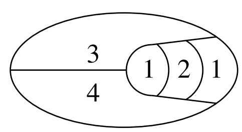
الفصل الخامس

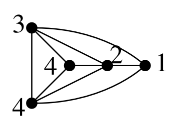
تلوين البيانات (Coloring of Graphs)

1.5. تلوين الرؤوس والحدود العليا (Vertex Coloring and Upper Bounds)

استخدمنا تلوين البيانات في مثال تحديد مواعيد اجتماعات اللجان (المثال 11.1.1) من أجل إيجاد نموذج لهذه الاجتماعات، بحيث لا يكون لأي عضو لجنة اجتماعان في الوقت نفسه. وفي الجامعة مثلاً، فإننا نرغب بتحديد مواعيد الاختبارات النهائية بحيث لا يجتمع اختباران في الوقت نفسه لأي طالب. إن عدد المواعيد اللازمة هو العدد اللوني للبيان الذي يتجاور فيه مقرران إذا وُجِدَ طالب قد سجّل في هذين المقررين معًا.

إن تلوين مناطق خريطة معينة بحيث تكون ألوان المناطق المتجاورة مختلفة يعد مثالاً آخر. وسنعود إلى هذا المثال في الفصل 6. يوجد للخريطة التي عن يسار الشكل أدناه خمسُ مناطق، ويكفي أربعة ألوان لتلوينها. يعطي البيانان الموجودان عن يمين الشكل أدناه نموذجًا لعلاقة "الحدود المشتركة" والألوان المرتبطة بذلك. وتعدّ تسمية (أو وضع علامات دالة على) الرؤوس مرجعًا لمسائل التلوين.





تعريفات وأمثلة (Definitions and Examples)

إن اسم تلوين البيانات مأخوذ من تطبيق تلوين الخرائط، ونحدّد عادة بتحديد علامات دالة (تسميات) للرؤوس. وفي الحالة التي لا تكون فيها أهمية للقيمة العددية للعلامة الدالة، فإننا نسمي هذه العلامات «ألوانًا»؛ حتى نبين أن هذه العلامات يمكن أن تكون عناصر لأي مجموعة.

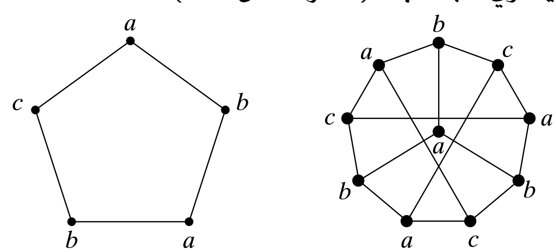
1.1.5. تعريف: إن التلوين من الدرجة k لبيان G هو تسمية $f: v(G) \to S$، حيث $|S| = k$ (غالبًا نستخدم $S = [k]$). العلامات الدالة (التسميات) هي الألوان، ونطلق اسم صف اللون (لوني) على مجموعة الرؤوس التي لها اللون نفسه. ونقول: التلوين من الدرجة k تلوين مناسب (فعلي) إذا وُجدت ألوان مختلفة للرؤوس المتجاورة. ونقول: البيان قابل للتلوين من الدرجة k إذا وُجد له تلوين فعلي (مناسب) من الدرجة k؛ أي إذا أمكن تلوينه فعليًّا بـ k من الألوان.

يُعرَّف العدد اللوني $\chi(G)$ على أنه أصغر عدد k، بحيث يكون البيان G قابلاً للتلوين بـ k من الألوان.

2.1.5. ملحوظة: التلوين الفعلي لبيان G يُقسم مجموعة الرؤوس إلى صفوف لونية، وكل صف لون يكون مجموعة مستقلة. لذا، يكون البيان قابلاً للتلوين بـ k من الألوان إذا وفقط إذا كانت $V(G)$ اتحاداً لـ k من المجموعات المستقلة. لهذا، فمصطلح قابل للتلوين بـ k من الألوان، ومصطلح مجزأ إلى k من الأجزاء (أو مجزأ من الدرجة k) كذلك لهما المعنى نفسه. (المصطلحان يختلفان في الاستعمال؛ فغالبًا، نستخدم مجزأ إلى k من الأجزاء بوصفه فرضًا بنيويًّا، أما قابل للتلوين من الدرجة k فهو نتيجة لحل مسألة أمثلية معينة).

إن البيانات ذات النشط غير قابلة للتلوين؛ لأنه لا يمكن إعطاء الرأس لونين مختلفين. لذا، فإننا سنتعامل في هذا الفصل مع البيانات الخالية النشط فقط. وكذلك، فإن الأضلاع المكررة غير ذات صلة بهذا الموضوع؛ لأن النسخ الإضافية من الأضلاع لا تؤثر في التلوين. لذا، سيكون في ذهننا البيانات البسيطة فقط عند الحديث عن التلوين، وسنقوم بتسمية الأضلاع بدلالة نقاطها الطرفية. إن معظم العبارات التي تكتب دون شرط وجود بيان بسيط تبقى صحيحة في حالة السماح بوجود أضلاع مكررة. ■

3.1.5. مثال: بما أن أي بيان يكون قابلاً للتلوين بلونين إذا وفقط إذا كان بيانًا ثنائي الفرع، فإن العدد اللوني لكل من البيان C_5، بيان بيترسون يساوي 3 على الأقل. وبما أنه يمكن تلوين كل منهما بثلاثة ألوان، فإن العدد اللوني لكل منهما يساوي 3 بالضبط (انظر الشكل أدناه). ■



4.1.5. تعريف: نقول: البيان G لوني من الدرجة k (k – chromatic) إذا كان $\chi(G)=k$. ونُعرِّف التلوين الأمثل لبيان لوني من الدرجة k على أنه تلوين فعلي للبيان بـ k من الألوان. إذا كان $\chi(H) < \chi(G) = k$ لكل بيان جزئي فعلي من البيان G، فنقول: إن البيان G حرج (حاسم) لونيًّا، أو حرج من الدرجة k.

5.1.5. مثال: البيانات الحرجة من الدرجة k لقيم k الصغيرة. إن التلوين الفعلي للبيان يحتاج إلى لونين على الأقل إذا وفقط إذا وُجِدَ للبيان ضلع. ولهذا، فإن K_2 هي البيان الفريد الحرج من الدرجة 2 (وبالمثل، فإن K_1 هي البيان الفريد الحرِج من الدرجة1). وبما أن البيان ثنائي اللون (2–Colorable) هو نفسه ثنائي الفرع، فإن التوصيف المميز للبيانات الثنائية الفرع يبين لنا أن البيانات الحرجة من الدرجة 3 هي الحلقات الفردية.

نستطيع اختبار ثنائية اللون لبيان G عن طريق إيجاد بعد رؤوس البيان عن رأس معين x (في كل مركبة). اجعل $X=\{u \in V(G): d(u,x) = \text{عددًا زوجيًّا}\}$، $Y=\{u \in v(G): d(u,x) = \text{وعددًا فرديًّا}\}$. إن البيان G يكون بيانًا ثنائي الفرع إذا وفقط إذا كانت كلٌّ من X و Y تجزئة ثنائية لرؤوس G. بمعنى، إذا كانتا مجموعتين مستقلتين. لا يوجد توصيف جيد للبيانات الحرجة من الدرجة 4، فضلًا عن أنَّه لا يوجد اختبار معروف لاختبار البيانات القابلة للتلوين من الدرجة 3. ملحق B يناقش بعض التشعبات الحسابية (computational ramifications) ■

6.1.5. تعريف: نعرف عدد العصبة (**clique number**) لبيان G الذي نرمز إليه بالرمز $\omega(G)$ على أنه أكبر حجم لمجموعة من الرؤوس المتجاور زوجًا زوجًا (عصبة) في G.

استخدمنا $\alpha(G)$ لترمز إلى عدد استقلال البيان G، واستعمال $\omega(G)$ مماثل لذلك، حيث يمثل الحرفان α و ω

أول حرف من الحروف الهجائية اليونانية وآخر حرف منها، واستخدام هذين الحرفين منسجم مع رؤية أن المجموعات المستقلة والعصب تمثل بداية تطور البيان ونهايته (انظر الدرس 5.8). ■

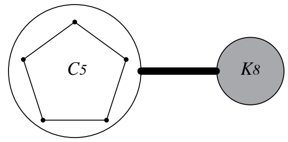
7.1.5. فرضية: لكل بيان G يتحقق أن $\omega(G)$ ، $\geq (G), \chi(G)$ وأن $\chi(G) \geq \frac{n(G)}{a(g)}$.

الإثبات: الحد الأول يتحقق؛ لأن رؤوس أي عصبة تتطلب ألوانًا مختلفة، أما الحد الثاني فيتحقق؛ لأن كل صف لوني هو مجموعة مستقلة. لذا، فإن هذا الصف يحوي $a(G)$ رأسًا على الأكثر.

{إن الحدين في الفرضية 7.1.5. محكمان عندما يكون G بيانًا تامًّا}

8.1.5. مثال: من الممكن أن يكون $\chi(G) \geq \omega(G)$. إذا كانت $r \geq 2$، فاجعل $G=C_{2r+1} \vee K_s$ (ربط أو ضم C_{2r+1} مع K_S – انظر التعريف 6.3.3). بما أنه لا توجد مثلثات في C_{2r+1}، فإن $\omega(G) = s + 2$.

التلوين الفعلي للحلقة المستحدثة يتطلب ثلاثة ألوان على الأقل. فضلًا عن أنّ العصبة التي عدد عناصرها s، تحتاج إلى s من الألوان، وبما أن كل رأس في الحلقة يجاور كل رأس في العصبة، فإن الـ s لونًا يجب أن تكون مختلفة عن الألوان الثلاثة الأولى. لذا، فإن $\chi(G) \geq s + 3$. ومن هذا نستنتج أن $\chi(G) \geq \omega(G)$. ■



تناقش التمارين 23 - 30 العدد اللوني لبعض العائلات الخاصة من البيانات. وكذلك نستطيع أن نسأل عن العدد اللوني للبيانات الناتجة عن إجراء بعض العمليات على هذه البيانات فمثلًا:

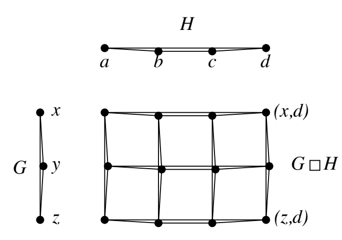
$\chi(G + H) = \max\{\chi(G),\chi(H)\}$ و $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$.

ستعرض فيما يأتي، سنعرض لعملية أخرى على البيانات.

9.1.5. تعريف: نُعرِّف الضرب الكارتيزي للبيانين G و H على أنه البيان الذي نرمز إليه بالرمز $G \square H$، والذي مجموعة رؤوسه هي: $V(G) \times V(H)$، ويكون فيه الرأس (u, v) مجاورًا للرأس (u', v') إذا وفقط إذا تحقق أن (1) $u = u'$ و $vv' \in E(H)$. أو (2) $v = v'$ و $uu' \in E(G)$.

10.1.5. مثال: عملية الضرب الكارتيزي متماثلة، أي أن $G \square H \cong H \square G$. في الشكل أدناه، تجد بيان $C_3 \square C_4$ إن المكعب الزائدي أيضًا هو مثال على هذا الضرب؛ لأن $Q_k = Q_{k-1} \square K_2$ عندما $k \geq 1$. بالإضافة إلى أنّ الشبكة المتسامتة (شبكة، أبعادها الأفقية والعمودية متساوية) من الحجم m في $(m - by - n)$ تمثل الضرب الكارتيزي $P_m \square P_n$.

وعمومًا، يتفكك البيان $G \square H$ إلى نسخ من H لكل رأس من G، ونسخ من G لكل رأس من H أيضًا (التمرين 10). ونستخدم الرمز □ بدلًا من × لتجنب الخلط مع أنواع الضرب الأخرى، إضافة إلى أنّنا نحتفظ بالرمز × لحاصل الضرب الكارتيزي بين مجموعات الرؤوس، لقدأدخل الرمز □ واستُعمل من قبل نسترل (Ne šetřil)، وهذا الرمز يستحضر (evokes) المتطابقة $K_2 \square K_2 = C_4$. ■



11.1.5. فرضية : (vizing [1963]. Aberth [1964]).

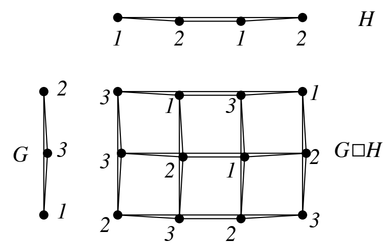
.$x(G \square H) = \max \{\chi(G), \chi(H)\}$

الإثبات: إن الضرب الكارتيزي $G \square H$ يحوي نسخًا من G و H بوصفه بيانات جزئية. لذا، فإن

.$X(G \square H) \geq \max \{\chi(G), \chi(H)\}$

افترض أن$k = \max \{\chi(G), \chi(H)\}$. لبرهان الحد الأعلى؛ سنجد تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان $G \square H$ باستخدام تلوين أمثل لكل من G وH. افترض أن g تلوين فعلي من الدرجة $\chi(G)$ للبيان G، و أن H تلوين فعلي من الدرجة $\chi(H)$ للبيان H. عرِّف تلوينًا f للبيان $G \square H$ وذلك من خلال تعريف $f\,(u,v)$ على أنها صف التكافؤ الذي يمثل باقي قسمة $g(u) + h(v)$ على k. لذا، فإن $f\,(u,v)$ تُحدد ألوانًا للمجموعة $V\,(G \square H)$ من مجموعة ألوان عددها k.

ندعي أن f تلون $G \square H$ تلوينًا فعليًّا. إذا كان الرأس (u,v) يجاور الرأس (u',v') في $G \square H$، فإن $g(u) + h\,(v)$ و $g(u') + h\,(v')$ يتفقان في أحد المجموعين، ويكون الفرق بينهما عددًا بين 1 و k أخيرًا. وبما أن الفرق بين المجموعين يقع بين 1 و k، فإنهما يقعان في صفوف تكافؤ مختلفة عند القسمة على k. ■



يسمح لنا الضرب الكارتيزي بحساب الأعداد اللونية عن طريق حساب أعداد الاستقلال؛ لأن البيان G يكون قابلاً للتلوين من الدرجة k إذا وفقط إذا وجد للبيان $G \square k_m$ مجموعة مستقلة عدد عناصرها يساوي $n(G)$ (التمرين 31).

الحدود العليا (Upper Bounds)

معظم الحدود العليا على الأعداد اللونية تأتي من خوارزميات تستخدم في إيجاد تلوين لبيان معين. فعلى سبيل المثال، نجد أن $\chi(G) \leq n(G)$ من خلال تحديد ألوان رؤوس G. إن هذا الحد هو أفضل ما يمكن لبعض البيانات مثل البيان التام K_n الذي عدده اللوني يساوي n. لاحظ أنه باستطاعتنا تحسين أفضل حد ممكن عن طريق إيجاد حد مواصفاته على الأقل كمواصفات أفضل حد. فمثلاً، الحد $\chi(G) \leq n(G)$ لا يستخدم أي شيء يتعلق ببنية G، ويمكن أن نعمل أفضل من هذا بواسطة تلوين الرؤوس بترتيب معين باستخدام اللون "الأقل توافرًا" ودائمًا.

12.1.5. خوارزمية. (التلوين الجشع). نحصل على التلوين الجشع بالنسبة إلى الترتيب $v_1, ..., v_n$ لعناصر $V(G)$ عن طريق تلوين هذه الرؤوس بحسب الترتيب $v_1, ..., v_n$ وذلك من خلال تلوين الرأس: v_i باللون الذي دليله أقل ما يمكن، والذي لم يستخدم سابقًا كلون على جيران v_i ذات الدليل السفلي الأصغر. ■

13.1.5. فرضية : $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

الإثبات: في أي ترتيب للرؤوس، يوجد لكل رأس $\Delta(G)$ جارًا (سابقًا في الترتيب) على الأكثر. لذا، فإن التلوين الجشع لا يستخدم أكثر من $\Delta(G) + 1$ لونًا. وهذا يعطي برهانًا استنتاجيًّا للعلاقة $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. ■

إن الحد $\Delta(G) + 1$ هو أسوأ حد أعلى ينتج عن التلوين الجشع (على الرغم من أنه أفضل ما يمكن للبيانات التامة وللحلقات الفردية). إن اختيار ترتيب الأضلاع بحرص يقود إلى تحسينات على الحد الأعلى،

إذ يمكننا تجنب المشاكل الناتجة عن الرؤوس التي درجتها عالية بوضعها في بداية الترتيب؛ حيث لا يكون لها جيران كُثُر تسبق في الترتيب (انظر التمرين 36 من أجل ترتيبٍ أفضل).

14.1.5. فرضية: (welsh – Powell [1967]) إذا كانت $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ هي متتالية درجات بيان G، فإن $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min \{d_i, i-1\}$.

الإثبات: طبق التلوين الجشع على رؤوس G بعد ترتيبها ترتيبًا غير متزايد بحسب درجاتها. عندما نلون الرأس v_i، نلاحظ أنه يوجد على الأكثر $\min \{d_i, i-1\}$ جارًا سابقًا لـ v_i، لذا يظهر على الأكثر هذا العدد من الألوان على جيران v_i التي تسبقها في الترتيب. إذن، فإن رقم اللون الذي نعيّنه للرأس v_i يساوي على الأكثر $1 + \min\{d_i, i-1\}$.

إن هذا يتحقق لكل رأس. لذا، نجد القيمة العظمى على i للحصول على حد أعلى لأكبر عدد مستخدم من الألوان. ■

إن الحد الأعلى الموجود في الفرضية 14.1.5 يكون دائمًا أقل من $1 + \Delta(G)$ أو يساويه. لذا، فإن هذا الحد لا يقل جودة عما هو موجود في الفرضية 13.1.5. حيث إنها تعطي حدًّا أعلى أمثل في المثال 8.1.5. في حين نستخدم التلوين الجشع استنادًا إلى ترتيب جيد نختاره. وفي الحقيقة، يوجد ترتيب لرؤوس كل بيان بحيث إن الخوارزمية الجشعة تستخدم $\chi(G)$ لونًا فقط (التمرين 33). ويكون من الصعب إيجاد مثل هذا الترتيب عادة.

نفترض في المثال الآتي لصف من البيانات التي يسهل فيها إيجاد مثل هذا الترتيب الذي ينتج تلوينًا يحقق المساواة في الحد $\chi(G) \geq w(G)$.

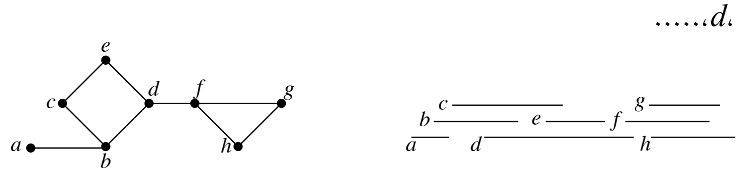
15.1.5. مثال: تحديد مواقع السجلات وبيانات الفترات. يخزّن برنامج حاسوب قيم المتغيرات في مواقع تسمّى سجلات يسهل الوصول إليها. إن السجلات مكلفة وغير رخيصة. لذا، فإننا نرغب باستخدامها بفاعلية.

إذا وُجد متغيران لا يُستخدمان في الوقت نفسه، فيمكن وضعهما في السجل نفسه. لكل متغير، نرصد أول وآخر وقت استخدم فيه المتغير. ويكون المتغير نشطًا خلال الفترة بين هذين الوقتين.

نعرف بيانًا رؤوسه هذه المتغيرات، ويكون أيّ رأسين متجاورين إذا كانا نشطين على زمن مشترك. إن عدد السجلات اللازمة هي العدد اللوني لهذا البيان. وأن الوقت الذي يكون فيه المتغير نشطًا هو فترة. لذا، فإننا نحصل على نوع خاص من التمثيل للبيان.

تمثيل البيان بواسطة الفترات يعني تحديد عائلة من الفترات لرؤوس هذا البيان، بحيث يكون أي رأسين متجاورين إذا كانت الفترات الممثلة لهما متقاطعة، ويسمى البيان الذي له مثل هذا التمثيل بيانَ فترة.

إذا كانت h, g, f, e, d, c, b, a ترتيبًا لرؤوس بيان الفترة الموضع أدناه، فإن التلوين الجشع يحدد الألوان 1، 2، 1، 3، 2، 1، 2، 3 على الترتيب، وهذا مثالي. لاحظ أن التلوين الجشع يحدد أربعة ألوان للترتيب d، a...... ■



16.1.5. فرضية: إذا كان G بيان فترة، فإن $\chi(G) \equiv w(G)$.

الإثبات: رتّب رؤوس G بحسب الطرف الأيسر للفترات في تمثيل للبيان G بواسطة الفترات. عيّن تلوينًا جشعًا لرؤوس G، وافترض أن الرأس x يأخذ اللون k الذي هو أكبر لون تم تحديده، وبما أن x لا تأخذ لونًا أقل، فإن الطرف الأيسر a لفترة الرأس x ينتمي إلى الفترات التي لونت سابقًا بالألوان من 1 إلى $K-1$. تشترك هذه الفترات في النقطة a، لذا، لدينا عصبة من الدرجة k تتألف من x، ومن جيران x التي لونت بالألوان من 1 إلى $k-1$. لذا، فإن $w(G) \geq k \geq \chi(G)$. وبما أن $\chi(G) \geq w(G)$ دائمًا، فإن هذا التلوين هو الأمثل. وبذلك نحصل على النتيجة المطلوبة. ■

17.1.5. ملحوظة: إن عمل خوارزمية التلوين الجشع سريع، وهي دائمًا جاهزة للاستخدام، بمعنى أنها تعطي تلوينًا فعليًّا حتى في الحالة التي ترى فيها رأسًا واحدًا فقط في كل خطوة، ويجب أن يلوّن هذا الرأس مع عدم وجود خيار لتغيير الألوان السابقة (المستخدمة سابقًا).

إذا رُتبت الرؤوس عشوائيًّا في بيان عشوائي (انظر الدرس 5.8)، فإن التلوين الجشع يستخدم في أغلب الأحيان ضعف عدد الألوان المستخدمة في حدها الأدنى تقريبًا، على الرغم من أنه يستخدم العديد من الألوان لتلوين شجرة في حال الترتيب السيئ (التمرين 34). ■

لقد بدأنا بالتلوين الجشع للتأكيد على الوجه البنيوي لحدود العدد اللوني العليا. تتبع بعض الحدود الأخرى خواص البيانات الحرجة من الدرجة k، ولكنها لا تنتج تلوينًا فعليًّا: فكل بيان لوني من الدرجة k يحوي بيانًا جزئيًّا حرجًا من الدرجة k، ولكن لا توجد خوارزمية جيدة لإيجاد مثل هذا البيان الجزئي. سنشتق الحد التالي عن طريق استخدام البيانات الجزئية الحرجة i، ويمكن كذلك برهان هذا الحد عن طريق التلوين الجشع (التمرين 36).

18.1.5. بديهية: إذا كان H بيانًا حرجًا من الدرجة K، فإن $\delta(H) \geq k-1$.

