الفصل الثالث

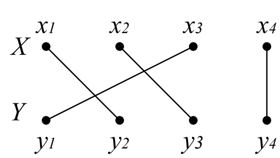
المواءمات والعوامل (Matchings and Factors)

1.3 المواءمات والغطاءات (Matchings and Covers)

لأيّ مجموعة من الأشخاص، هنالك أزواج منهم منسجمون بوصفهم رفقاء في غرف موجودين فيها؛ ماالشروط التي يجب أنّ تتوافر لكي نضعهم جميعًا في أزواج منسجمة؟ إنَّ العديد من تطبيقات البيانات تشتمل على مثل هذه الأزواج. ففي المثال 9.1.1 أخذنا في الحسبان مسألة ملء وظائف بمتقدمين مؤهّلين للعمل. ونعلم أنَّه توجد للبيانات الثنائيّة الفرع تجزئة طبيعيّة للرّؤوس إلى مجموعتين، ونريد معرفة ما إذا كان بالإمكان وضع المجموعتين في صورة أزواج باستخدام الأضلاع. لاحظ أنّه ليس من الضّروريّ أنّ يكون البيان ثنائيّ الفرع في مسألة رفقاء الغرف.

.1.1.3 تعريف: **المواءمة** (matching) في البيان G هي مجموعة أضلاع ليست أنشوطات، ولا تتشارك في النّقاط الطّرفيّة. وتكون الرّؤوس الواقعة على أضلاع المواءمة M **مشبعة** (saturated) من قبل M؛ أمّا الرّؤوس الأخرى فتكون **غير مشبعة** (unsaturated) (نقول مشبعة من قبل M (*M-saturated*) وغير مشبعة من قبل M (M-unsaturated). **والمواءمة الكاملة** (perfect matching) في البيان هي المواءمة التي تكون رؤوسها جميعها مشبعة.

.2.1.3 مثال: المواءمات الكاملة في $K_{n,n}$. خذ $K_{n,n}$ مع المجموعات المجزّأة $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ لاحظ أنّ المواءمة الكاملة تعرف دالة تناظر من X إلى Y. وأنّ إيجاد رفقاء لـ $x_1, x_2, \ldots$ بالتتابع يعطي $n!$ مواءمة كاملة. كلّ مواءمة تُمثل بتبديل لـ $[n]$، حيث تُرسَل i إلى j عندما تكون x_i تلائم y_j. ونستطيع التعبير عن المواءمات، ويمكننا كذلك وضع X وY بوصفه دليلًا للصّفوف والأعمدة، وذلك بوضع 1 في المواقع i, j لكلّ ضلع $x_i\, y_j$ في المواءمة M لنحصل على المصفوفة المقابلة؛ حيث إنَّ العدد 1 يوجد مرة واحدة فقط في كلّ صف وفي كلّ عمود. ■

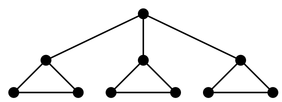


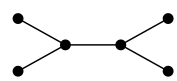
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.3. مثال: (المواءمات الكاملة في البيانات التامّة). بما أنَّ رتبة K_{2n+1} فرديّة، فلا يوجد له مواءمة كاملة. لاحظ أنَّ عدد المواءمات f_n في K_{2n} هو عدد الطرق لوضع $2n$ شخصًا مختلفًا في صورة أزواج. يوجد $2n$-1 طريقة لاختيار شريك للرّأس v_{2n}، وفي كل اختيار مماثل هناك f_{n-1} طريقة لإكمال المواءمة. لذلك، فإنّ $f_n=(2n-1)\,f_{n-1}$ لكلّ $n \geq 1$. وبجعل $f_o=1$، سنجد من الاستقراء أنَّ $f_n = (2n-1)\,(2n-3)\ldots(1)$.

يوجد أيضًا طريقة عدّ لحساب f_n. فمن ترتيب $2n$ شخصًا، نشكل مواءمة بوضع أول شخصين في زوج، ثم الاثنين التاليين، وهكذا. لذا، فإنَّ كلّ ترتيب سيؤدي إلى مواءمة واحدة. وبما أنَّ تغيير التّرتيب للأزواج، أو تغيير التّرتيب داخل الزوج نفسه لا يغير المواءمة الناتجة، فإنَّ كلّ مواءمة ستتولد بـ $2^n n!$ ترتيبًا. وعليه، يوجد $f_n = (2n)!/(2^n n!)$ مواءمة كاملة. ■

الرسم الاعتيادي لبيان بيترسون يظهر مواءمة كاملة وحلقتين على خمسة رؤوس. يحتاج حساب المواءمات الكاملة إلى بعض الجهد (التمرين 14). لاحظ أنَّ البناء الاستقرائيّ للمكعّب الزائدي Q_k يؤدي إلى العديد من المواءمات الكاملة (التمرين 16)، إلا أنّ حسابها بدقة يعدّ صعبًا. لاحظ أنَّ البيانات أدناه ذات رتب زوجيّة ولكن ليس لها مواءمات كاملة.





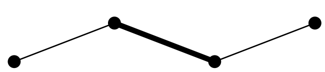
المواءمات العظمى (Maximum Matchings)

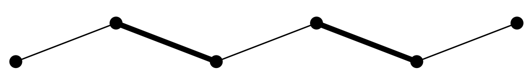
المواءمة هي مجموعة أضلاع. لذا، فإنَّ **حجمها** (size) هو عدد الأضلاع. ونستطيع البحث عن مواءمة كبيرة باختيار أضلاع واحدًا بعد الآخر، بحيث إنَّ نقاطها الطّرفيّة لم تستخدم في الأضلاع التي اختيرت سابقًا، حتى لا تبقى أيّ أضلاع موجودة. وهذا يؤدي إلى مواءمة عظمى، ولكنّها قد لا تكون مواءمة كبرى.

4.1.3. تعريف: المواءمة العظمى (maximal matching) في البيان هي المواءمة التي لا يمكن توسيعها بإضافة ضلع. أمّا **المواءمة القصوى** (maximum matching) فهي المواءمة التي لها أكبر حجم من بين المواءمات جميعها في البيان.

تكون المواءمة M عظمى إذا تحقّق أنَّ كلّ ضلع غير موجود في M يقع على ضلع موجود أصلاً في M. ولاحظ أنَّ كلّ مواءمة كبرى هي مواءمة عظمى، ولكن ليس بالضرورة أنْ يتحقق العكس.

5.1.3. مثال: عظمى $\neq$ كبرى. البيان الأصغر الذي له مواءمة عظمى ولكنها ليست مواءمة كبرى هو P_4. فإذا أخذنا الضّلع الأوسط، فإنّنا لا نستطيع إضافة أيّ أضلاع أخرى، ولكن الضّلعيّن الآخرين الطرفيين يشكلان مواءمة أوسع. وسنبيّن أدناه هذه الظاهرة في كل من P_4 و P_6. ■





في المثال 5.1.3، يؤدي استبدال الأضلاع الغامقة بالأضلاع الرّفيعة إلى مواءمة أوسع. وهذا يعطينا طريقة للبحث عن مواءمات أوسع.

6.1.3. تعريف: لتكن M مواءمة، نعرِّف **المسار المتناوب للمواءمة** M (M-alternating path) على أنَّه المسارُ الذي يتناوب بين أضلاع في M وأضلاع أخرى ليست فيها. أمّا المسار المتناوب للمواءمة الذي تكون نقاطه الطّرفيّة غير مشبعة من M فهو **المسار الموسّع للمواءمة** M (M-alternating path) .

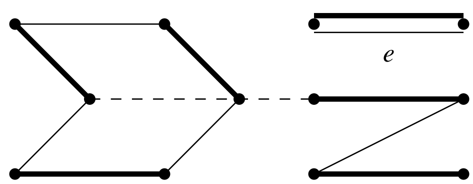
إذا أعطينا مسارًا P موسّعا للمواءمة M، فإنّنا نستطيع استبدال أضلاع المواءمة M في P مع بقية الأضلاع لـ P لنحصل على مواءمة جديدة M' مع ضلع إضافيّ واحد. ولذلك، عندما تكون M مواءمة كبرى، فلا يوجدَ مسار موسّع للمواءمة M.

سنثبت فيما يأتي أنَّ المواءمات العظمى تُميّز بواسطة المسارات الموسّعة المفقودة. فإذا أعطينا مواءمتين، فسنأخذ في الحسبان مجموعة الأضلاع التي تنتمي بالضبط إلى إحدى المجموعتين. وتسمّى هذه العملية عمليةَ "الفرق التّماثليّ" للمجموعات (انظر الملحق A) التي من الممكن توسيعها إلى البيانات.

7.1.3. تعريف: للبيانين G و H، نعرِّف **الفرق التّماثليّ** (Symmetric difference) $G \Delta H$ على أنَّه البيانُ الجزئيّ من $G \cup H$ الذي تكون أضلاعه هي الأضلاع في $G \cup H$ والتي تظهر بالضبط في واحد من G أو H. ونستخدم أيضًا هذا الرمز لمجموعات الأضلاع؛ بصورة خاصة، إذا كانت كلّ من M و M' مواءمتين، فإنَّ:

$$M \Delta M' = (M - M') \cup (M' - M)$$

8.1.3. مثال: في البيان أدناه، لاحظ أنَّ M مواءمةٌ لجسم له خمسة أضلاع رفيعة، أمّا M' فهي مواءمة لجسم له ستة أضلاع سميكة، والأضلاع المنقّطة لا تنتمي إلى M ولا إلى M'. ويوجد للمواءمتين ضلع مشترك واحد هو e وهو لا ينتمي إلى فرقهما التّماثليّ، إضافة إلى أنَّ أضلاع $M \Delta M'$ تشكّل حلقة طولها 6 ومسارًا طوله 3. ■



9.1.3. تمهيدية: كلّ مركبة للفرق التّماثليّ لمواءمتين هي مسار أو حلقة زوجيّة. الإثبات: لتكن M و M' مواءمتين، وليكن $F = M \Delta M'$. بما أنَّ M و M' مواءمتان، فإنَّ كلّ رأس يقع على ضلع واحد من كل منهما على الأكثر. لذا، يوجد ضلعان لـ F عند كل رأس على الأكثر. وبما أنَّ $\Delta(F) \leq 2$، فإنَّ كلّ مركبة لـ F هي حلقة أو مسار. وأكثر من ذلك، فإنَّ كلّ مسار أو حلقة في F يتناوب بين أضلاع $M - M'$ وأضلاع $M' - M$. لذا، فإنَّ لكلّ حلقة طولًا زوجيًّا مع عددٍ متساوٍ من الأضلاع من M و M'. ■

10.1.3. نظرية: (بيرج [1957] (Berge)). تكون المواءمةُ M في البيان G مواءمةً كبرى إذا وفقط إذا خلا G من مسار موسّع للمواءمة M.

الإثبات: سنثبت المكافئ العكسيّ لكلّ اتجاه؛ لاحظ أنَّ لـ G مواءمة أوسع من M إذا وفقط إذا كان لـ G مسار موسّع للمواءمة M. وقد لاحظنا أنَّه من الممكن استخدام المسار الموسّع للمواءمة M لينتج مواءمة

أوسع من M. وبالنسبة إلى الاتجاه العكسيّ، لتكن M' مواءمة في G أوسع من M؛ سوف ننشئ مسارًا موسّعًا للمواءمة M. ليكن $F = M \Delta M'$. فباستخدام التمهيدية 9.1.3، نجد أنَّ F يتكون من مسار وحلقة زوجيّة؛ والحلقات لها عدد الأضلاع نفسه من M و M'. وبما أنَّ $|M| < |M'|$، فيجب أنْ يكون لـ F مركّبة عدد أضلاعها من M' أكثر من عدد أضلاعها من M. إنَّ مثل هذه المركّبة يمكن أنْ تكون فقط مسارًا يبدأ وينتهي بضلع في M'؛ لذلك فهي مسار موسّع للمواءمة M في G. ■

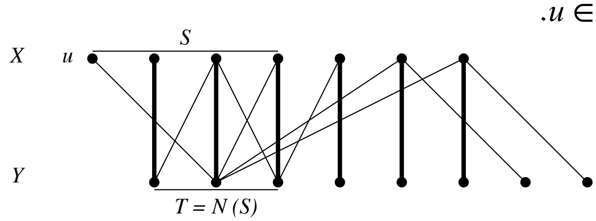
شرط هال للمواءمة (Hall's Matching Condition)

عندما نشغل الوظائف بالمتقدّمين للعمل، عادة ما يكون عدد المتقدمين أكثر من عدد الوظائف؛ فضلًا أنَّ تعبئة الوظائف بصورة متتابعة لا يوظّف المتقدمين للعمل جميعهم. لنمذجة هذه المسألة، نأخذ بيانًا ثنائيّ الفرع مع التّجزئة الثّنائيّة X ، Y (التعريف 17.2.1)، ونبحث عن مواءمة مشبعة لـ X.

إذا كانت المواءمة M مشبعة لـ X، فإنَّ لكل $S \subseteq X$ يجب أنْ يوجد على الأقلّ $|S|$ رأسًا لها جار في S؛ لأن الرّؤوس المواءمة لـ S يجب اختيارها من تلك المجموعة. وسنستخدم $N_G(S)$ أو $N(S)$ لنرمز إلى مجموعة الرّؤوس التي لها جار في S. وعليه، فإنَّ $|N(S)| \geq |S|$ شرطٌ ضروريٌّ. الشرط "لكلّ $S \subseteq X$، فإنّ $|N(S)| \geq |S|$" هو شرط **هال** (Hall's Condition). ولقد أثبت هال أنَّ الشّرط الضّروريّ الواضح هو أيضًا شرطٌ كافٍ (TONCAS).

11.1.3. نظرية: (نظرية هال –[1935] P. Hall) إذا كان G بيانًا ثنائيّ الفرع وتجزئته الثّنائيّة X ، Y، فإنَّ له مواءمة مشبعة لـ X إذا وفقط إذا كان $|N(S)| \geq |S|$ لكلّ $S \subseteq X$.

الإثبات: الضّرورة. لاحظ أنَّ الـ $|S|$ رأسًا التي تتواءم مع S يجب أنْ تقع في $N(S)$. الكفاية. لإثبات أنَّ شرط هال كافٍ، فإنّنا سنثبت المكافئ العكسيّ. إذا كانت M مواءمة كبرى في G وليست مشبعة لـ X، فسنحصل على مجموعة $S \subseteq X$، بحيث يكون $|N(S)| < |S|$. ليكن u رأسًا من X غير مُشبع من M. من بين كلّ الرّؤوس التي يمكن الوصول إليها من u باستخدام مسارات متناوبة للمواءمة M في G، اجعل S تتكوّن من الرّؤوس المأخوذة من X، و T تتكوّن من الرّؤوس المأخوذة من Y (انظر الرسم أدناه حيث M هي الأضلاع السّميكة). لاحظ أنَّ $u \in S$.



