسيط له على الأكثر خمس حواف (يعني مضلع بسيط أن الأضلاع عبارة عن قطع مستقيمة لا تتقاطع). أثبت أنه يوجد في R نقطة ترى R كلّها، بمعنى أن القطعة المستقيمة من x إلى أي نقطة في R لا تقطع حدود R استخدم هذا لتبرهن استقرائيًّا أنه يوجد لكلّ بيان سوي طمرٌ على شكل خطوط مستقيمة.

7.2.6. (!) استخدم نظرية كواراتوسكي لتبرهن أن البيان G يكون سويًّا خارجيًّا إذا وفقط إذا خلا G من بيان جزئي يشكل تقسيمًا لـ K_4 أو لـ $K_{2,3}$ (مساعدة: لتطبيق نظرية كواراتوسكي؛ جد تعديلاً مناسبًا لـ G إن هذاَ أسهل كثيرًا من تقليد إثبات نظرية كواراتوسكي).

8.2.6. (!) إذا كان هناك بيان مترابط من الدرجة 3، وله ستة رؤوس على الأقل، ويحوي تقسيمًا لـ K_5،

فبرهن أن G يحوي تقسيمًا لـ $K_{3,3}$، ([1937] Wagner).

9.2.6. (+) لكلّ $n \geq 5$، أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان سوي بسيط على n من الرؤوس ليس له حلقتان منفصلتان هو $2n - 1$ (تعليق: قارن مع التمرين 28.2.5)، ([1999] MarKus).

10.2.6. (!) افترض أن $f(n)$ هي أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس لا يحوي تقسيمًا لـ $K_{3,3}$:

a) إذا كانت $n - 2$ تقبل القسمة على 3، فجد بيانًا لتوضح أن $f(n) \geq 3n\text{-}5$.

b) أثبت أن $f(n) = 3n - 5$ عندما يكون $n - 2$ قابلاً للقسمة على 3 وبخلاف ذلك، فإن $f(n) = 3n\text{-}6$.

(مساعدة: استخدم الاستقراء على n، واستخدم التمرين 8.2.6 في الحالة التي يكون فيها البيان مترابطًا من الدرجة 3 ([1984] Thomassen)

(تعليق: لقد أثبت مادر ([1998] Mader) النتيجة الأصعب، وهي أن $3n\text{-}6$ هي أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس لا يحوي تقسيمًا لـ K_5).

11.2.6. (!) افترض أن H بيان، درجته الكبرى تساوي 3 على الأكثر. أثبت أن بيانًا G يحوي تقسيمًا لـ H إذا وفقط إذا كان G يحوي بيانًا جزئيًّا قابلاً للتقليص إلى H

12.2.6. (!) لقد أثبت واجنر العام 1937م أن الشرط الثاني ضروري وكاف ليكون البيان G سويًّا، وهو: لا يمكن الحصول على K_5 أو $K_{3,3}$ من خلال إجراء عمليات الحذف والتقليص للأضلاع:

a) أثبت أن حذف الأضلاع وتقليصها يحافظ على السَّويَّة، واستنتج من ذلك أن شرط واجنر ضروري.

b) استخدم نظرية كواراتوسكي لإثبات أن شرط واجنر كاف.

13.2.6. أثبت أن البيان G يكون سويًّا إذا وفقط إذا كان بيانُ تعارض كلّ حلقة C في G ثنائي الفرع ([1958] Tutte).

14.2.6. افترض أن x و y رأسان لبيان سوي G أثبت أنه يوجد لـ G طمر سوي فيه x و y على الوجه نفسه إلا إذا وجدت حلقة C في $G - x - y$، بحيث إن x و y ينتميان إلى شظايا - C متعارضة في G (مساعدة: استخدم نظرية كواراتوسكي. تعليق: لقد أثبت توت هذا النتيجة دون استخدام نظرية كواراتوسكي كما استخدمها لإثبات هذه النظرية).

15.2.6. افترض أن G بيان مستو بسيط مترابط من الدرجة 3 يحوي حلقة C أثبت أن C تكون حدودًا لوجه في G إذا وفقط إذا وُجدت في G شظية - C واحدة بالضبط. (تعليق: لقد أثبت توت عام 1963م هذه النتيجة للحصول على نتيجة ويتني ([1933b] Whitney's) وهي أنه يوجد – مبدئيًّا – طمر سوي واحد فقط للبيانات السَّويَّة المترابطة من الدرجة 3. انظر أيضًا ([1981a] Kelmans).

16.2.6. (+) افترض أن G بيان سوي خارجي له n من الرؤوس، وافترض أيضا أن P مجموعة فيها n نقطة في المستوى، بحيث إنه لا توجد ثلاثة منها على الخط نفسه إن النقاط القصوى لـ P تُحدث مضلعًا محدبًا يحوي باقي النقاط في داخله:

a) افترض أن p_1 و p_2 نقاط قصوى متتابعة في P، أثبت على وجود نقطة $p \in P\text{-}\{p_1, p_2\}$ بحيث إن:1) لا توجد أي نقطة من P داخل (p_1p_2p) و 2)يوجد خط l يمر في P ويفصل p_1 عن p_2، ويقطع P فقط عند p، ويوجد بالضبط $I - 2$ نقطة من نقاط P محتواة في جانب L الذي يحوي p_2.

b) أثبت أنه يوجد لـ G طمر على شكل خطوط مستقيمة بحيث ترسل رؤوسها إلى P كلّها. (مساعدة: استخدم فرع (a) لإثبات النتيجة الأقوى وهي أنه: إذا كان كلّ من v_1 و v_2 رأسين متتابعين للوجه غير المحدود لبيان G سوي خارجي أعظمي، وكان p_1 و p_2 رأسين متتابعين للغلاف المحدب لـ P، فيمكن طمر G خطيًّا على P، بحيث إن $f(v_1) = p_1$ و$f(v_2) = p_2$ ([1989] Gritzmann – Mohar – pach – PollacK).

3.6. وسطاء المستوية

إن كلّ خاصية، وكلّ وسيط درسناه للبيانات العامة يمكن دراسته للبيانات السَّويَّة. وأن المسألة ذات الأهمية التاريخية الأكثر هي مسألة أكبر عدد لوني للبيانات السَّويَّة. لذا، سنقوم بدراسة الوسطاء الذين من خلالهم نقيس مقدار بُعد بيان معين عن خاصية السَّويَّة.

تلوين البيانات المستوية

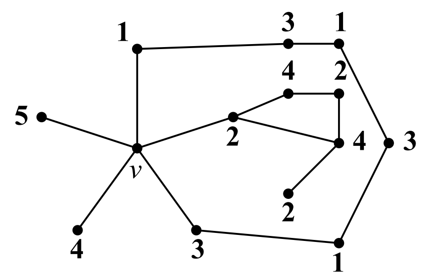
بما أن لكلّ بيان سوي بسيط على n من الرؤوس $3n - 6$ ضلعًا على الأكثر ، فإن مثل هذا البيان يحوي رأسًا درجته تساوي 5 على الأكثر، إن هذا يعطينا إثباتا استقرائيًّا لخاصية أن البيانات السَّويَّة قابلة للتلوين بستة ألوان (انظر التمرين 2). لقد حسَّن هيود (Heawood) هذا الحد.

1.3.6. نظرية : (نظرية الألوان الخمسة – [1980] Heawood). كلّ بيان سوي قابل للتلوين بخمسة ألوان.

الإثبات: بالاستقراء على $n(G)$.

إذا كان $n(G) \leq 5$، فإن كلّ بيان من هذه البيانات يكون قابلاً للتلوين بخمسة ألوان. لذا، افترض أن $n(G) > 5$. إن الحد على الأضلاع (النظرية 6. 1. 23) يعطي أنه يوجد للبيان G رأس v درجته تساوي 5 على الأكثر. ومن فرض الاستقراء، نعلم أن $G - v$ قابل للتلوين بخمسة ألوان. اجعل $f: V(G\text{-}v) \rightarrow [5]$ تلوينًا فعليًّا لـ $G - v$ بخمسة ألوان، إذا لم يكن G قابلاً للتلوين بخمسة ألوان، فإن f تحدد كلّ لون لجار من جيران v، وهذا يعني أن $d(v) = 5$. ليكن v_1 ، و v_2 ، وv_3 ، وv_4، وv_5 هم جيران v في ترتيب مع اتجاه عقارب الساعة حول v، أعد تسمية الألوان بحيث إن $f(v_i) = i$.

افترض أنَّ $G_{i,j}$ البيانُ الجزئي من $G - v$ المستحدث من الرؤوس التي عليها اللونان i و j. وبتبديل اللونين على أي مركبة من مركبات $G_{i,j}$، نحصل على تلوين بخمسة ألوان للبيان $G - v$. إذا كانت مركبة $G_{i,j}$ التي تحوي v_i لا تحوي v_j، فبإمكاننا تبديل الألوان عليها لإزالة اللون i من $N(v)$. الآن، إن إعطاء اللون i إلى v ينتج تلوينًا خماسيًّا للبيان G. لذا، فإن G قابل للتلوين بخمسة ألوان، إلا إذا كانت مركبة $G_{i,j}$ التي تحوي v_i تحوي v_j، وذلك لكلّ خيار لـ i و j. اجعل $p_{i,j}$ مسارًا في $G_{i,j}$ من v_i إلى v_j، إن هذا موضح أدناه عندما $(i,j) = (1,3)$.



خذ بعين الاعتبار الحلقة C التي يتممها v مع $p_{1,3}$، إن هذا يفصل v_2 عن v_4. ومن نظرية منحنى جوردان، نجد أن المسار $P_{2,4}$ يجب أن يقطع C. وبما أن G سوي، فإن المسارات تتقاطع فقط عند الرؤوس المشتركة. إن لرؤوس $P_{1,3}$ اللون 1 أو 3، أما رؤوس $P_{2,4}$ فلها اللون 2 أو 4. لذا، لا يوجد بينهما رأس مشترك، ومن هذا التناقض نجد أن G قابل للتلوين بخمسة ألوان. ■

إن كلّ بيان سوي قابلٌ للتلوين بخمسة ألوان. ولكن، هل هناك حاجة فعلية حقيقية إلى خمسة ألوان؟ إن تاريخ هذا السؤال المحيِّر قد نوقش من قبل العديدين مثل Aigner [1984,1987] و Ore [1967a] و[Saaty – Kainen [1977,1986 و Appel – HaKen [1998] و Fritsch – Fritsch [1989].