الإثبات: افترض أن x رأس من رؤوس H. بما أن H حرج من الدرجة K، فإن $H-x$ قابل للتلوين بـ $k-1$ من الألوان. وإذا كانت $d_H(x) < k-1$، فإن الـ $k-1$ لونًا المستخدمة في تلوين $H-x$ لا تظهر جميعها على $N(x)$. لذا، نعطي x لونًا لم يستخدم على $N(x)$ للحصول على تلوين من الدرجة $k-1$ للبيان H. وهذا يعارض الفرض $\chi(H)=k$. إذن، نستنتج أن $d_H(x) \geq k-1$ (لكل $x \in v(H)$). ■

19.1.5. نظرية: (Szekeres−Wilf [1968]). إذا كان G بيانًا، فإن $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. ■

الإثبات: افترض أن $k = \chi(G)$ و H' بيان جزئي (من G) حرج من الدرجة k. من البديهية 18.1.5، نستنتج أن: $\chi(G) - 1 = \chi(H') - 1 \leq \delta(H') \leq \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. ■

إن الحد الذي نحصل عليه فيما يأتي يتضمن استخدام توجيه للبيان (انظر التمارين 43 –45).

20.1.5. مثال: إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع، فإن توجيه G الذي يوجه كل ضلع من أحد مجموعتي التجزئة إلى المجموعة الأخرى لا يحوي مسارًا (موجهًا) طوله أكثر من 1. لذا، فإن النظرية الآتية تضمن أن $\chi(G) \leq 2$.

كل توجيه لحلقة فردية يجب أن يحوي في مكانٍ ما ضلعين متتابعين في الاتجاه نفسه. لذا، فإن كل توجيه يحوي مسارًا طوله 2 على الأقل. وتؤكد النظرية على أن كل حلقة فردية تكون ثلاثية اللون. ■

21.1.5. نظرية: نظرية جالاي، وروي، وفيتافر (Gallai [1968]، Roy [1967]، Vitaver [1962])، إذا كان D توجيهًا للبيان G بحيث يساوي طول أطول مسار فيه $L(D)$، فإن $\chi(G) \leq 1 + l(D)$. بالإضافة إلى ذلك، فإن المساواة تتحقق في بعض توجيهات G.

الإثبات: افترض أن D توجيه للبيان G، وافترض أن D' أكبر بيان جزئي موجه من D لا يحوي أي حلقة

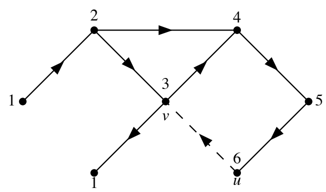
(في المثال أدناه، uv الضلع الفريد الموجود في D وغير الموجود في D'). لاحظ أن D' تحوي رؤوس G جميعها. لون $V(G)$ بجعل $f(v)$ تساوي 1 زائد طول أطول مسار في D' ينتهي عند v.

افترض أن P مسار في D'، وافترض كذلك أن u أول رأس من رؤوس P. وبما أن D' لاحلقي، فإن كل مسار في D' ينتهي عند u (بما في ذلك أطول مسار من هذه المسارات) قابل للإطالة مع P، وهذا يضمن أن f دالة متزايدة على كل مسار في D'.

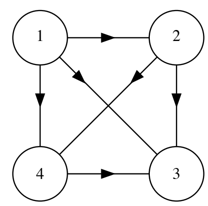
التلوين f يستخدم الألوان من 1 إلى $l(D) + 1$ على $V(D')$ (وهي $V(G)$ أيضًا). ندعي أن f تلوين فعلي للبيان G. لاحظ أنه يوجد لكل ضلع $uv \in E(D)$ مسار في D' بين طرفيه (لأن uv ضلع في D'، أو أن إضافته إلى D'، تنتج حلقة (هذا يضمن أن $f(u) \neq f(v)$؛ لأن f متزايد على المسارات في D'.

لبرهان العبارة الثانية؛ سنجد توجيه D^* بحيث إن $l(D^*) \leq \chi(G) - 1$. افترض أن f تلوين أمثل لـ G. لكل ضلع uv في G، أعط توجيهًا من u إلى v في D^* إذا وفقط إذا تحقق أن $f(u) < f(v)$. وبما أن f تلوين فعلي، فإن هذا يعرِّف توَجيهًا.

الآن، بما أن العلامات الدالة التي تضعها f تتزايد عبر كل مسار في D^*، وبما أنه يوجد $\chi(G)$ علامة دالة فقط في f، إذن، $l(D^*) \leq \chi(G)-1$. ■



D و D`



D^*

نظرية بروكس (BROOKS' THEOREM)

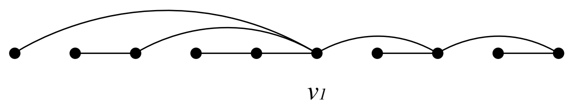
إن الحد $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ يتحقق بالمساواة للبيانات التامة والحلقات الفردية، وباختيارنا لترتيب الرؤوس بحذر شديد، نستطيع إثبات أن هذه هي البيانات الفريدة التي تتحقق فيها المساواة. وهذا يعطينا على سبيل المثال أن بيان بيترسون ثلاثي اللون دون أن نجد هذا التلوين صراحةً. ولتجنب التعقيدات غير المهمة، فنصوغ النظرية للبيانات المترابطة فقط، ويمكن تعميمها على البيانات جميعها؛ لأن العدد اللوني للبيان يساوي أكبر عدد لوني لمركباته، توجد عدة براهين معروفة لهذه النظرية، ولكننا سنعتمد برهان لوفاز (Lovász [1975]) مع إجراء بعض التعديل.

22.1.5. نظرية. (Brooks [1941]) إذا كان G بيانًا مترابطًا بحيث إنه ليس بيانًا تامًّا وليس حلقةً فردية، فإن $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

الإثبات: افترض أن G بيان مترابط، وافترض كذلك أن $k = \Delta(G)$. لاحظ أننا نستطيع افتراض أن $k \geq 3$؛ لأن G يكون بيانًا تامًّا عندما $k \leq 1$، ويكون حلقةً فرديةً أو بيانًا ثنائي الفرع عندما $k = 2$، ويتحقق الحد في هذه الحالات جميعها.

هدفنا هو ترتيب الرؤوس، بحيث يوجد على الأكثر k - 1 جارًا بدليل أقل (أصغر) لكل رأس من هذه الرؤوس؛ حيث إن التلوين الجشع لمثل هذا الترتيب يعطينا الحد المنشود.

في الحالة التي لا يكون فيها G منتظمًا من الدرجة k، فنستطيع اختيار رأس درجته أقل من k ليكون v_n. وبما أن G مترابط، فبإمكاننا إنبات شجرة مولدة من v_n حيث نحدد الدليل بترتيب متناقص حال وصولنا إلى الرؤوس. يوجد لكل رأس مختلف عن v_n في الترتيب الناتج v_1، ...، v_n جار دليله أعلى وذلك على المسار إلى v_n في هذه الشجرة. لذا، يوجد لكل رأس $k - 1$ جارًا على الأكثر دليلي كل منها أقل من دليل ذلك الرأس، والتلوين الجشع يستخدم k لونًا على الأكثر.



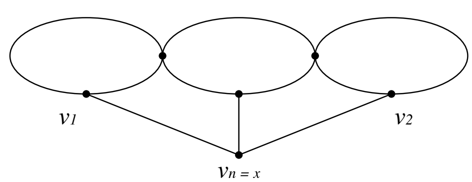
في الحالة المتبقية، افترض أن G منتظم من الدرجة k، وافترض كذلك أولاً أنه يوجد لـ G رأس قطع x، وافترض أيضًا أن G' بيان جزئي من G مؤلف من مركبة من مركبات $G - x$ بالإضافة إلَى أضلاع هذه المركبة جميعها إلى x.

إن درجة x في G' تقل عن k. لذا، فإن الطريق السابق أعلاه يعطينا تلوينًا فعليًّا من الدرجة k لـ G'. وبتبديل أسماء الألوان في البيانات الجزئية بهذه الطريقة من مركبات $G - x$، نستطيع دائمًا أن نعطي لـ x اللون نفسه من أجل الحصول على تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G. لذا، نستطيع افتراض أن G مترابط من الدرجة 2. لاحظ أنه في أي ترتيب للرؤوس يوجد k جارًا سابقًا للرأس الأخير، فكرة التلوين الجشع يمكن أن تنجح إذا استطعنا ترتيب الأمر بحيث يأخذ جارًا v_n اللون نفسه.

وعلى وجه الخصوص، افترض أن جاري الرأس v_n هما: v_1 , v_2 وأن $v_1 \not\leftrightarrow v_2$ وأن $G - \{v_1,v_2\}$ مترابط. في هذه الحالة، نضع دليلاً على رؤوس شجرة مولدة للبيان $G - \{v_1,v_2\}$ مستخدمين الأعداد 3، ...، n بحيث تتزايد هذه العلامات الدالة عبر المسارات إلى الجذر v_n. كما في السابق، يوجد لكل رأس قبل v_n، $k - 1$ جارًا على الأكثر، دليل كل منها أقل من دليل v_n. ويستخدم التلوين الجشع $k - 1$ لونًا على الأكثر على هذه الجيران؛ لأن v_1 وv_2 لهما اللون نفسه. لذا، يكفي أن نثبت وجود ثلاثية: v_1، v_2، v_n لكل بيان منتظم من الدرجة k ومترابط من الدرجة 2 بحيث إن $k \geq 3$. اختر رأسًا x، إذا كان $\kappa\,(G - x) \geq 2$، فافترض أن v_1 هي x، وأن v_2 هي رأس بعده عن x يساوي 2. إن مثل هذا الرأس v_2 يكون موجودًا؛ لأن G منتظم وليس بيانًا تامًّا. الآن، افترض أن v_n هي جار مشترك لكل من v_1 وv_2.

إذا كان $\kappa\,(G - x) = 1$، فاجعل $v_n = x$. بما أنه لا يوجد لـ G رأس قطع، فإن لـ x جارًا في كل قالب أوراق لـ $G - x$.

إن جاري x؛ v_1 وv_2 الموجودين في قالبين من هذه القوالب غير متجاورين. وكذلك فإن $G - \{x, v_1, v_2\}$ مترابط؛ بسبب عدم وجود رؤوس متقاطعة للقوالب. وبما أن $k \geq 3$، فإن هناك جارًا آخر لـ x، ويكون $G - \{v_1, v_2\}$ مترابطًا. ■



23.1.5. ملحوظة*. إذا لم يوجد للبيان G عصبة كبيرة، فيمكن تحسين الحد $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (التمرين 50). تضمن نظرية بروكس أن البيانات التامة والحلقات الفردية هي فقط البيانات المنتظمة من الدرجة $k - 1$، والحرجة

من الدرجة k (التمرين 47). لقد قام جالاي بتقوية هذه النتيجة من خلال برهان ما يأتي: في البيان الجزئي لبيان حرج من الدرجة k والذي تولده الرؤوس التي درجتها $k-1$، يكون كل قالب عبارة عن عصبة أو حلقة فردية.

تنص نظرية بروكس على أن $\chi(G) \le \Delta(G)$ عندما $3 \le w(G) \le \Delta(G)$.

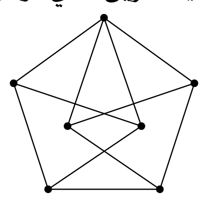
لقد قدم كل من برودن (Brodin) وكوستاكا (Kostochka) في العام 1977م المخمنة الآتية: إذا كانت $w(G) < \Delta(G)$، فإن $\chi(G) < \Delta(G)$.

(هناك أمثلة تدل على أننا بحاجة إلى الشرط $\Delta(G) \ge 9$) لقد أثبت ريد (Reed) في العام 1999م أن $\Delta(G) \ge 9$ صحيحة عندما $\Delta(G) \ge 10^{14}$، وقدم أيضًا في العام 1998م المخمنة الآتية: إن العدد اللوني محدود من الأعلى بمعدل ذي حدين بديهيين هما: الأسفل والأعلى. أي أن $\chi(G) \le \left\lceil \frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2} \right\rceil$ ■

بما أن فكرة التجزئة (التقسيم) لتحقيق بعض القيود أو الشروط فكرة أساسية، وهناك العديد من الانحرافات والتعميمات الخاصة بتلوين البيانات، فسنعرض في الفصل السابع تلوين الأضلاع بدلاً من الرؤوس. وبإبقاء الحديث عن الرؤوس، نستطيع السماح للصفوف اللونية بإحداث بيانات جزئية مختلفة عن المجموعات المستقلة ("التلوين المعمم" – التمارين 49 – 53). وباستطاعتنا كذلك حصر الألوان المسموح باستعمالها على كل رأس ("قائمة تلوين" – الدرس 4.8). علاوة على أنه بإمكاننا السؤال عن القيم الحسابية لهذه الألوان (التمرين 54). لقد لامسنا رأس الجبل الجليدي لمسائل التلوين فقط.

تمـــارين (Exercises)

1.1.5. (–) احسب عدد العصبة، وعدد الاستقلال، والعدد اللوني للبيان المرسوم أدناه. بيّن هل يثبت أي من الحدين الموجودين في الفرضية 7.1.5. الأمثلية لتلوين فعلي؟ وهل البيان حرج لونيًّا؟



2.1.5. (–) أثبت أن العدد اللوني لبيان يساوي أكبر عدد لوني لمركباته.

3.1.5. (–) افترض أن $G_1, \ldots, G_k$ هي قوالب G، أثبت أن: $\chi(G) = \max_i \chi(G_i)$

4.1.5. (–) جد بيانًا G له رأس v، بحيث إن $\chi(G-v) < \chi(G)$ وأن $\chi(\overline{G}-v) < \chi(\overline{G})$.

5.1.5. (–) ليكن البيانان G و H معطيين، أثبت أن:

$\chi(G+H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$ وأن $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$.

6.1.5. (–) افترض أن $\chi(G)=w(G)+1$، كما في المثال 8.1.5. افترض أن $H_1 = G$ وأن $H_k = H_{k-1} \vee G$ لكل $k > 1$، أثبت أن $\chi(H_k) = w(H)_k + k$.

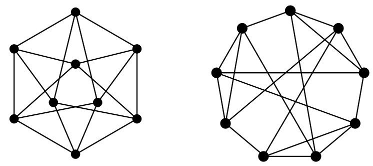
7.1.5. (–) جد بيانًا G بحيث إن G ليس بيانًا تامًّا ولا حلقة فردية، ولكن يوجد ترتيب لرؤوس هذا البيان؛ بحيث يستخدم التلوين الجشع لهذه الرؤوس بالنسبة إلى هذا الترتيب $\Delta(G) + 1$ لونًا.

8.1.5. (–) أثبت أن $\max_{H \subseteq G} \delta(H) \le \Delta(G)$.

9.1.5. (–) ارسم البيان $K_{1,3} \square P_3$، وأعط تلوينًا أمثل لهذا البيان. ارسم البيان $C_5 \square C_5$، وجد له تلوينًا ثلاثيًّا فعليًّا، بحيث إن حجم صفوفه اللونية هو: 8، 8، 9.

10.1.5. (–) أثبت أن $G \square H$ يتفكك إلى $n(G)$ نسخة من H و $n(H)$ نسخة من G.

11.1.5. (-) أثبت أن كلًّا من البيانين المرسومين أدناه يشاكل $C_3 \square C_3$.



12.1.5. (-) أثبت أو انقض: يوجد لكل بيان G لوني من الدرجة k تلوين بـ k من الألوان بحيث يحوي أحد صفوفه اللونية $\alpha(G)$ رأسًا.

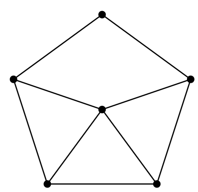
13.1.5. (-) أثبت أو انقض: إذا كان $G = F \cup H$، فإن: $\chi(G) \le \chi(F) + \chi(H)$.

14.1.5. (-) أثبت أو انقض: لكل بيان G يتحقق أن $\chi(G) \le n(G) - \alpha(G) + 1$.

15.1.5. (-) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا مترابطًا، فإن $\chi(G) \le 1 + a(G)$، حيث $a(G)$ هي معدل درجة الرؤوس في G.

16.1.5. (-) استخدم النظرية 21.1.5 لإثبات وجود مسار مولد لكل دوري. ([Re´dei [1934]).

17.1.5. (-) استخدم البديهية 18.1.5 لبرهان أن $\chi(G) \le 4$ للبيان G المرسوم أدناه:



18.1.5. (-) حدد عدد الألوان اللازم لوضع علامات دالة على $V(K_n)$ بحيث إن كل صف لوني يولد بيانًا جزئيًّا درجته القصوى أقل من k أو يساويها.

19.1.5. (-) جد الخطأ في التعليل الموجود أدناه لنظرية بروكس (النظرية 22.1.5).

"نستخدم الاستقراء على $n(G)$. إذا كان $n(G)=1$، فإن العبارة تتحقق. ولخطوة الاستقراء، افترض أن G ليس بيانًا تامًّا ولا حلقة فردية. بما أن $\kappa(G) \le \delta(G)$، فإن للبيان G مجموعة فاصلة S حجمها يساوي $\Delta(G)$ على الأكثر. افترض أن $G_1, \ldots, G_m$ هي مركبات $G - S$، وافترض أن $H_i = G[V(G_i) \cup S]$. من فرضية الاستقراء، نجد أن H_i قابل للتلوين بـ $\Delta(G)$ من الألوان. بدل أسماء هذه الألوان على هذه البيانات الجزئية لتصبح جميعها متفقة على S. إن هذا يعطي تلوينًا فعليًّا من الدرجة $\Delta(G)$ للبيان G".

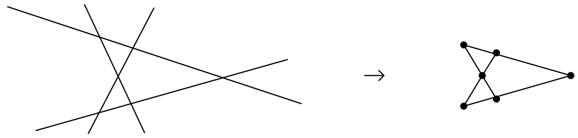
• • • • •

20.1.5. (!) افترض أن G بيان تتقاطع حلقاته الفردية زوجًا زوجًا؛ بمعنى أنه يوجد رأس مشترك بين أي حلقتين فرديتين في G. أثبت أن $\chi(G) \le 5$.

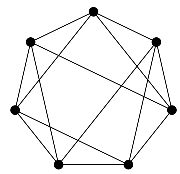
21.1.5. افترض أن كل ضلع لبيان G يظهر في حلقة واحدة على الأكثر. أثبت أن كل قالب في G ضلعًا، أو حلقة، أو رأسًا معزولاً. استخدم هذا في الإثبات أن $\chi(G) \le 3$.

22.1.5. (!) افترض أن لديك مجموعة من الخطوط في مستوى معين بحيث لا توجد نقطة مشتركة بين أي ثلاثة من هذه الخطوط. كوِّن البيان G الذي رؤوسه تقاطعات هذه الخطوط، بحيث يتجاور أي رأسين إذا ظهرا بالتتابع على أحد هذه الخطوط. أثبت أن $\chi(G) \le 3$. (مساعدة: يمكن حل هذه المسألة باستخدام نظرية سزكرز وولف (Szekeres - Wilf) أو باستخدام تلوين جشع بالاعتماد على ترتيب

مناسب للرؤوس. تعليق: يمكن أن تفشل النتيجة إذا كان هناك نقطة مشتركة بين ثلاثة من هذه الخطوط). (H. Sachs).



23.1.5. (!) ضع n من النقاط على دائرة، حيث $n \geq k\,(k+1)$. افترض أن $G_{n,\,k}$ هي البيان المنتظم من الدرجة $2k$ الذي تحصل عليه عن طريق ربط كل نقطة مع الـ k نقطة الأقرب في الاتجاهين على الدائرة. فعلى سبيل المثال، $G_{n,\,1} = C_n$، والبيان أدناه يُظهر $G_{7,\,2}$. أثبت أن $\chi(G_{n,\,k}) = k+1$ إذا كانت $k+1$ تقسم n، وأن $\chi(G_{n,\,k}) = k+2$ إذا كانت $k+1$ لا تقسم n. أثبت أنه لا يمكن إضعاف الحد الأدنى على n من خلال برهان أن: $\chi(G_{k\,(k+1)-1,\,k}) > k+2$ إذا كانت $k \geq 2$.



24.1.5. (+) افترض أن G بيان منتظم من الدرجة 20، له 360 رأسًا، وقد تم تكوينه بالطريقة الآتية: وُضعَت الرؤوس على دائرة بأبعاد متساوية بينهما. تكون الرؤوس المفصولة بدرجة أو بدرجتين غير متجاورة، أماَ الرَؤوس المفصولة بثلاث، أو أربع، أو خمس، أو ست درجات فتكون متجاورة. لا توجد أي معلومات عن التجاورات الأخرى (ما عدا أن البيان منتظم من الدرجة 20). أثبت أن $\chi(G) \leq 19$. (مساعدة: لون الرؤوس المتتابعة بترتيب معين حول الدائرة). (Pritikin).

25.1.5. (+) افترض أن G هي بيان مسافة الفصل في المستوى في هذا البيان $V(G) = \mathbb{R}^2$، وتكون النقطتان متجاورتين إذا وفقط إذا كانت المسافة التقليدية بينهما تساوي 1 (هذا بيان غير منتهٍ). أثبت أن $4 \leq \chi(G) \leq 7$. (مساعدة: لبرهان الحد الأعلى، قدِّم تلوينًا صريحًا للمناطق آخذًا بالحسبان حدود كل منطقة).

(هادوايجر، موزر – موزر) (**Hadwiger [1945, 1961], Moser – Moser [1961]**)

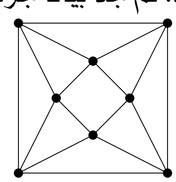
26.1.5. افترض أن $S_1, \ldots, S_m$ مجموعات منتهية، وأن $U = S_1 \times \ldots \times S_m$.

عرّف بيانًا G رؤوسه عناصر U، حيث $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا اختلف u عن v في كل إحداثي، جد $\chi(G)$.

27.1.5. افترض أن H هي متممة البيان الموجود في التمرين 26.1.5 جد $\chi(H)$.

28.1.5. افترض أن لديك إشارة ضوئية يتم التحكم فيها عن طريق مفتاحين كهربائيين، بحيث إن كلًّا منهما يمكن أن يوضع بـ n من المواقع، ولكل موقع من هذه المواقع للمفتاح يظهر أحد الـ n لونًا الممكنة، وعند تغيير موضع المفتاحين يتغير اللون. أثبت أن اللون الذي يظهر يتحدد من خلال موقع أحد المفتاحين، ثم وضّح ذلك بدلالة العدد اللوني لبيان معين. ([Greenwell – Lovasz [1974]).

29.1.5. احسب $\chi(G)$ للبيان G الموضح أدناه، ثّم جد بيانًا جزئيًّا حرجًا من الدرجة $\chi(G)$.



30.1.5. (+) افترض أن $S = \binom{[n]}{2}$ ترميز لمجموعة المجموعات كلها التي تحوي عنصرين من عناصر المجموعة $[n]$. عرف البيان G_n على الصورة الآتية: $V(G_n) = S$ و $E(G_n) = \{(ij, jk): 1 \le i < j < k \le n\}$ (الأزواج المنفصلة على سبيل المثال غير متجاورة). أثبت أن $\chi(G_n) = \lceil \lg n \rceil$ (مساعدة: أثبت أن G_n قابل للتلوين بـ r من الألوان إذا وفقط إذا وُجد لـ $[r]$ n من المجموعات الجزيئية المختلفة. (تعليق: يسمى G_n بيانَ الإزاحة للبيان K_n (Shift graph of Kn). (يُنسب إلى إيه هاجنال A. Hajnal).