ندّعي أنَّ M توائم T مع S-$\{u\}$. لاحظ أنَّ المسارات المتناوبة للمواءمة M من الرّأس u تصل Y من خلال أضلاع ليست في M، وتعود إلى X من خلال أضلاع في M. وبما أنَّه لا يوجد مسار موسّع للمواءمة M، فإنَّ كلّ رأس في T هو رأس مشبع. لذلك، فإنَّ المسار المتناوب للمواءمة M الذي يصل $y \in T$ يوسّع من خلال M ليصل إلى رأس في S. لذا، فإنَّ أضلاع M تعطينا دالّة تناظر من T إلى S-$\{u\}$، وعليه $|T| = |S$-$\{u\}|$. لاحظ أنَّ المواءمة بين T و S-$\{u\}$ تعطينا $T \subseteq N(S)$. في الحقيقة، $T = N(S)$. افترض أنَّ لـ $y \in Y$-T جار $v \in S$. بما أنَّ الرّأس u غير مشبع، و S-$\{u\}$ يتواءم مع T من خلال M لذا، لا يمكن أنْ يكون الضّلع vy في M. لذلك، فإنَّ إضافة الضّلع vy إلى المسار المتناوب للمواءمة M للوصول إلى v يعطينا مسارًا متناوبًا للمواءمة M يصل إلى y. وهذا يناقض $y \notin T$. وعليه، لا يمكن أنْ يكون الضّلع vy موجودًا. وباستخدام $T = N(S)$ هذا الخيار للمجموعة S، نكون قد أثبتنا أنَّ $|N(s)| = |T| = |S|$-$1 < |S|$. وهذا يكمل إثبات

المكافئ العكسيّ. ■

من الممكن أيضًا إثبات الكفاية بفرض شرط هال، وبافتراض عدم وجود مواءمة مشبعة لـ X، والحصول على تناقض. وكما شاهدنا، فإنَّ عدم وجود مواءمة مشبعة لـ X يؤدي إلى انتهاك شرط هال. لاحظ أنَّ نقض الفرضيّة عادة ما يعني أنَّ المكافئ العكسيّ للشّرط المطلوب قد أثبت. وعليه، نكون قد عرضنا الإثبات بذلك الأسلوب.

12.1.3. ملاحظة : تقتضي النظرية 11.1.3 أنّه عندما لا توجد للبيان الثنائيّ الفرع مع التّجزئة الثّنائيّة X, Y مواءمة مشبعة لـ X، فإنّنا نستطيع التّحقّق من ذلك بإظهار مجموعة جزئيّة من X مع عدد قليل جدًّا من الجيران. لاحَظ أيضًا أنَّ العبارة والإثبات يسمحان بأضلاع متكررة. ■

لقد نشر العديد من البراهين نظرية هال؛ انظر (Mirsky [1971], p38]) و (Jacobs [1969]) للخلاصات. لاحظ أنَّ إثباتًا لهال (M. Hall [1948]) يقود إلى الحدّ السّفليّ على عدد المواءمات المشبعة لـ X، بوصفها دالّة على درجات الرّؤوس. وسنأخذ في الحسبان الخوارزميّات في الدّرس 2.3.

عندما يكون لمجموعات ثنائيّة الحجمُ نفسُه ؛ فإنَّ نظرية هال تصبح **نظرية الزواج** (Marriage Theorem)، التي أثبتت أصلاً من قِبَل فيربينيوس (Frobenius) [1917]. وقد ظهر الاسم من وضع علاقة الانسجام بين مجموعة فيها n رَجُلًا ومَجموعة أخرى فيها n امرأة. إذا وجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث يكون كلّ رجل منسجمًا بالضبط مع k امرأة، وكلّ امرأة منسجمة مع k رجلاً، فإنّه لا بدّ من وجود مواءمة كاملة. مرة أخرى نسمع بوجود الأضلاع المتكرّرة التي توسّع مجال التّطبيقات (انظر المبرهنتين 9.3.3 و 7.1.7 على سبيل المثال).

13.1.3. نتيجة : لـ $k > 0$، يوجد لكلّ بيان ثنائيّ الفرع منتظم من الدّرجة k مواءمةٌ كاملة.

الإثبات: ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع بالتّجزئة الثّنائيّة X, Y ومنتظمًا من الدّرجة k. إنَّ عدد الأضلاع التي نقاطها الطّرفيّة في X، وعدد الأضلاع التي نقاطها الطّرفيّة في Y يظهر أنَّ $k\,|X| = k\,|Y|$. وهكذا، فإنَّ $|X| = |Y|$. لذلك، يكفي التّحقّق من شرط هال؛ ولاحظ أنَّ المواءمة التي تشبع X سوف تشبع Y أيضًا، وسوف تكون مواءمة كاملة. لنأخذ $S \subseteq X$ في الحسبان. ليكن m عدد الأضلاع من S إلى $N(S)$. بما أنَّ G بيان منتظم من الدّرجة k، فإنَّ $m = k|S|$. وهذه الـ m ضلعًا تقع على $N(S)$. لذلك، فإنَّ $m \le k|N(S)|$ و $k|S| \le k\,|N(S)|$، وهذا يؤدي إلى أنَّ $|S| \le |N(S)|$ عندما $k > 0$. وبما أنَّ اختيار $S \subseteq X$ كان عشوائيًّا، فنكون قد أثبتنا شرط هال. ■

لاحظ هنا أنَّه يمكن استخدام التّناقض. بافتراض أنَّ G لا يملك مواءمة كاملة، فإنَّ هذا يعطي مجموعة $S \subseteq X$ بحيث $|N(S)| < |S|$. وأنَّ الإثبات الذي يعطي تناقضًا يكافئ إعادة صياغة الإثبات المباشر المعطى في الأعلى.

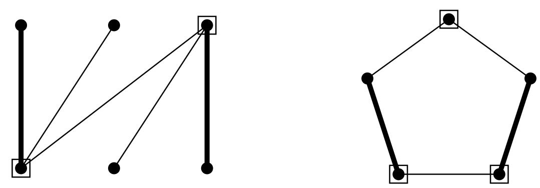
نظريات أدنى أكبر (Min - Max Theorems)

عندما لا يكون للبيان G مواءمة كاملة، فإنَّ النظرية 3.1.10 تسمح لنا بإثبات أنَّ M مواءمةٌ كبرى من خلال إثبات أنَّه لا يوجد لـ G مسار موسّع للمواءمة M. إنَّ استكشاف المسارات المتناوبة جميعها للمواءمة M لحذف إمكانيّة التّوسيع قد يأخذ وقتًا طويلاً.

ولقد واجهنا موقفًا مشابهًا عندما أثبتنا أنَّ البيانٍ ليس ثنائيّ التّجزئة، وبدلاً من فحص التّجزئات المحتملة، نستطيع إيجاد حلقة فردية. وهنا مجددًا، بدلاً من استكشاف المسارات المتناوبة جميعها للمواءمة M، فإنَّنا نفضل إيجاد بناء صريح في G يمنع وجود أيّ مواءمة أوسع من M.

14.1.3. تعريف: الغطاء الرّأسيّ (vertex cover) للبيان G هو مجموعة جزئية Q من $V(G)$ تحوي على الأقلّ نقطةً طرفيّة واحدة من كلّ ضلع؛ أيّ أنَّ الرّؤوس في Q تغطي $E(G)$. في البيان الذي يمثّل شبكة طرق (طرق مستقيمة ولا يوجد رؤوس معزولة)، نستطيع تفسير المسألة بإيجاد أصغر غطاء رأسيّ، كمسألة وضع أقلّ عدد ممكن من رجال الشّرطة لحماية شبكة الطّرق بكاملها. إذن، وفي هذا السياق، فإنَّ "غطاء" تعني "مراقبة". بما أنَّه لا يوجد رأس يمكن أنْ يغطي ضلعين لمواءمة، فإنَّ حجم كلّ غطاء رأسيّ يساوي حجم كلّ مواءمة على الأقلّ. لذلك، فإنَّ الحصول على مواءمة و غطاء رأس بالحجم نفسه يثبت أنَّ كلّا منهما هي الأمثل. لاحظ أنَّ مثل هذه البراهين موجودة للبيانات الثنائيّة الفرع، ولكنها ليست موجودة للبيانات جميعها.

15.1.3. مثال: (المواءمات والأغطية الرّأسيّة). في البيان عن اليسار أدناه، عَلمنا غطاء رأسيًّا حجمه 2، وعرضنا كذلك مواءمة حجمها 2 مرسومة بخطّ سميك. إنَّ الغطاء الرّأسيّ الذي حجمه 2 يمنع وجود مواءمات بأكثر من ضلعين، إضافة إلى أنّ مواءمات حجمها 2 تمنع وجود أغطية الرّؤوس التي رؤوسها أقلّ من 2. وكما هو موضّح عن اليمين، فإنَّ القيم المثلى تختلف عن الحلقات الفردية بـ 1. ومن الممكن أنْ يكون الاختلاف كبيرًا بصورة عشوائيّة (التمرين 10.3.3). ■



16.1.3. نظرية: (كونج König [1931]، إيجرفاري Egervary [1931]) إذا كان G بيانًا ثنائيّ الفرع، فإنَّ أكبر حجم لمواءمة في G يساوي أصغر حجم لغطاء رأسيّ في G.

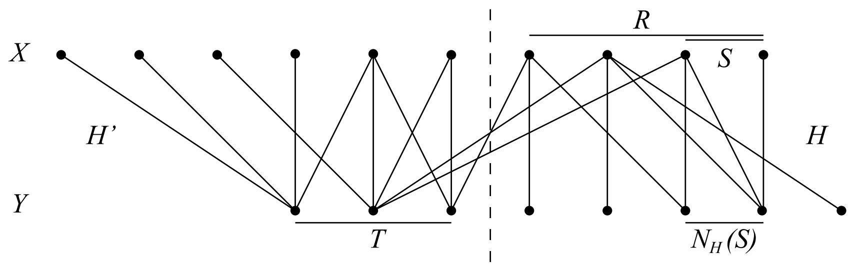
الإثبات: ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع بالتّجزئة $X،Y$. بما أنّه يجب استخدام رؤوس مختلفة لتغطية الأضلاع في المواءمة، فإنَّ $|Q| \geq |M|$ عندما يكون Q غطاءً رأسيًّا و M مواءمة في G. ليكن Q أصغر غطاء رأسيّ للبيان G. سوف ننشئ مواءمة حجمها $|Q|$، ونثبت أنَّنا نستطيع تحقيق المساواة دائمًا.

جزّئ Q بوضع $R= Q \cap X$ و $T= Q \cap Y$. ليكن H و H' بيانين جزئيّين في G مُحدثين بواسطة $R \bigcup (Y - T)$ و $T \cup (X - R)$، على التّرتيب. نستعمل نظرية هال لنثبت أنَّ H له مواءمة تشبع R إلى $Y - T$ و H' له مواءمة تشبع T. وبما أنَّ H و H' منفصلان، فإنَّ المواءمتين تشكّلان معًا مواءمة في G حجمها $|Q|$.

بما أنَّ $R \bigcup T$ غطاءٌ رأسيّ، فإنَّ G ليس له أضلاع من $Y - T$ إلى $X - R$. فلكلّ $S \subseteq R$، نأخذ في الحسبان

$N_H(S)$ والمحتوى في $Y - T$. إذا كان $|N_H(S)| < |S|$. وبما أنَّ $N_H(S)$ تغطي الأضلاع جميعها التي تتقاطع مع S، والتي لم تغطَّ بواسطة T، فنستطيع تعويض $N_H(S)$ لأجل S في Q لنحصل على أصغر غطاء رأسيّ.

إنّ الأصغريّة لـ Q تؤدي إلى شرط هال في H. لذا، يكون لـ H مواءمة مشبعة لـ R. إنّ تطبيق الحجة نفسها على H' تعطي مواءمة مشبعة لـ T. ■



ولأن نظريّة البيان مستمرّة في التّطور فستظهر براهين جديدة لنتائج أساسيّة مثل نظرية كونج وإيجرفاري (König – Egervary)؛ انظر ريزي (Rizzi) [2000].

17.1.3. ملاحظة: تنصّ نظرية **علاقة أصغر – أكبر** (min – max relation) على المساواة بين الإجابات لمسألتي التّصغير و التّكبير على صفّ من الأمثلة. لاحظ أنَّ نظرية كونج وإيجرفاري مثال على العلاقة بين أغطية الرّأس والمواءمة في البيانات الثنائيّة الفرع.

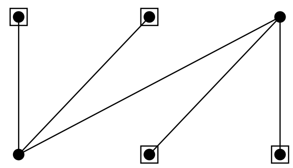
ولمناقشة ذلك؛ نفكّر في زوج من مسائل **الأمثليّة الثّنويّة** (dual optimization problems) لمسألتي التّكبير **M** و التّصغير **N**، معرفتين على الأمثلة نفسها (مثل البيانات)، بحيث يكون كلّ حلّ مرشحًا M لـ **M** وكلّ حلّ مرشحًا N لـ **N** (على المثال نفسه). إنّ قيمة M تساوي قيمة N أو أقلّ منها. غالبًا ما تكون "القيَمة" أساسيّة (cardinality). ومثال ذلك عندما تكون **M** مواءمة كبرى و **N** أصغر غطاء رأسيّ.

عندما تكون **M** و **N** مسألتين ثنويّتين فإنَّ الحصول على الحلول المرشحة M و N التي لها القيمة نفسها تثبت أنَّ M و N هما حلّان مثليان لذلك المثال. سوف نرى العديد من الأزواج من المسائل الثنوية في هذا الكتاب. لاحظ أنَّ علاقة أصغر – أكبر تنصّ على أنَّ البراهين القصيرة للأمثلة موجودة على بعض صفوف الأمثلة. وأنَّ هذه النظريات مرغوب فيها لأنها توفر الجهد؛ وهدفنا التالي هو نظرية أخرى مماثلة تتعلق بالمجموعات المستقلّة في البيانات الثنائيّة الفرع. ■

المجموعات المستقلّة والأغطية (Independent Sets and Covers)

ننتقل الآن من المواءمات إلى المجموعات المستقلّة. ونعرّف عدد الاستقلال للبيان على أنَّه أكبر حجم لمجموعة مستقلّة من الرّؤوس.