إن أول ما وصل إلينا بخصوص نظرية الألوان الأربعة هو ما ورد في رسالة بعث بها أوجستس دي مورجان (Augustusde morgan) إلى السير وليام هاملتون (Sir William Hamiltan) في الثالث والعشرين من تشرين أول العام 1852م.

لقد سُئل هذا السؤال من قِبَل طالب دي مورجان وهو فريدريك جوثري (Frederich Guthrie) والذي نسبه فيما بعد إلى أخيه فرانسيس جوثري (Francis Guthrie)، وقد تم صياغة هذا السؤال بدلالة تلوين الخرائط.

إن سهولة نص المسألة وخواصها الهندسية اللطيفة قادت إلى الكثير من البراهين غير الصحيحة، بعضها تم نشره وبقي دون كشف لسنوات. لا يكفي منع وجود خمسة مناطق متجاورة زوجًا زوجًا، وذلك لوجود بيانات لونية من الدرجة 5 (لها خمسة ألوان) ولا تحوي K_5 (فعلى سبيل المثال تذكر بناء مسيلسكي).

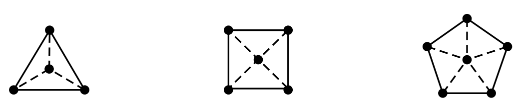
لقد أعلن كيلي المسألة العام 1878 إلى جمعية رياضيِّي لندن، وقام كمب (Kempe) العام 1879 بنشر «حل» للمسألة، وفي العام 1890 قام Heawood بنشر دحض لهذا الحل. وعلى الرغم من ذلك، فإن فكرة كمب عن المسارات المتناوبة التي استُخدمت من قبل هيود لإثبات نظرية الألوان الخمسة قادت أخيرًا إلى تقديم إثبات للمسألة من قبل أبل (Appel) [1976,1977,1986] من خلال العمل مع كوك (KocK). يُسمّى المسار الذي تتناول ألوانه بين لونين محددين بسلسلة كمب.

عندما برهنا نظرية الألوان الخمسة استقرائيًّا، قلنا إن أصغر مثال ناقض يحوي رأسًا درجته 5 على الأكثر، وأن البيان السوي الذي له مثل هذا الرأس لا يعدُّ مثالاً ناقضًا أصغر. إن هذا يقترح علينا طريقًا لنظرية الألوان الأربعة؛ إننا نبحث عن مجموعة بيانات لا يمكن تفاديها ولا يمكن أن تكون موجودة؛ نحتاج فقط إلى اعتبار بيانات مثلثاتية (تثليثات)؛ لأن كلّ بيان سوي بسيط يكون محتوًى في تثليث.

2.3.6. تعريف: نعرِّف التشكل في تثليث سوي على أنه حلقة فاصلة (الحلقة) (The ring) C بالإضافة إلى جزء البيان الموجود داخل C، وفيما يخص مسألة الألوان الأربعة، نقول: إن مجموعة من التشكلات لا يمكن تفاديها إذا وُجِدَ مثال ناقض أصغر بحيث إنه يجب أن يحوي عنصرًا منها.

نقول: إن التشكل مصغَر (قابل للتصغير) إذا وُجد بيان سوي يحويه بحيث لا يمكن أن يكون مثالاً ناقضًا أصغر.

3.3.6. مثال: مجموعة لا يمكن تفاديها. لقد لاحظنا أن $\delta(G) \le 5$ لكلّ بيان سوي بسيط. لاحظ أنه في تثليث فإنَّ درجة كلّ رأس تساوي 3 على الأقل. لذا، لا يمكن تفادي مجموعة التشكلات الثلاثة الموضحة أدناه.



لقد رُسمت الأضلاع من الحلقة إلى الداخل على شكل خطوط متقطعة؛ لأنه يتم تحديد التشكل (في تثليث) إذا عُلمت درجات الرؤوس المجاورة للحلقة، وتم حذف الحلقة (التمرين 7). وبناء على ذلك، فإننا نكتب هذه التشكلات على الصورة "3•" ، "4•" و "5•" على الترتيب. ■

عندما نقول: إن التشكل لا يمكن أن يكون في مثال ناقض أصغر، فنعني أنه إذا ظهر هذا التشكل في تثليث G، فيمكن عندئذٍ أن يستبدل به تثليث G' عدد رؤوسه أقل، بحيث يمكن التلاعب بكلّ تلوين رباعي لـ G' للحصول على تلوين رباعي لـ G.

4.3.6. ملاحظة: إثبات كمب. لنحاول أن نبرهن نظرية الألوان الأربعة بالاستقراء مستخدمين المجموعة التي لا يمكن تفاديها {•3،•4،•5}.

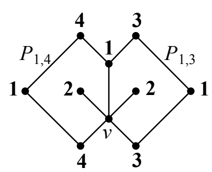
إن طريقة الإثبات تشبه إثبات النظرية 1.3.6. نستطيع تمديد تلوين رباعي لـ $G - v$ لإكمال تلوين رباعي لـ G، إلا إذا ظهرت الألوان الأربعة على $N(v)$. لذا، فإن "•3" مصغر.

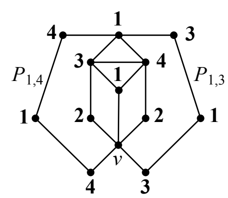
إذا كانت $d(v) = 4$، فإن تعليل سلسلة كمب يعمل كما في النظرية 1.3.6. ويكون "•4" مصغرًا.

الآن خذ "•5" بعين الاعتبار. وعندما $d(v) = 5$، فإن الحصر على التثليثات يعطينا أن اللون المكرر على $N(v)$ في التلوين الرباعي الفعلي لـ $G - v$ يظهر على جيران غير متتابعة لـ v، افترض ثانيةً أن: v_1 ، وv_2، وv_3، وv_4 و v_5 جيران v مرتبة مع اتجاه عقارب الساعة. من التماثل، نستطيع افتراض أنه إذا كان f تلوينًا رباعيًّا لـ $G - v$، فإن $f(v_5) = 2$ و$f(v_i) = i$ لكلّ $1 \leq i \leq 4$.

عرِّف $G_{i,i}$ و $P_{i,j}$ كما في النظرية 1.3.6.. نستطيع أن نحذف اللون 1 من $N(v)$ إلا إذا وُجدت السلسلتان $P_{1,3}$ و $P_{1,4}$ من v_1 إلى v_3 و v_4 عن الترتيب، كما يظهر في الشكل الموجود على اليسار أدناه. إن المركبة H لـ $G_{2,4}$ التي تحوي v_2 تُفصل عن v_4 و v_5 بالحلقة المكونة من v مع $P_{1,3}$. وكذلك، فإن المركبة H' لـ $G_{2,3}$ التي تحوي v_5 تُفصل عن v_2 و v_3 بالحلقة المكونة من v مع $P_{1,4}$. الآن، نستطيع حذف اللون 2 من $N(v)$ بتبديل 2 مع 4 في H، و 2 مع 3 في H'. هل هذا صحيح؟

لقد كانت هذه هي الحالة الأخيرة في إثبات كمب.

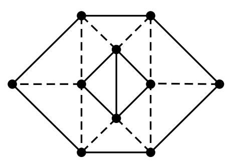




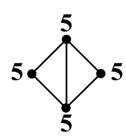
تكمن المشكلة هنا في أن $P_{1,3}$ و $P_{1,4}$ يمكن أن يُجَدلا (تتشابك على شكل ضفيرة)، أو تتقاطع عند رأس لونه 1 كما يظهر في الشكل أعلاه عن اليمين. ونستطيع أن نعمل تبديلاً في H أو في H'، ولكن عمل تبديل في كليهما يُنْتِجُ زوجًا من الرؤوس المتجاورة التي لها اللون 2. ■

بسبب هذه المعضلة، لم نبرهن أن «•5» مصغر، ويجب علينا اعتبار تشكلات أكبر. لقد ساهم هيسك (Heesch [1969]) بفكرة البحث عن تشكلات حجم حلقاتها أصغر بدلاً من قلة من الرؤوس في الداخل. ليس صعبًا إثبات أن كلّ تشكل حجمه 3 أو 4 يكون مصغرًا (التمرين 9). إن هذا يكافئ إثبات أنه لا يوجد تثليث خماسي اللون أصغر يحوي حلقة فاصلة طولها يساوي 4 على الأكثر.

5.3.6. مثال*: لقد دفع بيركوف (BirKhoff [1913]) بهذه الفكرة إلى الأمام، حيث أثبت أن كلّ تشكل حجم حلقته يساوي 5، وله أكثر من رأس داخل الحلقة يكون مصغرًا. كما أثبت أيضًا أن التشكل الذي حجم حلقته يساوي 6 والموجود أدناه، والمسمى ماسة بيركوف، يكون مصغرًا.



=



إن إثبات أن ماسة بيركوف مصغرة، يحتاج إلى صفحة كاملة من التحليل المفصل. وأن أحد الطرق هو محاولة إثبات أن التكوينات الفعلية الرباعية جميعها لحلقة تمتد إلى داخلها. على الرغم من أنه يمكن ضمّ بعض الحالات، وأنه يمكن تمديد بعضها الآخر، إلا أنه من الضروري في بعض الحالات استخدام سلاسل كمب لإثبات إمكانية تبديل الألوان إلى حالة قابلة للتمديد. ■

إن هذا التحليل المعقد لأول مثال غير بديهي يوحي إلينا أننا بالكاد بدأنا. إن التفاصيل المتبقية هائلة. فمنذ عام 1913م إلى عام 1950م تمَّ إيجاد تشكلات مصغرة إضافية تكفي لإثبات أن كلّ البيانات السَّويَّة التي لها 36 رأسًا على الأكثر تكون قابلة للتلوين بأربعة ألوان. لقد كان هذا تقدمًا بطيئًا. وفي السّتينيّات قام هيسك بتركيز انتباهه على حجم الحلقة، وأعطى موجهًا مساعدًا على الاكتشاف) لإيجاد التشكلات المصغرة، وطور طرقًا لتوليد المجموعات التي لا يمكن تفاديها.