31.1.5. (!) أثبت أن البيان G قابل للتلوين بـ K من الألوان إذا وفقط إذا تحقق أن $\alpha(G \,\square\, K_m) \ge n(G)$ (Berg. [1973, P379 – 80]).

32.1.5. (!) أثبت أن البيان G يكون قابلاً للتلوين بـ 2^k لونًا إذا وفقط إذا كان البيانُ اتحاد k من البيانات ثنائية الفرع. (مساعدة: هذا يعمم النظرية 23.2.1).

33.1.5. (!) أثبت أنه يوجد ترتيب لرؤوس كل بيان G، بحيث إن التلوين الجشع بالنسبة إلى هذا الترتيب يستعمل $\chi(G)$ لونًا.

34.1.5. (!) لكل $k \in \mathbb{N}$ ، جد شجرة T_k، درجتها القصوى تساوي k. وجد ترتيبًا σ لـ $V(T_k)$، بحيث إن التلوين الجشع لهذه الشجرة يستخدم $k + 1$ لونًا. (مساعدة: استخدم الاستقراء، وجد الشجرة والترتيب في الوقت نفسه. تعليق: تبين هذه النتيجة أن نسبة أداء التلوين الجشع إلى التلوين المثالي يمكن أن تكون سيئة بمقدار $((\Delta(G)+1)/2)$ (Bean [196]).

35.1.5. افترض أن G بيان لا يوجد له بيان جزئي مستحدث، بحيث إن هذا البيان الجزئي يشاكل P_4. أثبت أن التلوين الجشع ينتج تلوينًا أمثل لـ G بغض النظر عن ترتيب رؤوس G. (مساعدة: افترض أن الخوارزمية تستخدم k لونًا تخص الترتيب $v_1, \ldots, v_n$. وافترض أن i هي أصغر عدد صحيح بحيث توجد لـ G عصبة مؤلفة من الرؤوس التي حُدد لها الألوان من i إلى k في هذا التلوين. أثبت أن $i = 1$. (تعليق: تسمى البيانات التي تخلو من P_4 مرافقات البيانات).

36.1.5. إذا كان $\sigma = v_1, \ldots, v_n$ ترتيبًا لرؤوس G، افترض أن $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$، وأن $f(\sigma) = 1 + \max_i d_{G_i}(v_i)$ إن التلوين الجشع بالنسبة إلى σ يعطي أن $\chi(G) \le f(\sigma)$. عرف σ^* على الشكل التالي: اجعل v_n رأسًا من رؤوس G درجته أقل ما يمكن، واجعل v_i $(i < n)$ رأسًا في $G - \{v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ درجته أقل ما يمكن. أثبت أن $f(\sigma^*) = 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. وبذلك، فإن σ^* تصغر (تعطي قيمة صغرى) $f(\sigma^*)$.
(Halin [1967], Matula [1968], Finck–Sachs[1969] Lick – White [1970]).

37.1.5. أثبت أنه يمكن تجزئة $V(G)$ إلى $1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H) / r$ صفًّا بحيث يوجد رأس درجته أقل من r لكل بيان جزئي رؤوسه في أحد هذه الصفوف. (مساعدة: افترض الترتيب σ^* الموجود في التمرين 36.1.5. (تعليق: هذا يعمم النظرية 19.1.5. وعندما $r = 2$ انظر (Chartanal – Kronk [1969]).

38.1.5. (!) إذا كان $\overline{G}$ ثنائي الفرع، فأثبت أن $\chi(G) = \omega(G)$. (مساعدة: صُغ الادعاء بدلالة $\overline{G}$، واستخدم النتائج المتعلقة بالبيانات الثنائية الفرع).

39.1.5. (!) أثبت أنه يوجد $\binom{k}{2}$ ضلعًا لكل بيان لوني من الدرجة k. استخدم هذا لبرهنة أنه إذا كان G اتحادًا لـ m بيانًا تامًّا من الرتبة m، فإن $\chi(G) \le 1 + m\sqrt{m-1}$. (تعليق: إن هذا الحد قريب من الصحة، ولكن نعلم أن مخمنة أيردوز وفابر ولوفاس (انظر Erdös [1981]) تؤكد أن $\chi(G) = m$ عندما تكون البيانات الثنائية الفرع منفصلة ضلعيًّا).

40.1.5. أثبت أن $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \ge n(G)$، استخدم هذا لبرهنة أن، $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \ge 2\sqrt{n(G)}$ وابن بيانات تحقق هذه الحدود عندما يكون $\sqrt{n(G)}$ عددًا صحيحًا. Nordhaus – Gaddum [1956], Fick [1968].

41.1.5. (!) أثبت أن $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \le n(G) + 1$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $n(G)$ (Nordhous – Gaddum [1956]).

42.1.5. (!) عدم دقة $\chi(G) \ge n(G)/\alpha(G)$. افترض أن G بيان له n من الرؤوس، وافترض كذلك أن $c = (n+1)/\alpha(G)$. استخدم التمرين 41.1.5 لبرهنة أن $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \le (n+1)^2/4$ ، ولبرهنة أن $\chi(G) \le c\,(n+1)/4$ أيضًا. ولكل عدد فردي n، ابنِ بيانًا G بحيث إن $\chi(G) = c(n+1)/4$.

.Nordhous – Gaddum [1956], Fick [1968]

43.1.5. (!) المسارات والعدد اللوني في البيانات الموجهة:

a) افترض أن $G = F \cup H$، أثبت أن $\chi(G) \le \chi(F)\,\chi(H)$.

b) اعتبر أن D توجيه لـ G، وأن $f\colon V(G) \to \mathbb{R}$ دالة، استخدم فرع (a) والنظرية 21.1.5 لبرهنة أنه إذا كان $\chi(G) > rs$، فإن D تحوي مسارًا $u_0 \to \dots \to u_r$ بحيث إن، $f(u_0) \le \dots \le f(u_r)$ أو تحوي مسارًا $v_0 \to \dots \to v_s$ بحيث إن $f(v_0) > \dots > f(v_s)$.

c) استخدم فرع (b) لبرهنة أن كل قائمة مؤلفة من $rs + 1$ عددًا مختلفًا تحوي قائمة جزئية متزايدة حجمها $r + 1$، أو تحوي قائمة جزئية متناقصة حجمها $s + 1$. (Erdös – Szekeres [1935]).

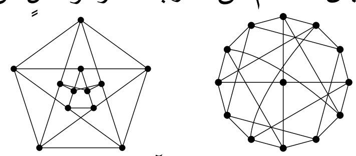
44.1.5. (!) نظرية منتي .[Minty [1962] يعرف التوجيه اللاحلقي لبيان خالٍ من النشط على أنه توجيه لا يحوي أي حلقة. لكل توجيه لاحلقي D للبيان G، اجعل $r(D) = \max_C \lceil a/b \rceil$ حيث C حلقة في G. وa وb تحسبان عدد الأضلاع في C التي اتجاهها إلى الأمام أو إلى الخلف مع D على الترتيب. ثبت رأسًا x في $V(G)$، وافترض أن W ممر في G يبدأ عند x. اجعل $g(W) = (a-b)\,.\,r(D)$، حيث a عدد الخطوات عبر W والتي هي أضلاع اتجاهها إلى الأمام في D، أما b فهي عدد الأضلاع عبر W التي اتجاهها إلى الخلف في D. ولكل $y \in V(G)$ اجعل $g(y)$ أكبر قيمة لـ $g(W)$، بحيث تكون W مسارًا من x إلى y (افترض أن G مترابط).

a) أثبت أن $g(y)$ منتهية، ولهذا فهي معرفة جيدًا. واستخدم $g(y)$ لتحصل على تلوين فعلي لـ G بـ $1 + r(D)$ لونًا. لذا، فإن G قابل للتلوين بـ $1 + r(D)$ لونًا.

b) أثبت أن $\chi(G) = \min_{D \in \boldsymbol{D}} 1 + r(D)$، حيث $\boldsymbol{D}$ هي مجموعة توجيهات G اللاحلقية.

45.1.5. (+) استخدم نظرية منتي (التمرين 44.1.5) لبرهان النظرية 21.1.5. (مساعدة: أثبت أن هناك توجيهًا لاحلقيّ لـ G يعظم (يكبر) $(l(D))$.

46.1.5. (+) أثبت أن البيانات المنتظمة من الدرجة 4، والخالية من المثلثات، والمرسومة أدناه هي بيانات رباعية اللون (لونية من الدرجة 4). (مساعدة: افترض الرأسين المركزيين في البيان الموجود على اليسار، أما بالنسبة إلى البيان الثاني فخذ في الحسبان أكبر مجموعة مستقلة. (تعليق: لقد أثبت شفتال (Chavatal) عام 1970م أن البيان الموجود على اليسار هو أصغر بيان منتظم من الدرجة 4، وهو خالٍ من المثلثات، وعدده اللوني يساوي 4).



47.1.5. (!). أثبت أن نظرية بروكس تكافئ العبارة الآتية: كل بيان منتظم من الدرجة $k - 1$ وحرج من الدرجة Kk يكون بيانًا تامًّا أو حلقة فردية (مساعدة: لبرهنة نظرية بروكس من هذه العبارة، خذ في الحسبان بيانًا جزئيًّا حرجًا من الدرجة k للبيان المعطى G، حيث إن G لوني من الدرجة k).

48.1.5. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، وm من الأضلاع، ودرجته القصوى تساوي 3 على الأكثر. افترض أنه لا يوجد لـ G أي مركبة تشكل بيانًا تامًّا على أربعة رؤوس. أثبت أن G يحوي بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع عدد أضلاعه يساوي $m - n/3$ على الأقل. (مساعدة: طبق نظرية بروكس. وبعد ذلك، وضح كيف نحذف بعض الأضلاع لتحويل التلوين الثلاثي الفعلي لـ G إلى تلوين ثنائي لبيان جزئي كبير من G).

49.1.5. (−) أثبت أنه يمكن تلوين بيان بيترسون بلونين، بحيث يتألف البيان الجزئي المستحدث من كل صف لوني من أضلاع ورؤوس معزولة.

50.1.5. (!) تحسين لنظرية بروكس:

a) ليكن G بيانًا معطى، اجعل $k_1, \dots, k_t$ أعدادًا صحيحة غير سالبة، بحيث إن $\sum k_i \ge \Delta(G) - t + 1$ أثبت أنه يمكن تجزئة $V(G)$ إلى مجموعات $V_1, \dots, V_t$، بحيث إن أكبر درجة للبيان الجزئي G_i والذي تولده

V_iهي k_i وذلك لكل i. (مساعدة: أثبت أن التجزئة التي تصغر $\sum e(G_i)/k_i$ تمتلك الخاصية المنشودة).
.(Lovasz [1966])

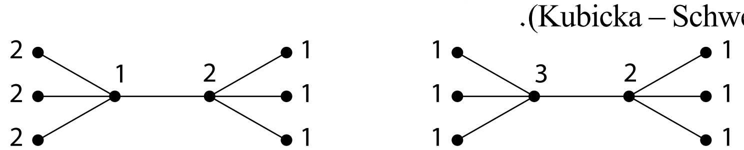
b) لكل $4 \le r \le \Delta(G)+1$ ، استخدم فرع (a) لبرهنة أنه إذا لم يحتوِ G عصبة من الدرجة r، فإن:
. $\chi(G) \le \left\lceil \frac{r-1}{r}(\Delta(G)+1)\right\rceil$
.(Borodin – Kostochka [1977], Catlin [1978], Lawrence [1978])

51.1.5. (!) افترض أن G بيان قابل للتلوين بـ k من الألوان، وافترض كذلك أن P هي مجموعة من الرؤوس في G، بحيث إن $d(x, y) \geq 4$ لكل $x, y \in P$. أثبت أن كل تلـوين لـ P بألـوان من $[k + 1]$ يمكن أن يوسـع إلى تلوين فعلي لـ G من الدرجة $k + 1$، (Albertson [1998]).

52.1.5. أثبت أنه يمكن تلوين بيان G كله بـ $\lceil(\Delta(G)+1)/j\rceil$ لونًا، بحيث إن كل صف لون يولد بيانًا جزئيًّا لا يمتلك بيانًا جزئيًّا مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة j. إذا كانت $j > 1$، فأثبت أنه لا يوجد عدد أقل من الصفوف اللونية يكفي، وذلك عندما يكون G منتظمًا من الدرجة j، ومترابطًا ضلعيًّا من الدرجة j، أو أن G بيان تام رتبته تكافئ 1 بمقياس j (بمعنى باقي قسمة رتبته على J يساوي 1).
(تعليق: إذا كانت $j = 1$ فإن الحصر يُختزل إلى تلوين فعلي عادي) (Matula [1973]).

53.1.5. (+) افترض أن $G_{n,k}$ هي البيان المنتظم من الدرجة $2k$ الموجود في التمرين 23.1.5. إذا كانت $k \leq 4$، فحدد قيم n التي تجعل $G_{n,k}$ قابلاً للتلوين بلونين، بحيث يولد كل صف لون بيانًا جزئيًّا درجته القصوى تُساوي k على الأكثر. (Weaver – west [1994]).

54.1.5. افترض أن f تلوين فعلي لبيان G، بحيث تكون الألوان هي الأعداد الطبيعية. إن مجموع الألوان هو $\sum_{v\in V(G)} f(v)$. يمكن أن يتطلب تصغير هذا المجموع استخدام أكثر من $\chi(G)$ لونًا. فعلى سبيل المثال، نجد في الشجرة أدناه أن مجموع أفضل تلوين ثنائي يساوي 12، في حين يوجد تلوين فعلي بثلاثة ألوان مجموع ألوانه يساوي 11. جد متتالية أشجار T_k تستخدم k لونًا في تلوين فعلي يُصغِّر مجموع الألوان.
.(Kubicka – Schwenk [1989])



55.1.5. (+) إن طول أطول حلقة فردية إضافة إلى واحد يمثل حدًّا أعلى للعدد اللوني:

a) افترض أن G بيان مترابط من الدرجة 2 ليس ثنائي الفرع، وفيه حلقة زوجية. أثبت أنه يوجد في C رأسًا x وy، وأن مسار P من x إلى y منفصل داخليًّا عن C بحيث إن: $d_c(x,y) \neq d_p(x,y) \mod 2$.

b) افترض أن G بيان بسيط ليس له حلقة فردية طولها يساوي $2k + 1$ على الأقل.
أثبت أنه إذا كانت $\delta(G) \geq 2k$، فإن G يحوي حلقة طولها $4k$ على الأقل. (مساعدة: افترض جيران نقطة طرفية لمسار أعظمي).

c) افترض أن G بيان مترابط من الدرجة 2 ليس ثنائي الفرع، ولا توجد فيه حلقة فردية طولها أكثر من $2k - 1$. أثبت أن $\chi(G) \leq 2k$.(Erdös – Hajnal [1966]).

2.5. بنية البيانات اللونية من الدرجة k (Structure of-k- chromatic Graphs)

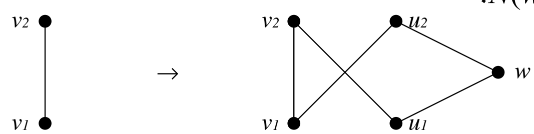
لقد لاحظنا أن $\chi(H) \geq \omega(H)$ لكل H. عندما تتحقق المساواة في هذا الحد للبيان G وللبيانات الجزئية المستحدثة من G جميعها (مثل بيانات الفترة)، فإن البيان G كامل (perfect). وسنناقش هذا النوع من البيانات في البندين 3.5 و1.8. ولكن ما يهمنا في هذا الدرس هو أن نبين مدى السوء الذي يمكن أن يكون في $\chi(G) \geq \omega(G)$. في أغلب الأحيان، يكون $\chi(G)$ أكبر كثيرًا من $\omega(G)$، وذلك من خلال وجهة نظر سنناقشها

بدقة في الدرس 5.8. (إن معدل قيم $\omega(G)$، $\alpha(G)$ و$\chi(G)$ للبيانات جميعها التي مجموعة رؤوسها $[n]$ تقترب من $21g\ n$، $21g\ n$ و$n/(21g\ n)$ على الترتيب. لذا، فإن $\omega(G)$ تعدّ عمومًا حدًّا أدنى غير جيد لـ $\chi(G)$، وأن $n/\alpha(G)$ تعدّ بوجه عام حدًّا أدنى جيدًا).

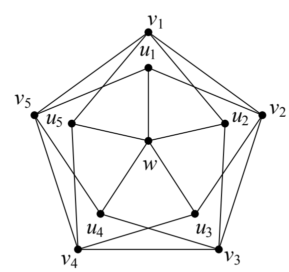
البيانات ذات العدد اللوني الكبير (Graphs with Large Chromatic Number)

يمكن للحد $\chi(G) \geq \omega(G)$ أن يكون محكمًا ودقيقًا، ويمكن كذلك أن يكون بعيدًا عن الدقة. لقد تم بناء (إيجاد) العديد من البيانات الخالية من المثلثات التي لها عدد لوني كبير بالدرجة التي نريدها. سنعرض أحد هذه البيانات في هذه المرحلة، تاركين عرض بعضها الآخر إلى التمرينين 12 – 13.

1.2.5. تعريف: افترض أن G بيان بسيط. نعرف بناء ميسليسكي (Mycielskis construction) على أنه البيان البسيط G' الذي يحوي G كالآتي: بدءًا من G الذي رؤوسه المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$، أضف رؤوسًا $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$، وأضف رأسًا آخر w. الآن، أضف أضلاعًا لجعل u_i يجاور كل عنصر في $N_G(v_i)$، وأخيرًا، اجعل $N(w) = U$.



2.2.5. مثال: من البيان الثنائي اللون K_2، وبعمل تكرار واحد لبناء ميسليسكي، نحصل على البيان ثلاثي اللون C_5 كما يظهر في الشكل أعلاه. وفي الشكل السفلي، نطبق هذا البناء على C_5 الذي ينتج بيان جروتزك (Grötzch graph) الرباعي اللون. ■

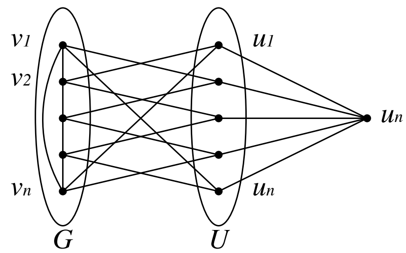


3.2.5. نظرية: (Mycielski [1955]). إذا كان G بيانًا لونيًّا من الدرجة k، وخاليًا من المثلثات، فإن بناء ميسليسكي ينتج عن G بيانًا G، بحيث إن G لوني من الدرجة $k + 1$ وخال من المثلثات.

الإثبات: افترض أن $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$، وافترض أيضًا أن G' هي البيان الذي ينتجه بناء ميسليسكي من G. وافترض كذلك أن $u_1, \ldots, u_n$ هي النسخ من $v_1, \ldots, v_n$، وأن w هو الرأس الإضافي، واجعل $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$. من خلال البناء الذي قمنا به، نعلم أن U مجموعة مستقلة في G'. لذا، فإن الرؤوس الأخرى لأي مثلث يحوي u_i تنتمي إلى $V(G)$، وتكون جيرانًا لـ v_i. إن هذا يعطي مثلثًا في G وهذا مستحيل. لذا، تستنتج أن G' يخلو من المثلثات. إذا كان f تلوينًا فعليًّا من الدرجة k لـ G، فإننا نستطيع الحصول منه على تلوين فعلي من الدرجة $k + 1$ لـ G'، وذلك بوضع $f(u_i) = f(v_i)$، و $f(w) = k + 1$. لذا، فإن $\chi(G') \leq \chi(G)+1$. ولإثبات هذا؛ اعتبر أي تلوين فعلي لـ G'؛ واحصل منه على تلوين فعلي لـ G باستخدام عدد أقل من الألوان.

افترض أن g تلوين فعلي من الدرجة k لـ G'. وبتغيير أسماء الألوان، يمكننا أن نفترض أن $g\ (w) = k$. إن هذا يحصر g ضمن القيم $\{1, \ldots, k - 1\}$ على U. لاحظ أن g يمكن أن تستخدم الـ k لونًا على $V(G)$. افترض أن A هي مجموعة رؤوس G الملونة باللون k من قبل g، نغيّر الألوان على A؛ لنحصل على تلوين من الدرجة $k - 1$ لـ G.

لكل $v_i \in A$، غير لون v_i إلى $g\ (u_i)$. بما أن رؤوس A جميعها لها اللون k تحت تأثير g، فإنه يوجد في A أي رأسين متجاورين. لذا، نحتاج إلى اختبار الأضلاع التي على الشكل $v' \leftrightarrow u_i$ فقط، حيث $v_i \in A$ و$v' \in V(G) - A$. إذا كان $v_i \leftrightarrow v'$، فإنه من خلال البناء كذلك نعلم أن $u_i \leftrightarrow v'$، وهذا يعطي أن $g(v') \neq g(u_i)$. وبما أننا غيّرنا لون v_i إلى $g(u_i)$، فإن هذا التغيير لا يعتدي على الضلع $v_i\ v'$. وبذلك نكون قد بيّنا أن التلوين المعدل لـ $V(G)$ تلوين فعلي من الدرجة $k-1$ للبيان G. ■



إذا كان G حرجًا لونيًّا، فإن البيان G' الناتج عن بناء ميسلسكي يكون أيضًا حرجًا لونيًّا (التمرين 9).

4.2.5. ملحوظة*: إذا كرّرنا استخدام بناء ميسلسكي بدءًا من $G_2 = K_2$، فإننا نُحصِّل متتالية البيانات $G_2, G_3, G_4, \ldots$. وأن أول ثلاثة من هذه البيانات هي: K_2، C_5، وبيان جروتزك، وتعدّ هذه أصغر البيانات التي تخلو من المثلثات، وتكون على الترتيب: ثنائية اللون، وثلاثية اللون، ورباعية اللون، وبعد ذلك تنمو البيانات بسرعة: $n(G_k) = 2n(G_{k-1}) + 1$. وبما أن $n(G_2) = 2$، فإننا نحصل على أن $n(G_k) = 3.2^{k-2} - 1$ (نمو أسّيّ).

افترض أن $f(k)$ هي أصغر عدد من الرؤوس لبيان خالٍ من المثلثات ولوني من الدرجة k. لقد أثبت أيردوز في العام 1959م من خلال استخدام طرقٍ الاحتمالات (طرق غير بنائية) أن $f(k) \leq ck^{2+\epsilon}$، حيث ϵ هي ثابت موجب، وأن c تعتمد على ϵ. ولا تعتمد على k. باستخدام أعداد رامزي (Ramsey numbers) (الدرس 3.8)، من المعلوم (غير – بنائي) أنه يوجد ثوابت c_1 وc_2 ، بحيث إن $c_1k^2 \log k \leq f(k) \leq c_2k^2 \log k$ (التمرين 15 يعطي حدًّا أدنى تربيعيًّا).