18.1.3. مثال: ليس بالضرورة أنْ يكون عدد الاستقلال لبيان ثنائيّ الفرع مساويًا لحجم مجموعة مجزّأة للبيان. في البيانات أدناه، كلّ من المجموعات المجزّأة حجمها 3، ولكننا أشرنا إلى مجموعة مستقلة حجمها 4. ■



لاحظ أنَّه لا يوجد رأس يغطّي ضلعين في مواءمة. وبطريقة مماثلة، لا يوجد ضلع يحتوي على رأسين من مجموعة مستقلّة، وهذا يؤدي إلى مسألة غطائيّة ثنويّة أخرى.

19.1.3. تعريف: الغطاء الضّلعيّ (edge cover) للبيان G هو مجموعة L من الأضلاع، بحيث يكون كلّ رأس في G يقع على بعض الأضلاع في L. ونقول: إنَّ الرّؤوس في G مغطاة بأضلاع من L. ففي المثال 18.1.3، نجد أنَّ الأضلاع الأربعة الواقعة على الرّؤوس المعلّمة تشكّل غطاءً ضلعيًّا؛ ويكون الرأسان المتبقيان قد غطّيا "بصورة حرّة" "for free".

إنَّ البيانات التي ليس لها رؤوس معزولة هي البيانات التي تملك الغطاءات الضّلعيّة فقط، ولاحظ أنَّ المواءمة الكاملة تشكّل غطاء ضلعيًّا على $\frac{n(G)}{2}$ من الأضلاع. وعمومًا، نستطيع الحصول على غطاء ضلعيّ بإضافة أضلاع إلى المواءمة العظمى.

20.1.3. تعريف: للأحجام المثلى للمجموعات في الاستقلال، ومسائل الغطاءات التي عرّفت، نستخدم الرّموز أدناه.

$\alpha\,(G)$ أكبر حجم لمجموعة مستقلّة.
$\alpha'\,(G)$ أكبر حجم لمواءمة.
$\beta\,(G)$ أصغر حجم لغطاء رأسيّ.
$\beta'\,(G)$ أصغر حجم لغطاء ضلعيّ.

لاحظ أنّه قد يكون للبيان العديدُ من المجموعات المستقلّة التي حجمها هو الأكبر (C_5 له خمسة من هذه المجموعات)، ولكن عدد الاستقلال $\alpha\,(G)$ هو عدد صحيح ($\alpha\,(C_5) = 2$). إنَّ الرّموز تعامل الأعداد التي تجيب عن مسائل الأمثليّة بوصفها متغيّرات للبيان، كالترتيب، والحجم، وأكبر درجة، والقطر، إلخ. إنَّ استخدامنا للرّمز $\alpha'(G)$ لعدّ الأضلاع في مواءمة كبرى يقترح علاقة مع المتغيّر $\alpha\,(G)$ الذي يعدّ الرّؤوس في أكبر مجموعة مستقلّة. وسنكتشف هذه العلاقة في درس 1.7.

نستعمل $\beta(G)$ لأصغر غطاء رأس استنادًا إلى تداخلاتها مع المواءمات العظمى. ونستخدم "الفتحة" (ePrim) على $\beta'(G)$ بدلاً من $\beta(G)$؛ لأن $\beta(G)$ تحسب مجموعة الرّؤوس، أمّا $\beta'(G)$، فتحسب مجموعة الأضلاع.

وباستعمال هذه الرّموز، فإنَّ نظرية كونج وإيجرفاري تنصّ على أنَّ $\alpha'(G)= \beta\,(G)$ لكلّ بيان ثنائيّ الفرع مثل G. سنثبت أيضًا أنَّ $\alpha\,(G) = \beta'(G)$ للبيانات الثنائيّة الفرع التي ليس لها رؤوس معزولة. بما أنَّه لا يوجد ضلع قد يغطي رأسين في مجموعة مستقلّة واحدة، فإنَّ المتباينة $\beta'(G) \geq \alpha\,(G)$ تنتج مباشرة.

(عندما تكون $S\subseteq V(G)$، نستخدم عادة $\overline{S}$ للدّلالة على مجموعة $(V(G) - S)$، الرّؤوس المتبقيّة).

21.1.3. تمهيدية: في البيان G، تكون المجموعةُ $S \subseteq V(G)$ مستقلةً إذا وفقط إذا كانت $\overline{S}$ غطاءً رأسيًّا. وعليه، فإنَّ $\alpha(G) + \beta(G)= n(G)$.

الإثبات: إذا كانت S مجموعة مستقلة، فإنَّ كلّ ضلع يقع على رأس واحد في $\overline{S}$ على الأقلّ. وعكس هذا، إذا كانت $\overline{S}$ تغطي الأضلاع جميعها، فإنّه لا يوجد أضلاع تربط بين رؤوس S. لذا، فإنّ كلّ مجموعة مستقلة كبرى هي المتممةُ للغطاء الرأسيّ الأصغر، و $\alpha (G) + \beta (G)= n (G)$. ■

إنَّ العلاقةَ بين المواءمات وغطاءات الأضلاع علاقةٌ دقيقة بدرجة كبيرة. وعلى الرّغم من ذلك، فهناك صيغة مشابهة تتحقّق.

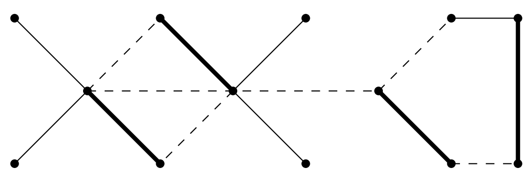
22.1.3. نظرية: (جالاي Gallai [1959]) إذا كان G بيانًا دون رؤوس معزولة، فإنَّ:
$\alpha'(G) + \beta'(G)= n(G)$.

الإثبات: من مواءمة كبرى M، سنبني غطاءً ضلعيًّا من الحجم $n(G) - |M|$. وبما أنَّ أصغر غطاء ضلعيّ لا يكون أكبر من هذا الغطاء، فإنَّ $\beta'(G) \leq n(G) - \alpha'(G)$. ومن غطاء ضلعيّ أصغريّ L، سنبني مواءمة حجمها $n(G) - |L|$. وبما أنَّ أكبر مواءمة لا تكون أصغر من هذه المواءمة، فإنَّ هذا سيؤدي إلى أنَّ $\alpha'(G) \geq n (G) - \beta'(G)$. وهاتان المتباينتان تحققان الإثبات.

لتكن M مواءمة كبرى في G. ننشئ غطاءً ضلعيًّا لـ G بإضافة ضلع واحد يقع على كل رأس غير مشبع للمواءمة M. وبذلك نكون قد استخدمنا ضلعًا واحدًا لكلّ رأس، ماعدا أضلاع M التي تستخدم رأسين. لذلك، فإنَّ الحجم الكلّيّ لهذا الغطاء الضّلعيّ هو $n(G) - |M|$، كما نريد.

الآن، ليكن L غطاءً ضلعيًّا أصغريًّا. إذا كانت النّقاط الطّرفيّة للضّلع e تنتمي إلى أضلاع في L غير e، فإنَّ $e \notin L$؛ نظرًا إلى أنَّ $L - \{e\}$ هو أيضًا غطاء ضلعيّ. لذا، فإنَّ كلّ مركّبة شكّلت بأضلاع من L لها على الأكثر رأس واحد درجته تتجاوز 1 وهو نجمة (شجرة لها على الأكثر رأس واحد ليس ورقة). ليكن k عددَ هذه المركّبات. بما أنَّ L يملك ضلعًا واحدًا لكلّ رأس غير مركزيّ في كلّ نجمة، فإنَّ $|L|= n(G) - k$. الآن، نُشكّل مواءمة M بحجم $k = n(G)- |L|$ باختيار ضلع واحد من كلّ نجمة في L. ■

23.1.3. مثال: البيان أدناه له 13 رأسًا. ومواءمة حجمها 4 تظهر بصورة غامقة، وإضافة الأضلاع المفرّغة تعطي غطاءً ضلعيًّا حجمه 9. وفي هذا الغطاء، لا حاجة إلى الأضلاع المنقطة. أمّا الغطاء الضّلعيّ فيتكون من أربع نجوم؛ نستخلص من كلّ نجمة ضلعًا واحدًا (غامق) لتشكيل المواءمة. ■



24.1.3. نتيجة: (كونج König [1916]) إذا كان G بيانًا ثنائيّ الفرع، وليس فيه رؤوس معزولة، فإنَّ $\alpha(G)= \beta'(G)$.

الإثبات: من التمهيدية 21.1.3 والنظرية 22.1.3، نجد أنَّ $\alpha(G) + \beta(G) = \alpha'(G)+ \beta'(G)$. وبطرح علاقة كونج وإيجرفاري $\alpha'(G) = \beta (G)$ يكتمل الإثبات. ■

الجموعات المسيطرة (اختياري) Dominating Sets (Optional)

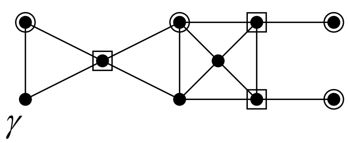
إنَّ الأضلاع التي غطّيت برأس واحد في الغطاء الرّأسيّ هي الأضلاع التي تقع عليه؛ فهي تشكّل نجمة. لذا، يمكن وصف مسألة الغطاء الرأسيّ بوصفها تغطية لمجموعة الأضلاع بأقلّ عدد من النّجوم. ونرغب أحيانًا في تغطية مجموعة الرّؤوس بأقلّ عدد ممكن من النّجوم. وهذا يكافئ وسيط البيان التّالي.

25.1.3. مثال: ترغب شركة ببناء أبراج إرسال في منطقة نائية. فحددت مواقع الأبراج على بنايات سكنية، بحيث يمكن وصول الإرسال إلى كلّ مبنى سكنيّ. فإذا كان جهاز الإرسال عند x يمكن أنْ يصل إلى y، فإنَّه يوجد جهاز إرسال عند y يمكن أنْ يصل إلى x. إذا أعطيتَ الأزواج التي يمكن أنْ يصل إرسال كلّ منهما إلى الآخر، فكم جهاز إرسال نحتاج لتغطية المباني كلّها؟

لاحظ أنّ مسألة مشابهة موجودة الرّياضيّات الحديثة، وهي: كم وزيرًا نحتاج لمهاجمة المربعات جميعها على لوحة الشّطرنج؟ (التمرين 56). ■

26.1.3. تعريف: نقول في البيان G: إنَّ المجموعة $S \subseteq V(G)$ **مسيطرةٌ** (dominating set) إذا وُجد لكلّ رأس خارج S جار في S. **ونعرّف عدد السيطرة** $\gamma(G)$ **dominating number** على أنَّه أصغر حجم لمجموعة مسيطرة في G.

27.1.3. مثال: للبيان G أدناه مجموعة مسيطرة أصغريّة حجمها 4 (الدّوائر) ومجموعة مسيطرة صغرى حجمها 3 (المربّعات). لذا، فإنَّ $\gamma(G) = 3$. ■



قدّم بيرج (Berge) [1962] مفهوم السّيطرة. واستحدث أور (Ore) [1962] هذا المصطلح، أما التّرميز $\gamma(G)$ فقد ظهر في المسح المبكر (Cockayne – Hedetniemi [1977]). وقد خُصِّصَ كتاب كامل لمفهوم السيّطرة وصورها المختلفة (Haynes- Hedetniemi- Slater [1998]).

28.1.3. مثال: إنَّ غطاء مجموعة الرّؤوس بالنّجوم يمكن ألّا يتطلّب الكثير منها كما يتطلّب غطاء مجموعة الأضلاع. وعندما لا يكون للبيان رؤوس معزولة، فإنَّ كلّ غطاء رأسيّ يكون مجموعة مسيطرة. لذا، فإنَّ $\gamma(G) \le \beta(G)$. وقد يكون الفرق بينهما كبيرًا. فمثلاً؛ $\gamma(K_n) = 1$، ولكن $\beta(K_n) = n-1$. ■

عند دراسة السّيطرة بوصفها مسألة قيم قصوى، فإنّنا نحاول الحصول على حدود بلغة متغيّرات البيان الأخرى، مثل الرّتبة والدّرجة الصغرى. لاحظ أنَّ رأسًا درجته k يسيطر على نفسه وعلى k رأسًا غيره أيضًا. إذن، فإنّ حجم كلّ مجموعة مسيطرة في بيان منتظم G من الدّرجة k يساوي $n(G)/(k+1)$ على الأقلّ. لاحظ وجود خوارزميّة شرهة تنتج مجموعة مسيطرة ليست أكبر كثيرًا من هذا الحدّ لكلّ بيان درجته الصغرى k.

29.1.3. تعريف: الجوار المغلق (closed neighborhood) $N[v]$ للرّأس v في بيان ما هو $N(v) \cup \{v\}$؛ وهي مجموعة الرّؤوس المُسيطَر عليها من v.

30.1.3. نظرية: (أرناتوف Arnautov [1974]، بايان Payan [1975]) توجد مجموعة مسيطرة حجمها $n\,\frac{1+\ln(k+1)}{k+1}$ على الأكثر لكلّ بيان على n من الرّؤوس ودرجته الصغرى k.

الإثبات: (ألون [1990] Alon) ليكن G بيانًا ذا درجة صغرى k. ولتكن $S \subseteq V(G)$ ، ولتكن U مجموعة الرّؤوس التي لا تسيطر عليها S. ندّعي وجود رأس y خارج S يسيطر على $|U|(k+1)/n$ رأسًا على الأقلّ من U. لاحظ أنّ k جارًا لكلّ رأس في U على الأقلّ. لذا، فإنّ $\sum_{v \in U} |N[v]| \geq |U|(k+1)$. وبما أنّ n جار لكلّ رأس في Gعلى الأكثر، وعليه يُحسب n مرة على الأكثر من قِبَل المجموعات $|U|$. لذلك، فإنَّ رأسًا مثل y يظهر على الأقلّ $|U|(k+1)/n$ مرة ويحقّق الادعاء.