لقد استخدم أول إثبات تشكلات يصل حجم حلقتها إلى 14. إذا كان لدينا حلقة حجمها 13، فإن لها 66430 تلوينًا مختلفًا بأربعة ألوان. إن التصغير يتطلب إثبات أن كلّ تشكل مصغر يقود إلى تلوين رباعي لكامل البيان. لاحظ أنه يمكن أن نحتاج إلى التعليلات بواسطة سلاسل كمب والانهيار الجزئي لبعض التشكلات. لذا، فإن براهين التصغير (إيجاد تشكل مصغر) ليست سهلة.

لقد قام أبل وهيكن (HaKen) بالعمل مع كوك (KocK) بتحسين مستكشف هيسك وآخرين وذلك لحثِّ باحثي الحواسيب على البحث عن التشكلات «الواعدة». وبالعمل 1000 ساعة على ثلاثة حواسيب العام 1976م؛حيث وجدوا مجموعة لا يمكن تفاديها تحوي 1936م تشكلاً مصغرًا، حجم كلّ منها يساوي 14 على الأكثر.

6.3.6. نظرية : (نظرية الألوان الأربعة [1977] Appel – HaKen – Koch) كلّ بيان سوي قابل للتلوين بأربعة ألوان. ■

أدّت التحسينات في العام 1983م إلى اكتشاف مجموعة لا يمكن تفاديها تحوي 1258 تشكلاً مصغرًا. فقد تمّت العودة إلى الإثبات من قبَل كلّ من روبرتسون (Robertson) وساندرز (sanders) وسيمور (Sey-mour) وثوماس (Thoams) عامَ [1996]، حيث إنهم باستخدام الطريق نفسه قاموا بتقليل عدد القواعد التي تنتج مجموعات لا يمكن تفاديها إلى 633 تشكلاً مصغرًا. وقاموا بتوفير شفرتهم الحاسوبية من خلال الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) في العام 1997م، وبهذا نستطيع إثبات نظرية الألوان الأربعة خلال ثلاث ساعات من العمل على محطة عمل على سطح المكتب.

7.3.6. *ملاحظة : (تفريغ الشحنة). لتوليد مجموعات لا يمكن تفاديها، نستبدل بحالة المسألة (رأس درجته 5) تشكلات أكبر تتضمن رأسًا درجته 5 ويمكن رؤية هذا على أنه تحليل حالة بتفصيل أكثر للحالة الأصعب.

نحتاج إلى قواعد منظمة للحفاظ على مجموعة مُستنزفة (مستنفدة) صغيرة معقولة.

في أي تثليث، نعلم أن $\sum d(v) = 2e(G) = 6n\text{-}12$، أعد كتابة ذلك على الشكل$12 = \sum(6 - d(v))$، وفكر في $6 - d(v)$ كشحنة على الرأس v. بما أن 12 موجبة، فإن بعض الرؤوس لها شحنة موجبة (درجة 5). إن قواعد استبدال الحالات الرديئة تتضمن تحريك الشحنة من مكان إلى آخر. وتسمى هذه قواعد تفريغ الشحنة. وبما أن الشحنة الموجبة يجب أن تكون موجودة في مكانٍ ما، فإننا نحصل على مجموعات جديدة لا يمكن تفاديها. إن القضية التالية تصف تأثير أبسط قواعد تفريغ الشحنات. ■

8.3.6. قضية : يحوي كلّ تثليث سوي درجته الصغرى 5 تشكلاً في المجموعة أدناه.

$5 \bullet\!\!-\!\!\bullet 5 \qquad 5 \bullet\!\!-\!\!\bullet 6$

الإثبات: ابدأ بشحنة معرفة بواسطة $d(v)$ - 6. إن أول قاعدة لتفريغ الشحنة تأخذ الشحنة من رأس شحنة موجبة (درجة 5) وتوزعها بالتساوي بين جيران هذا الرأس.

الآن، يوجد جار لأي رأس درجته 5 أو 6 وشحنته موجبة درجته 5 ويجب أن يكون للرأس الذي درجته 7 وشحنته موجبة ستة رؤوس على الأقل درجة كلّ منها تساوي 5 أما الرؤوس التي درجتها 8 أو أكثر، فلا يوجد لها شحنة موجبة. ومن قاعدة تفريغ الشحنة هذه، نعلم أن الشحنة الكلّية في البيان تبقى 12. لذا، فإن لرأس v=شحنة موجبة. ومن هنا، فإن أحد التشكلات المحددة يحدث في كلّ حالة من حالات $d(v)$. ■

يتم حاليًّا استخدام طرق تفريغ الشحنات لحل بعض المسائل باستخدام التحليل لحالات بمساعدة الحاسوب.

لقد جوبهت نظرية الألوان الأربعة بضجيج كبير، حيث إن بعضهم يعارض مبدئيًّا استخدام الحاسوب، في حين تذمر آخرون من طول الإثبات لصعوبة التحقق من صحته. أما آخرون، فكانوا قلقين من أخطاء الحاسوب. لقد وُجد القليل من الأخطاء في الخوارزميات الأصلية، ولكن تم إصلاح ذلك من قبَل كل من أبل وهيكن ([1986] Appel – HaKen). إن الذين تحققوا من الحسابات يدويًّا يعلمون أن احتَمالية الخطأ البشري في الإثبات الرياضي أكبر كثيرًا من احتمالية خطأ الحاسوب، وذلك بعد التثبت من صحة الخوارزميات.

عدد التقاطع (Crossing Number)

فيما تبقى من هذا الجزء، سنأخذ بعين الاعتبار الوسطاء الذين من خلالهم نستطيع قياس انحراف بيان ما عن السَّويَّة. إن أحد هؤلاء الوسطاء هو الوسيط الطبيعي الذي يمثل عدد البيانات السَّويَّة اللازمة لتشكيل بيان معين، والتمارين من 16 إلى 20 تتعامل مع هذا الوسيط.

9.3.6. تعريف: نعرِّف سُمك البيان G على أنه أقل عدد من البيانات السَّويَّة في هذا البيان إلى بيانات سوية.

10.3.6. قضية : يساوي سُمك البيان G الذي له n من الرؤوس، وm من الأضلاع $m/(3n - 6)$على الأقل. وإذا خلا هذا البيان من المثلثات، فإن سُمكه يساوي $m/(2n-4)$ على الأقل.

الإثبات: من النظرية 23.1.6. نعلم أن المقام هو أكبر حجم لكلّ بيان جزئي سوي. وباستخدام مبدأ طواقي الحمام، نحصل على المتباينة. ■

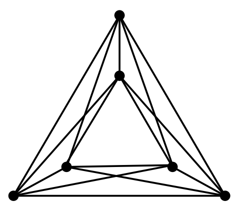
أحيانًا وببساطة، نرسم البيان في المستوى، حتى وإن لم يكن هذا البيان سويًّا. ومثال ذلك الدارة الموضوعة على رقاقة ترتبط برسم بيان. وبما أن تقاطع الأسلاك يقلل من الأداء، ويسبب مشاكل كامنة، فإننا نحاول تقليل عدد التقاطعات. وسنقوم بمناقشة هذا الوسيط في الجزء المتبقي من هذا الجزء.

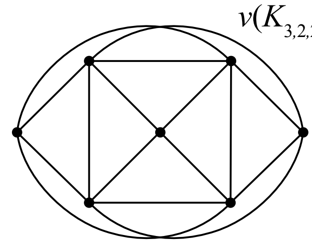
11.3.6. تعريف: نعرِّف عدد التقاطع $\nu(G)$ لبيان G على أنه أصغر عدد من التقاطعات عند رسم G في المستوى.

12.3.6. مثال: $\nu(K_6) = 3$ و $\nu(K_{3,2,2}) = 2$. نستطيع إيجاد عدد التقاطع لبعض البيانات الصغيرة عن طريق الأخذ في الحسبان بيانات جزئية سوية عظمى من هذه البيانات. خذ رسمًا لـ G في المستوى. إذا كان H بيانًا جزئيًّا سويًّا أعظم من هذا البيان، فإن كلّ ضلع من أضلاع G غير الموجودة في H يقطع ضلعًا من أضلاع H. لذا، فإن هذا الرسم يحوي $e(G) - e(H)$ تقاطعًا على الأقل إذا كان عدد رؤوس G n، فإن $e(H) \le 3n - 6$، وإذا خلا G من المثلثات، فإن $e(H) \le 2n - 4$.

بما أن عدد أضلاع K_6 يساوي 15، وأن عدد أضلاع كلّ بيان سوي له ستة رؤوس يساوي 12 على الأكثر، فإن $\nu(K_6) \geq 3$. و يبرهن الرسم الموجود عن اليسار أدناه المساواة.