لقد بنى بلانش ديسكارتس (Blanche Desccartes) في العام [1954م ، 1947م] بيانات حرجة لونيًّا خصرها يساوي 6 (التمرين 13). في حين أثبت إيردوز عام 1959م أن هناك بيانات عددها اللوني يساوي k على الأقل، وخصرها يساوي g على الأقل (النظرية 11.5.8). بعد ذلك، تم إيجاد بناءات صريحة من قِبَل:
(Lovasz [1968 a], Nesetril – Rodl [1979], Lubotzsky – philies – sarank [1988], Kriz [1989])
ومع هذه البناءات كلها، فإن منع K_r من أن يكون بيانًا جزئيًّا من G لا يضع[1] حدًّا أعلى على $\chi(G)$. لقد خمن كل من جيارفاس [Gya´rfa´s] في العام 1975م وسمنر (Sumner) في العام 1981م أن منع عصبة ثابتة وغابة ثابتة من أن تكونا بيانين جزئيين من بناء معين G لا يضع حدًّا أعلى على العدد اللوني للبيان. التمرين (11) يثبت هذه الحقيقة عندما تكون الغابة $2\ K_2$. انظر كذلك:

(Kierstead – Rödl [1996]) وKierstead [1992, 1997] وKeirstead – Penrice [1990, 1994]. ■

(1) لقد تم استخدام هذا الاسم المستعار من قبل WT.Tutte وثلاثة آخرين.

مسائل القيم القصوى (التطرفية) ونظرية توران (Extermal Problems and Tura'n's Thearem)

قد تسلّط مسائل التطرفية بعض الضوء على بنية البيانات اللونية من الدرجة k. فعلى سبيل المثال، ما أصغر وأكبر البيانات من الدرجة اللونية k على n من الرؤوس؟

5.2.5. فرضية: يوجد $\binom{k}{2}$ ضلعًا على الأقل لكل بيان لوني من الدرجة k على n من الرؤوس. وتتحقق المساواة للبيانات التامة إضافة إلى الرؤوس المعزولة.

الإثبات: يوجد ضلع لكل تلوين مثالي لبيان طرفاه ملونان باللونين i و j لكل زوج i و j من الألوان. وبخلاف ذلك، فإنه يمكن ضم اللونين i و j بصف لوني واحد، وبذلك نستخدم عددًا أقل من الألوان. بما أنه يوجد $\binom{k}{2}$ زوجًا مختلفًا من الألوان، فيجب أن يكون لدينا $\binom{k}{2}$ ضلعًا مختلفًا. ■

يسأل التمرين 6 عن أصغر حجم لبيان من بين البيانات المترابطة اللونية من الدرجة k، والتي عدد رؤوسها يساوي n. إن مسألة التكبير (إيجاد قيمة كبرى أو عظمى) ممتعة أكثر (يتوافر لها معنى عندما نحصرها على البيانات البسيطة فقط). إذا أعطينا تلوينًا فعليًّا بـ k من الألوان، فبإمكاننا الاستمرار في إضافة الأضلاع دون زيادة العدد اللوني ما دام الرأسان الموجودان في صفوف لونية مختلفة غير متجاورين. لذا، فإننا نركز انتباهنا على البيانات التي لا تحوي مثل هذه الرؤوس.

6.2.5. تعريف: نعرِّف البيان التام المتعدد الفروع على أنه بيان بسيط G، بحيث يمكن تجزئة رؤوسه إلى عدة مجموعات، بحيث إن $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان كلّ من u و v ينتميان إلى مجموعات مختلفة من مجموعات تجزئة رؤوسه. هذا التعريف يكافئ قولنا: إن كل مركبة من مركبات $\overline{G}$ تكون بيانًا تامًّا. عندما $k \geq 2$ ، فإننا نكتب $K_{n_1, \ldots, n_k}$ وذلك كرمز للبيان التام المتعدد الفروع من الدرجة k (complete k – partite) الذي أحجام مجموعات تجزئة رؤوسه هي: $K_{n_1} + \ldots + K_{n_k}$.

نستخدم هذا الرمز فقط عندما تكون $k > 1$؛ لأن k_n ترمز إلى بيان تام. لاحظ أن البيان المتعدد الفروع من الدرجة k يكون لونيًّا من الدرجة k. حيث تمثل مجموعات التجزئة الصفوف اللونية في التلوين الفعلي الفريد لهذا البيان بـ k من الألوان. وبما أن درجة أي رأس في مجموعة تجزئة حجمها t تساوي $n(G) - t$، فإنه يمكن حساب الأضلاع بواسطة صيغة جمع الدرجات (التمرين 18). والآن، نسأل السؤال الآتي: كيف يكون توزيع الرؤوس على مجموعات التجزئة لكي يكون $e(G)$ أكبر ما يمكن؟

7.2.5. مثال: بيان توران (Turán graph). يُعرَّف بيان توران $T_{n, r}$ على أنه بيان تام متعدد الفروع من الدرجة r، وعدد رؤوسه يساوي n، بحيث إن أي مجموعتي تجزئة رؤوسه تختلفان عن بعض بمقدار 1 على الأكثر. ومن استخدام مبدأ طواقي الحمام (الملحق A)، فإن حجم بعض مجموعات تجزئته يساوي $\lceil n/r \rceil$ على الأقل، وحجم بعضها الآخر يساوي $\lfloor n/r \rfloor$ على الأكثر. وبناءً على ذلك، فإن الاختلاف بمقدار 1 يعني أن يكون حجم مجموعة التجزئة يساوي $\lfloor n/r \rfloor$، أو يساوي $\lceil n/r \rceil$.

افترض أن $a = \lfloor n/r \rfloor$، بعد أن تضع a رأسًا في كل مجموعة تجزئة، يتبقى $b = n - ra$. لذا، فإن $T_{n,r}$ تحوي b من مجموعات التجزئة التي حجم كل منها يساوي $a + 1$، وتحوي كذلك $r - b$ مجموعة تجزئة حجم كل منها يساوي a. لذا، فإن الشرط المعرف لـ $T_{n, r}$ يحدد صف تشاكل واحد فقط. ■

8.2.5. بديهية: بيان توران هو البيان الفريد الذي له أكبر عدد من الأضلاع من بين البيانات المتعددة التجزئة من الدرجة r (بمعنى لوني من الدرجة r) على n من الرؤوس.

الإثبات: كما لاحظنا قبل التعريف 6.2.5، فنحتاج إلى التعامل مع البيانات التامة المتعددة التجزئة من

الدرجة r فقط. إذا أعطيت بيانًا تامًّا متعدد التجزئة من الدرجة r، بحيث إن مجموعات تجزئته تختلف في حجمها بمقدار أكثر من 1، فانقل رأس v من المجموعة ذات الحجم الأكبر (حجمها i) إلى المجموعة ذات الحجم الأصغر (حجم j). إن الأضلاع التي لا تتضمن v تبقى كما كانت من قبل، ولكن V تكسب $i - 1$ جارًا في صفها (مجموعتها) القديم، وتخسر j ضلعًا في صفها الجديد، وبما أن $i - 1 > j$، فإن عدد الأضلاع يزداد. لذا، نستطيع تعظيم (تكبير) عدد الأضلاع فقط من خلال مساواة الحجم كما في $T_{n,\ r}$. ■

لقد استخدمنا فكرة التغيير الموضعي سابقًا في النظرية 19.3.1، وفي النظرية 23.3.1؛ نجد أكبر بيان جزئي متعدد الفروع من الدرجة r من K_n.

ماذا يحدث لو كان لدينا أضلاع أكثر بحيث نُجْبِر العدد اللوني ليكون $r + 1$ على الأقل؟ لقد رأينا وجود بيانات عددها اللوني يساوي $r + 1$ ولا تحوي مَثلثات. وعلى الرغم من ذلك، إذا ذهبنا أبعد من أكبر عدد من الأضلاع موجود في بيان لوني من الدرجة r له n من الرؤوس، فإننا مجبرون ليس فقط على استخدام $r + 1$ من الألوان، بل يجب أن يكون K_{r+1} بيانًا جزئيًّا من بياننا.

إن هذه النتيجة المشهورة لتوران تعمم النظرية 23.3.1، وتعدّ الأصل لنظرية البيانات المتطرفة (القصوى).

9.2.5. نظرية: (Turán [1941]): البيان $T_{n,\ r}$ هو البيان الذي له أكبر عدد من الأضلاع، وذلك من البيانات البسيطة التي لها n من الرؤوس، ولا تحتوي على عصبة من الدرجة $r + 1$.

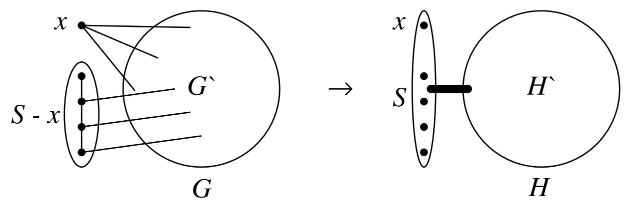
الإثبات: بيان توران، وكمثل أي بيان لوني من الدرجة r، لا يحوي عصبة من الدرجة $r + 1$؛ لأن كل مجموعة من مجموعات تجزئة رؤوسه تسهم برأس واحد في كل عصبة على الأكثر. إذا استطعنا إثبات أن البيان متعدد الفروع من الدرجة r يحقق احتواءه على أكبر عدد من الأضلاع، فإن البديهية 8.2.5 تضمن أن $T_{n,r}$ يحقق احتواءه على أكبر عدد من الأضلاع. لذا، يكفي أن نثبت أنه إذا كان G بيانًا لا يحتوي على عصبة من الدرجة $r + 1$، فإن هناك بيانًا متعدد الفروع H له مجموعة الرؤوس نفسها التي للبيان G، ويحوي عدد الأضلاع نفسها على الأقل.

نثبت هذا باستخدام الاستقراء على r. عندما $r = 1$، فإنه يوجد أضلاع لأي من G وH. افترض أن $r > 1$، وأن G بيان له n من الرؤوس، وليس له عصبة من الدرجة $r + 1$ وافترض أن $x \in V(G)$ رأس درجته تساوي k، حيث $k = \Delta(G)$. اجعل G' هي البيان الجزئي من G الذي تولده جيران x. وبما أن x يجاور كل رأس في G'، ولا يوجد لـ G عصبة من الدرجة $r + 1$، فإنه توجد عصبة من الدرجة r في G'. لذا، نستطيع تطبيق فرضية الاستقراء على G'، وهذا يعطينا بيانًا G' متعدد الفروع من الدرجة $r - 1$ رؤوسه $N(x)$، بحيث إن $e(H') \geq e(G')$.

لتكن H هي البيان المكون من H' عن طريق ربط $N(x)$ كلها إلى S كلها، حيث $S = V(G) - N(x)$ بما أن S مجموعة مستقلة، وH متعدد الفروع من الدرجة r. فندّعي بأن $e(H) \geq e(G)$.

من خلال البناء، نعلم أن $e(H) = e(H') + k(n - k)$، وكذلك لدينا $e(G) \leq e(G') + \sum_{v \in S} d_G(v)$ لأن المجموع يحسب كل ضلع في G مرة واحدة لكل طرف خارج $V(G')$، وبما أن $\Delta(G) = k$، فإن $d_G(v) \leq k$ لكل $v \in S$ و $|S| = n - k$. لذا، فإن $\sum_{v \in S} d_G(v) \leq k(n - k)$ وبذلك نحصل على أن:

$$e(G) \leq e(G') + (n - k)k \leq e(H') + k(n - k) = e(H)$$ ■

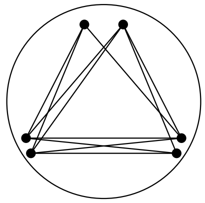


في الحقيقة، إن بيان توران هو البيان الفريد الذي لعدد أضلاعه قيمة كبرى (عظمى) (التمرين 21). تتعلق التمارين 16 – 24 بنظرية توران، وتتضمن براهين بديلة لقيمة $e(T_{n,r})$ وللتطبيقات، والتعليل الذي استخدم في النظرية 23.3.1 يُعد – ببساطة – مثالاً أو شاهدًا على خطوة الاستقراء في النظرية 9.2.5.

تنطبق نظرية توران على مسائل القيم التطرفية (القصوى) عندما يكون هناك شرط يمنع العصب من رتبة معينة. وسنعطي وصفًا هندسيًّا لتطبيق من بوندي ومورتي. ([Bondy – Murty, [1976, p 113 – 115).

10.2.5. مثال*. الأزواج المتباعدة من النقاط. افترض أن لدينا مدينة دائرية الشكل، ونرغب في تعيين مواقع لـ n من سيارات الشرطة وذلك من أجل تكبير (تعظيم) عدد الأزواج المتباعدة من هذه السيارات، ولنقل أن المسافة بين أي زوج من هذه السيارات أكبر من $d=1/\sqrt{2}$. إذا كان هنالك ست سيارات تقع على الدائرة، وعلى أبعاد متساوية بعضها من بعض، فإن الأزواج التي لا يبعد بعضها عن بعض بمقدار أكبر من d هي فقط الأزواج المتتابعة حول الخارج: يوجد 9 أزواج جيدة.

وبدلاً من ذلك، فإن وضع سيارتين بالقرب من رؤوس مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $\sqrt{3}/2$ يعطينا ثلاثة أزواج سيئة، و12 زوجًا جيدًا (ربما لا يكون هذا أفضل وضع مقبول اجتماعيًّا). وعمومًا، إن وضع $\lfloor n/3 \rfloor$ أو $\lceil n/3 \rceil$ سيارات بالقرب من كل رأس من رؤوس هذا المثلث، يؤدي إلى أن الأزواج الجيدة هي الأزواج التي تقابل أضلاع بيان توران الثلاثي الفرع. وفيما يأتي سنثبت أن هذا البناء هو أفضل ما يمكن. ■

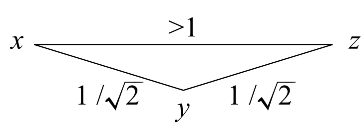


11.2.5. تطبيق* افترض أن n مجموعة من النقاط في المستوى، بحيث إن المسافة بين أي زوج من هذه النقاط لا تزيد على 1، فإن أكبر عدد من الأزواج التي تبعد بعضها عن بعض مسافة أكثر من $1/\sqrt{2}$ هو $\lfloor n^2/3 \rfloor$.

الإثبات: ارسم بيانًا رؤوسه هذه النقاط، بحيث يكون أي رأسين متجاورين إذا كانت المسافة بينهما تزيد على $1/\sqrt{2}$. باستخدام نظرية توران والبناء الموجود في المثال 10.2.5، يكفي أن نثبت أن G لا تحوي K_4.

من بين أي أربع نقاط، هناك ثلاث منها تشكل زاوية قياسها أكثر من $90°$: إذا كانت النقاط الأربع تشكل شكلاً رباعيًّا محدبًا (Convex) فإن مجموع الزوايا الداخلية لهذا الشكل يساوي $360°$، وإذا كانت إحداها داخل المثلث الذي تحدده النقاط الثلاثة الباقية، فإنها تصنع مع هذه النقاط ثلاث زوايا مجموعها يساوي $360°$.

افترض أنه يوجد لـ G عصبة من أربعة رؤوس هي: w و x و y و z، حيث إن $\angle x\,y\,z \geq 90^o$. وبما أن طول كل من $x\,y$ و$y\,z$ يزيد على $1/\sqrt{2}$ ، فإن طول $x\,z$ أكبر من طول وتر المثلث القائم الذي طول كل من ضلعي زاويته القائمة يساوي $1/\sqrt{2}$. لذا، فإن المسافة بين x وz تزيد على 1، وهذا يناقض الفرض. ■



حتى ودون العبارة البنيوية الكاملة لنظرية توران، فإن بإمكاننا أن نجد مباشرة حدًّا أعلى على عدد أضلاع البيان الذي له n من الرؤوس والذي يخلو من K_{r+1} (التمرين 16). وبقلب هذا رأسًا على عقب، نحصل على حد أدنى حاد على العدد اللوني للبيان بدلالة عدد الرؤوس والأضلاع (التمرين 17).

البيانات الحرجة لونيًّا (Color - Critical Graphs)

إن بيان توران يحل مسألة هي نوعًا ما نقيض (ضد) فهم: ماذا يُجْبِر العدد اللوني أن يكون k؟ (أو ماذا يضمن وجود عدد لوني يساوي k؟). فهي تعُدُّ بيانات عظمى تجتنب الحاجة إلى k من الألوان بدلاً من البيانات الصغرى التي تحتاج إلى k من الألوان.

يوجد لكل بيان لوني من الدرجة k بيان جزئي حرج لونيًّا من الدرجة k؛ لأنه يمكننا الاستمرار بحذف (إهمال) أضلاع ورؤوس معزولة دون إنقاص العدد اللوني حتى نصل إلى نقطة (مرحلة) لا نستطيع بعدها حذف أي ضلع أو أي رأس معزول دون إنقاص العدد اللوني. لذا، فإن معرفة البيانات الحرجة لونيًّا من الدرجة k تساعدنا على اختبار قابلية التلوين بـ $k-1$ من الألوان. وسنقدم فيما يأتي بعض الخواص البسيطة للبيانات الحرجة من الدرجة k.

12.2.5. ملاحظة: إذا كان G بيانًا ليس له رؤوس معزولة، فإن G يكون حرجًا لونيًّا إذا وفقط تحقق أن $\chi(G - e) < \chi(G)$ لكل ضلع $e \in E(G)$. لذا، لبرهنة أن بيانًا مترابطًا يكون حرجًا لونيًّا، فإننا نحتاج – فقط – لمقارنته بيانات جزئية نحصل عليها بحذف ضلع واحد من هذا البيان. ■

13.2.5. فرضية: افترض أن G بيان حرج من الدرجة k.

(a) لكل $v \in V(G)$، يوجد لـ G تلوين فعلي من الدرجة k، بحيث إن اللون على الرأس v لا يظهر على أي رأس آخر، وتظهر الـ $k-1$ لونًا الأخرى على $N(v)$.

(b) لكل $e \in E(G)$، يتحقق أن كل تلوين فعلي من الدرجة $k-1$ للبيان $G-e$، يعطي اللون نفسه على طرفي e.

الإثبات: (a) إذا أُعطينا تلوينًا f من الدرجة $k-1$ للبيان $G-v$، فإن إضافة اللون k على الرأس v فقط يتمم تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان G. أما الألوان الأخرى، فيجب أن تظهر جميعها على $N(v)$؛ لأنه إن لم يظهر أحد هذه الألوان على $N(v)$، فإنه يمكن تحديد هذا اللون للرأس v، وبذلك نحصل على تلوين فعلي بـ $k-1$ لونًا للبيان G.

(b) إذا وجد تلوين فعلي من الدرجة $k-1$ للبيان $G-e$، بحيث إن لطرفي e لونين مختلفين فإن إضافة e للبيان G يعطينا تلوينًا فعليًّا من الدرجة $k-1$ للبيان G. ■

لاحظ أنه لكل بيان **G**، فإن الفرضية 5 .2 .13a تتحقق لكل $v \in V(G)$ ، بحيث إن $\chi(G - v) < \chi(G) = k$، كما أن الفرضية 5 .2 .13b تتحقق لكل $e \in E(G)$، بحيث إن $\chi(G - e) < \chi(G)=k$.

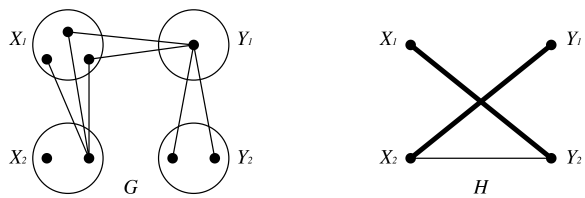
14.2.5. مثال: إن البيان $C_5 \vee K_5$ الموجود في المثال 8.1.5 هو بيان حرج لونيًّا. عمومًا، إن ربط أي بيانين حرجين لونيًّا دائمًا يعطي بيانًا حرجًا لونيًّا. ويعدّ برهان هذا سهلاً، وذلك من خلال استخدام الفرضية 12.2.5، آخذين في الحسبان حالات حذف ضلع؛ الضلع المحذوف يمكن أن يكون ضلعًا في G أو في H، أو له طرف في G والطرف الآخر في H (التمرين 3). ■

لقد أثبتنا في البديهية 18.1.5 أن $\delta(G) \geq k - 1$ عندما يكون G بيانًا حرجًا من الدرجة k. وبإمكاننا تقوية هذه النتيجة إلى $\kappa'(G) \geq k - 1$ من خلال استخدام نظرية كونج وإيجرفاري (Konig – Egervary theorem).

15.2.5. تمهيدية: ([Dirac [1953]) افترض أن G بيان، بحيث إن $\chi(G) > k$. افترض أن X وY تجزئة لـ $V(G)$. إذا كان $G[X]$ و$G[Y]$ قابلين للتلوين بـ k من الألوان، فإن القطع الضلعي $[X, Y]$ يحوي k ضلعًا على الأقل.

الإثبات: (Dirac – Sorensen – Toft [1974], Kainen) افترض أن $X_1, \ldots, X_k$ و$Y_1, \ldots, Y_k$ هي التجزئات لكل من X و Y المشكلة من الصفوف اللونية الناتجة على تلوين فعلي بـ k من الألوان لكل من $G[X]$ و$G[Y]$. إذا لم يوجد أي ضلع بين X_i و Y_j، فإن $X_i \cup y_j$ تكون مجموعة مستقلة في G. سنبين ما إذا كان $|[X, Y]| < k$، فبإمكاننا ضم صفوف لونية من $G[X]$ و$G[Y]$ في صورة أزواج لتكوين تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G.

كوِّن بيانًا ثنائي الفرع H، رؤوسه $X_1, \ldots, X_k$ و$Y_1, \ldots, Y_k$ بحيث إن $X_i y_i \in E(H)$ إذا لم يوجد أي ضلع في G بين كل من المجموعتين X_i و Y_j. إذا كان $|[X, Y]| < k$، فإن في H أكثر من $k(k-1)$ ضلعًا. وبما أن m رأسًا يمكن أن تغطي (km) ضلعًا في بيان جزئي للبيان $K_{k,k}$، فلا يمكن تغطية $E(H)$ بـ $k-1$ رأسًا. من نظرية كونج وإيجرفاري، هناك مواءمة تامة M للبيان H. في G أعطي اللون i لـ X_i كلها وللمجموعة Y_j كلها التي توائم X_i في M. وبما أنه لا يوجد أضلاع تربط بين X_i وY_j، فإن عمل هذا لكل i ينتج تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان G، وهذا يناقض افتراض أن $\chi(G) > k$. لذا، نستنتج أن $|[X, Y]| \ge k$. ■

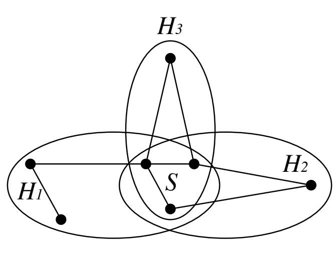


16.2.5. نظرية: ([Dirac [1953]) كل بيان حرج من الدرجة k يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $k-1$.

الإثبات: افترض أن G بيان حرج من الدرجة k، وافترض أن $[X, Y]$ هما أصغر قطعين ضلعيين لـ G. وبما أن G حرج من الدرجة k، فإن $G[X]$ و$G[Y]$ يكونان قابلين للتلوين بـ $k-1$ من الألوان. طبق البديهية 15.2.5 مستخدمًا $k-1$ بوصفه وسيطًا (متغيرًا)، تجد أن $|[X,Y]| \ge k-1$. ■

على الرغم من أن البيانات الحرجة من الدرجة k يجب أن تكون مترابطة ضلعيًّا من الدرجة $k-1$، إلا أنها ليست بالضرورة مترابطة من الدرجة $k-1$. يوضح التمرين 32 كيفية بناء بيانات حرجة من الدرجة k، ودرجة ترابطها تساوي 2. وعلى الرغم من ذلك، نستطيع حصر سلوك مجموعات قطع الرؤوس القليلة في البيانات الحرجة من الدرجة k.