نختار -بصورة تكراريّة- رأسًا يسيطر على أكثر الرّؤوس المتبقية وغير المسيطر عليها. لقد أثبتنا أنّه عندما يبقى r رأسًا غير مسيطر عليها، فإنّه يبقى بعد الاختيار التالي $r(1 - (k + 1)/n)$ رأسًا على الأكثر غير مسيطر عليها. وبعد $n \frac{\ln(k+1)}{k+1}$ خطوة تبدأ من $S = \emptyset$، واستخدام المتباينة $1 - p < e^{-p}$ يظهر أنّ عدد الرّؤوس غير المسيطر عليها يساوي على الأكثر

$$n\left(1 - \frac{k+1}{n}\right)^{n\ln(k+1)/(k+1)} < n e^{-\ln(k+1)} = \frac{n}{k+1}$$

إنَّ الرّؤوس المختارة والرّؤوس غير المسيطر عليها معًا يشكّلان مجموعة مسيطرة حجمها $n \frac{1+\ln(k+1)}{k+1}$ على الأكثر. ■

31.1.3. ملاحظة: إنَّ هذا الحدّ يثبت أيضًا بطرق احتمالية، وذلك في النظرية 10.5.8. ولاحظ أنَّ كار، وويرستر، وويست (Caro – Yuster- West) قد برهنوا أنّ عدد السّيطرة الكلّيّ لقيم k الكبيرة يقترب كثيرًا من هذا الحدّ. وقد استخدم ألون [1990] (Alon) طرقًا احتمالية ليثبت أنَّ تقارب هذا الحدّ حادٌّ وواضح عندما تكون k كبيرة.

ولقيم k الصّغيرة، تبقى الحدود المضبوطة ضمن الاهتمام. ومن خلال البيانات المترابطة على n من الرّؤوس، نجد أنَّ $\delta(G) \geq 2$ تعطي $\gamma(G) \leq 2n/5$ (ماكويج – شيفرد [1989] McCuaig – Shepherd، مع وجود سبعة استثناءات صغيرة)، إضافة إلى أنَّ $\delta(G) \geq 3$ تؤدي إلى أنّ $\gamma(G) \leq 3n/8$ ريد ([Reed [1996]). يُطلب في التمرين 53 إيجاد بناءات تحقّق هذه الحدود. ■

لقد دُرست العديد من التّغيّرات على مفهوم السّيطرة. ففي المثال 25.1.3 على سبيل المثال، ربما نريد أنْ تكون أجهزة الإرسال قادرة على الاتصال معًا، وهذا يتطلّب حدوث بيان جزئيّ مترابط.

32.1.3. تعريف: تكون المجموعة المسيطرة S في G **مجموعة مسيطرة مترابطة** (connected dominating set) إذا كانت $G[S]$مترابطة، وتكون **مجموعة مسيطرة مستقلّة** (independent dominating set) إذا كانت $G[S]$ لا تحتوي أضلاعًا، في حين تكون **مجموعة مسيطرة كلّيّة** (total dominating set) إذا كانت $G[S]$ لا تحوي رأسًا معزولا.

إنَّ كلّ تغيير يضيف قيدًا. لذلك، فإنَّ مجموعات السّيطرة لهذه الأنواع تكون كبيرة كَكِبَر $\gamma(G)$. لاحظ أنّ التمارين 54-60 تستكشف هذه التّغيّرات. وأنَّ دراسة مجموعات السّيطرة تعادل دراسة المَجموعات المستقلّة الأعظميّة. وهذا يؤدي إلى نتيجة دقيقة حول البيانات التي لا تحوي مخالب.

33.1.3. تمهيدية: تكون مجموعة الرّؤوس في بيان ما مجموعة مسيطرة مستقلّة إذا وفقط إذا كانت مجموعة مستقلّة أعظميّة.

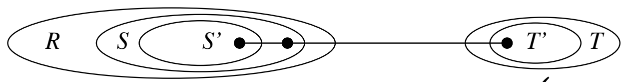
الإثبات: فيما بين المجموعات المستقلّة، تكون S أعظميّة إذا وفقط إذا كان لكلّ رأس خارج S جار في S؛ وهذا هو شرط أنْ تكون S مجموعة مسيطرة. ■

34.1.3. نظرية : ([Bollobás-Cockayne [1979]) توجد مجموعة مسيطرة مستقلّة حجمها $\gamma(G)$ لكلّ بيان لا يحوي مخلبًا.

الإثبات: لتكن S مجموعة مسيطرة صغرى في البيان G الذي لا يحوي مخالب. ولتكن S' مجموعة مستقلّة أعظميّة جزئيّة من S. ولتكن $T = V(G) - N(S')$، حيث R مجموعة الرّؤوس $N(S') \cup S'$ المسيطر عليها بواسطة S'. ولتكن T' مجموعة مستقلة أعظميّة جزئيّة من T.

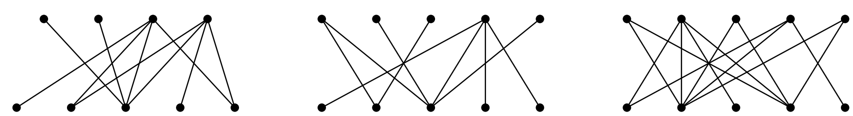
بما أنّ T' لا تحوي جارًا لـ S'، فإنَّ $S' \cup T'$ تكون مجموعة مستقلّة. وبما أنّ S' مجموعةٌ جزئيّة مستقلّة أعظميّة جزئيّة من S، فإنَّ لكلّ رأس من رؤوس S-S' جارًا في S'. وبطريقة مشابهة، فإنَّ T' تسيطر على T - T'. وعليه، فإنَّ $S' \cup T'$ مجموعةٌ مسيطرةٌ.

بقي أنْ نبين أنَّ $|S' \cup T'| \leq \gamma(G)$. لاحظ أنَّ لكلّ رأس في S-S' جارًا واحدًا على الأكثر في T'؛ لأنَّ له جارًا في S'، وأنّ $S' \cup T'$ مجموعةٌ مستقلة، و G يخلو من المخالب. وبما أنَّ S مسيطرة، فإنَّ لكلّ رأس جارًا على الأقلّ لـ T' في S-S'. وعليه، فإنَّ $|T'| \leq |S$-$S'|$، وهذا يؤدي إلى أنَّ $|S' \cup T'| \leq |S| = \gamma(G)$ ■



تمارين (Exercise)

1.1.3. (−) جد مواءمة كبرى في كلّ من البيانات المرسومة أدناه. وأثبت أنَّها مواءمة كبرى عن طريق إيجاد الحلّ الأمثل للمسألة الثّنويّة (غطاء رأسيّ أصغر). واشرح لماذا يثبت هذا أنَّ هذه المواءمة هي الأفضل.



2.1.3. (−) حدّد الحجم الأصغر لمواءمة أعظميّة في الحلقة C_n.

3.1.3. (−) لتكن S مجموعةَ الرّؤوس المشبعة بالمواءمة M في البيان G. أثبت أنَّ بعض المواءمات العظمى أيضًا تشبع S. وهل هذه العبارة يجب أنْ تكون صحيحة لكلّ مواءمة كبرى؟

4.1.3. (−) لكلّ من α , α' , β , β'، مَيِّز البيانات البسيطة التي قيمة كلّ وسيط من هذه الوسائط تساوي 1.

5.1.3. (−) أثبت أنَّ $\alpha(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G)+1}$ لكلّ بيان G.

6.1.3. (−) لتكن T شجرة على n من الرّؤوس، وليكن k الحجمَ الأكبر لمجموعة مستقلّة في T. حدّد $\alpha'(T)$ بدلالة n و k.

7.1.3. (−) استخدم نتيجة 24.1.3 لإثبات أنَّ البيان G يكون ثنائيّ الفرع إذا وفقط إذا كان $\alpha(H) = \beta'(H)$ لكلّ بيان جزئيّ H من G خاليًا من النّقاط المعزولة.

8.1.3. (!) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: كلّ شجرة لها مواءمة مكتملة واحدة على الأكثر.

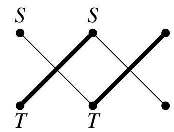
9.1.3. (!) أثبت أنّ كلّ مواءمة أعظميّة في البيان G لها $\alpha'(G)/2$ ضلعًا على الأقلّ.

10.1.3. افترض أنَّ M و N موائمتان في البيان G، بحيث $|M|>|N|$. أثبت وجود مواءمتين M' و N' في G بحيث إنَّ $|M'| = |M|$-1، و $|N'| = |N|+1$، وبحيث يكون اتحادهما وتقاطعهما (كمجموعات أضلاع) مثل M و N.

11.1.3. لتكن C وC' حلقتين في البيان G. أثبت أنَّ $C\Delta C'$ يتفكّك إلى حلقات.

12.1.3. لتكن C و C' حلقتين بطول k في بيان خصره k. أثبت أنَّ $C\Delta C'$ حلقةٌ أحادية إذا وفقط إذا كان $C\cap C'$ مسربًا أحاديًّا. (Jiang [2001])

13.1.3. لتكن M و M' مواءمتين في البيان الثنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة $X، Y$. افترض أنَّ M مشبعة لـ $S \subseteq X$ و M' مشبعة لـ$T \subseteq Y$ أثبت أنّه توجد لـ G مواءمة مشبعة لـ $S \cup T$. وعلى سبيل المثال، نعرضَ أدناه M بأضلاع سميكة، و M' بأضلاع رفيعة؛ ونستطيع إشباع $S \cup T$ بَاستخدام ضلعٍ واحدٍ من كلّ مواءمة منهما.



14.1.3. ليكن G بيان بيترسون. في المثال 9.1.7، حلّلنا الحالات التي استخدمت لإثبات أنَّه إذا كانت M مواءمة كاملة في G، فإنَّ $G\text{-}M=C_5+C_5$. افترض هذا، ثمَّ:

a) مكتملة أنَّ كلّ ضلع في G يقع في أربع حلقات على خمسة رؤوس. واحسب الحلقات الخماسية الموجودة في G.

b) حدّد عدد المواءمات مكتملة في G.

15.1.3. a) لكلّ $k \geq 2$؛ أثبت أنَّه لكلّ مواءمة كاملة M في Q_k ولكلّ إحداثيّ $i \in [k]$، يوجد عدد زوجيّ من الأضلاع في M تختلف نقاطها الطّرفيّة في الإحداثيّ i.

b) استخدم فرع (a) لعدّ المواءمات الكاملة في Q_3.

16.1.3. لكلّ $k \geq 2$، أثبت أنَّه يوجد $2(2^{k-2})$ مواءمة مكتملة لـ Q_k على الأقلّ.

17.1.3. الوزن لرأس في Q_k هو عدد تكرار العدد 1 في وسمه. أثبت أنَّه لكلّ مواءمة مكتملة في Q_k، فإنَّ عدد الأضلاع التي توائم الكلمات التي وزنها i للكلمات التي وزنها $i+1$ هو $\binom{k-1}{i}$، لكلّ $0 \leq i \leq k\text{-}1$.

18.1.3. (!) شخصان يلعبان لعبة على البيان G، ويتبادلان اختيار رؤوس مختلفة. يبدأ اللاعب الأوّل باختيار أيّ رأس، بحيث يكون كلّ اختيار لاحق مجاورًا للاختيار السّابق (للّاعب الآخر). لذلك، فإنَّهما يسلكان مسارًا معًا. واللاعب الفائز هو الذي يستطيع أنْ يحرك أخيرًا.

أثبت أنَّ اللّاعب الثّاني لديه استراتيجيّة للفوز إذا كان لـ G مواءمة مكتملة، وبخلاف ذلك فإنّ اللاعب الأوّل هو الذي لديه هذه الاستراتيجيّة. (مساعدة: للفرع الثّاني، يجب أنْ يبدأ اللاعب الأول برأس مهمل من مواءمة عظمى).

19.1.3. (!) لتكن $A=(A_1, \ldots, A_m)$ جمعًا أو حشدًا لمجموعات جزئيّة من Y. نعرّف **نظام الممثلين المختلفين** (SDR) (System of distinct representatives) لـ A على أنَّه مجموعة العناصر المختلفة $a_1, \ldots, a_m$ في Y، بحيث إنَّ $a_i \in A_i$. أثبت أنَّ لـ A SDR إذا وفقط إذا كان $|S| \geq |\bigcup_{i \in S} A_i|$ لكلّ $S \subseteq \{1,\ldots,m\}$. (مساعدة: حوّل هذا إلى مسألة بيان).

20.1.3. يخطّط أعضاء نادٍ لقضاء عطلتهم الصّيفيّة، حيث يتوافر لديهم الرّحلات $t_1,\ldots,t_n$، ولكن سعة الرّحلة t_i هي n_i. وكلّ شخصٍ يرغب في بعض هذه الرّحلات سيسافر على الأكثر في واحدة منها. بدلالة أيّ الأشخاص يرغب بأي الرحلات، اشتق الشّرط الضّروريّ والكافي لملء الرحلات جميعها (بسعتها) من الأشخاص الذين يرغبون فيها.

21.1.3. (!) ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة $X، Y$، بحيث إنَّ $|N(S)| > |S|$ عندما $\emptyset \neq S \subset X$. أثبت أنَّ كلّ ضلع في G ينتمي إلى مواءمة مشبعة لـ X.

22.1.3. أثبت أنَّ للبيان الثنائيّ الفرع G مواءمة مكتملة إذا وفقط إذا كان $|N(S)| \geq |S|$ لكلّ $S \subseteq V(G)$، وقدّم صفًّا لا نهائيًّا من الأمثلة لإثبات أنَّ هذا التّمييز لا يتحقّق للبيانات جميعها.

23.1.3.(+) إثبات بديل لنظرية هال. خذ في الحسبان بيانًا ثنائيّ الفرع G مع تجزئة ثنائيّة X، Y، ويحقّق المتباينة $|N(S)| \geq |S|$ لكلّ $S \subseteq X$. استخدم الاستقراء على $|X|$ لإثبات أنّه توجد مواءمة لـ G مشبعة لـ X. (مساعدة: خذ في الحسبان أولاً الحالة حيث $|N(S)| > |S|$ لكلّ مجموعة جزئيّة فعليّة S مَن X. وعندمَا لا يتحقّق ذلك، خذ في الحسبان مجموعة أصغريّة جزئيّة غير خالية $T \subseteq X$ بحيث $|N(T)| = |T|$.

(*M. Hall* [1948], *Halmos – Vaughan* [1950])

24.1.3. (!) **مصفوفة التّباديل** (permutation matrix) P: هي مصفوفة، مدخلاتها 1،0 فقط وتحوي في كلّ صفّ وعمود العدد 1 بالضبط مرّة واحدة. أثبت أنَّ أيّ مصفوفة مربّعة مدخلاتها أعداد صحيحة غير سالبة يمكن كتابتها في صورة حاصل جمع k من مصفوفات التّباديل، إذا وفقط إذا كانت مجاميع الصفوف جميعها ومجاميع الأعمدة جميعها كذلك تساوي k.