بما أن $K_{3,2,2}$ يحوي 16 ضلعًا، وعدد أضلاع أي بيان سوي على سبعة رؤوس يساوي 15 على الأكثر، فإن $\nu(K_{3,2,2}) \geq 1$. إن أفضل رسم وجدناه يحوي تقاطعين كما يظهر في الرسم أدناه عن اليمين. ولتحسين الحد الأدنى، لاحظ أن $K_{3,2,2}$ يحوي $K_{3,4}$. بما أن $K_{3,4}$ خالٍ من المثلثات، فإن بيانه الجزئي السوي يحوي 10 أضلاع على الأكثر. لذا، فإن $\nu(K_{3,4}) \geq 2$. وبما أن كلّ رسم للبيان $K_{3,2,2}$ يحوي رسمًا للبيان $K_{3,4}$، فإن:
$\nu(K_{3,2,2}) \geq \nu(K_{3,4}) \geq 2.$





13.3.6. قضية : افترض أن G بيان له n من الرؤوس، و m من الأضلاع. إذا كان k أكبر عدد من الأضلاع في بيان جزئي سوي من G، فإن $\nu(G) \geq m - k$ بالإضافة إلى أن $\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2}$

الإثبات: إذا أُعطيتَ رسمًا للبيان G في المستوى، فاجعل H تمثّل أكبر بيان جزئي من G في هذا الرسم بحيث لا يوجد أي تقاطعات بين أضلاع H إن كلّ ضلع غير موجود في H يقطع على الأقل ضلعًا من أضلاع H. وبخلاف ذلك، يمكن إضافته إلى H وبما أن عدد أضلاع H يساوي k على الأكثر، فإن هناك على الأقل m-k تقاطعًا بين أضلاع H وأضلاع G - $E(H)$

بعد إهمال $E(H)$، يوجد لدينا m - K ضلعًا متبقيًا على الأقل إن التعليل نفسه يعطينا $(m - k) - k$ تقاطعًا على الأقل عند رسم الجزء المتبقي من البيان. وبتكرار خطوات التعليل أو إعادتها، نحصل على $\sum_{i=1}^{t}(m-ik)$ تقاطعًا على الأقل؛ حيث $t = \lfloor m/k \rfloor$. إن قيمة هذا المجموع تساوي $mt - kt(t+1)/2$.

الآن، نكتب m = tk+r، حيث $0 \leq r \leq k - 1$، ونعوّض $t = (m - r)/k$ في قيمة المجموع. وبالتبسيط نحصل على أن $\nu(G) \geq \frac{m^2}{2k} - \frac{m}{2} + \frac{r(k-r)}{2k}$. ■

يكون الحدُّ الأول m - k الموجود في القضية 13.3.6 مفيدًا عندما يكون عدد أضلاع G قليلاً. إن عدد التقاطع لبيان بسيط G يساوي على الأقل $e(G) - 3n + 6$، وعندما يكون G ثنائي الفرع، فإن عدد التقاطع يساوي $e(G) - 2n + 4$ على الأقل. إن تكرار خطوات التعليل يحسب الحد الأدنى عندما يكون $e(G)$ أكبر، ولكن هذا الحد يكون ضعيفًا للبيانات الكثيفة.

خذْ K_n على سبيل المثال. في ظل عدم وجود إجابة دقيقة، نأمل على الأقل في تحديد الحد القائد في كثيرة الحدود التي تعطينا $\nu(\mathrm{K}_n)$. وفي العادة، تُكتب كثيرة الحدود التي درجتها k في المتغير n على الشكل ($a\, n^k + O(n^{k-1})$). وهذا منسجم مع تعريف الرمز «O الكبيرة» في التعريف 3.2.3. تعطي القضية 13.3.6 أن $\nu(K_n) \geq \frac{1}{24}n^3 + O(n^2)$. ولكن في الحقيقة، فإن $\nu(K_n)$ ينمو ككثيرة حدود من الدرجة 4. إن عدد التقاطع لا يمكن أن يزيد على $\binom{n}{4}$ ؛ لأن بإمكاننا وضعَ الرؤوس على محيط دائرة، ثم نرسم أوتارًا لـ K_n، إن كلّ أربعة رؤوس تسهم بتقاطع واحد بالضبط. وفي الواقع، فإن هذا أسوأ رسم ممكن لـ K_n على شكل خطوط مستقيمة؛ ولأن في أي رسم على شكل خطوط مستقيمة، فإن كلّ مجموعة مؤلفة من أربعة رؤوس تسهم في تقاطع واحد

على الأكثر، حيث يعتمد ذلك على وجود الرأس الرابع داخل المثلث المشكل من قبل الرؤوس الثلاثة الأخرى أو خارجه. فكم تقاطعًا يمكن أن نختصر إذا رسمنا رسمًا أفضل من هذا؟

14.3.6. نظرية : (R.Guy [1972]): $\frac{1}{80}n^4+O(n^3)\le v(K_n)\le \frac{1}{64}n^4+O(n^3)$

الإثبات: إن التعليل بطريقة الحساب بخطوات مكررة يؤدي إلى إيجاد حد أدنى. وإن رسم K_n بأقل عدد من التقاطعات يحوي n رسمًا لـ K_{n-1}، ونحصل على كلّ منها بحذف رأس واحد، وكلّ رسم جزئي يحوي $v(K_{n-1})$ تقاطعًا على الأقل. لذا، فإن العدد الكلّي يساوي $nv(K_{n-1})$ على الأقل. ولكن تم حساب كلّ تقاطع في الرسم الكلّي $(n-4)$ مرة. لذا، نستنتج أن $(n-4)v(K_n)\ge n\,v(K_{n-1})$.

من هذه المتباينة، نبرهن استقرائيًّا أن $v(K_n)=\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ لكلّ $n\ge 5$: عندما $n=5$ فإن عدد تقاطعات K_5 يساوي 1، لذا افترض أن $n>5$، وباستخدام فرضية الاستقراء نحسب:

$$v(K_n)\ge \frac{n}{n-4}v(K_{n-1})\ge \frac{n}{n-4}\ \frac{1}{5}\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}=\frac{1}{5}\binom{n}{4}$$

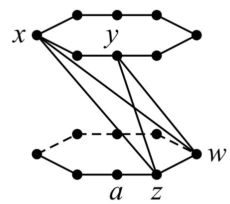
يمكن تحسين مقام الحد الذي درجته 4 في الحد الأدنى أعلاه من 120 إلى 80 آخذين في الحسبان نسخًا من البيان $K_{6,n-6}$ الذي عدد تقاطعه يساوي $6\left\lfloor\frac{n-6}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-7}{2}\right\rfloor$ (التمرين 26b).

إن رسمًا أفضل لهذا يخفض الحد الأدنى من $\binom{n}{4}$ إلى $\frac{1}{64}n^4+O(n^3)$. خذ $n=2k$. إن رسم K_n في المستوى يكافئ رسمه على كرة أو على علبة. ضع k رأسًا على الحافة العليا للعلبة، و k رأسًا على الحافة السفلى للعلبة، نرسم أوتارًا في أعلى العلبة، وأوتارًا أخرى في أسفلها لتمثّل هذه الـ k عصبة.

إن الأضلاع من أعلى إلى أسفل تقع في k صفًّا طبيعيًّا. إن «عدد الصفّ» هو عبارة عن الفصل الدائري بين النقاط الطرفية العليا والسفلى، والذي يمتد من $\left\lceil\frac{-k+1}{2}\right\rceil$ إلى $\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil$، نرسم هذه الأضلاع بحيث يكون التفافها حول العلبة أقل ما يمكن عند مرورها من أعلى إلى أسفل. لذا، فإن الأضلاع الموجودة في الصفّ نفسه لا تتقاطع. الآن، نقوم بِلَيِّ العلبة (تحريكها دائريًّا) لجعل إزاحة الصفوف تبدأ من 1 وتنتهي بـ K. إن هذا يسهل عملية حساب التقاطعات ولا يغير أزواج الأضلاع المتقاطعة.

إن التقاطع على جوانب العلبة يشتمل على وجود رأسين في الأعلى، ورأسين آخرين في الأسفل، لنقل أن y,x هما الرأسان في الأعلى، و w,z هما الرأسان في الأسفل، حيث إن لـ $x\ Z$ إزاحة موجبة أصغر من إزاحة xw، يوجد لدينا تقاطع لـ Z, y, x و w إذا وفقط إذا كانت الإزاحات لـ y، و z، و w تمثّل قيمًا موجبة مختلفة ومتزايدة. (فعلى سبيل المثال، يتحقق هذا لـ x، و y، و Z، و w في الشكل التوضيحي أدناه، ولكنه لا يتحقق لـ x، و y، و Z، و a، لأن الضلع ya يلتف حول العلبة). لذا، يوجد $k\binom{k}{3}$ تقاطعًا على جانب العلبة الملوية. لذا، فإن:

$$v(K_n)\le 2\binom{k}{4}+k\binom{k}{3}=\frac{1}{64}n^4+O(n^3)$$



15.3.6. مثال: $\nu(K_{m,n})$. إن أبسط رسم يضع الرؤوس على جانبي قناة، حيث يضع مجموعة على جانب، في حين يضع المجموعة الأخرى على الجانب الآخر، وحيث يتم رسم الأضلاع كخطوط مستقيمة عبر القناة. إن هذا يحوي $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ تقاطعًا، ولكن من السهل إنقاص هذا بمعامل مقداره 4 ضع رؤوس $K_{m,n}$ على محورين متعامدين، ثم ضع $\lceil n/2 \rceil$ رأسًا على محور y الموجب، و $\lfloor n/2 \rfloor$ رأسًا على محور y السالب. وبالمثل، اقسم الـ m رأسًا على محور x الموجب والسالب. وبجمع هذه الأنواع من التقاطعات التي نحصل عليها عندما نصل كلّ رأس على محور x بكلّ رأس على محور y، فإننا نحصل على $\nu(K_{m,n}) \le \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$، (ZarnaKiewicz [1954]). لقد خُمِّن هذا الحدُّ على أنه حدٌّ أمثل (لمزيد من المعلومات؛ ارجع إلى [Guy [1969]).

لقد أثبت كليتمان (Kleitman) العام 1970م هذه النتيجة عندما $6 \le min\ \{n,m\}$. أما وودال (woodall) فوجد أن $K_{7,11}$ و $K_{9,9}$ هما أصغر حالتين غير معروفتين، وكان هذا في العام 1993م باستخدام الحاسوب. واستنادًا إلى ما توصل إليه كليتمان فقد أثبت جاي (Guy) العام 1970 أن $\nu(K_{m,n}) \ge \frac{m(m-1)}{5}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$، وهذا غير بعيد عن الحد الأعلى (التمرين 26).

لقد خُمِّنَ حدٌّ أدنى لعدد التقاطع من قِبَل ايردوز وجاي العام 1970م، وهذا التخمين يلجأ إلى تطبيق هندسي. إن إثباتنا استقرائي، ويعمم الحد الأَدنى الموجود في إثبات النظرية 14.3.6. وهناك إثبات احتمالي مناسب في التمرين 11.5.8. كما توجد نتيجة أقوى في ([Pach – To'th [1997]).