17.2.5. تعريف: افترض أن S مجموعة من الرؤوس في بيان G. نعرِّف الفلقة المعتمدة على S (وتكتبها على الصورة الفلقة - S) للبيان G (S – lope) على أنها البيان الجزئي من G الذي رؤوسه S، بالإضافة إلى رؤوس أحد مركبات $G - S$. لكل مجموعة جزئية S من $V(G)$، يكون البيان G اتحادًا للفلق S.



ونستخدم هذا المفهوم في برهان عبارة تتعلق بالرؤوس التي تشكل مجموعات قطع في البيانات الحرجة من الدرجة k، والتي ستكون مفيدة في النظرية الآتية. (التمرين 36 يقوي النتيجة عندما $|S| = 2$).

18.2.5. فرضية: إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة k، فإنه لا يحوي مجموعة قطع مؤلفة من رؤوس متجاورة زوجًا زوجًا. وعلى وجه الخصوص، إذا وجد في G مجموعة قطع $S = \{x, y\}$، فإن $x \nleftrightarrow y$ ويوجد في G (فلقة $-S$) H، بحيث إن $\chi(H + xy) = k$.

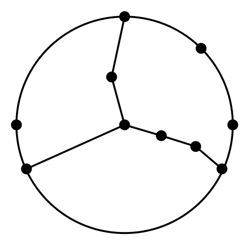
الإثبات: افترض أن S مجموعة قطع في بيان G حرج من الدرجة k، وافترض أن $H_1, \ldots, H_t$ هي مجموعة فلق G المعتمدة على S (فلق $-S$). بما أن كل H_i بيان جزئي فعلي لبيان حرج من الدرجة k، فإن H_i كله يكون قابلاً للتلوين بـ k من الألوان. وإذا وُجد تلوين فعلي من الدرجة $k - 1$ لكل H_i بحيث يعطي هذا التلوين ألوانًا مختلفة لرؤوس S، فيمكن تبديل أسماء هذه الألوان في هذا التلوين لتتوافق على S. وبعد ذلك، فإن هذه الألوان تتحد لإعطاء تلوين من الدرجة $k - 1$ للبيان G، وهذا مستحيل. لذا، هناك فلقة H معتمدة على S بحيث لا يوجد لهذه الفلقة تلوين فعلي من الدرجة $k - 1$، بحيث إن ألوان رؤوس S تكون مختلفة.

إن هذا يعني أن S ليست عصبة. إذا كانت $S = \{x, y\}$، فإن كل تلوين من الدرجة $k - 1$ لـ H يحدد اللون نفسه لكل من x و y. واستنادًا إلى ذلك، فإن $H + xy$ غير قابل التلوين $k - 1$ لونًا. ■

التقسيمات القسرية (Forced Subdivitions)

ليس من الضروري أن يكون لدينا عصبة من الدرجة k للحصول على عدد لوني k، ولكن ربما نحتاج إلى صورة أضعف للعصبة من الدرجة k.

19.2.5. تعريف: ليكن H بيانًا، نعرف تقسيم H على أنه البيان الذي نحصل عليه من H عن طريق تقسيم أضلاع H بالتتابع (التعريف 19.2.5). وهذا يكافئ قولنا: إن تقسيم H هو البيان الذي نحصل عليه من H عن طريق استبدال أضلاع H بمسارات منفصلة داخليًّا.



تقسيم K_4

20.2.5. نظرية: ([Dirac [1952 a). كل بيان عدده اللوني يساوي 4 على الأقل يحوي تقسيمًا للبيان K_4.

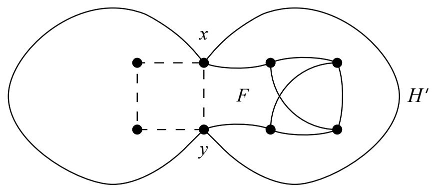
الإثبات: بالاستقراء على $n(G)$.

الخطوة الأولى: $n(G) = 4$. إن البيان G لا يمكن أن يكون إلا البيان K_4 نفسه.

لذا، افترض أن $n(G) > 4$. بما أن $\chi(G) \geq 4$، فبإمكاننا أن نفترض أن H بيان جزئي من G حرج من الدرجة 4. من الفرضية 18.2.5 ، لا يوجد لـ H رأس قطع. إذا كان $\kappa(H) = 2$، وكانت $S = \{x, y\}$ مجموعة قطع حجمها 2، فإن الفرضية 18.2.5 تضمن أن $x \nleftrightarrow y$، وتضمن كذلك وجود فلقة H' لـ H معتمدة على S، بحيث إن $\chi(H' + xy) \geq 4$. وبما أن $n(H') < n(G)$ ، فبإمكاننا تطبيق فرضية الاستقراء للحصول على تقسيم F لـ K_4 في $H' + xy$. لاحظ أن F يظهر كذلك في G بشرط عدم احتوائه على xy (انظر الشكل أدناه). في هذه الحالة، نُعدِّل F للحصول على تقسيم آخر لـ K_4 في G بأن نستبدل بالضلع xy مسارًا من x إلى y من خلال فلقة

$S-$ أُخرى من فلق H المُعتمدة على S. إن مثل هذا المسار يكون موجودًا؛ لأن أصغرية (وجود قيمة صغرى) S تضمن وجود مسار لكل رأس من رؤوس S في كل مركبة من مركبات $H-S$.

لذا، نستطيع أن نفترض أن H مترابط من الدرجة 3. اختر رأسًا x في $V(G)$. بما أن $H-x$ مترابط من الدرجة 2؛ فإن فيه حلقة طولها يساوي 3 على الأقل (اجعل x تمثل الرأس المركزي، وC هي الحلقة الخارجية وذلك في الشكل أعلاه). بما أن H مترابط من الدرجة 3، فإن بديهية المروحة (النظرية 23.2.4) تعطينا مروحة x، $V(C)$ بحجم يساوي 3 في H. إن هذه المسارات الثلاثة بالإضافة إلى C تشكل تقسيمًا لـ K_4 في H. ■



21.2.5.* ملاحظة: خمّن هاجوز (Hajos) في العام 1961م أن كل بيان لوني من الدرجة k يحوي تقسيمًا للبيان K_k. عندما $k = 2$، هذه العبارة تقول: إن كل بيان ثنائي اللون يحوي مسارًا غير بديهي أو غير تافه، وتقول أيضًا: عندما $k = 3$، فإن كل بيان ثلاثي اللون يحوي حلقة، والنظرية 20.2.5 تثبت العبارة في حال كانت $k = 4$. والمسألة ما زالت دون حلّ عندما $k \in \{5,6\}$. مخمنة هاجوز غير صحيحة عندما $k \geq 7$ (انظر التمرين 40، [1979] Catlin). لقد اقترح هادوايجر (Hadwiger) في العام 1943م مخمنة أضعف هي: كل بيان لوني من الدرجة k يحوي بيانًا جزئيًّا يمكن تحويله إلى K_k من خلال إجراء عمليات انقباض (تقليص) للأضلاع، هذه العبارة أضعف؛ لأن التقسيم لـ K_k هو بيان جزئي خاص من هذا النوع، فعندما $k = 4$، فإن مخمنة هادوايجر تكافئ النظرية 20.2.5. وفي حالة $k = 5$، فإنها تكافئ نظرية الألوان الأربعة (الفصل السادس). وعندما $k=6$، فقد بُرهنت هذه الحالة باستخدام نظرية الألوان الأربعة من قبل روبرتسون (Robertson) وسيمور (Seymour) وثوماس (Thomas) في العام 1993م. والمسألة ما زالت دون حل عندما $k \geq 7$. ■

بعض النتائج المتعلقة بالبيانات الحرجة من الدرجة k قابلة للتعميم للصف الأكبر من البيانات التي لها $\delta(G) \geq k - 1$. فعلى سبيل المثال، العبارة «كل بيان درجته الصغرى على الأقل 3 يمتلك تقسيمًا لـ K_4» (التمرين 38) هي تقوية للنظرية 20.2.5، وقد أثبت كل من ديراك (Dirac) وجنج (Jung) في العام 1965م أنه إذا كان العدد اللوني كبيرًا بما يكفي، فإن ذلك يضمن وجود تقسيم لـ K_k في G (يجبر G على احتواء تقسيم لـ K_K).

وقد حَسَّنَ مادر (Mader) هذه النتيجة من خلال إضعاف المفروض، وتقوية النتيجة؛ إذا كان F بيانًا بسيطًا، فإنّ كل بيان بسيط G حيث $\delta(G) \geq 2^{e(F)}$ يحوي تقسيمًا لـ F. البداية بغرض أن $\delta(G) \geq 2^{e(F)}$ هي أكبر مما هو ضروري، ولكنها تسمح ببرهان أقصر.

22.2.5. بديهية: [1967] Mader، انظر [1988] Thomassen. إذا كان G بيانًا بسيطًا درجته الصغرى تساوي K 2 على الأقل، فإن G يحوي بيانات جزئية منفصلة G' وH، بحيث إن: 1) H يكون مترابطًا 2) $\delta(G') \geq k$ و 3) لكل رأس في G' يوجد جار في H.

الإثبات: يمكننا افتراض أن G بيان مترابط. اجعل $G \cdot H'$ ترمز إلى البيان الذي نحصل عليه من G عن طريق تقليص أضلاع البيان الجزئي المترابط H'، وحذف النسخ الزائدة من الأضلاع المكررة. إن المجموعة $V(H')$ تصبح رأسًا واحدًا في $G \cdot H'$.

خذ في الحسبان البيانات الجزئية المترابطة H' من البيان G جميعها، بحيث تحوي $G \cdot H'$ على الأقل $k(n(G) - n(H')) + 1$ ضلعًا.

بما أن $\delta(G) \geq 2k$، فإن كل بيان جزئي من G برأس واحد هو مثل هذا البيان الجزئي، وبما أن هذه البيانات الجزئية موجودة، فيمكننا اختيار H ليكون بيانًا جزئيًّا أعظميًّا له هذه الخاصية.

اجعل S تمثل مجموعة الرؤوس خارج H التي جيرانها في H، واجعل $G' = G[S]$، نحتاج فقط إلى برهنة أن $\delta(G') \geq k$. يوجد لكل رأس x في $V(G')$ جار y في $V(H)$. في البيان $G\ (H \cup xy)$، نجد أن الأضلاع الواقعة على x في G' تضعف (تنهار) إلى أضلاع من $V(G')$ إلى H التي تظهر في H . G، وأن الضلع $x\,y$ ينقبض. لذا فإن: $e(G \cdot H) - e(G \cdot (H \cup xy)) = d_{G'}(x) + 1$، ومن خيارنا لـ H، نجد أن هذا الفرق أكبر من k. ولذلك، فإن $\delta(G') \geq k$. ■

23.2.5.*نظرية: [Mader [1967]، انظر (Thomassen [1988]) إذا كان كل من F وG بيانين بسيطين، بحيث إن $e(F) = m$ و $\delta(F) \geq 1$، فإن $\delta(G) \geq 2^m$ تضمن أن G يحوي تقسيمًا لـ F.

الإثبات: بالاستقراء على m. إذا كانت $m \leq 1$، فإن النتيجة بديهية. لذا، افترض أن $m \geq 2$. من البديهية 22.2.5، نستطيع أن نختار بيانات جزئية منفصلة H و G' في G، بحيث يكون H مترابطًا، و $\delta(G') \geq 2^{m-1}$، ويوجد جار في H لكل رأس في G'. إذا وُجد لـ F ضلع $e = x\,y$، بحيث إن $\delta(F - e) \geq 1$، فإن فرضية الاستقراء تضمن وجود تقسيم J لـ $F - e$ في G'.

ويمكن إضافة مسار خلال H بين رؤوس G التي تمثل x وy من أجل إتمام التقسيم لـ F.

إذا كانت $\delta(F - e) = 0$ لكل $e \in E(F)$، فإن كل ضلع في F يقع على ورقة. الآن F غابة من النجوم. و$\delta(G) \geq 2^m \geq 2m$ تسمح لنا بإيجاد F نفسها في غابة حجمها يساوي $2\ m - 1$ على الأكثر في G، وذلك باستخدام الفرضية 8.1.2 ■

24.2.5.* ملاحظة: الحالة التي يكون فيها F بيانًا تامًّا تتمتع بأهمية خاصة. افترض أن $f(k)$ تساوي أصغر d، بحيث يحوي كل بيان درجته الصغرى تساوي d على الأقل تقسيمًا لـ K_k. من النظرية 23.2.5، نجد أن $f(k) \leq 2^{\binom{k}{2}}$. لقد أثبت كل من كوملوز (Komlos) وسميردي (Szemeredi) في العام 1996م وبولوباس وثوماسون (Bollobas – Thomason) في العام 1998م أن $f(k) < ck^2$، حيث C ثابت (أثبت الأخيران أن $c \leq 256$). بما أنه لا يوجد لـ $K_{m,\,m-1}$ تقسيم لـ K_{2K} عندما $m = k(k+1)/2$ (التمرين 41)، فإن $f(k) > k^2/8$.

يعطينا التمرين 38 أن $f(4) = 3$، إضافة إلى أن $f(5) = 6$. في الشكل العشريني (الذي له عشرون وجهًا) (التمرين 8.3.7) يعطينا أن $f(5) \geq 6$؛ لأن هذا البيان منتظم من الدرجة 5، وليس له تقسيم لـ K_5 من جهة، ومن جهة أخرى، فقد أثبت مادر [1998] مخمنة ديراك [1964] التي تنص على أن كل بيان له n من الرؤوس، وله على الأقل $3\ n - 5$ ضلعًا يحوي تقسيمًا لـ K_5. ومن صيغة جمع الدرجات، فإن $\delta(G) \geq 6$ تعطينا أن عدد الأضلاع يساوي $3n$ على الأقل. لذا، فإن $f(5) \leq 6$.

أخيرًا، نلاحظ أن سكوت [1997] (*Scott*) أثبت نسخة التقسيم من مخمنة جيارفاس وسمنر (Gyárfas – Sumner) (الملاحظة 5.2.4) لكل شجرة T ولكل عدد صحيح k: إذا خلا G من عصبة من الدرجة وكان $\chi(G)$ كبيرًا بما يكفي، فإن G يحوي تقسيمًا لـ T كبيان جزئي مستحدث. ■

تمـــارين (Exercises)

1.2.5. (–) افترض أن G بيان، بحيث إن $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ لكل زوج x وy من الرؤوس المختلفة. أثبت أن G بيان تام. (تعليق: لقد خمن لوفاز أن النتيجة كذلك تتحقق عندما نفرض هذا الشرط فقط على الرؤوس المتجاورة).

2.2.5. (–) أثبت أن البيان البسيط يكون بيانًا تامًّا متعدد الفروع إذا وفقط إذا خلا هذا البيان من بيان جزئي مستحدث له ثلاثة رؤوس وضلع واحد.

3.2.5. (-) تضمن النتائج أدناه عدم وجود بيان حرج من الدرجة k وله $k+1$ من الرؤوس:
a) افترض أن x و y رأسان في بيان حرج G، أثبت أن $N(x) \subseteq N(y)$ إذا وفقط إذا كان كل من G و H حرجًا لونيًّا، استنتج من ذلك أنه لا يوجد بيان حرج من الدرجة k بحيث يكون له $k+1$ رأسًا.
b) أثبت أن $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$، وأن $G \vee H$ يكون حرجًا لونيًّا إذا وفقط إذا كان كل من G و H حرجًا لونيًّا. استنتج من ذلك أن $C_5 \vee K_{k-3}$ الذي له $k+2$ رأسًا يكون حرجًا من الدرجة k.

4.2.5. (-) افترض أن $n \in \mathbb{N}$، وافترض كذلك أن G هو البيان الذي رؤوسه $\{v_0, \ldots, v_{3n}\}$ والمعرف على الشكل $i \leftrightarrow j$ إذا وفقط إذا تحقق أن $|i-j| \le 2$، وأن $i+j$ لا يقبل القسمة على 6:
a) حدد (جد) قوالب G.
b) أثبت أن إضافة الضلع $v_0\, v_{3n}$ إلى G ينتج بيانًا حرجًا من الدرجة 4.

5.2.5. (-) جد تقسيمًا لـ K_4 في بيان جروتزك (المثال 2.2.5).

• • • • •

6.2.5. حدد أصغر عدد من الأضلاع لبيان مترابط له n من الرؤوس، وعدده اللوني يساوي k (مساعدة: خذ في الحسبان البيانات الجزئية الحرجة من الدرجة k [1962] Ersov – Kozuhin، انظر Bhasicer – Samad – West [1994] من أجل درجات الترابط الأعلى.

7.2.5. (!) إذا كان لدينا تلوين أمثل لبيان لوني من الدرجة k (عدده اللوني يساوي k)، أثبت أنه يوجد لكل لون i رأس لونه i يجاور رؤوسًا ملونة بالـ $k-1$ لونًا الأخرى.

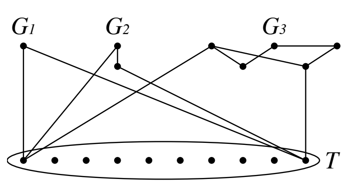
8.2.5. استخدم خواص البيانات الحرجة لونيًّا لبرهنة الفرضية 14.1.5 مرةً أُخرى.
$\chi(G) \le 1 + \max_i \min\{d_i, i-1\}$، حيث $d_1 \ge \ldots \ge d_n$ هي درجات رؤوس G.

9.2.5. (!) أثبت أنه إذا كان البيان G حرجًا لونيًّا، فإن البيان G' المولد من G من خلال بناء مسيلسكي يكون أيضًا حرجًا لونيًّا.

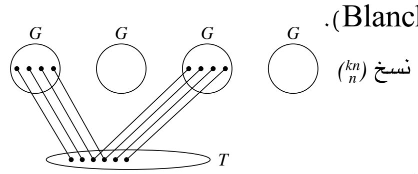
10.2.5. افترض أن G بيان، رؤوسه هي: $v_1, \ldots v_n$، وأن G' هو البيان المولد من G عن طريق بناء مسيلسكي. وليكن H بيانيًّا جزئيًّا من G، وافترض أن G'' هو البيان الذي نحصل عليه من G' عن طريق إضافة الأضلاع $\{u_i\, u_j : v_i\, v_j \in E(H)\}$. أثبت أن $\chi(G'') = \chi(G) + 1$، وأن:
$\omega(G'') = \max\{\omega(G), \omega(H) + 1$ (Pritikin).

11.2.5. (!) إذا كان G بيانًا بحيث لا يمكن أن يستحدث منه البيان $2K_2$، فأثبت أن $\chi(G) \le \binom{\omega(G)+1}{2}$ (مساعدة: استخدم عصبة كبرى لتعريف جمع فيه $\omega+(G)$ $\binom{\omega(G)}{2}$ مجموعة مستقلة تغطي الرؤوس. تعليق: هذه حالة خاصة من مخمنة جيرفاس وسمنر (الملاحظة 4.2.5)، ([1980] Wagon).

12.2.5. (!) افترض أن $G_1 = K_1$. لكل $k > 1$ عرِّف G_K على الشكل التالي: أضف مجموعة مستقلة T حجمها $\prod_{i=1}^{k-1} n(G_i)$ وذلك للاتحاد المنفصل $G_1 + \ldots + G_{k-1}$. ولكل خيار لـ $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ في $V(G_1) \, x \, \ldots \, x \, V(G_{K-1})$، اجعل رأسًا واحدًا من رؤوس T يحظى بـ $\{v_1, \ldots \, V_{k-1}\}$ كجوار. (في الرسم أدناه تجد G_4، وتم إيضاح الجيران لعنصرين فقط من عناصر T):
a) أثبت أن $\omega(G_k) = 2$، وأن $\chi(G_k) = k$. ([1949] Zykov).
b) أثبت أن G_k حرج من الدرجة k. Schäuble [1969].



13.2.5. (+) افترض أن G بيان لوني من الدرجة k، وخصره يساوي 6، ورتبته n. ابن G' كالآتي: اجعل T مجموعة مستقلة بها k_n رأسًا جديدًا. خذ $\binom{kn}{n}$ نسخة من G بحيث تكون هذه النسخ منفصلة زوجًا زوجًا، على أن تكون نسخة واحدة لكل طريقة نختار بها مجموعة جزئية S من T حيث S تحوي n من العناصر. أثبت أن العدد اللوني للبيان الناتج يساوي $k + 1$، وأن خصر هذا البيان يساوي 6. (تعليق: بما أن C_6 ثنائي اللون وله خصر يساوي 6، فإنه يمكن بدء هذه العملية. وهذا يضمن أن هذا النوع من البيانات موجود). (Blanche Descartes [1974, 1954]).



14.2.5. العدد اللوني وطول الحلقات:

a) افترض أن v رأس في بيان G. من بين الأشجار المولدة لـ G. اجعل T هي الشجرة التي تجعل $\sum_{u\in v(G)} d_T(u,v)$. أكبر ما يمكن. أثبت أن كل ضلع في G يربط رؤوسًا تنتمي إلى مسار في T يبدأ عند v.

b) أثبت أنه إذا كان $\chi(G) > k \geq 2$، فإنه توجد في G حلقة طولها يزيد بمقدار 1 على أحد مضاعفات K. (مساعدة: استخدم الشجرة الموجودة في فرع (a) لتعريف تلوين من الدرجة K للبيان، (Tuza (G)).

15.2.5. (!) أثبت أن العدد اللوني لكل بيان على n من الرؤوس خالٍ من المثلثات يساوي $2\sqrt{n}$ على الأكثر. (تعليق: لذلك يوجد لكل بيان خالٍ من المثلثات ولوني من الدرجة k على الأقل $\frac{K^2}{4}$ رأسًا).

16.2.5. (!) أثبت أنه يوجد على الأكثر $\left(1-\frac{1}{r}\right)n^2/2$ ضلعًا لكل بيان بسيط على n من الرؤوس، بحيث لا يحوي هذا البيان عصبة من الدرجة $r + 1$. (مساعدة: يمكن برهان هذه النتيجة عن طريق استخدام نظرية توران، أو عن طريق الاستقراء على r، دون استخدام نظرية توران).

17.2.5. (!) افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، وm من الأضلاع:

a) أثبت أن $\omega(G) \geq \lceil n^2/(n^2-2m) \rceil$. (مساعدة: استخدم التمرين 16.2.5. تعليق: هذا يعطي أيضًا أن $\chi(G) \geq \lceil n^2/n^2-2m \rceil$ Myers – Liu [1972].

b) أثبت أن $\alpha(G) \geq \lceil n/(n/d+1) \rceil$ حيث d هي معدل درجة الرؤوس للبيان G (مساعدة: استخدم فرع(a) (Erdös – Gallai [1961]).