25.1.3. (!) **مصفوفة مضاعف التّصادفيّة** (doubly stochastic matrix) Q: مصفوفة الأعداد الحقيقيّة غير السّالبة التي فيها مجموع أيّ صفّ ومجموع أيّ عمود يساوي 1. أثبت أنَّ مصفوفة مضاعف التّصادفيّة Q يمكن كتابتها على الصورة $Q = c_1P_1 + \ldots + c_mP_m$، حيث $c_1, \ldots, c_m$ أعداد حقيقية غير سالبة مجموعها 1 و $P_1, \ldots, P_m$ هي مصفوفات تباديل. ومثال ذلك ما يأتي:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(مساعدة: استخدم الاستقراء على عدد المدخلات غير الصّفريّة في Q).

(Birkhoff [1946]، von Neumann [1953])

26.1.3. (!) تتكوّن مجموعة من أوراق اللعب من mn بطاقة مع m و n نقشًا عليها، بحيث يكون هنالك بطاقة واحدة لكلّ قيمة في كلّ نقش. وزّعت البطاقات إلى صفيف n في m:

a) أثبت أنّ هناك مجموعة تتكوّن من m بطاقة، بواقع بطاقة واحدة في كلّ عمود، ذات قيم مختلفة.

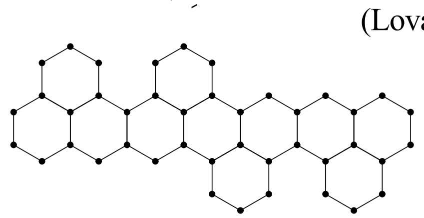
b) استخدم فرع (a) لبرهنة أنَّه بمتتالية من تبديلات البطاقات التي لها القيمة نفسها ، يمكن إعادة ترتيب البطاقات بحيث يتكون كلّ عمود من n بطاقة من النّقوش المختلفة. (Enchev [1997])

27.1.3. (!) تعميم تك- تاك- تو(Generalizing Tic- Tac – Toe). تتكوّن **لعبة المواقع** من مجموعة مواقع $X = x_1, \ldots, x_n$ وعائلة مجموعات مواقع رابحة $W_1, \ldots, W_m$ (تك – تاك – تو لها 9 مواقع و8 مجموعات رابحة). حيث يختار اللاعبان المواقع بصورة متعاقبة؛ والفائز منهما من يجمّع مجموعة رابحة.

افترض أنَّ كلّ مجموعة رابحة حجمها a على الأقلّ، وكلّ موقع يظهر في b على الأكثر مجموعة رابحة (في تك – تاك – تو، $a=3$ و $b=4$). أثبت أنَّ اللاعب 2 يستطيع تحقيق التعادل بقوة إذا كان $a \geq 2b$. (مساعدة: شكّل بيانًا ثنائيّ الفرع G بالتّجزئة الثّنائيّة X، Y ، حيث $Y = \{w_1, \ldots, w_m\} \cup \{w'_1, \ldots, w'_m\}$، وأضلاعه هي x_iw_j و $x_iw'_j$ عندما يكون $x_i \in W_j$. كيف يستطيع اللاعب 2 استخدام مواءمة في G؟ تعليق: هذه النتيجة تؤدّي إلى أن اللاعب 2 يستطيع تحقيق التعادل بقوة في لعبة تك – تاك – تو ذات البعد d عندما يكون طول الجوانب كافيًا).

28.1.3. (!) جد مواءمة مكتملة في البيان أدناه، أو أعطِ إثباتًا قصيرًا تبيّن عدم وجود مواءمة مكتملة فيه.

(Lova'sz- Plummer [1986,P7])



29.1.3. (!) استخدم نظرية كونج وإيجرفاري لإثبات أنّ كلّ بيان ثنائيّ الفرع G له مواءمة حجمه $e(G)/\Delta(G)$ على الأقلّ. استخدم هذا لتستنتج أنّه توجد لكلّ بيان جزئيّ من $K_{n,n}$ عدد أضلاعه أكثر من $(k-1)n$ مواءمةٌ حجمها k على الأقلّ.

30.1.3. (!) حدّد أكبر عدد من الأضلاع في البيان الثنائيّ الفرع البسيط الذي لا يحوي مواءمة عدد أضلاعها k ولا يحوي نجمًا عدد أضلاعه l (Isaak).

31.1.3. استخدم نظرية كونج وإيجرفاري لإثبات نظرية هال.

32.1.3. (!) في البيان الثّنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$، إنَّ **العجز** (deficiency) للمجموعة S هو $\mathrm{def}(S)=|S|-|N(S)|$ لاحظ أنَّ $\mathrm{def}(\phi)=0$. أثبت أنَّ $\alpha'(G)=|\times|-\max_{S\subseteq x}\mathrm{def}(S)$. (مساعدة: شكّل بيانًا ثنائيّ الفرع G' بحيث يكون لـ G' مواءمة مشبعة لِـ X إذا وفقط إذا كان لـِ G مواءمة بالحجم المطلوب، وبرهن أنَّ G' يحقق شرط هال). (Ore[1955]).

33.1.3. (!) استخدم التمرين 32.1.3 لإثبات نظرية كونج وإيجرفاري. (مساعدة: احصل على مواءمة وغطاء رأسيّ لهما الحجم نفسه من مجموعة لها عجز أكبر).

34.1.3. (!) ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$ ليس فيه رؤوس معزولة. عرّف العجز كما عُرّف في التمرين .32.1.3 أثبت أنَّ شرط هال يتحقق للمواءمات المشبعة لِـ X إذا وفقط إذا كان عجز كلّ مجموعة جزئيّة من Y على الأكثر $|Y|-|X|$.

35.1.3. ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$. أثبت أنَّ G يخلو من $(k+1)\,K_2$ إذا وفقط إذا كانت مجموعة $S\subseteq X$ تحتوي على مجموعة جزئيّة حجمها k على الأكثر، ولها جوار N(S) (Liu- Zhou [1997]).

36.1.3. ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$ وله مواءمة مشبعة لـ X. بوضع $m=|X|$ ، أثبت أنَّه يوجد لـ G على الأكثر ضلعًا $\binom{m}{2}$ لا تنتمي إلى أيّ مواءمة حجمها m. أنشئ أمثلة لتبيّن أنَّ هذا أفضل ما يمكن لكلّ m.

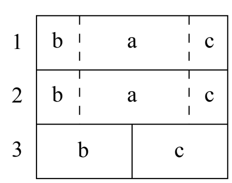
37.1.3. (+)ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$ وله مواءمة مشبعة لـ X:

a) لتكن S و T مجموعتين من X بحيث إنَّ $|N(S)|=|S|$ و $|N(T)|=|T|$. أثبت أنَّ $|N(S\cap T)|=|S\cap T|$.

b) أثبت أنَّ X يحوي رأسًا x بحيث إنَّ كلّ ضلع يقع على x ينتمي إلى مواءمة كبرى.

(مساعدة: خذ مجموعة أصغريّة غير خالية $S\subseteq X$ بحيث $|N(S)|=|S|$، إنْ وجدت مثل هذه المجموعة).

38.1.3. (+) جزيرة مساحتها n، وفيها n عائلة تتكون كلّ منها من زوجين، أحدهما صيّاد والآخر مزارع. وقد قسّمت وزارة الصّيد الجزيرة إلى n منطقة صيد متساوية المساحة، أمّا وزارة الزّراعة فقد قسّمت الجزيرة إلى n منطقة زراعية متساوية المساحة. وتطلب وزارة الزواج أنْ يحصل كلّ زوجين على منطقتين متداخلتين. ومن التمرين 25.1.3، نعلم أنّ هذا ممكن دائمًا. أثبت نتيجة أقوى: اضمن مزاوجة بحيث تشترك منطقتا كلّ زوجين على الأقلّ بـ $4/(n+1)^2$ عندما يكون n فرديًّا و بـ $[n(n+2)]/4$ عندما يكون n زوجيًّا. و أثبت أيضًا أنّه لا يمكن ضمان وجود مساحة مشتركة أكبر من هذه؛ لاحظ أنَّ المثال أدناه يحقق المساواة عندما $n=3$ (Marcus- Ree [1959], Floyd [1990]).



$$\begin{pmatrix} .5 & .25 & .25 \\ .5 & .25 & .25 \\ 0 & .5 & .5 \end{pmatrix}$$

39.1.3. ليكن G بيانًا بسيطًا غير تافه. أثبت أنَّ $\alpha(G)\le n(G)-e(G)/\Delta(G)$ واستنتج أنَّ $\alpha(G)\le n(G)/2$ عندما يكون G منتظمًا. (P. Kwok).

40.1.3. ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع. أثبت أنَّ $\alpha(G) = n(G)/2$ إذا وفقط إذا وُجدت لـ G مواءمة مكتملة.

41.1.3. نعلم أنَّ للبيان المترابط على n من الرّؤوس حلقة واحدة بالضبط إذا وفقط إذا كان له n ضلع بالضبط (التمرين 30.1.2). ليكن G بيانًا ليس ثنائيّ الفرع، وله حلقة واحدة بالضبط C. أثبت أنّ $\alpha(G) \geq \lfloor n(G)/2 \rfloor$، مع المساواة إذا وفقط إذا وُجدت لـ $G\text{-}V(C)$ مواءمة مكتملة.

42.1.3. (!) لكي تبني خوارزميّة مجموعةً مستقلّةً كبيرةً S بشراهة، يجب عليها اختيار رأس بعد الآخر تكراريًّا من الرّؤوس المتبقية، بحيث يكون هذا الرّأس ذا درجة صغرى تضيفه إلى S، وتحذفه مع جيرانه من البيان. أثبت أنَّ هذه الخوارزميّة تنتج مجموعة مستقلّة حجمها $\sum_{v\in V(G)} \frac{1}{d_G(v)+1}$ على الأقلّ في البيان البسيط G. (Wei [1981] , Caro [1979])

43.1.3. لتكن M مواءمة أعظمية، و L غطاءً ضلعيًّا أصغريًّا في بيان ليس فيه رؤوس معزولة. أثبت العبارتين الآتيتين. (Norman – Rabin [1959], Gallai [1959]):

a) تكون M مواءمة كبرى إذا وفقط إذا كانت محتواة في غطاء ضلعيّ أصغر.

b) يكون L غطاءً ضلعيًّا أصغر إذا وفقط إذا احتوى على مواءمة كبرى.

44.1.3. (−) ليكن G بيانًا بسيطًا بحيث يكون مجموع درجات أيّ k رأسًا من رؤوسه أقلّ من $n - k$. أثبت أنَّ كلّ مجموعة مستقلّة أعظميّة لها أكثر من k رأسًا. (Mayer [1972])

45.1.3. يكون الضّلع e في البيان G **حرجًا بالنسبة إلى** α (α-critical) إذا كان $\alpha(G - e) > \alpha(G)$. افترض أنَّ xy وxz ضلعان حرجان بالنسبة إلى α في G. أثبت أنَّ لـ G بيانًا جزئيًّا مُحدثًا ، أي أنّ له حلقة فرديّة تحوي xy و xz. (مساعدة: لتكن Y,Z مجموعتين مستقلّتين كبريين في $G\text{-}xy$ و $G\text{-}xz$ على التّرتيب. ليكن $H= G[Y\Delta Z]$. أثبت أنّ لكلّ مركّبة في H عدد الرّؤوس نفسه من Y و Z. استخدم هذا الإثبات لإثبات أنَّ y و z ينتميان إلى المركّبة نفسها في H.) (Berge[1970]، مع تعميم صعب في Markossian – Karapetian [1984])

46.1.3. (*−) أعطِ توصيفًا مميّزًا للبيانات التي عدد سيطرتها 1.

47.1.3. (*−) أوجد أصغر شجرة لايتساوى فيها عدد كلّ من السّيطرة والغطاء الرّأسيّ.

48.1.3. (*−) حدّد $\gamma(C_n)$ و $\gamma(P_n)$.

49.1.3. (*) ليكن G بيانًا لا يحوي رؤوسًا معزولة، ولتكن S مجموعة مسيطرة أصغريّة في G. أثبت أنَّ $\overline{S}$ مجموعة مسيطرة، واستنتج أنَّ $\gamma(G) \leq n(G)/2$. (Ore [1962])

50.1.3. (*) أثبت أنَّ $\gamma(G) \leq n - \beta'(G) \leq n/2$ عندما يكون G بيانًا على n من الرّؤوس ولا يحوي رؤوسًا معزولة. لـ $1 \leq k \leq n/2$، أنْشئ بيانًا مترابطًا G على n من الرّؤوس بحيث يكون $\gamma(G)=k$.

51.1.3. (*) ليكن G بيانًا مترابطًا بسيطًا على n من الرّؤوس:

a) أثبت أنَّ $\lceil n/(1 + \Delta(G) \rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

b) أثبت أنَّ $\lceil(1 + \text{diam}\, G)/3\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \lfloor \text{diam}\, G/3 \rfloor$. بين أنَّ هاتين المتباينتين هما أفضل ما يمكن لكلّ n.

52.1.3. (*) أثبت أنَّه إذا كان القطر للبيان G على الأقلّ 3، فإنَّ $\gamma(\overline{G}) \leq 2$.

53.1.3. (*) لكل $k \in \mathbb{N}$ ، أنشئ بيانًا مترابطًا له $5k$ رأسًا وعدد سيطرة $2k$. ثم أنشئ بيان G منتظمًا من الدّرجة 3 منفردًا، بحيث $\gamma(G) = 3n(G)/8$.

54.1.3. (*) حدّد عدد السّيطرة لبيان بيترسون، وحدّد الحجم الأصغر لمجموعة مسيطرة كلّيّة في بيان بيترسون كذلك.

55.1.3. (*) في المكعّب الزّائد Q_4، حدّد الأحجام الصّغرى لكلّ من: مجموعة مسيطرة، ومجموعة مسيطرة مستقلّة، ومجموعة مسيطرة مترابطة، ومجموعة مسيطرة كلّيّة.

56.1.3. (*) أوجد طريقة لوضع خمسة أزواج من الملكات غير المهاجمة زوجًا زوجًا على لوح شطرنج 8 في 8 بحيث تهاجم هذه الملكات المربّعات الأخرى جميعها.

57.1.3. (*) لكلّ $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 4$، أنشئ شجرة على n رأسًا مع عدد سيطرة 2، بحيث يكون الحجم الأصغر لمجموعة مسيطرة مستقلّة هو $\lfloor n/2 \rfloor$.

58.1.3. (*) أثبت أنَّ للبيان G الذي لا يحوي $K_{1,r}$ مجموعةً مسيطرة مستقلّة حجمها على الأكثر $(r\text{-}2)\ \gamma(G)$ - $(r\text{-}3)$. (مساعدة: عمّم الإثبات في 34.1.3). (Bolloba's- Cockayne [1979])

59.1.3. (*) في البيان المترابط G الذي درجته n، أثبت أنَّ الحجم الأصغر لمجموعة مسيطرة مترابطة هو n ناقص أكبر عدد للأوراق في شجرة مولّدة.