16.3.6. *نظرية. (Aitai –chva'tal-Newborn-Szemer'edi[1982],Leightpm [1983]).
افترض أن G بيان بسيط. إذا كان $e(G) \ge 4n(G)$، فإن $\nu(G) \ge \frac{1}{64} e(G)^3 / n(G)^2$.

الإثبات: افترض أن $m = e(G)$ و $n = n(G)$ نستخدم الاستقراء على n إذا كانت $m \le 5n$ (هذا يشمل البيانات البسيطة جميعها والتي عدد رؤوسها يساوي 11 على الأكثر). لاحظ أن $(\alpha - 3) \ge \frac{1}{64}\alpha^3$ عندما $4 \le a \le 5$. يجعل $m = \alpha n$ حيث $4 \le a \le 5$ نحصل على أن $\nu(G) \ge m - 3n \ge \frac{1}{64} m^3/n^2$ كما هو منشود.

افترض أن $n > 11$. إذا أعطينا رسمًا أمثل للبيان G، فإن كلّ تقاطع سيظهر في n-4 من الرسوم التي نحصل عليها بحذف رأسٍ واحد. ومن فرضية الاستقراء، نجد أن $\nu(G-v) \ge \frac{1}{64}\frac{(m-d(v))^3}{(n-1)^2}$. لذا، فإن: $(n-4)\nu(G) \ge \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{64}\frac{(m-d(v))^3}{(n-1)^2}$.

من التحدب، نعلم أن الحد الأدنى – دائمًا – يكون مساويًا على الأقل لما نحصل عليه عند تبديل درجات الرؤوس بمعدل الدرجة لهذه الرؤوس. وبكلمات أخرى، $\sum (m-d(v))^3 \ge n(m-2m/n)^3$. كذلك $(n-1)^2(n-4) \le (n-2)^3$. لذا، فإن:

$$\nu(G) \ge \frac{1}{64} n \frac{(n-2)^3 m^3}{n^3 (n-1)^2 (n-4)} \ge \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2} \quad \blacksquare$$

17.3.6. مثال: تحقيق الحد. إن المقدار الموجود في النظرية 16.3.6 هو أفضل ما يمكن. خذْ $G = \frac{n}{2m} K_{2m/n}$، حيث $2m$ من مضاعفات n إن العدد الكلّي للرؤوس هو n، كما أن العدد الكلّي للأضلاع يقارب $\frac{n^2}{2m}\frac{1}{2}\left(\frac{2m}{n}\right)^2 = m$. وبما أن

$v(K_r) \le \frac{1}{64} r^4$، فإن $v(G) = \frac{n^2}{2m}\frac{1}{64}\left(\frac{2m}{n}\right)^4 = \frac{1}{8}\frac{m^3}{n^2}$. إن هذا المقدار يختلف بمقدار ثابت عن الحد الأدنى الموجود في القضية 16.3.6. ■

سنطبق القضية 16.3.6. على مسألة في الهندسة التوافقية أو التركيبية (Combinatorial Geomerty). لقد سأل إيردوز العام [1946م] قائلاً: كم وحدة مسافة يمكن أن يكون بين n من النقاط في المستوى؟ إذا وُجدت البيانات في شبكة وحدة (البعد الأفقي أو العمودي بين النقاط يساوي 1)، فإن البيان الذي يمثل مسافات الوحدة هو الضرب الديكارتي لمسارين، وهذا ينتج حوالي $n\text{-O}(\sqrt{n})$ ضلعًا. وبأخذ النقاط جميعها (الشبكة منتقاة) التي تقع ضمن مسافة مناسبة من نقطة الأصل، حصل إيردوز على نحو $n^{1+c/Loglogn}$ وحدة مسافات. إن معدل هذا النماء أكثر من خطي، إلا أنه يقل عن $n^{1+\varepsilon}$ لكلّ عدد موجب ε.

لقد أثبت إيردوز كذلك حدًّا أعلى قيمته $O(n^{3/2})$. بما أن أي دائرتين نصف قطر كلّ منهما يساوي 1 يتقاطعان في نقطتين على الأكثر، فإن بيان مسافات الوحدة G لا يمكن أن يحوي $K_{3,2}$. لذا، فإن لكلّ زوج من النقاط جارين مشتركين على الأكثر. وبما أن كلّ رأس v يشكل جارًا مشتركًا لـ $\binom{d(v)}{2}$ زوجًا من جيرانه، فإن $\sum\binom{d(v)}{2} \le 2\binom{n}{2}$. وبما أن معدل الدرجة يساوي $2e(G)/n$، فإن التحدب يعطينا أن $\sum\binom{d(v)}{2} \ge n\binom{2e(G)/n}{2}$. إن هذه المتباينات مجتمعة معًا تعطينا الحد المنشود (يتعامل التمرين 25.2.5 مع مسألة تعظيم الأضلاع عمومًا في الحالة التي لا تحوي فيها البيانات عصبًا ثنائية).

باستخدام بعض التعليلات من نظرية الأعداد المتعلقة بعلاقات الوقوع بين النقاط والخطوط في مجموعة نقاط، قام كلّ من سبنسر (spencer) وسيميردي (Szemere›di) وتروتر (Trotter) في العام 1984م بتحسين الحد الأعلى إلى $O(n^{4/3})$. كما قام سزكلي (Sze›Kely) بتطبيق النظرية 16.3.6 لإعطاء إثبات رائع وقصير لهذا الحد باستخدام نظرية البيانات.

18.3.6. *نظرية : (Spencer –Szemer′edi-Trotter[1984]).

يوجد على الأكثر $4n^{4/3}$ زوجًا من النقاط، بحيث إن المسافة بين عنصري أيّ زوج منها تساوي 1 من بين مجموعة تحوي n من النقاط في المستوى.

الإثبات: ([1997] Sze′Kely) بتحريك النقاط أو أزواج النقاط دون تقليل عدد الأزواج ذات المسافة 1 نستطيع أن نؤكد أن كلّ نقطة تكون مشمولة بأحد هذه الأزواج، وأنه لا توجد نقطتان على بعد مقداره 1 فقط إحداها عن الأخرى. إذا وُجدت نقطة مشمولة بزوج واحد فقط مسافته 1، فبإمكاننا تدويرها حول قرينتها في الزوج حتى تكون على بعد بمقدار 1 من نقطة أخرى، وهذا يختصر المسألة إلى الحالة التي تكون كلّ نقطة من النقاط مشمولة في زوجين من هذه الأزواج على الأقل.

افترض أن P تَشَكُّلٌ أمثل على n من النقاط. حيث يوجد q زوجًا ذات مسافة وحدة (المسافة بين عنصري الزوج تساوي 1 أو وحدة).

لنحصل على بيان من P باستخدام الأزواج ذات مسافة الوحدة كأضلاع، وإنما برسم دائرة وحدة حول كلّ نقطة. إذا كانت نقطة في P تبعد بمقدار 1 عن k نقطة من نقاط P، فإن هذه النقاط تقسم الدائرة إلى k قوسًا. وبالمحصلة، نحصل على $2q$ قوسًا، إن هذه هي أضلاع لبيان G خالٍ من العرى. وبما أن كلّ نقطة يمكن أن تظهر على دائرتي وحدة (ليس على ثلاث)، فمن الممكن أن يوجدً في G بعض الأضلاع المكررة مرتين، لا أكثر.

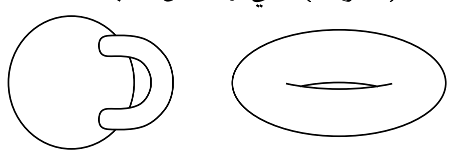
نحذف ضلعًا من كلّ ضلع مكرر للحصول على بيان بسيط G' له q ضلعًا على الأقل لاحظ أنه يمكن افتراض أنَّ $q \ge 4n$. وبخلافً ذلك، فإن الحد المنشود يكون متحققًا مُسبقا.

بما أن هذه الأقواس تقع على n من الدوائر، فمن غير الممكن أن يكون بينها العديد من التقاطعات؛ يتقاطع كلّ زوج من هذه الدوائر مرتين على الأكثر. لذا، فإن الطريقة التي وضعنا بها G' تحوي $2\binom{n}{2}$ تقاطعًا على الأكثر. ومن النظرية 16.3.6، نجد أن G' يحوي $\frac{1}{64}\,{q^3}\!/{n^2}$ تقاطعًا على الأقل. إن هذه المتباينات تعطينا أن $q \le 4n^{4/3}$. ■

السطوح ذات الجنس الأعلى (اختياري) Surfaces of Higher Genus

يمكن أن نُغَيِّرَ السطح لتفادي التقاطعات بدلاً من تقليل التقاطعات في المستوى. إن هذا هو تأثير بناء الجسور وملتقيات الطرق التي تتقاطع بمستويات مختلفة، بدلاً من تركيب الإشارات الضوئية. إن سطح الأرض عبارة عن كرة. كما أن من المناسب لهذا النقاش أن نرسم على الكرة بدلاً من الرسم في المستوى.

وكما لاحظنا في الملاحظة 27.1.6، فإن هذين الوضعين متكافئان ولتفادي حدوث حدود في السطح؛ فإننا نضيف جسرًا يقطع حفرتين في الكرة، ومن ثمَّ نصل أضلاع الحفرتين بأنبوب وبتمديد الأنبوب وضغط باقي الكرة، فإننا نحصل على كعكة (الدونت) التي لها شكل العجلة.



19.3.6. تعريف: نعرِّف المقبض على أنه أنبوب يربط بين حفرتين مقطوعتين في سطح. أما الطارة (Torus) فهي السطح الذي نحصل عليه بإضافة مقبض واحد إلى الكرة.

إن الطارة توبولوجيًّا هي نفسها الكرة التي لها مقبض واحد؛ بمعنى أنه يمكن نقل أحد السطحين إلى الآخر بواسطة دالة متصلة[1].