18.2.5. بيان توران $T_{n,r}$ (المثال 7.2.5) هو البيان التام المتعدد الفروع من الدرجة r الذي له b مجموعة جزئية من رؤوسه، حجم كل منها يساوي $a + 1$، و له كذلك $r - b$ مجموعة جزئية من رؤوسه حجم كل منها a حيث $a = \lfloor n/r \rfloor$ و$b = n - ra$:

a) أثبت أن $e(T_{n,r})=(1-1/r)n^2/2-b(r-b)/(2r)$.

b) بما أن $e(G)$ يجب أن يكون عددًا صحيحًا، فإن الفرع (a) يعطينا: $e(T_{n,r}) \leq \lfloor (1-1/r)\, n^2/2 \rfloor$. متى نحصل على اللامساواة في هذه المتباينة؟

19.2.5. (+) افترض أن $a=\lfloor n/r \rfloor$. قارن بيان توران $T_{n,r}$ مع البيان $\overline{K_a} + K_{n-a}$ لتثبت مباشرةً أن $e(T_{n,r}) = \binom{n-a}{2} + (r-1)\binom{a+1}{2}$.

20.2.5. افترض أن n و k عددان صحيحان موجبان، اجعل $q = \lfloor n/k \rfloor$, $r = n - qk$ و $S = \lfloor n/(K+1) \rfloor$ $t = n - s(k+1)$ أثبت أن: $\binom{q}{2}k + rq \geq \binom{s}{2}(k+1) + ts$. (مساعدة: خذ بعين الاعتبار متممة بيان توران). (Richter [1993]).

21.2.5. من بين البيانات البسيطة على n من الرؤوس التي تخلو من عصبة من الدرجة $r + 1$. أثبت أن بيان توران هو البيان الفريد الذي له أكبر عدد من الأضلاع. (مساعدة: تفحص برهان النظرية 9.2.5 بدقة وحذر أكثر).

22.2.5. تحصل مدينة دائرية الهيئة قطرها أربعة أميال على 18 محطة تقوية للهواتف المحمولة، وتستطيع كل محطة أن تبث إلى بقية المحطات التي تبعد عنها مسافة أقل أو تساوي ثلاثة أميال. أثبت أن محطتين على الأقل تستطيعان أن تبثا إلى خمس محطات أخرى على الأقل بغض النظر عن كيفية توزيع هذه المحطات في المدينة.

(أُخذ هذا السؤال من ([Bondy – Murty [1976, p 115).

23.2.5. (!) برهان توران لنظرية توران، مشتملاً الوحدانية ([Turan [1941):

a) أثبت أن أعظم بيان بسيط يخلو من عصبة من الدرجة $r+1$ يحوي عصبة من الدرجة r.

b) أثبت أن $e(T_{n,r}) = \binom{r}{2} + (n-r)(r-1) + e(T_{n-r,r})$.

c) استخدم فرعي (a) و(b) لبرهنة نظرية توران بالاستقراء على n، مشتملاً على توصيف البيانات التي تحقق هذا الحد.

24.2.5. (+) افترض أن $t_r(n) = e(T_{n,r})$، وافترض أيضًا أن G بيان له n من لرؤوس، وله $t_r(n) - k$ ضلعًا، وله على الأقل عصبة واحدة من الدرجة $r+1$، حيث $k \geq 0$. أثبت أنه توجد للبيان G $f_r(n) + 1 - k$ عصبة من الدرجة $r+1$ على الأقل، حيث $f_r(n) = n - \lceil n/r \rceil - r$ (مساعدة: أثبت أن للبيان الذي له عصبة واحدة بالضبط من الدرجة $r+1$ على الأكثر $t_r(n) - f_r(n)$ ضلعًا)، ([Erdös [1964], Moon [1965).

25.2.5. تشابه جزئي لنظرية توران للبيان $K_{2,m}$:

a) أثبت أنه إذا كان G بيانًا بسيطًا، وكان $\sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{2} > (m-1)\binom{n}{2}$. فإن G يحوي $K_{2,m}$ (مساعدة: لاحظ أن $K_{2,m}$ بيان فيه رأسان لهما m جارًا مشتركًا).

b) أثبت أن $\sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{2} \geq e(2e/n - 1)$ ، حيث إن G يحوي e ضلعًا.

c) استخدم فرعي (a) و(b) لبرهنة أن البيان الذي له $\frac{1}{2}(m-1)^{1/2}n^{3/2} + n/4$ ضلعًا يحوي $K_{2,m}$.

d) تطبيق: إذا أعطيت n من النقاط في المستوى، فأثبت أن المسافة تساوي 1 بالضبط لـ $\frac{1}{\sqrt{2}}n^{3/2} + n/4$ زوجًا من هذه النقاط على الأكثر، ([Bondy – Murty [1976, p 111 – 112).

26.2.5. إذا كانت $n \geq 4$، فأثبت أن خصر كل بيان له n من الرؤوس، وأكثر من $\frac{1}{2}n\sqrt{n-1}$ ضلعًا يساوي 4 على الأكثر. (مساعدة: استخدم طرق التمرين 25.2.5).

27.2.5. (+) لكل $n \geq 6$، أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس ليس له حلقتان منفصلتان ضلعيًّا يساوي $n+3$، (Pósa).

28.2.5. (+) لكل $n \geq 6$، أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس ليس له حلقتان منفصلتان يساوي $3n - 6$، (Pósa).

29.2.5. (!) افترض أن G بيان يخلو من المخالب (لا يستحدث منه $K_{1,3}$):

a) أثبت أن البيان الجزئي المستحدث من اتحاد صفين لونيين في أي تلوين فعلي للبيان G يتكون من مسارات وحلقات زوجية.

b) أثبت أنه إذا وُجد لـ G تلوين فعلي يستخدم بالضبط k من الألوان، فإنه يوجد لـ G تلوين فعلي من الدرجة k، حيث يختلف حجم الصفوف في هذا التلوين بمقدار 1 على الأكثر، ([Niessen – Kind [2000).

30.2.5. (+) أثبت أنه إذا وُجد لـ G تلوين فعلي g بحيث كان كل صف يحوي رأسين، فإنه يوجد لـ G تلوين أمثل f، بحيث يحوي كل صف لوني لهذا التلوين رأسين على الأقل. (مساعدة: إذا وُجدَ صف لوني لـ f يحوي رأسًا واحدًا، فاستخدم g لعمل تغيير في f. يمكن إعطاء الإثبات خوارزميًّا أو بالاستقراء على $x(G)$ [Gallai [1963 c .

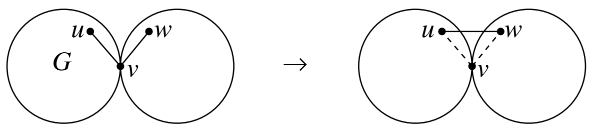
31.2.5. افترض أن G بيان مترابط لونيًّا من الدرجة k، بحيث إن G ليس بيانًا تامًّا، فضلاً عن أنه ليس حلقة طولها يكافئ $3 \ mod \ 6$، أثبت أنه يوجد لكل تلوين فعلي لـ G بـ k من الألوان رأسان لهما اللون نفسه، ولهما جار مشترك، (Tomesca).

32.2.5. (!) بناء هاجوز. ([Hajós [1961):

a) افترض أن G وH بيانان حرجان من الدرجة k لهما رأس مشترك v حيث $vu \in E(G)$ و$vw \in E(H)$. أثبت أن البيان $(G - vu) \cup (H - vw) \cup uw$ أيضًا حرج من الدرجة k.

b) لكل $k \geq 3$، استخدم الفرع (a) للحصول على بيان حرج من الدرجة k يختلف عن K_k.

c) لكل $n \geq 4$، ما عدا $n = 5$، ابنِ بيانًا حرجًا من الدرجة 4 له n من الرؤوس.



33.2.5. افترض أن G بيان حرج من الدرجة k له مجموعة فاصلة $S = \{x,y\}$. من الفرضية 18.2.5، $x \nleftrightarrow y$، أثبت أنه يوجد للبيان G فلقتان تعتمدان على S، ويمكن أن نسميهما G_1 و G_2، بحيث إن كلًّا من $G_1 + xy$ و $G_2 \,.\, xy$ حرج من الدرجة k (هنا $G_2 \,.\, xy$ ترمز إلى البيان الذي نحصل عليه من G_2 بإضافة الضلع xy، ومن ثم تقليص هذا الضلع).

34.2.5. (!) افترض أن G بيان حرج من الدرجة 4، وله مجموعة فاصلة S حجمها 4. أثبت أنه يوجد للبيان $G[S]$ أربعة أضلاع على الأكثر، (Pritikin).

35.2.5. (+) برهان بديل للعبارة: كل بيان حرج من الدرجة k يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $k - 1$:

a) افترض أن G بيان حرج من الدرجة k. $(k \geq 3)$، أثبت أنه إذا كان f ،e ضلعين في $E(G)$، فإنه يوجد لـ G بيان جزئي حرج من الدرجة $k - 1$ يحوي e ولا يحوي f [1974] (Toft).

b) استخدم فرع (a) والاستقراء على k لبرهان نظرية ديراك التي تنص على أن كل بيان حرج من الدرجة k يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $(k - 1)$ [1974] Toft.

36.2.5. (+) أثبت أنه إذا كان G حرجًا من الدرجة k، وكان كل بيان جزئي حرج من الدرجة $k-1$ يشاكل K_{k-1}، فإن $G=K_k$ $(k\geq4)$، (مساعدة: استخدم بديهية توفت (Toft) الخاصة بالبيانات الحرجة، التمرين 35.a.2.5 (Stiebitz [1985])).

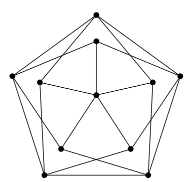
37.2.5. نقول: إن البيان G حرج تلوين الرؤوس (vertex – color – critical) إذا كان $\chi(G-v) < \chi(G)$ لكل $v \in V(G)$:

a) أثبت أنَّ كلَّ بيان حرج لونيًّا يكون حرجَ تلوين الرؤوس.

b) أثبت أنَّ كلَّ بيان حرج تلوين الرؤوس، وعدده اللوني يساوي 3، يكون حرجًا لونيًّا.

c) أثبت أنَّ البيانَ الموجود في الشكل أدناه حرجُ تلوين الرؤوس، وليس حرجًا لونيًّا.

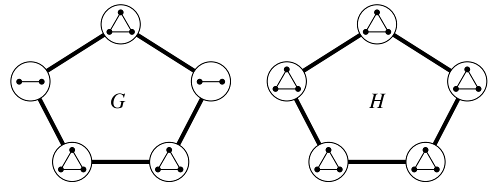
(تعليق: هذا البيان ليس بيان جروتزك).



38.2.5. (!) أثبت أن كل بيان بسيط درجته الصغرى تساوي 3 على الأقل يجب أن يحوي تقسيمًا لـ K_4. (مساعدة: أثبت النتيجة الأقوى – كل بيان بسيط غير تافه له على الأكثر رأس واحد درجته أقل من 3 يحوي تقسيمًا لـ K_4. يوضح برهان النظرية 20.2.5 أن كل بيان مترابط من الدرجة 3 يحوي تقسيمًا لـ (K_4)، Dirac [1952 a].

39.2.5. (!) افترض أنه إذا كانت $\delta(G) \geq 3$، فإن G يحوي تقسيمًا لـ K_4. أثبت أن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط على n من الرؤوس لا يحوي تقسيمًا لـ K_4 يساوي $2n - 3$.

40.2.5. في الشكل أدناه، افترض الضلع السميك (اللون الغامق) يعني أن كل ضلع في دائرة يجاور الأضلاع جميعها في الدائرة الأخرى. أثبت أن $\chi(G) = 7$ لكل G لا يحوي تقسيمًا لـ K_7. ثم أثبت أن $\chi(H) = 8$، ولكن H لا يحوي تقسيمًا لـ K_8، (Catlin [1979]).



41.2.5. افترض أن $m = k(k+1)/2$، وأثبت أنه لا يوجد تقسيم K_{2k} للبيان $K_{m,m-1}$.

42.2.5. (+) افترض أن F غابة لها m من الأضلاع. وافترض أيضًا أن G بيان بسيط بحيث إن $\delta(G) \geq m$، و $n(G) \geq n(F)$. أثبت أن G يحوي F بوصفه بيانًا جزئيًا. (مساعدة: احذف ورقة واحدة من كل مركبة غير تافهة من مركبات F لتحصل على F'. افترض أن R مجموعة جيران الرؤوس المحذوفة. أرسل R لكل المجموعة X التي تحوي m رأسًا من $V(G)$ بحيث إن المجموعة X تصغر $e(G[X])$ (تجعل لها قيمة صغرى). مدد X لنسخة من F'. استخدم نظرية هال (Hall) لبرهنة أنه يمكن مواءمة X مع الرؤوس المتبقية للحصول على نسخة من (F). Brandt [1994].

43.2.5. (+) افترض أن G بيان لوني من الدرجة k. ولاحظ أن البديهية 18.1.5، والفرضية 8.1.2 تشير إلى أن G يحوي كل شجرة لها k من الرؤوس بوصفه بيانًا جزئيًا. قم بتقوية هذه النتيجة لبيان مماثل، وضع عليه علامات دالة: إذا كان f تلوينًا فعليًا بـ k من الألوان للبيان G، وكانت T شجرة رؤوسها: $\{w_1, \ldots, w_k\}$، فتوجد دالة $\phi: V(T) \rightarrow V(G)$ تحافظ على التجاور بحيث إن $f(\phi)(w_i)) = i$ لكل i.

(Gyarfas – Szemeredi – Tuza [1980], Summer [1981]).

44.2.5. (+) افترض أن G بيان لوني من الدرجة k خصره يساوي 5 على الأقل، أثبت أن G يحوي كل شجرة على k من الرؤوس بوصفه بيانًا جزئيًا مستحدثًا، (سومنز، جيرفاس – سنرميردي – توزا)

(Gyárfás – Szemerédi – Tuza [1980], Sumner [1981]).

3.5. أوجه التعداد (Enumerative Aspects)

في بعض الأحيان، نسلط الضوء على مسألة صعبة من خلال الأخذ في الحسبان مسألة أعم. لا توجد خوارزمية جيدة معروفة لاختبار وجود تلوين فعلي من الدرجة k (انظر الملحق B)، ولكن ما زال بإمكاننا دراسة عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k (هنا نثبت مجموعة من الألوان عددها k).

إن العدد اللوني $\chi(G)$ هو أصغر عدد k، بحيث يكون العد موجبًا. إن معرفة العدد لكل k يجعلنا نعرف ما هو العدد اللوني. لقد قام بيركوف (Birkhoff) العام 1912 بتقديم مسألة العد هذه بوصفها طريقًا ممكنًا لحل مسألة الألوان الأربعة (البند 3.6). في هذا الجزء من الفصل، سنناقش خواص دالة العد، ومجموعة البيانات التي يسهل عليها حساب دالة العد ومواضيع أخرى متصلة بهذا الموضوع.

حساب التلوينات الفعلية (Counting Proper Coloring)

نبدأ بتعريف مسألة العدّ بوصفها دالة لـ k.

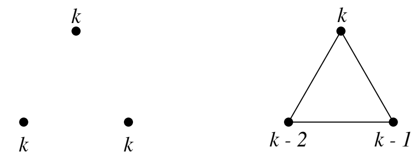
1.3.5. تعريف: ليكن $k \in \mathbb{N}$، و G بيانًا معطى. نعرِّف القيمة $\chi(G;k)$ على أنها عدد التلوينات الفعلية $f: V(G) \rightarrow [k]$. إن مجموعة الألوان المتوافرة هي: $[k] = \{1, \ldots, k\}$ ومن الممكن ألا نستخدم كل الـ k لونًا في التلوين f. إن تغيير أسماء الألوان المستخدمة في تلوين معين ينتج تلوينًا مختلفًا.

2.3.5. مثال: $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$ و $\chi(K_n;k) = k(k-1)\ldots(k-n+1)$.

عند تلوين رؤوس $\overline{K}_n$ نستطيع أن نستعمل أي لون من الـ k لونًا عند كل رأس بغض النظر عن الألوان التي استعملناها عند الرؤوس الأخرى، علاوة على أن كل دالة من الـ K_n دالة من مجموعة الرؤوس إلى المجموعة $[k]$ هي تلوين فعلي. لذا، فإن $\chi(\overline{K}_n;k) = k^n$. لا نستطيع استخدام الألوان التي استخدمت سابقًا في أثناء التلوين لتلوين الرأس i عند تلوين رؤوس K_n، لذا فإنه يتبقى $k - i + 1$ لونًا بوصفه خيارًا لتلوين الرأس i بغض النظر عن الطريقة التي أختيرت فيها الألوان السابقة. لذا، فإن $\chi(K_n;k) = k(k-1)\ldots(k-n+1)$. باستطاعتنا

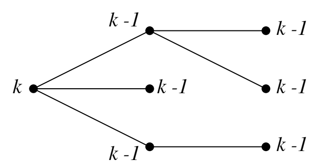
أيضًا عدّ هذه كـ $n!\binom{n}{2}$ وذلك بأن نختار أولاً n لونًا مختلفًا، ثم نضرب المقدار في $n!$ من أجل عد الطرق التي من خلالها نُحدد الألوان للرؤوس، فعلى سبيل المثال $\chi(K_3;3)=6$ و $\chi(K_3;4)=24$.

لاحظ أن قيمة حاصل الضرب تساوي 0 عندما $k<n$، وهذا منطقي لأنه لا يوجد تلوين فعلي في k من الألوان للبيان K_n عندما $k<n$. ■



3.3.5. فرضية : إذا كانت T شجرة لها n من الرؤوس، فإن $\chi(T;k)=k\,(k-1)^{n-1}$.

الإثبات: اختر رأسًا v ليكون جذرًا لـ T، نستطيع تلوين v بـ k من الطرق. إذا وسّعنا التلوين الفعلي للرؤوس الجديدة بالتزامن مع تنمية الشجرة من v، فإن اللون الممنوع عند كل خطوة هو لون الوالد. لذا، يوجد لدينا $k-1$ خيارًا لتلوين أي رأس جديد. بالإضافة إلى ذلك، فإن حذف ورقة يبين استقرائيًّا أن كل تلوين فعلي بـ k من الألوان يظهر بهذه الطريقة. لذا، فإن $\chi(T;k)=k\,(k-1)^{n-1}$. ■



هناك طريقة أُخرى لعدّ الألوان، وهي ملاحظة أن الصفوف اللونية لكل تلوين فعلي للبيان G تجزئ $V(G)$ إلى مجموعات مستقلة. وبتجميع الألوان بحسب هذه التجزئة، يتم الحصول على صيغة (قاعدة) لـ $\chi(G;k)$، وهي كثيرة حدود في k درجتها تساوي $n(G)$. لاحظ أن هذا يتحقق للأجوبة في المثال 2.3.5، والفرضية 3.3.5. وبما أن هذه الخاصية تتحقق لكل بيان، فإن $\chi(G;k)$ بوصفها دالة في k تسمى كثيرة الحدود اللونية للبيان G.

4.3.5 فرضية : افترض أن $x_{(r)}=x(x-1)\ldots(x-r+1)$. إذا كانت $p_r(G)$ ترمز إلى عدد تجزئات $V(G)$ إلى r من المجموعات المستقلة غير الخالية، فإن $\chi(G;k)=\sum_{r=1}^{n(G)} p_r(G)k_{(r)}$، وهذه كثيرة حدود من الدرجة $n(G)$.

الإثبات: عندما نستخدم r من الألوان فعليًّا في تلوين فعلي، فإن الصفوف اللونية تجزئ $V(G)$ إلى r من المجموعات المستقلة، وهذا يمكن أن يحدث بـ $p_r(G)$ طريقة. وعندما يتوافر لنا k من الألوان، فإنه يوجد بالضبط $k_{(r)}$ طريقة لاختيار الألوان وتحديدها للصفوف، إضافة إلى أن التلوينات الفعلية جميعها تظهر بهذه الطريقة. لذا، فإن الصيغة المعطاة أعلاه لـ $\chi(G;k)$ صحيحة.

بما أن $k_{(r)}$ كثيرة حدود في k و $p_r(G)$ ثابت لكل r، فإن هذه الصيغة تعطي أن $\chi(G;k)$ دالة كثيرة حدود في k. لاحظ أنه عندما يكون عدد رؤوس G يساوي n فيوجد بالضبط تجزئة واحدة لـ G إلى n مجموعة مستقلة، ولا توجد أي تجزئة أخرى تستخدم مجموعات أكثر من ذلك. لذا، فإن الحد القائد (الحد ذو الدرجة الأعلى) هو k^n. ■

5.3.5. مثال : $p_n(G)=1$ دائمًا، وذلك من خلال استخدام مجموعات حجم كل منها يساوي 1. ولذلك

$p_1(G) = 0$ إلا إذا خلا G من الأضلاع؛ لأن كل مجموعة الرؤوس تكون مجموعة مستقلة فقط للبيان $\overline{K}_n$

خذ في الحسبان البيان $G = C_4$. توجد بالضبط تجزئة واحدة إلى مجموعتين مستقلتين: إن الرؤوس المتضادة (المتقابلة) تكون في المجموعة نفسها. وعندما $r = 3$، فإننا نضع رأسين متضادين في مجموعة، ونترك الرأسين الآخرين في مجموعات وحدهما، ويمكننا عمل ذلك بطريقتين. لذا، فإن $p_2 = 1$، $p_3 = 1$، $p_4 = 1$ وأن:

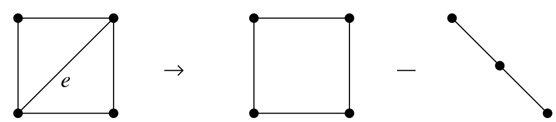
$$\chi(C_4; k) = 1 \cdot k(k-1) + 2 \cdot k(k-1)(k-2) + 1 \cdot k(k-1)(k-2)(k-3) = k(k-1)(k^2-3k+3) \quad \blacksquare$$

إن حساب كثيرة الحدود اللونية بهذه الطريقة – عمومًا – غير مناسب بسبب وجود عدد كبير من التجزئات للأخذ في الحسبان. وتوجد حسابات بخطوات مكررة كتلك التي استخدمت في الفرضية 8.2.2 لعدّ الأشجار المُولِدَة؛ اجعل $G \cdot e$ مرة أخرى ترمز إلى البيان الذي نحصل عليه من G بتقليص (إنقباض) الضلع e (التعريف 7.2.2). بما أن عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k لا تتأثر بالأضلاع المكررة، فإننا نهمل نسخ الأضلاع المكررة التي تنتج من جراء إجراء عملية تقليص (انقباض) الأضلاع، محافظين على نسخة واحدة فقط من كل ضلع مكرر لعمل بيان بسيط.

6.3.5. نظرية: (صيغة التكرار اللوني: Chromatic recurrence). إذا كان G بيانًا بسيطًا، وكان e ضلعًا في $E(G)$، فإن $\chi(G; k) = \chi(G - e; k) - \chi(G \cdot e; k)$.

الإثبات: إن كل تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G هو تلوين فعلي من الدرجة k للبيان $G - e$، بالإضافة إلى أن التلوين الفعلي من الدرجة k للبيان $G - e$ يكون تلوينًا فعليًّا من الدرجة k للبيان G إذا وفقط إذا أعطى هذا التلوين ألوانًا مختلفة للرأسين u و v اللذين هما رأسا الضلع e. لذا، نستطيع حساب التلوين الفعلي من الدرجة k للبيان G بطرح عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان $G - e$ التي تعطي u و v اللون نفسه من $\chi(G - e; k)$.