60.1.3. (*) إذا كان $k \leq 5$، فإنَّ كلّ بيان G حيث $\delta(G) \leq k$ يملك مجموعة مسيطرة مترابطة حجمها على الأكثر $(3n\ (G) / (k+1))$ (Kleitman – West [1991], Griggs- Wu [1992]). أثبت أنَّ هذا الحدّ حادّ باستخدام بيان مشكّل. من ترتيب حلقيّ لـ $3m$ من العصب المنفصلة زوجًا زوجًا بجعل كلّ رأس يجاور كلّ رأس في العصبة التي قبله وفي العصبة التي بعده. ولتكن أحجام العصب $\lceil k/2 \rceil$، $\lfloor k/2 \rfloor$، 1، $\lceil k/2 \rceil$، $\lfloor k/2 \rfloor$، 1 ... .

2.3 الخوارزميّات والتّطبيقات (ALgoritims and Applications)

مواءمة ثنائيّ فرع كبرى (Maximum Bipartite Matching)

لإيجاد مواءمة كبرى؛ نبحث تكراريًّا عن المسارات الموسّعة لتوسعة المواءمة الحاليّة. فإذا لم نجد مسارًا موسّعًا في بيان ثنائيّ الفرع، فسنجد غطاء رأسيًّا حجمه هو حجم المواءمة الحاليّة نفسه، وهذا يبرهن أنَّ المواءمة الحاليّة لها أكبر حجم. ممّا يؤدّي إلى خوارزميّة لحلّ مسألة المواءمة العظمى، وإثبات خوارزميّ لنظرية كونج وإيجرفاري.

لتكن M مواءمة في البيان الثنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة X, Y. نبحث عن مسارات موسّعة للمواءمة M من بين الرّؤوس غير المشبعة جميعها من M في X. لاحظ أنّنا نحتاج إلى البحث في رؤوس X فقط؛ لأنَّ أيّ مسار موسّع له طول فرديّ. وعليه، فإنَّ نهايته في كلّ من X و Y. سنبحث آنيًّا في الرّؤوس غير المشبعة في X. ونبدأ بمواءمة حجمها 0. إنَّ تطبيق خوارزميّة المسار الموسّع $a'\ (G)$ مرة تنتج مواءمة كبرى. ■

1.2.3. خوارزميّة: (Algorithm). (خوارزميّة المسار الموسّع)

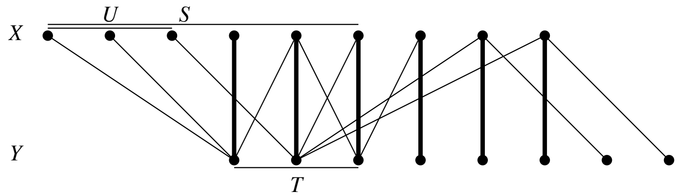
المدخلات: بيان ثنائيّ G بالتّجزئة الثّنائيّة X, Y ومواءمة M في G و U مجموعة الرّؤوس غير المشبعة من M والموجودة في X.

الفكرة: استكشف المسارات المتناوبة للمواءمة M من U، لتكن $S \subseteq X$ و $T \subseteq Y$ مجموعتي الرّؤوس التي تمّ الوصول إليها. ضع علامة على رؤوس S التي استكشفت لتوسيعات المسار كرأس تمّ الوصول إليه، وسجّل من أين تمّ الوصول.

البداية: $S = U$ و $T = \emptyset$.

مرات الحدوث: إذا كانت S لا تحوي رؤوسا غير مُعَلّمة، توقف وقدّم تقريرًا بأنَّ $T \cup (X\text{-}S)$ هي غطاء أصغر وأنّ M مواءمة كبرى. وبخلاف ذلك، اختر رأسًا غير معلّم $x \in S$. لتستكشف X؛ خذ جميع $y \in N(x)$ بحيث $xy \notin M$. إذا كانت y غير مشبعة، توقف وقدّم تقريرًا بالمسار الموسّع للمواءمة M من U إلى y. وبخلاف ذلك، فإنَّ y توائم بعض $w \in X$ بواسطة M. في هذه الحالة، ضع y في T (وصلت من x) وضع w في S

(وصلت من y). وبعد استكشاف مثل هذه الأضلاع جميعها التي تقع على x، ضع علامة على x، وكرّر. ■



عندما نستكشف x في خطوة مرات الحدوث، فربما نصل إلى الرّأس $y \in T$ الذي وصلنا إليه سابقًا. وبتسجيل x لأنه الرّأس السّابق على المسار، ربما يغير أيّ مسار موسّع للمواءمة M قدمنا فيه تقريرًا (اخترناه)، ولكنه لا يغير ما إذا كان مثل هذا المسار موجودًا.

2.2.3. نظرية : إنّ تطبيق خوارزميّة المسار الموسّع تكراريًّا على بيان ثنائيّ الفرع ينتج مواءمة وغطاءً رأسيًّا لهما الحجم نفسه.

الإثبات: نحتاج فقط إلى التّحقّق من أنَّ خوارزميّة المسار الموسّع تنتج مسارًا موسّعًا للمواءمة M أو غطاءً رأسيًّا حجمه $|M|$. إذا أنتجت الخوارزميّة مسارًا موسّعًا للمواءمة M، فنكون قد أنهينا الإثبات. وبخلاف ذلك، تنتهي بوضع علامات على رؤوس S جميعها، وتدّعي أنَّ $R = T \cup (X\text{-}S)$ هو غطاء رأسيّ حجمه $|M|$. وسنبرهن أنَّ R غطاءٌ رأسيٌّ حجمه $|M|$.

لبرهنة أنّ R غطاءٌ رأسيٌّ، يكفي أنْ نبرهن أنّه لا يوجد ضلع يصل S بـ Y-T. لاحظ أنَّ المسار المتناوب للمواءمة M من U يدخل X فقط من خلال ضلع في M. لذا، فإنَّ كلّ رأس x في $S\text{-}U$ يتواءم مع رأس في T من خلال M. وعليه، لا يوجد ضلع في M من S إلى $Y\text{-}T$. وكذلك، لا يوجد مثل هذا الضّلع خارج M. عندما يصل المسار S $x \in$، يستطيع الاستمرار خلال أيّ ضلع لا ينتمي إلى M، واستكشاف x يضع الجيران الأخرى لـ x جميعهم في T. وبما أنَّ الخوارزميّة علّمت رؤوس S كلّها قبل الانتهاء، فإنَّ أضلاع S جميعها تذهب إلى T.

الآن، ندرس حجم R. لاحظ أنَّ الخوارزميّة تضع الرّؤوس المشبعة في T فقط. وكلّ $y \in T$ يوائم رأسًا في S من خلال M. وبما أنَّ $U \subseteq S$، وكلّ رأس في $X\text{-}S$ مشبع، والأضلاع لـ M التي تقع على $X\text{-}S$ لا يمكن أنْ تستخدم T. فإنّها تختلف عن الأضلاع المشبعة لـ T. ونجد أنَّ M لها $|X\text{-}S|+|T|$ ضلعًا على الأقلّ. وبما أنّه لا توجد مواءمة أكبر من هذا الغطاء الرأسيّ، فَإنَّ $|M| = |T|+|X\text{-}S|=|R|$. ■

بالإضافة إلى دراسة خاصّيّة التّصحيح للخوارزميّات، فإنّنا سنهتم بالزّمن (عدد خطوات الحساب) الذي استخدم؛ حيث نقيس هذا بوصفه دالّة لحجم المدخلات. وأمّا لمسائل البيان فإنّنا نستخدم الرتبة $n(G)$ و/أو حجم $e(G)$ لقياس حجم المدخلات عادة.

3.2.3. تعريف: إنَّ **زمن التّشغيل** (running time) للخوارزميّة هو العدد الأكبر لخطوات الحسابات المستخدمة، ويُعبّر عنه بوصفه دالّة لحجم المدخلات. أمّا **الخوارزميّة الحسنة** (*good algorithm*) فهي الخوارزميّة التي يكون زمن تشغيلها دالّة كثير حدود.

يُعبَّر عن زمن التشغيل عادة بـ "$O(f)$"، حيث f دالّة لحجم المدخلات. يرمز بـ $O(f)$ إلى مجموعة الدّوال g بحيث يكون $|g(x)|$ محدودًا بثابت مضروبًا في $|f(x)|$ عندما يكون x كبيرًا بما فيه الكفاية (بمعنى أنَّه يوجد a,c بحيث $|g(x)| \le c|f(x)|$ عندما $|x| \ge a$).

إنَّ العديدَ من المسائل التي سندرسها في الفصول 1-4 خوارزمياتٌ حسنةٌ. وعلاوة على ذلك، فإنَّ المفاهيم الأخرى للتّعقيد (الملحق B) ليس شرطًا أنْ يكون مزعجًا لنا. بما أنّنا لا نعرف مقدار الوقت الذي تحتاج إليه عملية معينة على حاسوب معين، فإنَّ العوامل الثّابتة في زمن التشغيل لها معنى قليل. ولهذا السبب يكون الرمز $O(f)$ ملائمًا. نموذجيًّا، نسيء استعمال الرمز بكتابة $O(n^2)$ بدلاً من $O(f)$ لوصف الدّوال التي تنمو على الأكثر تربيعيًّا بدلالة n.

4.2.3. ملاحظة: ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$، فيه n رأسًا و m ضلعًا، بما أنَّ $\alpha'(G)\leq n/2$، فإنّنا نجد مواءمة كبرى في G من خلال تطبيق الخوارزميّة 1.2.3 على الأكثر $n/2$ مرة. وكلّ تطبيق للخوارزميّة 1.2.3 يستكشف رأسًا واحدًا من X على الأكثر قبل وضع علامة عليه. لذلك، فهي تأخذ في الحسبان كلّ ضلع مرة واحدة على الأكثر. إذا كان الزّمن لاستكشاف ضلع واحد محدودًا بثابت، فإنَّ هذه الخوارزميّة تحتاج إلى زمن تشغيلي $O(nm)$ لإيجاد مواءمة كبرى. تقدم النظرية 22.2.3 خوارزميّة أسرع مع زمن تشغيل $O(\sqrt{n}m)$. ويناقش الجزء 3.3 خوارزميّة حسنة لمواءمة كبرى في البيانات العامّة. ■

مواءمة ثنائيّ فرع موزونة (Weighted Bipartite Matching)

تعمّم نتائجنا حول المواءمة العظمى إلى البيانات الثّنائيّة بالتّجزئة الثّنائيّة $X،Y$ والموزونة، حيث نبحث عن مواءمة بأكبر وزن كلّيّ. إذا لم يكن البيان كلّ $K_{n,n}$ ، فإنّنا ندخل الأضلاع الناقصة مع وزن 0. وهذا لا يؤثر فيما نستطيع الحصول عليه مثل وزن مواءمة. لذلك، نستطيع افتراض أنّ البيان هو $K_{n,n}$. وكذلك 0 نستطيع اعتبار الأوزان جميعها غير سالبة؛ لأنّنا نستطيع تغيير الأوزان السالبة بـ 0. حلّ المسألة الناتجة، واحذف الأضلاع التي وزنها لتحصل على حلّ المسألة الأصليّة.

بما أنّنا أخذنا في الحسبان الأضلاع التي وزنها غير سالب فقط، فإنَّ بعضَ المواءمات الموزونة العظمى موائماتٌ مكتملة. لذا، فإنّنا نبحث عن مواءمة مكتملة. وسنحلّ مسألتي المواءمة الموزونة الكبرى وثنويّتها.

5.2.3. مثال: المواءمة ثنائيّة الفرع الموزونة وثنويّتها. تملك شركة زراعية n مزرعة و n مصنعًا للمعالجة. وكلّ مزرعة تستطيع إنتاج ذُرَة بسعة مصنع واحد. إنَّ الرّبح الذي يتحقّق من إرسال منتجات المزرعة i إلى المصنع j هو $w_{i,j}$. وأنَّ وزن $w_{i,j}$ على الضّلع x_iy_j يعطينا بيانًا ثنائيّ الفرع موزونًا مع مجموعات مجزّأة $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ و $Y=\{y_1,\dots,y_n\}$. وتريد الشّركة اختيار أضلاع تشكّل مواءمة لمضاعفة الربح الكلّيّ.

تدّعي الحكومة إنتاج الكثير من الذّرة. لذا، فإنّها ستدفع للشّركة لكي لا تقوم هذه الشّركة بمعالجة الذّرة وتصنيعها، حيث ستدفع الحكومة u_i إذا وافقت الشّركة على عدم استخدام المزرعة i في حين تدفع v_j إذا وافقت الشّركة على عدم استخدام المصنع j. إذا كان $u_i+v_j<w_{i,j}$ فإنَّ الشّركة تربح باستخدام الضّلع x_iy_j أكثر مما تدفعه الحكومة لهذه الرّؤوس. ولكي يتمّ توقف الإنتاج كلّه؛ يجب أنْ تقدم الحكومة عرضًا بحيث يكون $u_i+v_j\geq w_{i,j}$ لكلّ i, j . وتريد الحكومة إيجاد قيم لتصغير $\sum u_i+\sum v_j$ ■

6.2.3. تعريف: المستعرض (transversal) للمصفوفة المربّعة n في n يتكون من n موقعًا، بحيث يكون هناك موقع واحد في كلّ صفّ وفي كلّ عمود. يُسمّى إيجاد مستعرض بأكبر مجموع **مسألةَ الواجب** (Assignment Problem). وهذه هي الصّياغة بلغة المصفوفات لمسألة **المواءمة الموزونة العظمى**، حيث يُعيّن وزن غير سالب $w_{i,j}$ للضّلع x_iy_j في $K_{n,n}$، ونبحث عن مواءمة مكتملة M لتكبير الوزن الكلّيّ $w(M)$.

وبهذه الأوزان، فإنّ **الغطاء (الموزون)** ((weighted) cover) هو اختيار أوسمة $u_i,\dots,u_n$ و $v_j,\dots,v_n$ بحيث $u_i+v_j\geq w_{i,j}$ لكلّ i, j. أمّا **التّكلفة** $(cost)$ $c(u,v)$ للغطاء (u,v) فهي $\sum u_i+\sum v_i$. و أنّ مسألة الغطاء **الموزون الأصغر** (minimum weighted cover) هي إيجاد غطاء بتكلفة صغرى.