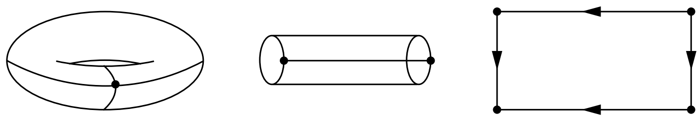
يمكن أن يكون للبيان الكبير عدد كبير من التقاطعات، ويحتاج إلى عدد أكبر من المقابض إن إضافة مقابض كافية إلى الرسم على الكرة بحذف التقاطعات الموجودة في البيان جميعها يُنْتِجُ طمرًا. لاحظ أنه عندما نضيف عددًا من المقابض إلى كرة فإننا لا نهتم بكيفية عمل ذلك، وذلك بسبب وجود نتيجة في التوبولوجي مفادها أننا إذا حصلنا على سطحين بإضافة العدد نفسه من المقابض إلى الكرة، فإن هناك دالة متصلة تنقل كلًّا منهما إلى الآخر.

20.3.6. تعريف: نعرِّف جنس المنحنى للسطح الذي نحصل عليه بإضافة مقابض إلى الكرة على أنه عدد المقابض المضافة إلى هذه الكرة. وسنستخدم الرمز $S\gamma$ للتدليل على السطح الذي جنسه يساوي γ في حين نعرِّف جنس البيان على أنه أصغر γ، بحيث يمكن طمر G في S_γ. إن البيانات التي يمكن طمرها في السطوح التي جنسها 0،1،2 هي البيانات السَّويَّة، والطارية (التي لها طمر على الطارة)، وثنائية الطارة (السطح الذي له مقبضان يُسمّى طارة ثنائية) على الترتيب.

إن نظرية البيانات السَّويَّة تعمم في بعض الاتجاهات إلى البيانات التي يمكن طمرها على سطوح من جنس أعلى؛ وسنناقش هذا باختصار، ولأهمية ذلك ثقافيًّا كذلك. إن رسم البيانات الكبيرة على سطوح جنسها عالٍ ليس سهلاً، ومن الصعوبة بمكان تتبعه، حتى الرسم على العُقدة (S_3). موضعيًّا، يظهر هذا السطح كصفحة ورق مستوية. ومن أجل رسم البيان؛ علينا أن نضع السطح كلّه منبسطًا. ولعمل ذلك يجب قطعه. إذا استطعنا متابعة كيفية إلصاق الأضلاع معًا من أجل استعادة السطح، فبإمكاننا وصف السطح على قطعة ورق منبسطة. أولاً، خذ في الحسبان الطارة.

(1) هذا مصدر النكتة التي تقول: إن الشخص المتخصص في التوبولوجيا هو الشخص الذي لا يعرف الفرق بين حبة الدونت وفنجان القهوة.

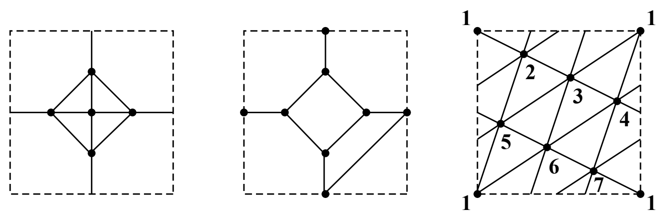
21.3.6. مثال: وصف توافقي (تركيبي) للطارة.



إن قطع الأنبوب المغلق مرة واحدة يحوله إلى أسطوانة، وبشق هذه الأسطوانة طوليًّا، نستطيع وضعها منبسطة كمستطيل. إن وضع علامات دالة على أضلاع المستطيل يشير إلى كيفية إعادة إلصاق هذه الأضلاع معًا، بحيث تتم مطابقة الأضلاع التي لها العلامة الدالة نفسها بعضها ببعض.

إن متابعة مطابقة الأضلاع مهمة لأنه يمكن لأضلاع طمر على سطح معين أن تقطع مثل هذا القطع وعندما يصل ضلع إلى أحد حدود المستطيل، فإنه يكون قد وصل إلى أحد جوانب القطع المُتَخَيَّل، وعندما يعبر (يقطع) الضلع هذا القطع، فإنه ينفذ من النقطة المماثلة على النسخة الأخرى من هذا الحد. إن الزوايا الأربع لهذا المستطيل ترتبط بنقطة واحدة على السطح والتي يمرّ من خلالها القطعين.

أدت هذه الأفكار الجيدة لطمر جميل على الطارة لكلّ من K_5،و $K_{3,3}$، و K_7.



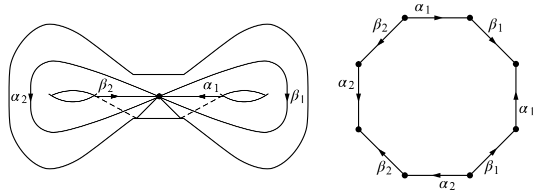
لاحظ وجود بعض المرونة في عمل القطوع للسطوح ذات الجنس الأعلى. ولكن، كلّ طريق يأخذ قطعين لكلّ مقبضٍ قبل أن تستطيع وضع السطح بصورة منبسطة. إن التمثيل العادي يأتي من خلال التعبير عن المقابض "كفلق" للسطح، حيث توجد نقطة مشتركة بين القطوع على المحور (hub).

22.3.6. مثال: وضع الطارة الثنائية منبسطة. تجد أدناه تمثيلاً مضلعًا للطارة الثنائية. إن عمل القطوع يكافئ إضافة عرى عند رأس واحد حتى تحصل على طمر في وجه واحد لضمة العرى. وعمومًا، نعمل 2γ قطعًا عبر نقطة واحدة ولتكن من وضع $S\gamma$ منبسطًا.

إن متابعة الحدود من كلّ قطع تقود إلى تمثيل لـ $S\gamma$ كمضلع عدد أضلاعه 4γ يتحقق فيه أنه يمكن وصف كلّ اجتياز أو عبور (استعراض) للحدود في اتجاه عقارب الساعة من خلال قراءة القطوع في أثناء عبورنا لها ونسجل القطع باستخدام رمز النظير العكسي عندما نجتازه في الاتجاه المضاد.

وبما أننا نتابع حدود وجه واحد فقط آخذين في الحسبان أن يدنا اليسرى دائمًا على الحائط فإنه يتم تتبع كلّ ضلع مرة إلى الأمام ومرة أخرى إلى الخلف. ولهذا المثال هنا، فإن المُستعرِض هو $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}$.

لاحظ أنه يمكن وضع كلّ سطح على الشكل: $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\ldots\ldots\alpha_\gamma\beta_\gamma\alpha_\gamma^{-1}\beta_\gamma^{-1}$. ويمكن الحصول على وضعيات (تمثيلات) أخرى للسطح من خلال عمل قطوع بطرق مختلفة أي طرق مختلفة لطمر باقة مؤلفة من 2γ عروة. فمثلاً، يمكن تمثيل الطارة الثنائية بمضلع ثماني حدوده $\alpha\beta\gamma\delta\,\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1}$.



23.3.6. ملاحظة: صيغة أويلر لـ S_γ. نعرِّف الخلية الثنائية على أنها منطقة تحقق أنه يمكن تقليص كلّ منحنى في داخلها بواسطة دالة متصلة إلى نقطة. إن طمر الخلية الثنائية عبارة عن طمر تكون كلّ منطقة فيه خلية ثنائية. يمكن تعميم صيغة أويلر لتشمل طمور الخلية الثنائية للبيانات المترابطة على S_γ (التمرين 35)، بحيث تصبح على الشكل:

$$n - e + f = 2 - 2\gamma$$

فعلى سبيل المثال، إن طمرنا لـ K_7 على الطارة $(\gamma = 1)$ له 7 رؤوس، و21 ضلعًا، و 14 وجهًا و $7 - 21 + 14 = 0$. يشبه إثبات صيغة أويلر لـ S_γ إثبات هذه الصيغة في حالة المستوى، إلا أن إثبات الخطوة الأساس للبيانات التي لها رأس واحد يحتاج إلى حذر أكثر. حيث يلزمنا أن نبين حاجتنا إلى 2γ قطعًا لكي نستطيع جعل السطح منبسطًا (أي للحصول على طمر خلية ثنائية لبيان له رأس واحد ووجه واحد). ■

24.3.6. تمهيدية. كلّ بيان بسيط على n من الرؤوس مطمور في S_γ يحوي $3(n - 2 + 2\gamma)$ ضلعًا على الأكثر.

الإثبات: التمرين 35. ■

لاحظ أن K_7 يحقق التمهيدية 24.3.6 مع المساواة على الطارة $(\gamma = 1)$. وبما أن كلّ وجه في الطّمر الطّاري (طمر في الطّارة) لـ K_7 عبارة عن مضلع ثلاثي، فإن K_7 بيان طاريّ أعظميّ. وبإعادة كتابة $e \leq 3(n\text{-}2 + 2\gamma)$، نحصل على حد أدنى لعدد المقابض التي يجب إضافتها للحصول على سطح يمكن طمر G فيه. لذا، فإن $\gamma(G) \geq 1 + \frac{(e - 3n)}{6}$.

توصل التمهيدية 24.3.6 إلى مثيل لنظرية الألوان الأربعة لـ $S\gamma$.

25.3.6. نظرية: (صيغة هيود – [1890] Heawood). إذا كان G قابلاً للطمر على $S_\gamma(\gamma > 0)$ فإن $\chi(G) \leq \left\lfloor (7 + \sqrt{1 + 48\gamma}) / 2 \right\rfloor$.

الإثبات: افترض أن $c = (7 + \sqrt{1 + 48\gamma}) / 2$. يكفي أن نبرهن أنه يوجد لكلّ بيان بسيط قابل للطمر على S_γ رأسٌ درجته $c - 1$ على الأكثر. وبذلك، فإن الحد على $\chi(G)$ يتبع من الاستقراء على $n(G)$.

بما أن $\chi(G) \leq c$ للبيانات التي لها c رأسًا على الأكثر جميعها، فيجب علينا معالجة الحالة التي يكون فيها $n(G) > c$ فقط.