لاحظ أن تلوينات $G - e$ التي يكون لـ u و v فيها اللون نفسه ترتبط مباشرة بالتلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان $G - e$ التي فيها لون الرأس الناتج عن الانقباض هو لون الرأسين u و v نفسه. إن مثل هذا التلوين يلوّن فعليًّا أضلاع $G \cdot e$ جميعها إذا وفقط إذا لوّن هذا التلوين أضلاع G المختلفة عن e جميعها. ■



$G \qquad\qquad G - e \qquad\qquad G \cdot e$

7.3.5. مثال: التلوين الفعلي من الدرجة k للبيان C_4. إن حذف ضلع من C_4 ينتج P_4، ولكن تقليص ضلع من C_4 ينتج K_3. وبما أن K_4 شجرة، و K_3 بيان تام، فإن لدينا $\chi(P_4; k) = k(k-1)^3$ و $\chi(K_3; k) = k(k-1)(k-2)$ وباستخدام صيغة التكرار اللوني فإننا نحصل على:

$$\chi(C_4; k) = \chi(K_4; k) - \chi(K_3; k) = k(k-1)(k^2-3k+3) \quad \blacksquare$$

بما أن $G \cdot e$، و $G - e$ تحوي أضلاعًا أقل من G، فبإمكاننا استخدام صيغة التكرار اللوني استقرائيًّا لحساب $\chi(G; k)$. لاحظ أننا نحتاج إلى شرط ابتدائي للبيانات التي ليس لها أضلاع، والتي سبق أن حسبناها: $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$.

8.3.5. نظرية: (Whitney [1933 c]) افترض أن G بيان بسيط، فإذا كانت $\chi(G; k)$ هي كثيرة الحدود اللونية لهذا البيان، فإن درجة $\chi(G; k)$ هي $n(G)$. كما أن معاملات $\chi(G; k)$ هي أعداد صحيحة تتذبذب في الإشارة بين الموجب والسالب، وتبدأ على الشكل: $1, e(G), \ldots$.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $e(G)$. لاحظ أن الادعاء يتحقق تلقائيًّا عندما $e(G) = 0$، حيث $\chi(\overline{K}_n; k) = k^n$. ولخطوة الاستقراء، افترض أن G بيان له n من الرؤوس، و $e(G) \geq 1$. إن كلًّا من $G - e$، و $G . e$ يحوي أضلاعًا عددها أقل من عدد أضلاع G ويوجد $n - 1$ رأسًا للبيان $G . e$. لذا، وباستخدام فرضية الاستقراء، نجد أن هناك أعدادًا صحيحة غير سالبة $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ بحيث إن $\chi(G - e; k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i k^{n-i}$، و $\chi(G - e; k) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i b_i k^{n-1-i}$. ونجد من التكرار اللوني أن:

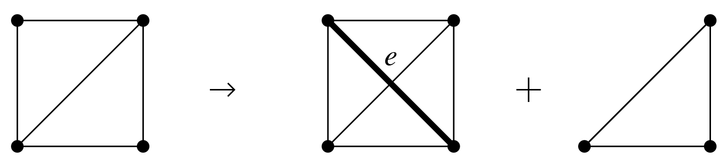
$$\begin{array}{rlllll}
\chi(G - e; k): & & k^n - [e(G) - 1]\, k^{n-1} + a_2 k^{n-2} & - \dots + & (-1)^i & a_i k^{n-i} \dots \\
-\ \chi(G \cdot e; k): & -(& k^{n-1} - b_1 k^{n-2} & + \dots + & (-1)^{i-1} & b_{i-1} k^{n-i} \dots) \\
\hline
=\ \ \chi(G; k): & & k^n - e(G)\, k^{n-1} + (a_2 + b_1)\, k^{n-2} & - \dots + & (-1)^i\, (a_i + b_{i-1})\, k^{n-i} \dots &
\end{array}$$

لذا، فإن $\chi(G; k)$ هي كثيرة حدود، معاملها القائد $a_0 = 1$، والمعامل الذي يليه هو $-(a_1 + b_0) = -e(G)$ وتتذبذب إشارة معاملاتها بين الموجب والسالب. ■

9.3.5. مثال: عند إضافة ضلع إلى بيان، فإننا نحصل على بيان يسهل حساب كثيرة الحدود اللونية له، حيث يمكننا استخدام صيغة التكرار اللوني بطرق مختلفة؛ فبدلًا من كتابة $\chi(G; k) = \chi(G-e; k) - \chi(G . e; k)$، فإننا نستطيع كتابة $\chi(G - e; k) = \chi(G; k) + \chi(G \cdot e; k)$.

ولحساب $\chi(K_n - e; k)$ على سبيل المثال، فإننا نفترض أن $K_n = G$ في الصيغة البديلة أعلاه لنحصل على أن:

$$\chi(K_n - e; k) = \chi(K_n; k) + \chi(K_{n-1}; k) = (k - n + 2)^2 \prod_{i=0}^{n-3} (k < i)$$



$G - e$ $\qquad\rightarrow\qquad$ G $\qquad+\qquad$ $G . e$

وسننهي مناقشة هذا الموضوع من خلال إعطاء صيغة صريحة لإيجاد $\chi(G; k)$. لاحظ أن لهذه الصيغة الكثير من الحدود الأسية. لذا، فإن استخداماتها ستكون نظرية بصورة أساسية. إن هذه الصيغ تلخص النتيجة التي نحصل عليها إذا استخدمنا صيغة التكرار اللوني حتى نتخلص من اختيار الأضلاع جميعها.

10.3.5. نظرية: (Whitney [1932 c]). افترض أن $c(G)$ ترمز إلى عدد المركبات لبيان G. إذا أُعطينا $S \subseteq E(G)$ مجموعة جزئية من أضلاع G، وإذا كانت $G(S)$ ترمز إلى البيان المُولد للبيان G الذي أضلاعه تساوي المجموعة S، فإن العدد $\chi(G; k)$ الذي يمثل عدد التلوينات الفعلية للبيان G، يُعطى بالعلاقة:

$$\chi(G; k) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} k^{c(G(S))}$$

الإثبات: من تطبيق صيغة التكرار اللوني، فإن الانقباض قد يولد أضلاعًا مكررة. ولاحظنا سابقًا أن حذف الأضلاع المكررة لا يؤثر في $\chi(G; k)$. وندعي أيضًا أن حذف النسخ الإضافية من الأضلاع لا يؤثر في الصيغة التي نرغب في إثباتها.

افترض أن e و e' ضلعان في G لهما النقاط الطرفية نفسها. لاحظ أنه إذا كان $e' \in S$، و $e \notin S$ فإن $c(G(S \cup \{e\})) = c(G(S))$؛ لأن طرفي e ينتميان إلى المركبة نفسها لـ $G(S)$. على أي حال، $|S \cup \{e\}| = |S| + 1$. لذا، فإن حدود المجموع الخاصة بـ S و $S \cup \{e\}$ تختصر معًا. ومن هنا، فإن حذف حدود مجموعات الأضلاع التي تحوي e' لا يغير المجموع. وهذا يعني أنه بإمكاننا حذف e' أو إبقائه دون تغيير الصيغة.

عند حساب صيغة التكرار اللوني، فإننا نحصل على النتيجة نفسها إذا لم نهمل الأضلاع المكررة أو النشط، وبدلاً من ذلك، احتفظنا بالأضلاع المحذوفة جميعها أو التي تم تقليصها. وبتكرار تطبيق الصيغة، نحصل على $2^{e(G)}$. حدًّا في أثناء عملية اختيارنا للأضلاع جميعها، وعليه، فإن كل ضلع قد حُذِفَ، أو قُلِّص.

عندما تُحذَف الأضلاع جميعها أو تُقلَّص، فإن البيان المتبقي يتألف من رؤوس معزولة. اجعل S تمثل مجموعة الأضلاع التي تم تقليصها، إن الرؤوس المتبقية ترتبط بمركبات $G(S)$. وأن كل مركبة من هذه المركبات تصبح رأسًا واحدًا عندما تُقلَّص أضلاع S وتُحذَف الأضلاع الأخرى. إن الـ $c(G(S))$ رأسًا معزولاً في النهاية تعطي حدًّا له $K^{C(G(S))}$ لونًا. بالإضافة إلى ذلك، فإن الإشارة تتذبذب لكل مساهمة ناتجة عن انقباض لضلع، وتكون المساهمة موجبة إذا وفقط إذا كان $|S|$ عددًا زوجيًّا.

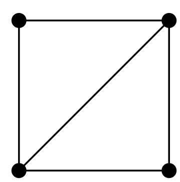
لذا، وعندما تكون S هي مجموعة الأضلاع التي قُلِّصت، فإن المساهمة تكون مساوية $(-1)^{|S|}\ k^{c(G(S))}$ وهذا يُحَسَب لكل حد في المجموع. ■

11.3.5. مثال: كثيرة حدود لونية. في الحالة التي يكون فيها G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس، فإن كل بيان جزئي مُولد عدد أضلاعه 0، أو 1 أو 2، يمتلك n، أو $n-1$، أو $n-2$ مركبة على الترتيب. وعندما $|S|=3$، فإن عدد المركبات يساوي $n-2$ إذا وفقط إذا كانت الأضلاع الثلاثة تشكل مثلثًا، وبخلاف ذلك، يكون عدد المركبات $n-3$.

فعلى سبيل المثال، إذا كانت G طائرة ورقية (لها 4 رؤوس و5 أضلاع) فإن هناك 10 مجموعات في كل منها ثلاثة أضلاع؛ حيث نجد في اثنتين منها أن $G(S)$ مكونة من مثلث إضافة إلى رأس معزول واحد. أما المجموعات الثمانية المتبقية فتعطي بيانًا جزئيًّا مولدًا له مركبة واحدة. إن نوعي هذه الثلاثيات يحسب سالبًا؛ لأن $|S| = 3$. لاحظ أن هناك مركبة واحدة لكل البيانات الجزئية المولدة التي لها 4 أو 5 أضلاع، لذا، فإن النظرية 10.3.5 تعطي أن:

$$\chi(G;k) = k^4 - 5k^3 + 10k^2 - (2k^2 + 8k^1) + 5k - k = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k$$

وهذا يتفق مع $\chi(G;\ k) = k(k-1)\ (k-2)^2$ التي تحسب من خلال الألوان مباشرةً، أو باستخدام $\chi(G;\ k) = \chi(C_4;\ k) - \chi(P_3;\ k)$. ■



لقد أثبت ويتني (Whitney) النظرية 10.3.5 باستخدام مبدأ التضمين والاستبعاد للعد البسيط. من بين المجموعة الكلية لـ k من الألوان، فإننا نعني بالتلوين الفعلي كلَّ تلوين لا يحدد اللون نفسه لطرفي أي ضلع في البيان. اجعل A_i تمثل مجموعة التلوينات من الدرجة k التي تحدد اللون نفسه لطرفي الضلع e_i. نرغب في حساب التلوينات التي لا تقع في أي من $A_1, \ldots A_m$ (انظر التمرين 17).

البيانات الوترية (CHORDAL GRAPHS)

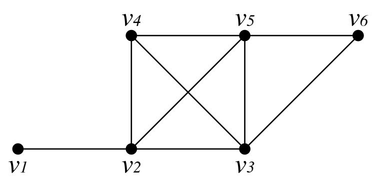
إن عدَّ التلوينات سهل بالنسبة إلى الأشجار والبيانات التامة (والطائرة الورقية)، حيث تظهر هذه البيانات من K_1 عن طريق الإضافة بالتتابع لرؤوس مربوطة بعصبة، وكثيرة الحدود اللونية لمثل هذا البيان هي حاصل ضرب عوامل خطية.

12.3.5. تعريف: نقول: إن رأسًا في G مُبَسَّطي (بسيط: Simplicial) إذا كان جواره في G عصبة، حيث إنّ ترتيب الحذف المبسطي (simplicial elimination ordering) هو ترتيب $\{v_n\ ,\ \ldots,\ v_1\}$ لحذف الرؤوس، بحيث إن v_i رأس مبَسَّطي للبيان المتبقي المستحدث من قبل $\{v_1,\ \ldots,\ v_i\}$. (تسمى هذه الترتيبات أيضًا ترتيبات الحذف الكاملة).

13.3.5. مثال: كثيرات الحدود اللونية من ترتيبات الحذف المبسطي. إذا كانت لدينا شجرة، فإن ترتيب الحذف المبسطي فيها هو حذف متتابع لأوراق من هذه الشجرة. لقد لاحظنا أنه إذا كانت G شجرةً على n من الرؤوس، فإن $\chi(G;\ k) = k(k-1)^{n-1}$.

عندما تكون $v_n\ ,\ \ldots, v_1$ ترتيب حذف مبسطي لـ G، فإن قاعدة الضرب الخاصة بالتركيبات الأولية (Elementary Combinatorics) (الملحق A) تسمح لنا بعدّ التلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان G. إذا لوَّنا $v_1,\ \ldots,\ v_{i-1}$، ومن ثم أضفنا v_i، فإنه يوجد $k - d(i)$ طريقة لتلوين v_i حيث $d\ (i\ ) = \left|N\ (v_i\ )\ \cap\ \{v_1,\ldots,v_{i-1}\}\right|$. لاحظ أن العامل $k - d(i)$ مستقل عن الطريقة التي اختيرت بها الألوان السابقة؛ لأن جيران v_i التي لوِّنت تشكل عصبة حجمها $d\ (i)$ وألوانها مختلفة.

حذف الرأس المبَسَّطي الذي يبدأ به ترتيب الحذف المبسطي يعطينا — استقرائيًّا - أن كل تلوين فعلي من الدرجة k للبيان G يظهر بهذه الطريقة. وبذلك نكون قد عبّرنا عن كثيرة الحدود اللونية بوصفها حاصل ضرب لعوامل خطية. في البيان أدناه، تمثل $v_6, \ldots, v_1$ ترتيب حذف مبسطي. وعندما نكوِّن بيانًا بالترتيب $v_1, \ldots, v_6$، فإن قيم $d(1),\ \ldots,\ d(6)$ هي: 2، 3، 2، 1، 1، 0 على الترتيب، فضلًا عن أن كثيرة الحدود اللونية هي: $k\ (k\text{-}1)(k\text{-}1)(k\text{-}2)(k\text{-}3)(k\text{-}2)$. ■



14.3.5. ملاحظة: من المهم ملاحظة أن بعض البيانات التي ليس لها ترتيبات حذف مبسطي تتمتع بخاصية أن كثيرة الحدود اللونية هي أيضًا حاصل ضرب عوامل خطية على الشكل $k - r_i$، حيث r_i عدد صحيح غير سالب. إن التمرين 19 يعطي مثالًا على ذلك.

لذا، فإن وجود ترتيب حذف مبسطي يكون شرطًا كافيًا، وليس ضروريًّا لكي يكون لكثيرة الحدود اللونية خاصية التحليل الجميلة لعواملها الخطية. ■

توجد ترتيبات حذف مبسطي لكل من الأشجار، والبيانات التامة، والبيانات القريبة من البيانات التامة (K_{n-e})، وبيانات الفترة (التمرين 28). لاحظ أنه عندما $n \geq 3$، فإنه لا يوجد ترتيب حذف مبسطي لـ C_n للحلقة بسبب عدم وجود رأس مبسطي نبدأ منه عملية الحذف، حيث إن وجود ترتيبات حذف مبسطي يكافئ غياب مثل هذه الحلقات بوصفها بيانات مستحدثة.

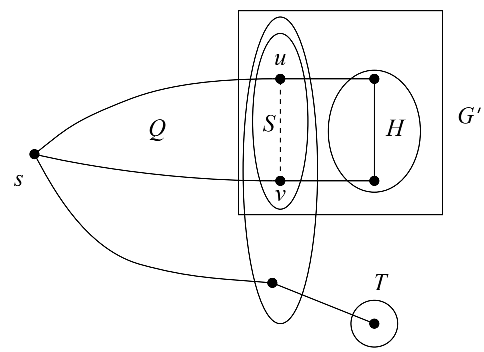
15.3.5. تعريف: نُعرِّف وتر (chord) الحلقة C على أنه ضلع غير موجود فيها، وطرفاه في C. ونعرف الحلقة اللاوترية على أنها حلقة في G طولها يساوي 4 على الأقل. وليس لها وتر (وهذا يعني أن الحلقة هي بيان جزئي مستحدث). ونقول إن البيان G وتري إذا كان بيانًا بسيطًا يخلو من الحلقات اللاوترية.

الدافع وراء المصطلح «وتر» هو دافع هندسي. إذا رسمنا حلقة بحيث إن رؤوسها مرتبة على دائرة، ورسمت أوتارها بوصفها قطعًا مستقيمة، فإن أوتار هذه الحلقة هي نفسها أوتار الدائرة.

ومن السهولة بمكان بيان عدم وجود حلقة لاوترية لبيان له ترتيب حذف مبسطي. لذا فإن توصيفنا لهذه البيانات هو نظرية TONCAS أخرى. وسنفصل الجزء الأساسي من برهان الكفاية بوصفها بديهية تعدّ في حدّ ذاتها مفيدة جدًّا. (انظر أيضًا [Laskar – shier [1983).

16.3.5. بديهية: ([Faraber – Jamison [1986] – Voloshin [1982) لكل رأس x في بيان وتري G، يوجد رأس مبسطي لـ G وذلك من بين الرؤوس الأبعد عن x في G.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $n(G)$. عندما $n(G) = 1$، فإن الرأس الفريد في K_1 هو مبسطي. لذا، افترض أن $n(G) \geq 2$. إذا كانت x تجاور الرؤوس جميعها، فإننا نطبق فرضية الاستقراء على البيان الوتري $G - x$. لاحظ أن كل رأس مبسطي y في $G - x$ يكون أيضًا رأسًا مُبسطيًّا في G؛ لأن x يجاور كل $N(y) \cup \{y\}$. وبخلاف ذلك، اجعل T تمثل رؤوس G التي بُعدها عن x أكبر ما يمكن، واجعل H مركبة من مركبات $G[T]$. وافترض أن S تساوي مجموعة رؤوس $G - T$ التي لها جيران في $V(H)$. واجعل Q ترمز إلى مركبة $G - S$ التي تحوي x.

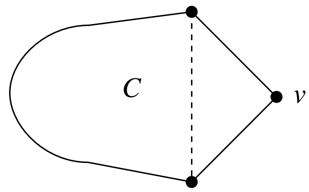


ندعي أن S عصبة. لاحظ أنه يوجد لكل رأس في S جار في $V(H)$، وجار آخر في Q. وأنه إذا كان كل من u وv رأسين مختلفين في S، فإن اتحاد أقصر المسارات من u إلى v عبر H و Q يشكل حلقة طولها 4 على الأقل. وبما أنه لا يوجد أضلاع من $V(H)$ إلى $V(Q)$، فإنه لا يوجد لهذه الحلقة أوتار عدا uv. وبسبب عدم وجود حلقة لاوترية في G، فإن $u \leftrightarrow v$. وبما أن $u,v \in S$ رؤوس اختيارية، فإن S عصبة.

الآن، افترض أن $G' = G[S \cup V(H)]$، لاحظ أن $x \notin G'$، وبذا فإن G' أصغر من G. لذا، نطبق فرضية الاستقراء على G'، وعلى رأس u في S كذلك. وبما أن S عصبة، فإن $S - \{u\} \subseteq N(u)$. لذا، وبغض النظر عن أن G' عصبة أم لا. فإن لها رأسًا مبسطيًّا z في $V(H)$. وبما أن $N_G(z) \subseteq V(G')$، فإن الرأس z يكون أيضًا مبسطيًّا في G، وكذلك فإن بُعْدَ z عن x أكبر ما يمكن كما هو منشود. ■

17.3.5. نظرية: (Dirac [1961]) يوجد ترتيب حذف مبسطي لبيان بسيط G إذا وفقط إذا كان G بيانًا وتريًّا.

الإثبات: الضرورة، افترض أن للبيان G ترتيبَ حذف مبسطي، وأن C حلقة في G، طولها 4 على الأقل. في اللحظة التي يقوم ترتيب الحذف بحذف رأس، ولنقل v من رؤوس C فإن جيران v المتبقية تشكل عصبة. حيث تشمل هذه العصبة جيران v الموجودة في C. إن الضلع الناتج الذي يربط بينها يشكل وترًا في C. لذا، فإنه لا يوجد في G حلقة لاوترية.



الكفاية: من البديهية 16.3.5 يوجد لكل بيان وتري رأس مبسطي. وهذا يعطي ترتيب حذف مبسطي من خلال الاستقراء على $n(G)$؛ لأن كل بيان جزئي مستحدث من بيان وتري يكون بيانًا وتريًّا. ■

بعض الخواص الأخرى للبيانات الوترية تظهر في التمارين 20 – 27.

إطلالة على البيانات الكاملة (A Hint of Perfect Graphs)

لقد أثبتنا في الفرضية 16.1.5 أن $\chi(G) = \omega(G)$ وذلك عندما يكون G بيان فترة، بالإضافة إلى ذلك، فإن كل بيان جزئي مستحدث من بيان فترة يكون أيضًا بيان فترة؛ لأننا نستطيع حذف الفترة التي تمثل الرأس v من الفترات التي تمثل البيان G للحصول على تمثيل بفترات للبيان $G - v$. لذا، فإن العلاقة $\chi(H) = \omega(H)$ تتحقق لكل بيان جزئي H مستحدث من بيان فترة.

18.3.5. تعريف: نقول: إن البيان G بيان كامل إذا تحقق أن $\chi(H) = \omega(H)$ لكل بيان جزئي مستحدث $H \subseteq G$. ويكافئ ذلك قولنا أن $\chi(G[A]) = \omega(G[A])$ لكل $A \subseteq V(G)$.

نعرِّف عدد غطاء (أغطية) العصب (clique cover number) $\theta(G)$ لبيان G على أنه أصغر عدد يلزمنا من العصب في G لتغطية $V(G)$، لاحظ أن $\theta(G) = \chi(\overline{G})$.

بما أن العصب والمجموعات المستقلة تتبادل الأدوار في أثناء عملية أخذ المتممة، فإن عبارة الكمال لـ $\overline{G}$ هي $\alpha(H) = \theta(H)$ لكل بيان جزئي مستحدث H من G. لقد أثبت لوفاس [1792 a, 1972 b] نظرية البيان الكامل (PGT) التي تنص على أن البيان G يكون كاملاً إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ كاملاً. وسنثبت هذه في النظرية 6.1.8. وهنا سنوضح البيانات الكاملة فقط.

19.3.5. تعريف: نقول: إن عائلة البيانات $\mathbf{G}$ وراثية إذا كان كل بيان جزئي مستحدث من بيان في $\mathbf{G}$ بيانًا في $\mathbf{G}$.

20.3.5. ملاحظة: افترض أن $\mathbf{G}$ صفّ وراثي من البيانات. لبرهان أن كل بيان في G كامل، يكفي أن نثبت أن $\chi(G) = \omega(G)$ لكل $G \in \mathbf{G}$. وبذلك، نكون قد شملنا برهان هذه المساواة للبيانات الجزئية المستحدثة جميعها من G. ■

21.3.5. مثال: البيانات الثنائية الفرع وبياناتها الخطانية. إن البيانات الثنائية الفرع تشكل صفًا وراثيًا و G.