لاحظ أنَّ مسألة إيجاد مواءمة مكتملة مع أصغر وزن، يمكن حلّها بوضع كلّ وزن $w_{i,j}$ مع $M\text{-}w_{i,j}$ حيث M عدد كبير، ومن ثمّ إيجاد مواءمة موزونة كبرى.

7.2.3. تمهيدية : (مسائل ثنويّة المواءمات الموزونة والأغطية الموزونة) للمواءمة المكتملة M والغطاء الموزون (u,v) في البيان ثنائيّ الفرع الموزون G، يتحقّق أنَّ $c(u,v) \geq w(M)$. وكذلك، $c(u,v) = w(M)$ إذا وفقط إذا تكوّنت M من الأضلاع x_iy_j بحيث $u_i+v_j=w_{i,j}$. في هذه الحالة، تكون M و (u,v) هما المثليين.

الإثبات: بما أنَّ M مشبعة لكلّ رأس، فإنَّ جمع القيود $u_i+v_j \geq w_{i,j}$ التي تظهر من أضلاعها يعطي $c(u,v) \geq w(M)$ لكلّ غطاء (u,v). فضلًا عن ذلك، إذا كان $c(u,v)=w(M)$، فإنَّ المساواة يجب أنْ تتحقّق في كلّ واحدة من المتباينات التي عددها n والتي جمعت. أخيرًا، بما أنَّ $c(u,v) \geq w(M)$ لكلّ مواءمة وغطاء، فإنَّ $c(u,v)=w(M)$ تؤدي إلى عدم وجود مواءمة مع وزن أكبر من $c(u,v)$ وكذلك عدم وجود غطاء مع تكلفة أقلّ من $w(M)$. ■

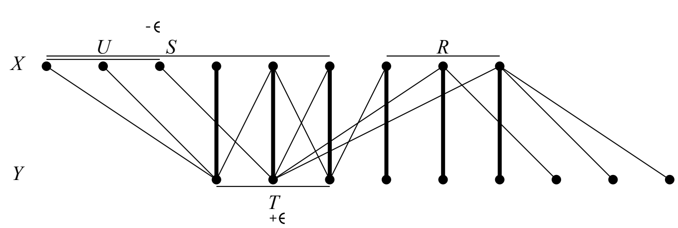
لاحظ أنَّ مواءمة وغطاء لهما القيمة نفسها فقط عندما تكون الأضلاع في المواءمة قد غطيت مع المساواة. وهذا يقودنا إلى خوارزميّة.

8.2.3. تعريف: البيان الجزئيّ للمساواة (equality subgraph) $G_{u,v}$ للغطاء الموزون (u,v) هو البيان الجزئيّ المولّد لـ $K_{n,n}$ الذي تكون أضلاعه هي الأزواج x_iy_j حيث $u_i + v_j = w_{i,j}$. إنّ الزيادة (excess) لـ i, j في الغطاء هي $u_i + v_j - w_{i,j}$.

إذا وُجدت لـ $G_{u,v}$ مواءمة مكتملة فإنَّ وزنه يكون $\sum u_i + \sum v_j$. ومن التمهيدية 7.2.3 نحصل على حلّ أمثل. وبخلاف ذلك، نجد مواءمة M وغطاءً رأسيًّا Q بالحجم نفسه في $G_{u,v}$ (كخوارزميّة المسار الموسّع). ليكن $R = Q \cap X$ و $T = Q \cap Y$. تتكوّن مواءمتنا من الحجم $|Q|$ من $|R|$ ضلعًا من R إلى $Y - T$، و $|T|$ ضلعًا من T إلى $X - R$ كما هو مبين أدناه.

للبحث عن مواءمة أكبر في البيان الجزئيّ للمساواة؛ نغيّر (u,v) لنعرف ضلعًا من $X - R$ إلى $Y - T$، في حين تحفظ المساواة على الأضلاع جميعها في M. لاحظ أنَّ الأضلاع التي تصل $X - R$ و $Y - T$ ليست في $G_{u,v}$، ولها زيادة موجبة. لتكن ϵ الزيادةَ الصغرى على الأضلاع من $X - R$ إلى $Y - T$. إنَّ اختصار u_i بمقدار ϵ لكلّ $x_i \in X - R$ يحفظ شرط الغطاء لهذه الأضلاع، ولكنّه يجلب واحدًا من هذه الأضلاع إلى البيان الجزئيّ للمساواة على الأقلّ. ولنحافظَ على شرط الغطاء للأضلاع من $X - R$ إلى T؛ نزيد v_j بمقدار ϵ لكلّ $y_j \in T$.

نعيد الإجراء مع البيان الجزئيّ الجديد للمساواة. وفي النّهاية، سنحصل على غطاء يملك بيانُه الجزئيُّ للمساواة مواءمةً كاملةً. وقد سُمِّيت الخوارزميّةُ الناتجة **الخوارزميّةَ الهنجاريّة** (Hungarian Algorithm) من قِبَل كهن ($Kuhn$) عرفانًا لجهود كلّ من كونج وإيجرفاري حيث استندت هذه الخوارزميّة إلى جهودهما.



9.2.3. خوارزميّة : (الخوارزميّة الهنجاريّة – Kuhn- [1955], Munkres [1957]).

المدخلات: مصفوفة الأوزان على الأضلاع لـ $K_{n,n}$ مع التّجزئة الثّنائيّة X,Y.

الفكرة: ضبط الغطاء (u,v) تكراريًّا حتى يملك البيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة.

البداية: ليكن (u,v) غطاءً مثل $u_i = \max_j w_{i,j}$ و $v_j=0$.

مرات الحدوث: جد مواءمة كبرى M في $G_{u,v}$. إذا كانت M مواءمة كاملة، توقف، وقدّم تقريرًا بإنَّ M مواءمةُ وزن كبرى. وبخلاف ذلك، ضع Q ليكن غطاءً رأسيًّا من الحجم $|M|$ في $G_{u,v}$. لتكن $R = X \cap Q$ و $T = Y \cap Q$. وليكن:

$$\epsilon = \min \{u_i + v_j - w_{i,j} : x_i \in X - R,\ y_i \in Y - T\}$$

أنقص ϵ من u_i لكلّ $x_i \in X - R$، وأضف ϵ إلى v_j لكلّ $y_j \in T$. شكّل البيان الجزئيّ الجديد للمساواة، ثمّ كرّر. ■

قدّمنا الخوارزميّة التي تستخدم البيانات الثنائيّة الفرع، إلّا أنّ رسمَ تغيّرات البيان الجزئيّ للمساواة تكراريّا غيرُ ملائم. لذا، نحسب باستخدام المصفوفات. لاحظ أنَّ الأوزان الابتدائية تشكّل مصفوفة A مع $w_{i,j}$ في الموقع i,j. نرفق الرّؤوس والأوسمة (u,v) مع الصفوف والأعمدة التي تخدم مثل X و Y على الترتيب. نطرح $w_{i,j}$ من u_i+v_j لنحصل على **مصفوفة الزيادة** (excess matrix) $c_{i,j} = u_i + v_j - w_{i,j}$: لاحظ أنَّ الأضلاع للبيان الجزئيّ للمساواة تقابل أصفارًا في مصفوفة الزيادة.

10.2.3. مثال: حلّ مسألة الواجب. إنَّ المصفوفة الأولى أدناه هي مصفوفة الأوزان. أمّا باقي المصفوفات فتظهر غطاءً (u,v) ومصفوفة الزيادة المقابلة. نضع خطًّا تحت بعض مدخلات مصفوفة الزيادة لتمييز مواءمة كبرى M في $G_{u,v}$، والتي تظهر في صورة أضلاع سميكة في البيانات الجزئيّة للمساواة التي رسمت لأول مصفوفتي زيادة. (رسم البيانات الجزئيّة للمساواة ليس ضروريًّا). لاحظ أنَّ أي مواءمة في $G_{u,v}$ تقابل مجموعة من الأصفار في مصفوفة الزيادة بحيث لا يكون هناك صفران في أيّ صف أو أيّ عمود؛ هذا هو **المستعرض الجزئي** (partial transversal).

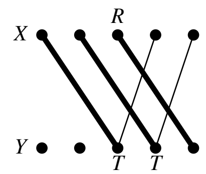
إنَّ المجموعة المغطاة هي مجموعة من الصفوف والأعمدة تغطي الأصفار في مصفوفة الزّيادة؛ و تقابل غطاءً رأسيًّا في $G_{u,v}$. إضافة إلى أنّ أيّ مجموعة غطاء بحجم أقلّ من n تؤدي إلى تقدّم نحو الحلّ، وبما أنَّ تكلفة الغطاء الموزون قليلة، فإنّنا سندرس الأصفار في مجموعة الزّيادة، ونجد مستعرضًا جزئيًّا ومجموعة غطاء بالحجم نفسه. وإذا كانت لدينا مصفوفة صغيرة، فإنّنا نستطيع عمل ذلك بالمعاينة.

نضع خطًّا تحت الأصفار في مستعرض جزئيّ. ونستعمل الحرفين R و T لوسم الصّفوف والأعمدة في مجموعة الغطاء. في كلّ تكرار، نحسب الزّيادة الصغرى على المواقع التي ليست في صفّ أو عمود مغطى (في صفوف X-R وأعمدة Y-T). إنَّ لهذه المواقع غير المغطّاة زيادة موجبة (الأضلاع المقابلة ليست في البيان الجزئيّ للمساواة). لاحظ أنَّ القيمة ϵ والتي عرّفت في الخوارزميّة 9.2.3 هي الأصغر من بين هذه الزّيادات. لذا، نطرح ϵ من الوسم u_i على الصّفوف التي ليست في R ونزيد الوسم v_j بمقدار ϵ على أعمدة T.

في المثال الآتي، لاحظ أنَّ مجموعة الغطاء التي استعملت في التّكرار الأوّل قد خفّضت تكلفة الغطاء، ولكنها لم توسّع المواءمة العظمى في البيان الجزئيّ للمساواة، أمّا التّكرار الثّاني فإنّه ينتج مواءمة كاملة، فضلًا عن أنَّ استخدام الأعمدة الثّلاثة الأخيرة بوصفها مجموعة غطاء في التّكرار الأوّل يوسّع المواءمة مباشرة.

إنَّ المستعرض للأصفار بعد التّكرار الأخير يحدّد مواءمة كاملة وزنها الكلّيّ يساوي تكلفة الغطاء النّهائيّ. لاحظ أنَّ أوزان الأضلاع المقابلة (المرتبطة) يساوي 5 ، 4 ، 6 ، 8 ، 8 وذلك في المعطيات الأصليّة، بالإضافة إلى أنَّ مجموع هذه الأوزان يساوي 31. أمّا الأوسمة (العلامات الدّالّة) 4 ، 5 ، 7 ، 4 ، 6، و 0 ، 0 ، 2 ، 2 ، 1 الموجودة

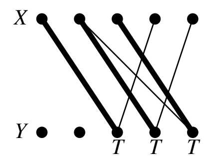
في الغطاء النّهائيّ فتحقّق تمامًا كلّ ضلع، ومجموعها أيضًا يساوي 31. إنَّ قيمةَ الحلّ الأمثل وحيدةٌ، ولكن الحلّ نفسه ليس شرطًا أنْ يكون وحيدًا؛ ويوجد لهذا المثال مواءمات وزن كبرى عديدة، وكذلك غطاءات تكلفة صغرى عديدة، ولكن جميعها لها الوزن الكلّيّ 31. ■



$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
6 & 2 & 5 & \underline{0} & 4 & 3 & \\
7 & 2 & 7 & 4 & \underline{0} & 1 & \\
8 & 6 & 5 & 4 & 3 & \underline{0} & R \\
6 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & \\
8 & 4 & 2 & 3 & 0 & 2 & \\
 & & & T & T & &
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\
5 & 0 & 3 & \underline{0} & 4 & 2 \\
6 & 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\
8 & 5 & 4 & 5 & 4 & 0 \\
5 & 1 & \underline{0} & 0 & 3 & 1 \\
7 & 2 & 0 & 3 & \underline{0} & 1
\end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
5 & 1 & 4 & \underline{0} & 4 & 2 \\
6 & 1 & 6 & 4 & \underline{0} & 0 \\
8 & 6 & 5 & 5 & 4 & \underline{0} \\
5 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\
7 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\
 & & & T & T & T
\end{array}$$

11.2.3. نظرية : تجد الخوارزميّة الهنجاريّة مواءمة وزن كبرى وغطاء تكلفة أصغر.

الإثبات : تبدأ الخوارزميّة بغطاء، وتنتهي فقط عندما يكون للبيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة، تضمن قيمة متساوية للمواءمة الحاليّة وللغطاء. افترض أنَّ (u,v) الغطاءُ الحالي، وأنَّه لا توجد للبيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة. ليرمز (u',v') إلى قوائم الأعداد الجديدة التي تعيِّن للرّؤوس. وبما أنَّ ϵ العددُ الأصغرُ لمجموعة منتهية غير خالية من الأعداد الموجبة، فإنَّ $\epsilon > 0$.

نتحقّق أولاً بأنَّ (u',v') غطاءٌ. إنَّ تغيير الأوسمة على رؤوس $X - R$ و T يعطي $u'_i+v'_j = u_i + v_j$ للأضلاع x_iy_j من $X - R$ إلى T، أو من R إلى $Y - T$. إذا كان $x_i \in R$، و $y_j \in T$، فإنَّ $u'_i + v'_j = u_i + v_j + \epsilon$، ويبقى الوزن مغطى. إذا كان $x_i \in X - R$، و $y_j \in Y - T$، فإنَّ $u'_i+v'_j$ يساوي $u_i + v_j - \epsilon$، وبحسب الاختيار لـ ϵ يكون على الأقلّ $w_{i,j}$.