نستخدم التمهيدية 24.3.6 لإثبات أن معدل (ومن ثم أقل قيمة) الدرجة يساوي c-1 على الأكثر، وتتبع المتباينة الثانية أدناه من كون $\gamma > 0$ و $n > c$. وبما أن c تحقق أن $c^2 - 7c + (12 - 12\gamma) = 0$، فإننا نحصل على أن $c - 1 = 6 - (12 - 12\gamma)/c$. لذا، فإن معدل الدرجة يحقق الحد المنشود.

$$\frac{2e}{n} \leq \frac{6(n\text{-}2+2\gamma)}{n} \leq 6 - \frac{12\text{-}12\gamma}{C} = C\text{-}1$$ ■

إن المتباينة الرئيسة تفشل هنا عندما $\gamma = 0$. لذا، فإن التعليل غير صالح للبيانات السَّويَّة. وعلى الرغم من ذلك، فإن الصيغة تُختصر لتصبح $\chi(G) \leq 4$ عندما $\gamma = 0$ إن إثبات حدّ هيوود حاد يتضمن طمر K_n على S_γ حيث $\gamma = [(n\text{-}3)\ (n\text{-}4) / 12]$.

ينقسم الإثبات إلى عدة حالات بحسب صفوف تكافؤ n بمقياس 12 (K_7 هو المثال الأول في الصّفّ السّهل). منجزًا في (Ringle – youngs [1968])، حيث يشتمل على كتاب نظرية تلوين الخرائط (Ringel [1974]).

بما أننا أخذنا مسألة التلوين على S_γ في الحسبان، فمن الطبيعي أن يتساءل أحدنا عن البيانات التي تنطمر على S_γ. توجد عدة توصيفات للبيانات السَّويَّة، بدءًا من نظرية كواراتوسكي (النظرية 2.2.6) ونظرية

واجنر (التمرين 12.2.6) لاحظ أن حذف الأضلاع أو تقليصها لا يؤثر في طمر البيانات على أي سطح.

توجد لكلّ سطح قائمة صغرى فرعية من العوائق التي تعيق الطّمر. تنصُّ نظرية واجنر على أن قائمة العوائق للمستوى هي $\{K_{3,3}, K_5\}$. وأن كلّ بيان غير سوي يحوي أحد هذه البيانات كبيان فرعي.

يوجد أكثر من 800 من الممنوعات الفرعية الصغرى المعروفة للطّارة، وتكون قائمة الممنوعات منتهية لكلّ سطح، وهذا يتبع من العبارة الأعم الموجودة أدناه. (تؤدي علاقة التقسيم في نظرية كواراتوسكي إلى قوائم غير منتهية).

26.3.6. نظرية : (نظرية البيان الفرعي – ([Robertson –seymour[1985 في أي قائمة غير منتهية من البيانات، يوجد بيان معين بحيث يكون بيانًا فرعيًّا لبيان آخر. ■

ربما تكون هذه أصعب نظرية معروفة في نظرية البيان؛ لأن إثباتها يحتاج إلى أكثر من 500 صفحة (دون مساعدة الحاسوب) موجودة على شكل سلسلة مؤلفة من أكثر من 20 بحثًا امتدت إلى ما بعد العام 2000م. كما يوجد لها العديد من التشعبات حول تركيبة البيان وبنيته، وتعقيد الحسابات. إن التقنيات المستخدمة في الإثبات أوجدت فروعًا جديدة في نظرية البيان. وأن بعض جوانب هذه التقنيات وعلاقتها بإثبات نظرية البيان الفرعي موجودة في الوحدة الأخيرة من كتاب ديستل ([Diestel [1997).

تمارين

1.3.6.(-) هات نصًّا لخوارزمية كثيرة حدود زمنية بحيث تأخذ بيانًا سويًّا كمدخل، وتُنْتِجُ تلوينًا فعليًّا بخمسة ألوان لهذا البيان.

2.3.6. (-) يكون البيان G مُضْمَحِلًّا (مُتَفَسِّخًا) من الدرجة k (k-degenerate) إذا وُجد في كلّ بيان جزئي منه رأسٌ درجته تساوي k على الأكثر، أثبت أن البيان المضمحل(المتفسخ) من الدرجة k يكون قابلاً للتلوين بـ $k+1$ لونًا.

3.3.6.(-) استخدم نظرية الألوان الأربعة لتبرهن أن كلّ بيان سوي خارجي يكون قابلاً للتلوين بثلاثة ألوان.

4.3.6. (-) جد عدد التقاطع لكلٍّ من $K_{2,2,2,2}$ و $K_{4,4}$، وعدد التقاطع لبيان بيترسون كذلك.

5.3.6. استخدم نظرية الألـوان الأربعة لتبـرهـن أن كلّ بيـان سوي يتفكـك إلى بيـانين ثنـائيي الفـرع. (Hedetniemi [1969], Mabry [1995])

6.3.6. دون استخدام نظرية الألوان الأربعة، أثبت أن كلّ بيان سوي له 12 رأسًا على الأكثر يكون قابلاً للتلوين بأربعة ألوان. استخدم هذا لتبرهن أن كلّ بيان سوي له 32 رأسًا على الأكثر يكون قابلاً للتلوين بأربعة ألوان.

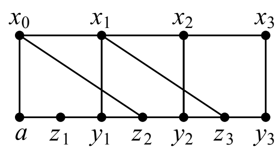
7.3.6. (!) افترض أن H تشكل في تثليث سوي (التعريف 2.3.6). وافترض كذلك أن H' هو البيان الذي نحصل عليه من وضع درجات الرؤوس كعلامات دالة على جيران رؤوس الحلقة، ومن ثم نحذف رؤوس الحلقة. أثبت إمكانية استرداد H من H'.

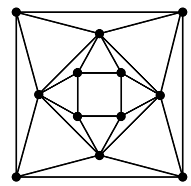
8.3.6. جدْ تشكلاً حجم حلقته يساوي 5 في تثليث سوي، بحيث إن درجة كلّ رأس تساوي 5 على الأقل، وبحيث يوجد أكثر من رأس داخلي واحد.

9.3.6. (+) أثبت أن كلّ تشكل سوي حجم حلقته يساوي 4 على الأكثر يكون مصغرًا. (مساعدة: الحلقة عبارة عن حلقة فاصلة C. أثبت أنه إذا كانت التثليثات الأصغر قابلة للتلوين بأربعة ألوان، فإن للفلق -C من G أربعة ألوان تتوافق على C)، ([BirKhoff [1913).

10.3.6. نظرية جروتزك ([Grötzch[1959), (انظر [Thomassen[1994a).

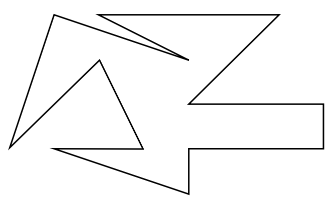
تنصّ هذه النظرية على أن كلّ بيان سوي G خال من المثلثات يكون ثلاثي اللون. لذا، فإن $a(G) \geq n(G)/3$ لقد أثبت توفي (Tovey) وستاينبرج (stienberg) العام 1993م أن $a\ (G) \geq n(G)\ /3$ دائمًا. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن من خلال الأخذ في الحسبان عائلة من البيانات على الشكل التالي: G_1 عبارة عن حلقة خماسية رؤوسها: a ، وx_o ، وx_1 ، وy_1 ، وz_1 على الترتيب. لـ $k > 1$، نحصل على G_k من G_{k-1} بإضافة الرؤوس الثلاثة: x_k، وy_k ، و z_k والأضلاع الخمسة: $x_{k-1}x_k$. $x_k\,y_k$. $y_k\,Z_k$. Z_ky_{k-1} . $Z_k\,x_{k-2}$ تجد البيان G_3 موضحًا عن اليسار في الشكل أدناه. (Franghnaugh [1985]).





11.3.6. عرِّف متتالية من بيانات المستوى على الشكل التالي: افترض أن G_1 هي C_4، لـ $n > 1$ احصل على G_n من G_{n-1} بإضافة حلقة رباعية تحيط بـ G_{n-1} واجعل كلّ رأس من رؤوس الحلقة الجديدة يجاور رأسين متتابعين من رؤوس الوجه الخارجي السابق في الشكل أعلاه عن اليمين تجد البيان G_3 أثبت أنه إذا كان n عددًا زوجيًّا، فإن كلّ تلوين رباعي فعلي لـ G_n يستخدم كلّ لون على n من الرؤوس بالضبط (Albentson).

12.3.6. (!) من دون استخدام نظرية الألوان الأربعة، أثبت أن كلّ بيان سوي خارجي يكون قابلاً للتلوين بثلاثة ألوان. طبق هذا لتبرهن نظرية صالة عرض الآثار (الفنون) التي تنصّ على أنه: إذا وضعت صالة عرض الآثار كمضلع له n من الحواف، فإن من الممكن وضع $\lfloor n/3 \rfloor$ حارسًا، بحيث إن كلّ نقطة داخلية تكون مرئية من قبل أحد الحراس. لـ $n \geq 3$، ابنِ مضلعًا يتطلب $\lfloor n/3 \rfloor$ حارسًا.



13.3.6. نعرِّف صالة عرض (معرض) الآثار (الفنون) الذي له جدران على أنه مضلع إضافة إلى بعض الأوتار غير المتقاطعة التي تُسمى «جدرانًا» والتي تصل (تربط) بين الرؤوس كلّ جدار داخلي يحتوي على فتحة صغيرة تسمى «مدخلاً» إذا وُضع الحارس على المدخل، فإنه يستطيع رؤية كلّ شيء داخل الغرفتين المتجاورتين، ولكن الحارس الذي لا يكون موجودًا في المدخل، فإنه لا يستطيع أن يرى أبعد من الجدار. حدد أصغر عدد t من الحراس يلزم استخدامه لحراسة معرض فني له جدران بحيث تكون كلّ نقطة داخلية مرئية من قِبل أحد الحراس . (Hutchinson [1995],Künalgen[1999]).