لذا، فإن البيانات الثنائية الفرع تكون كاملة. وعندما يكون H ثنائي الفرع، فإن عبارة الكمال لـ $\overline{H}$ هي التمرين 38.1.5 التي تتبع $\alpha(H) = \beta'(H)$ (النتيجة 24.1.3). للبيانات الثنائية الفرع، نلاحظ أن النتيجة غير البديهية $\alpha(G) = \theta(G) = \beta'(G)$ تتبع النتيجة البديهية $\chi(G) = w(G)$ من خلال الـ PGT.

لقد قدّمنا في التعريف 18.2.4 اختصارًا لموضوع البيانات الخطانية لبرهان النسخة الضلعية من نظرية منجر، تذكر أن للبيان الخطاني $L(G)$ رأسًا لكل ضلع من أضلاع G حيث إن $e, f \in V(L(G))$ يكونان متجاورين إذا وُجدتْ لهما نقطة طرفية مشتركة في G. إن البيانات الخطانية للبيانات الثنائية الفرع تشكل عائلة وراثية؛ لأن حذف رأس في البيان الخطاني يمثل حذف الضلع المرتبط بهذا الرأس في البيان الأصلي. لذا، فإن برهنة أن $\alpha(L(G)) = \theta(L(G))$ وذلك عندما يكون G بيانًا ثنائي الفرع ستثبت أن متممات البيانات الخطانية هي بيانات كاملة. لاحظ أن العصبة في $L(G)$ (عندما يكون G ثنائي الفرع) تتألف من أضلاع G التي لها نقاط طرفية مشتركة. لذا، فإن تغطية رؤوس $L(G)$ بعصب، يقابل اختيار رؤوس في G لتشكيل غطاء رأسي. إن المجموعات المستقلة في $L(G)$ تمثل مواءمات في G، إذن فالكمال لمتممات البيانات الخطانية للبيانات الثنائية الفرع يؤدي لنظرية كونج وايجرفاري $(\alpha'(G) = \beta(G))$ الخاصة بالمواءمة وأغطية الرؤوس للبيانات الثنائية الفرع.

مما سبق، نجد أن الـ PGT كذلك تعطينا أن $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$. إن التلوين الفعلي للبيان $L(G)$ هو تجزئة لـ $E(G)$ إلى موائمات، وأن $\omega(L(G)) = \Delta(G)$ (للبيان الثنائي الفرع G) لذا، فإن المساواة $\chi(L(G)) = \omega(L(G))$ تعني أنه يمكن تجزئة أضلاع البيان الثنائي الفرع G إلى $\Delta(G)$ مواءمة. وسنقدم في النظرية 7.1.7 برهانًا مباشرًا لهذه النتيجة الإضافية لـ كونج [1916]. ■

بما أن كل بيان فترة هو بيان وتري (التمرين 28)، فبرهان أن البيانات الوترية جميعها هي بيانات كاملة يقوي الفرضية 16.1.5. وسنكتشف في البند 1.8 توصيفات أخرى لبيانات الفترة والبيانات الوترية.

22.3.5. نظرية: ([Berge [1960]). إن البيانات الوترية هي بيانات كاملة.

الإثبات: إن حذف الرؤوس لا ينتج حلقات لاوترية. لذا، فإن هذه العائلة وراثية. من الملاحظة 20.3.5 يلزمنا فقط إثبات أنه إذا كان G وتريًا، فإن $\chi(G) = \omega(G)$.

لقد أثبتا في النظرية 17.3.5 أنه يوجد للبيان G ترتيب حذف مبسطي. افترض أن $v_n, \ldots, v_1$ هي عكس لهذا الترتيب. إن جيران v_i من المجموعة $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ تمثل عصبة وذلك لكل i.

نطبق تلوينًا جشعًا على هذا الترتيب. إذا كان لون v_i هو k، فإن الألوان $1, \ldots, k-1$ تظهر على جيران لـ v_i ظهرت سابقًا، وبما أن هذه الرؤوس تشكل عصبة، لذا ومع v_i فإننا سنحصل على عصبة حجمها k. أي أننا سنحصل على عصبة حجمها يساوي عدد الألوان المستخدمة. ■

يوضح برهان النظرية 22.3.5. أن التلوين الجشع بالنسبة إلى عكس ترتيب حذف مبسطي ينتج تلوينًا أمثل. وهذا يعمم الفرضية 16.1.5 المتعلقة ببيانات الفترة. إن v_n هي عكس لهذا الترتيب. وأن جيران v_i من المجموعة $\{v_1, \ldots, v_n\}$ تمثل عصبة. سنعرض صفًّا اساسيًّا واحدًا من البيانات الكاملة يشمل البيانات الثنائية الفرع جميعها.

23.3.5. تعريف*. نعرِّف التوجيه المتعدي للبيان G على أنه توجيه D، بحيث إنه إذا كان xy و yz ضلعين في D، فإنه يوجد ضلع آخر xz في G موجه من x إلى z في D. ويسمى البيان البسيط G ببيان مقارنة إذا وُجِدَ له توجيه متعدٍّ.

24.3.5. مثال*. افترض أن G بيان ثنائي بالتجزئة الثنائية X, Y . إذا وجّهنا كل ضلع من X إلى Y، فسنحصل على توجيه متعدٍّ. لذا، فإن كل بيان ثنائي الفرع هو بيان مقارنة. إن التوجيه المتعدي يظهر من علاقات ترتيب، حيث إن $x \to y$ يمكن أن تعني أن x تحوي y وهذه علاقة تعدٍّ. ■

25.3.5. فرضية*. (Berge [1960]). بيانات المقارنة هي بيانات كاملة.

الإثبات: كل بيان جزئي موجه لبيان موجه متعدٍّ يكون متعديًا. لذا، فإن مجموعة بيانات المقارنة هي بيانات وراثية. وبذلك يلزمنا فقط أن نبين أن كل بيان مقارنة قابل للتلوين باستخدام $\omega(G)$ لونًا.

افترض أن F توجيه متعدٍّ للبيان G، لاحظ أن F لا تحوي حلقات. وكما هو واضح من برهان النظرية 21.1.5، فإن تلوين G الذي يعين لكل رأس v عدد الرؤوس في أطول مسار في F ينتهي عند v هو تلوين فعلي. وباستخدام التعدي، فإن الرؤوس في أي مسار في F تشكل عصبة في G، وبذلك نكون قد أثبتنا أن $\chi(G) \le \omega(G)$. ■

حساب التوجيهات اللاحلقية (اختياري) (Counting Acyclic Orientations (optional))

من المدهش أن $\chi(G; k)$ تحمل معنى في الحالة التي يكون فيها k عددًا صحيحًا سالبًا. يسمى التوجيه الذي لا يحوي حلقات لبيان G بتوجيه لا حلقي للبيان. إن إعطاء k القيمة 1- في $\chi(G; k)$ ستساعدنا على حساب التوجيهات اللاحلقية للبيان G.

26.3.5. مثال: يوجد للبيان C_4 أربعة أضلاع و16 توجيهًا، منها 14 توجيهًا لاحلقي. لقد أثبتنا في المثال 7.3.5 إن $\chi(C_4; k) = k(k-1)(k^2-3k+3)$ وبحساب هذه القيمة عندما $k=-1$ نجد أن $(-1)(-2)(7)=14$ ■

27.3.5. نظرية (Stanley [1973]). إن قيمة $\chi(G; k)$ عندما $k=-1$ هي $(-1)^{n(G)}$ مضروبًا في عدد التوجيهات اللاحلقية للبيان G.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $e(G)$. افترض أن $a(G)$ هي عدد التوجيهات اللاحلقية للبيان G، لاحظ أنه عندما يخلو البيان G من أضلاع، فإن $a(G)=1$ و $\chi(G;-1)=(-1)^{n(G)}$ لذا فإن الادعاء يتحقق. سنثبت أن $a(G)= a(G-e)+a(G.e)$ لكل $e \in E(G)$. وإذا كان ذلك صحيحًا، فيمكن استخدام خطوات مكررة على a، وفرضية الاستقراء على $a(G)$ بدلالة $\chi(G; k)$ والتكرار على $\chi(G; k)$.

لحساب أن:

$$a(G)=(-1)^{n(G)}\chi(G-e;-1)+(-1)^{n(G)-1}\chi(G\cdot e;-1)=(-1)^{n(G)}\chi(G;-1)$$

الآن، نثبت التكرار على a. إن كل توجيه لاحلقي للبيان G يحوي توجيهًا لاحلقيًّا للبيان $G-e$. إن التوجيه اللاحلقي D يمكن أن يمدد إلى 0 أو 1 أو 2 توجيهًا لاحلقيًّا للبيان G من خلال توجيه الضلع $e=uv$. وفي حال عدم وجود مسار من u إلى v، فإننا نستطيع اختيار التوجيه $v \to u$، وفي حال عدم وجود مسار من v إلى u، فنستطيع اختيار التوجيه $u \to v$. وبما أن D لاحلقي، فإن D لا تحوي مسارًا من u إلى v ومسارًا من v إلى u في الوقت نفسه، لذا فإن هذين الخيارين للضلع e لا يمكن أن يكونا ممنوعين في الوقت نفسه.

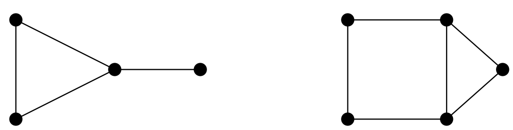
وبناءً على ذلك، فإنه يمكن تمديد D بإحدى طريقتين على الأقل، وبذلك فإن $a(G)$ تساوي $a(G-e)$ بالإضافة إلى عدد التوجيهات التي يمكن أن تمدد بالطريقتين. إن هذه التوجيهات التي يمكن تمديدها بهاتين الطريقتين هي التوجيهات اللاحلقية للبيان $G-e$ التي لا يوجد فيها مسار من u إلى v، وكذلك لا يوجد فيها مسار من v إلى u، لاحظ أنه يوجد بالضبط $a(G.e)$ من هذه التوجيهات؛ لأن أي مسار من u إلى v أو من v إلى u في أي توجيه للبيان $G-e$ يصبح حلقة في $G.e$. ■

توضيح $\chi(G;k)$ وتفسيره عندما يكون k عددًا سالبًا بوجه عام (التمرين 32) هي مثال واضح على ما يسمى "التبادل التوافقي". (Stanley [1974]).

لاحظ أن الرمز $\chi(G;k)$ يمكن أن يكون كثيرة حدود أو عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k للبيان G.

تمـــارين (Exercises)

5.3.1. (−) احسب كثيرات الحدود اللونية للبيانات المرسومة أدناه:



5.3.2. (−) استخدم التكرار اللوني للحصول على كثيرة الحدود اللونية لكل شجرة على n من الرؤوس.

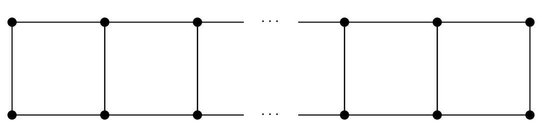
5.3.3. (−) أثبت أن $k^4-4k^3+3k^2$ ليست كثيرة حدود لونية.

5.3.4. a) أثبت أن $\chi(C_n;k)=(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

b) إذا كان $H=G\vee K_1$. أثبت أن $\chi(F;k)=k\chi(G;k-1)$.

من الفرعين السابقين، جد كثيرة الحدود اللونية للعجلة $C_n\vee K_1$.

5.3.5. افترض أن $G_n=Pn\,\square\,K_2$ (حيث $n\ge 1$)، لاحظ أن هذا بيان له $2n$ رأسًا و $3n-2$ ضلعًا كما هو موضح في الشكل أدناه. أثبت أن: $\chi(G_n;k)=(k^2-3k+3)^{n-1}k(k-1)$.



5.3.6. (!) افترض أن G بيان له n من الرؤوس، استخدم الفرضية 5.3.4 لإعطاء برهان غير استقرائي لحقيقة أن معامل k^{n-1} في $\chi(G;k)$ هو $-e(G)$.

5.3.7. أثبت أنه لا يوجد لكثيرة الحدود اللونية لبيان على n من الرؤوس جذر حقيقي أكبر من $n-1$. (مساعدة: استخدم الفرضية 5.3.4).

5.3.8. (!) أثبت أن عدد التلوينات الفعلية من الدرجة k لبيان مترابط G يكون أقل من $k(k-1)^{n-1}$، وذلك عندما يكون $k\ge 3$ و G ليس شجرة. ماذا يحدث عندما $k=2$؟

5.3.9. (!) أثبت أن $\chi(G;x+y) = \sum_{U\subseteq V(G)} \chi(G[U];x)\chi(G[\overline{U}];y)$.

(مساعدة: بما أن طرفي المساواة هما كثيرتا، فيكفي أن نثبت تحقق المساواة عندما يكون x و y أعدادًا صحيحة موجبة: قم بذلك من خلال عدّ $x+y$ تلوينًا فعليًّا بطريقة مختلفة).

10.3.5. افترض أن G بيان مترابط بحيث إن $\chi(G;K) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_i K^{n-i}$. أثبت أن $a_i \geq \binom{n-1}{i}$ لكل $1 \leq i \leq n$، (مساعدة: استخدم التكرار اللوني).

11.3.5. (!) أثبت أن مجموع معاملات $\chi(G;\ k)$ يساوي صفرًا، إلا إذا خلا G من الأضلاع (مساعدة: عندما تكون الدالة كثيرة حدود، فكيف يمكن الحصول على مجموع المعاملات؟).

12.3.5. (+) معاملات $\chi(G;\ k)$:

a) أثبت أن آخر حد غير صفري في كثيرة الحدود اللونية للبيان G هو الحد الذي أُسه يساوي عدد مركبات G.

b) استخدم فرع (a) لبرهنة أنه إذا كانت $p(k) = k^n - ak^{n-1} + \ldots + ck^r$ حيث $a > \binom{n-r+1}{2}$، فإن p ليست كثيرة حدود لونية. (فهذا يتضمن – على سبيل المثال– أن كثيرة الحدود في التمرين 3.3.5 ليست كثيرة حدود لونية.

13.3.5. افترض أن G وH بيانان يمكن أن يكونا متداخلين (بينهما أجزاء مشتركة):

a) إذا كان $G \bigcap H$ بيانًا تامًّا، فأثبت أن $\chi(G \cup H;k) = \dfrac{\chi(G;k)\chi(H;k)}{\chi(G \bigcap H;k)}$.

b) اختر مسارين اتحادهما حلقة لتثبت أن هذه الصيغة يمكن أن تفشل عندما لا يكون $G \bigcap H$ بيانًا تامًّا.

c) طبق الفرع (a) لتستنتج أن العدد اللوني للبيان هو أكبر عدد لوني لقوالب هذا البيان.

14.3.5. (!) لتكن P بيانَ بيترسون. من نظرية بروكس، نعلم أن هذا البيان ثلاثي اللون، لذلك، وباستخدام مبدأ طواقي الحمام، نجد في G مجموعة مستقلة S حجمها 4:

a) أثبت أن $P - S = 3K_2$.

باستخدام فرع (a) والتماثل، حدد عدد تجزئات رؤوس P إلى ثلاث مجموعات مستقلة.

b) بوجه عام، كيف يمكن الحصول على عدد التجزئات إلى أصغر عدد من المجموعات المستقلة من كثيرة الحدود اللونية للبيان G؟

15.3.5. افترض أن العدد اللوني للبيان G يساوي k. أثبت أنه يوجد على الأكثر k^{n-k} تجزئة لرؤوس G إلى k من المجموعات المستقلة، حيث إن البيان الفريد الذي يحقق المساواة هو $K_k + (n-k)\ K_1$ (عصبة من الدرجة k إضافة إلى $n-k$ رأسًا معزولاً). (مساعدة: استخدم الاستقراء على n، وخذ في الحسبان حذف رأس واحد)، ([1971] Tomescu).

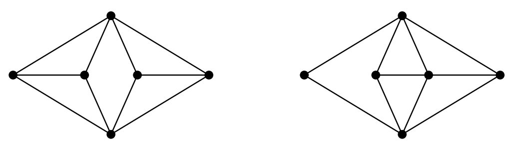
16.3.5. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس وm من الأضلاع. أثبت أنه يوجد في G $\frac{1}{3}\binom{m}{2}$ مثلثًا على الأكثر. استنتج أن معامل k^{n-2} في $\chi(G;k)$ يكون موجبًا، إلا إذا كان G يحوي رأسًا واحدًا على الأكثر. (مساعدة: استخدم النظرية 10.3.5).

17.3.5. (*) استخدم مبدأ التضمين والاستبعاد لبرهان النظرية 10.3.5 مباشرة.

18.3.5. (!) خذ في الحسبان كثيرات الحدود اللونية للبيانات أدناه:

a) دون حساب كثيرتي الحدود هاتين، أعطِ برهانًا قصيرًا على أنهما متساويتان.

b) اكتب كثيرة الحدود اللونية هذه في صورة حاصل جمع كثيرتي حدود لونيتين لبيانين وتريين، واستخدم هذا لحسابها بسطر واحد.



19.3.5. (−) افترض أن G هو البيان الذي نحصل عليه من K_6 من طريق قسمة أحد الأضلاع، استخدم التكرار اللوني لحساب $\chi(G;k)$ بوصفه حاصل ضرب لعوامل خطية (عوامل على الشكل $(k-c_i)$). أثبت أن G ليس بيانًا وتريًّا. ([Read [1975], Dmitriev [1980]).

20.3.5. افترض أن G بيان وتري. استخدم ترتيب حذف مبسطي لبيان G لبرهنة العبارات الآتية:

a) يوجد لـ G على الأكثر n من العصب العظمى، حيث تتحقق المساواة في الحالة التي لا يحوي فيها G أضلاعًا. ([Fulkerson – Gross [1965]).

b) إن كل عصبة عظمى في G لا تحوي رأسًا مبسطيًّا للبيان تكون مجموعة فاصلة.

21.3.5. يعرَّف عدد سزكرز وولف (Skekeres–wilfnumber) للبيان G على أنه $1+\max_{H\subseteq G}\delta(H)$ أثبت أن البيان G يكون بيانًا وتريًّا إذا وفقط إذا تحقق أنه في كل بيان جزئي من G يكون عدد سزكرز وولف مساويًا لعدد العصب، ([Voloshim [1982]).

22.3.5. افترض أن $k_r(G)$ تمثل عدد العصب من الدرجة r لبيان وتري مترابط G. أثبت أن $\sum_{r\geq 1}(-1)^{r-1}\,\mathrm{K}_r(G)=1$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $n(G)$. لاحظ أن صيغة ذات الحدين (الملحق A) تعطينا أن $\sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{m}{j}=0$ عندما $m\in N$).

23.3.5. افترض أن S هي مجموعة رؤوس حلقة في بيان وتري G. أثبت أنه توجد في S حلقة رؤوسها هي رؤوس S جميعها ما عدا رأسًا واحدًا. (تعليق: في الحالة التي توجد للبيان G حلقة مولدة وتكون $S\subset V(G)$، خَمَّنَ هندري بأنه توجد أيضًا للبيان G حلقة رؤوسها هي S كلها بالإضافة إلى رأس واحد آخر)، ([Hendry [1990]).

24.3.5. افترض أن e ضلع في حلقة C في بيان وتري، أثبت أن e تشكل مثلثًا مع رأس ثالث من رؤوس C.

25.3.5. افترض أن Q عصبة عظمى في بيان وتري G، أثبت أنه إذا كان $G-Q$ بيانًا مترابطًا، فإن Q تحوي رأسًا مبسطيًّا ([Voloshin – Gorgos [1982]).

26.3.5. يثبت التمرين 13.3.5. الصيغة $\chi(G\cup H;k)=\frac{\chi(G;k)\chi(H;k)}{\chi(G\cap H;k)}$ عندما يكون $G\cap H$ بيانًا تامًّا:

a) أثبت أن هذه الصيغة تتحقق في الحالة التي يكون فيها $G\cup H$ بيانًا وتريًّا بصرف النظر عن أن $G\cap H$ بيان تام.

b) أثبت أنه إذا كان x رأسًا في بيان وتري G فإن:

$$\chi(G;k)=\chi(G-x;k)\,k\,\frac{\chi(G[N(x)];k-1)}{\chi([N(x)];k)}$$

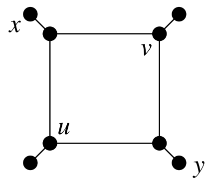
(تعليق: يسمح فرع (b) بحساب كثيرة الحدود اللونية لبيان وتري G عن طريق ترتيب حذف اختياري. فعلى سبيل المثال، إن حذف الرأس المركزي في P_5 يؤدي إلى أن:

$$\chi(P_5;k)=[k(k-1)]^2\,k\,\frac{(k-1)^2}{k^2}=k(k-1)^4$$ ،(Voloshin [1982]).

27.3.5. (+) نعرِّف فاصل الرؤوس الأصغري في بيان G على أنه مجموعة جزئية $S\subseteq V(G)$، بحيث إنها تشكل لرأسين x و y أصغر مجموعة رؤوس، بحذفها تُفصَل x و y. كل مجموعة فصل أصغرية هي فاصل رؤوس أصغري، لكن u، v في البيان أدناه توضح أن العكس يمكن ألا يتحقق:

(a أثبت أنه إذا كان كل فاصل رؤوس أصغري عصبة، فإن الخاصية نفسها تتحقق لكل بيان جزئي من G.

(b أثبت أن البيان G وتري إذا وفقط إذا كان كل فاصل رؤوس أصغري عصبة. ([Dirac [1961]).



28.3.5. (!). افترض أن G بيان فترة، أثبت أن G بيان وتري، وأن $\overline{G}$ بيان مقارنة.

29.3.5. جد أصغر بيان G غير كامل بحيث إن $\chi(G)=\omega(G)$.

30.3.5. يسمى الضلع في البيان G الذي له توجيه لاحلقي بضلع تابع (غير مستقل) إذا حصلنا على حلقة عندما نعكس اتجاهه:

(a أثبت أن كل توجيه لاحلقي لبيان مترابط على n من الرؤوس يحوي $n-1$ ضلعًا مستقلًّا.

(b أثبت أنه إذا كان $\chi(G)$ أقل من خصر G، فإنه يوجد للبيان G توجيه ليس له أضلاع تابعة. (مساعدة: استخدم التقنية الموجودة في برهنة النظرية 21.1.5).

31.3.5. (*) إن العدد $a(G)$ للتوجيهات اللاحلقية للبيان G يحقق العلاقة التكرارية $a(G)=a(G-e)+a(G.e)$ (النظرية 27.3.5. فضلاً عن أنه من الواضح أن عدد الأشجار المولدة يحقق العلاقة التكرارية نفسها؛ هل يكون عدد التوجيهات اللاحلقية لبيان G دائمًا يساوي عدد الأشجار المولدة؟ ولماذا؟

32.3.5. (*) افترض أن D توجيه لاحلقي للبيان G، وافترض أيضًا أن f تلوين لـ $V(G)$ من المجموعة $[k]$. نقول: إن (D, F) زوج منسجم (متناغم) إذا تحقق أنه إذا كان $u \to v$ فإن $f(u) \le f(v)$. افترض أن $\eta(G;k)$ تساوي عدد الأزواج المنسجمة. أثبت أن $\eta(G;k)=(-1)^{n(G)}\chi(G;k)$، ([Stanley [1973]).