14.3.6. (+) أثبت أن البيان السوي الأعظمي يكون قابلاً للتلوين بثلاثة ألوان إذا وفقط إذا كان هذا البيان أويلريًّا. (مساعدة: لإثبات الكفاية؛ استخدم الاستقراء على $n(G)$ اختر زوجًا مناسبًا أو ثلاثة رؤوس متجاورة لاستبدالها بأضلاع) (Heawood [1898]).

15.3.6. (!) أثبت أنه يمكن تجزئة رؤوس بيان سوي خارجي بسيط إلى مجموعتين، بحيث يكون البيان الجزئي الذي تحدثه كلّ مجموعة عبارة عن اتحاد منفصل لمسارات (مساعدة: عرف تجزئة باستخدام نوعية

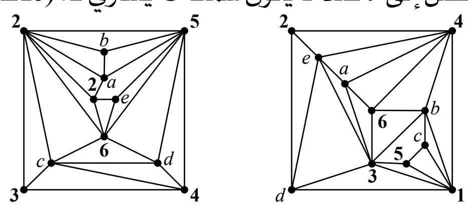
المسافة (زوجية أم فردية) بالنسبة إلى رأس مثبت)،
(MihóK-[1983],AKiyama-Era-Gervacia-Watanabe[1989],Goddard [1991])

16.3.6. (+) أثبت أن المكعب الرباعي Q_4 بيان غير سوي. فكّك Q_4 إلى بيانين متشاكلين سويّين لذا، فإن سُمك Q_4 يساوي 2.

17.3.6. أثبت أن سُمك K_n يساوي $\left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$ على الأقل، وبرهن كذلك أن المساواة تتحقق للبيان K_8 بإيجاد بيان سوي ذاتي التتام له ثمانية رؤوس (تعليق: يساوي السمك $\left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$ ما عدا K_9 K_{10} حيث سُمك كلّ منهما يساوي 3 تجد الحدود العليا عندما $n > 10$ موجودة في (BeineKe –Harary [1965]) وذلك عندما $n \not\equiv 4 \bmod 6$ وفي (AleKsee GonČaKov [1976])عندما يكون: $n \equiv 4 \bmod$.

18.3.6. فكّك K_9 إلى ثلاثة بيانات سوية متشاكلة زوجًا زوجًا.

19.3.6. إذا كان سُمك G يساوي 2، فبرهن أن $\chi(G) \le 12$ استخدم البيانين الموجودين أدناه لتبرهن أن $\chi(G)$ يمكن أن تكون كبيرة، وتصل إلى 9 عندما يكون سُمك G يساوي 2، (T.SulanKe).



20.3.6. (!) عندما يكون r عددًا زوجيًّا و $s > {(r-2)^2}/{2}$، فبرهن أن سُمك $K_{r,s}$ يساوي r/2 ،(BeineKe-Harrary-moon [1964]).

21.3.6. حدد قيمة $\nu(K_{1,2,2,2})$ واستخدمها لحساب $\nu(K_{2,2,2,2})$.

22.3.6. أثبت أنه لا يوجد بيان جزئي سوي من $K_{3,2,2}$ بحيث يكون لهذا البيان الجزئي 15 ضلعًا، واستخدم هذا لتعطي إثباتا ثانيًا لحقيقة أن $\nu(K_{3,2,2}) \ge 2$.

23.3.6. ليكن M_n البيانَ الذي نحصل عليه من الحلقة C_n بإضافة أوتار تربط بين الرؤوس المتقابلة (إذا كان n عددًا زوجيًّا)، وتربط بين الرؤوس شبه المتقابلة (إذا كان n عددًا فرديًّا). إن البيان M_n منتظم من الدرجة 3 إذا كان n زوجيًا، ومنتظم من الدرجة 4 إذا كان n عددًا فرديًّا. جد $\nu(M_n)$، (Guy-Harary [1967]).

24.3.6. البيان P_n^k له مجموعة رؤوس $[n]$، ومجموعة أضلاع هي: $\{ij: |i-j| \le k\}$، أثبت أن P_n^3 بيانٌ سوي أعظمي، استخدم طمرًا سويًّا للبيان P_n^3 لتبرهن أن: $\nu(P_n^4) = n - 4$ (Harary – Kainen [1993]).

25.3.6. (+) لكلّ عدد صحيح موجب k، ابن (جد) بيانًا يمكن طمره على الطارة إلا أن رسمه في المستوى يحوي K تقاطعًا على الأقل (مساعدة: يكفي إعطاء عائلة طاريّة (يمكن طمرها على الطّارة) واحدة بحيث تكون سهلة الوصف: استخدم القضية 13.3.6).

26.3.6. (!) استخدم حساب كليتمان $\nu(K_{6,n}) = 6\left\lfloor \frac{n-6}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor$ لتعطي تعليلاً حسابيًّا (عدّيًّا) للحدود الدنيا التالية:

a) $\nu(K_{m,n}) \ge m \frac{m-1}{5} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ ،(Guy [1970]).

b) $\nu(K_p) \ge \frac{1}{80} P^4 + O(P^3)$ ،

27.3.6. (!) لقد تم تخمين أن $\nu(K_{m,n})=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m-1}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$. افترض أن هذه المخمنة صحيحة لـ $K_{m,n}$، وأن m عدد فردي. أثبت أن هذه المخمنة صحيحة كذلك لـ $K_{m+1,n}$، (KLeitman [1970]) .

28.3.6.(!) افترض أن m و n عددان فرديان، وبرهن أن نوعية عدد أزواج الأضلاع المتقاطعة تكون نفسها في رسوم $K_{m,n}$ جميعها (نأخذ في الحسبان الرُّسوم التي تتقاطع فيها الأضلاع مرة واحدة على الأكثر فقط، مع الأخذ في الحسبان أيضًا أن الأضلاع التي لها النقطة الطرفية نفسها لا تتقاطع) استنتج أن $\nu(K_{m,n})$ يكون فرديًّا عندما يكون كلّ من $m - 3$ و $n - 3$ قابلاً للقسمة على 3، ولكنه يكون زوجيًّا بخلاف ذلك.

29.3.6. افترض أن n عدد فردي، أثبت أن نوعية عدد أزواج الأضلاع المتقاطعة تكون نفسها. استنتج أن $\nu(K_n)$ يكون زوجيًّا عندما يكون n مكافئًا لواحد أو ثلاثة بمقياس 8 (أي عندما $n \equiv 1 \mod 8$، أو $n \equiv 3 \mod 8$)، ويكون فرديًّا عندما يكون n مكافئًا لـ 5 أو 7 بمقياس 8.

30.3.6. (!) من المعلوم أن $\nu(C_m \square C_n) = (m-2)n$ إذا كانت $m \le \min\{5,n\}$، وكذلك $\nu(K_4 \square C_n) = 3n$:

a) جد رسمًا في المستوى لإثبات الحدود العليا.

b) أثبت أن $\nu(C_3 \square C3) \ge 2$. (مساعدة: جد ثلاثة تقسيمات لـ $K_{3,3}$، بحيث تستخدم هذه التقسيمات مجتمعة كلّ ضلع مرتين).

31.3.6. اجعل $f(n)=\nu(K_{n,n,n})$:

a) أثبت أن $3\nu(K_{n,n}) \le f(n) \le 3\binom{n}{2}^2$.

b) أثبت أن $\nu(K_{3,2,2}) = 2$ و $\nu(K_{3,3,1}) = 3$. ثم أثبت أن $7 \le \nu(K_{3,3,2}) \le 5$، و $9 \le \nu(K_{3,3,3}) \le 15$.

c) يبرهن التمرين 3.6. $26a$ أن الحد الأدنى في فرع (a) يساوي $\left(3/20\right)n^4+O(n^3)$ على الأقل حَسِّن هذا الحد باستخدام علاقة خطوات مكررة لإثبات أن $f(n) \ge n^3(n-1)/6$.

d) إنّ الحدّ الأعلى في الفرع (a) هو $\frac{3}{4}n^4+O(n^3)$، حَسِّن هذا الحدّ إلى الحدّ $f(n) \le \frac{9}{16}n^4+O(n^3)$. (مساعدة: أحد البناءات يطمر البيان في رباعيّ السّطوح (tetrahedron) ويعمم لبناء $K_{L,m,n}$، وهناك بناء آخر يستخدم K_n، ويعمّم لبناء $K_{n,\ldots,n}$).

32.3.6.(*) جدّ (ابن) طمرًا على الطارة لبيان بسيط غير ثنائي الفرع منتظم من الدرجة 3 بحيث يكون طول كلّ وجه فيه عددًا زوجيًّا.

33.3.6. (*) افترض أن n عدد يساوي 9 على الأقل، بحيث إن n ليس عددًا أوليًّا، وليس ضعفًا لعدد أولي. جد (ابن) بيانًا على الطارة (يمكن رسمه على الطارة دون تقاطعات) بحيث يكون له n رأسًا، ويكون منتظمًا من الدرجة 6.

34.3.6.(*) نقول: إن طمرًا لبيان على سطح معين يكون منتظمًا إذا كان لوجوهه جميعها الطول نفسه جد طمرًا منتظمًا على الطارة لكلّ من: $K_{4,4}$ ، و$K_{3,6}$، و $K_{3,3}$.

35.3.6.(*) أثبت صيغة أويلر للجنس γ: إن عدد رؤوس أي طمر وأضلاعه وأوجهه لخلية ثنائية لبيان على سطح $S\gamma$ يحقق العلاقة $n - e + f = 2 - 2\gamma$.

استنتج من ذلك أنه يوجد $3(n - 2 + 2\gamma)$ ضلعًا على الأكثر لبيان بسيط له n من الرؤوس، وقابل للطمر على S_γ.

36.3.6.(*) استخدم صيغة أويلر لـ S_γ لتبرهن أن $\gamma(K_{3,3,n}) \ge n-2$. وحدد هذه القيمة بالضبط عندما $n \le 3$.

37.3.6.(*). لكلّ عدد صحيح موجب k، استخدم صيغة أويلر لتبرهن أنه يوجد بيان سوي G، بحيث إن $\gamma(G \square K_2) \ge k$.