تنتهي الخوارزميّة فقط عندما يكون للبيان الجزئيّ للمساواة مواءمة كاملة. لذا، يكفي أنْ نبرهن أنَّ الخوارزميّة تنتهي. افترض أنَّ الأوزانَ $w_{i,j}$ أعدادٌ نسبيةٌ. لذا، فإنَّ ضرب الأوزان في المضاعف المشترك الأصغر لمقاماتها يؤدي إلى مسألة مكافئة مع أوزان صحيحة. والآن، نستطيع افتراض أنّ الأوسمة في الغطاء الحاليّ صحيحة أيضًا. لذلك، فإنَّ كلَّ زيادة عددٌ صحيحٌ أيضًا. وعند كلّ تكرار، سنخفّض تكلفة الغطاء بمقدار صحيح. وبما أنَّ التكلفة تبدأ بقيمة ما وهي محدودة من أسفل بوزن مواءمة كاملة، فإنّنا نحصل على المساواة بعد عدد منتهٍ من التّكرارات للأوزان ذات القيم الحقيقية عمومًا، انظر الملاحظة 12.2.3. ■

12.2.3.* ملاحظة : عندما تكون الأوزان أعدادًا حقيقيةً، فإنَّه يمكن للخوارزميّة أنْ تبقى صالحة إذا عملنا بعناية كبيرة للحصول على أغطية رأسيّة في البيان الجزئيّ للمساواة. نستطيع أنْ نبرهن أنَّ الخوارزميّة تنتهي من خلال إجراء n^2 تكرارًا. إنَّ حجم المواءمة الحاليّة لا يمكن أنْ ينقص لأنَّ الأضلاع في M تبقى في البيان الجزئيّ للمساواة الجديد. وبما أنَّ حجم المواءمة يمكن أنْ يزداد n مرة على الأكثر، فإنَّه يكفي أنْ نبرهن أنّها سوف تزداد ضمن n تكرارًا.

إذا وجدنا المواءمة العظمى M بتكرار خوارزميّة المسار الموسّع، فإنَّ التّكرار الأخير يقدّم لنا غطاءً رأسيًّا نجده

باستكشاف المسارات المتناوبة للمواءمة M من مجموعة الرّؤوس غير المشبعة من M في X. وبجعل S وT يدلّان على مجموعتي الرّؤوس التي يمكن الوصول إليها في X وT، فإنّنا نحصل على الغطاء الرأسيّ $R \cup T$، حيث $R = X - S$.
إنَّ تطبيق خطوة من الخوارزميّة الهنجاريّة باستخدام الغطاء الرأسيّ $R \cup T$ يحفظ المساواة على M وعلى الأضلاع جميعها في المسارات المتناوبة للمواءمة M من المجموعة U. لا نعير اهتمامًا للأضلاع التي تكون من T إلى R والتي تختفي من البيان الجزئيّ للمساواة لأنّها لا تظهر في المسارات المتناوبة للمواءمة M من المجموعة U. إنَّ وضع ضلع من S إلى Y-T إمّا أنْ يعيّن مسارًا موسّعًا لـ M أو يزيد T، في حين يترك U دون تغيير. وبما أنّ باستطاعتنا زيادة T على الأكثر n مرة، فإنّنا نحصلَ على مواءمة أكبر في البيان الجزئيّ للمساواة ضمن إجراء n تكرارًا. ■

13.2.3.* ملاحظة : المواءمة العظمى ومسائل الغطاء الرأسيّ في البيانات الثنائيّة الفرع هما حالات خاصة من المسائل الموزونة. ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع. شكّل بيانًا موزونًا مع وزن 1 على الأضلاع في G، والوزن 0 على الأضلاع في $K_{n,n}$. ولاحظ أنَّ الوزن الأكبر لمواءمة هو $\alpha'(G)$.

إذا كانت الأوزان أعدادًا صحيحة فإنَّ الخوارزميّة الهنجاريّة تحافظ دائمًا على أوسمة صحيحة في الغطاء الموزون. لذا، نستطيع تقييد القيم (الوسوم) المستخدمة بالأعداد الصحيحة في مسألة الغطاء الموزون هذه. فضلًا عن ذلك، فإنَّ هذه الأعداد الصحيحة سوف تكون 0 أو 1 دائمًا.

إنَّ الرّؤوس التي تستقبل الوسم 1 يجب أنْ تغطي الوزن على الأضلاع في G. لذا، فهي تشكّل غطاءً رأسيًّا لـ G. بالإضافة إلى أنَّ تصغير مجموع الوسوم تحت قيد الأعداد الصحيحة يكافئ إيجاد أصغر عدد من الرّؤوس في غطاء رأسيّ لـ G. لذلك، فإنَّ جواب مسألة الغطاء الموزون $\beta(G)$. ■

14.2.3.* تطبيق. مسألة كنْس الشّوارع والنقل. إنَّ اتجاه حركة آلة كنس الحاجز الحجريّ للطّريق يجب أنْ تكون في اتجاه حركة المرور. وهذا يعطي بيانًا موجّهًا. إذن، إذا كان الطّريق ذا اتجاهين فإنّه يولّد ضلعين في اتجاهين متعاكسين. في حين يولّد الطّريق ذو الاتجاه الواحد ضلعين في الاتجاه نفسه. سنأخذ في الحسبان نسخة بسيطة من **مسألة كنْس الشّوارع** (problem street sweeping). وقد نوقشت هذه المسألة بتفصيل أكثر في روبرتس [1978] (Roberts) بالاعتماد على ([1976] Tucker- Bodin).

في مدينة نيويورك، يمنع الاصطفاف على بعض جوانب الطّرق يوميًّا لكنْسها. ولكلّ يوم، فإنَّ هذا يعرّف **بيانًا جزئيًّا للكنس** (*sweep subgraph*) G من البيان الكلّيّ الموجّه H لحواجز الشّوارع الحجرية، حيث يتكوّن G من الحواجز القابلة للكنْس. ولكلّ $e \in E(H)$ **زمن مخفي** (deadheading time) t(e) وهو الزمن الذي نحتاج إليه لاجتياز e دون كنس.

والسؤال هو كيف نكنُس G مع تقليل الزّمن الكلّيّ المخفي الذي لايكون فيه كنس. ويعدّ هذا تعميمًا لنسخة موجّهة من مسألة ساعي البريد الصّينيّ. إذا تساوت درجتا الدخول والخروج عند كلّ رأس في G، فلا حاجة إلى الزّمن المخفي. وبخلاف ذلك، نستخرج نسخة ثانية من أضلاع G، أو نضيف أضلاعًا من H لنحصل على بيان موجّه أويلريّ G' يحوي G.

لتكن X مجموعةَ الرّؤوس مع زيادة في درجة الدخول؛ لكلّ $x \in X$ ضع $\sigma(x) = d_G^-(x) - d_G^+(x)$. ولتكن Y مجموعةَ الرّؤوس مع زيادة في درجة الخروج؛ لكلّ $y \in Y$ ضع $\partial(y) = d_G^-(y) - d_G^+(y)$. لاحظ

أنَّ $\sum_{x\in X}\sigma(x)=\sum_{y\in Y}\partial(y)$. لنحصل على G' من G؛ يجب إضافة $\sigma(x)$ ضلعًا مع ذيول عند x، و$\partial(y)$ ضلعًا مع مقدمات عند y. بما أنَّ G' يحتاج إلى محصلة درجة خروج 0 عند كلّ رأس، فإنَّ الإضافات تشكّل مسارات من X إلى Y. إنَّ التّكلفة $c(xy)$ لمسار من x إلى y هي المسافة من x إلى y في البيان الموجّه الموزون H، والذي نستطيع إيجاده باستخدام خوارزميّة ديجكسترا (Dijkstra).

وهذا يؤدي إلى **مسألة النّقل** (Transportation Problem). ليكن $\sigma\ (x)$ هو العرض لـ x، و$\partial(y)$ هو الطّلب لـ y، و $c(xy)$ هي التكلفة لكلّ وحدة مرسلة من x إلى y، و $\sum\sigma(x)=\sum\partial(y)$، ونريد تحقيق الطّلبات بأقل تكلفة كلّيّة. وقد قدّمت نسخة من هذه المسألة من قبَل كانتوروفيتش [1939] (Kantorovich)؛ وظهر الشّكل في الأعلى (مع حلّ بنائيّ) في هيتشكوك [1941] (Hitchcock) (انظر أيضًا [1947] Koopmans.) وقد نوقشت المسألة في فورد – فلكرسون (nosrekluF – droF) [031-39p ,2691].

عندما تكون العروض والطّلبات أعدادًا نسبية، فإنّ بالإمكان تطبيق مسألة الوظيفة. أوّلاً عدِّل قيم العروض والطّلبات لتحصل على قيم صحيحة، ثمّ عرف مصفوفة على $\sum\sigma\ (x)$ صفًّا وعمودًا. ولكلّ $x\in X$، عيّن $\sigma\ (x)$ صفًّا. ولكلّ $y\in Y$، عيّن $\delta(y)$ عمودًا. وعندما يكون الصّفّ i والعمود j يمثّلان x و y، ضع $w_{i,j}=M - c(xy)$، حيث $M=\max_{x,y}c(x,y)$ لاحظ الآن أنّ مواءمة وزن كبرى تؤدي إلى حلّ ذي تكلفة صغرى لمسألة النقل. ويظهر تعميم لمسألة النقل في الجزء 3.4. ■

المواءمات المستقرّة (اختياري) (Stable Matching (Optional))

بدلاً من جعل الوزن الكلّيّ لمواءمة مثاليًّا، فلربما نحاول جعله مثاليًّا باستخدام حقّ الأفضلية أو الاختيار. فإذا أعطينا n رجلاً و n امرأة؛ فإنَّنا نريد أنْ نؤسّس n زواجًا "مستقرًّا". إذا وضع الرّجل x والمرأة a في زوجين مختلفين، ولكن x يفضّل a على شريكته الحالية، و a تفضل x على شريكها الحاليّ، فإنَّهما يستطيعان ترك شريكيهما الحاليّين وتبديل كلّ منهما مع الآخر. في هذا الوضع، نقول إنَّ الزوجَ غير المتوائم (x,a) **زوجٌ غيرُ مستقرّ** (unstable pair).

15.2.3. تعريف: تكون المواءمةُ الكاملة **مواءمةً مستقرّة** (stable matching) إذا لم تعط أزواجًا غير متوائمة ولا مستقرة.

16.2.3. مثال: إذا أعطيت الرّجال x,y,z,w والنّساء a,b,c,d، وقائمة التفضيل أدناه، فإنَّ المواءمةَ $\{xa, yb,zd,wc\}$ مستقرّةٌ. ■

نساء $\{a, b, c, d\}$	رجال $\{x, y, z, w\}$
$a: z>x>y>w$	$x: a>b>c>d$
$b: y>w>x>z$	$y: a>c>b>d$
$c: w>x>y>z$	$z: c>d>a>b$
$d: x>y>z>w$	$w: c>b>a>d$

لقد أثبت كلّ من جيل (Gale) وشابلي (Shapley) في بحثهما "قبولات الكلّيّة والاستقرار في الزّواج" وجود مواءمة مستقرة دائمًا، ويمكن إيجادها باستخدام خوارزميّة بسيطة نسبيًّا. في هذه الخوارزميّة، لاحظ أنَّ الرّجال والنّساء لا يقومون بدور متماثل؛ سوف نناقش أهمية هذا الفرق لاحقًا. والخوارزميّة أدناه تولّد المواءمة لمثال 16.2.3.

17.2.3. خوارزميّة : (خوارزميّة اقتراح الزّواج لجيل وشابلي)

المدخلات: ترتيب الأولويّة لكلّ رجل من n رجلاً، ولكلّ امرأة من n امرأة.

الفكرة: تقديم مواءمة مستقرّة باستخدام مقترحات الزّواج مع المحافظة على المعلومات حول مَن اقترح مَن؟ ومَن رفض مَن؟

خطوات مرات الحدوث: يقترح كلّ رجل المرأة الأكثر تفضيلاً في قائمته على افتراض أنّها لم ترفضه سابقًا. إذا تسلمت كلّ امرأة طلبًا واحدًا بالضبط للزّواج، توقفْ واستخدم المواءمة الناتجة. بخلاف ذلك، فإنّ كلّ امرأة وصلها أكثر من طلب للزواج ترفض الطّلبات التي وصلتها جميعها ما عدا الطّلب الأكثر تفضيلاً على قائمة أولويّاتها. وكلّ امرأة وصلها طلب زواج تقول "ربما" لأكثر الطّلبات التي تسلّمتها جاذبيّة. ■

18.2.3. نظرية : ([Gale- Shapley [1962) خوارزميّة مقترحات الزّواج تنتج مواءمة مستقرّة.

الإثبات: بما أنّه لا يمكن رفض رجل من النساء جميعهنّ (التمرين 14) فإنّ الخوارزميّة تتوقف فقط بالحصول على مواءمة. ولأنّ كلّ خطوة تكرار تجعل الطّول الكلّيّ للطّلبات المتبقيّة على القائمة يتناقص، فلا بدّ من توقّف الخوارزميّة.

ملاحظ أساسيّة: إنّ متتالية الطّلبات التي قدّمت من كلّ رجل ليست متزايدة في قائمة أولوياته، وأنّ متتالية الرّجال الذين قيل لهم "ربما" من قبَل امرأة غير متناقصة في قائمة أولويّاتها تنتهي بالرّجل المشار إليه. وهذا يتحقّق لأنّ الرّجال يكرّرون الطّلبَ لامرأة بعينها حتى يتمّ رفضهم، وتقول المرأة "ربما" للرّجل نفسه حتى يصلها عرض أفضل.

إذا كانت النتيجة غير مستقرّة، فيوجد زوج (x,a) غير متوائم ولا مستقرّ؛ حيث x منسجم مع b، أمّا y فمنسجم مع a. ومن الملاحظة الأساسيّة، فإنّ x لم يقترح a خلال الخوارزميّة؛ لأنّ a استقبلت رفيقًا رغبتُها فيه أقلّ من رغبتها في x. وتؤدّي الملاحظة الأساسيّة إلى أنّ x غير راغب في طلب b دون اقتراح مبكر لـ a. وهذا التّناقض يؤكّد استقرار النتيجة. ■

إنّ عدم التّماثل في خوارزميّة الاقتراح يسأل عن أيّ الجنسين أكثر سعادة. وعندما تكون الخيارات الأولى للرّجال جميعها مختلفة، فإنّ الرّجال جميعهم سيحصلون على خيارهم الأول، أمّا النساء فعليهنّ الالتزام بهذا بصرف النّظر عما اقترحنه. وعندما تطبق الخوارزميّة بمقترحات النساء، فإنّ كلّ امرأة تكون على الأقلّ سعيدة بمقدار سعادتها عندما يقوم الرّجال بالاختيار أو الاقتراح، بالإضافة إلى أنّ كلّ رجل على الأقلّ غير سعيد بالمقدار نفسه. وفي المثال 16.2.3، نجد أنّ تطبيق الخوارزميّة بحسب مقترحات النّساء يؤدّي مباشرة إلى المواءمة $\{xd, yb, za, wc\}$ التي تكون فيها النّساء جميعهنّ متوائمات مع الخيارات الأولى لهنّ. في الحقيقة، ومن بين المواءمات المستقرة جميعها، فإنّ كلّ رجل هو الأكثر سعادة في المواءمة الناتجة عن خوارزميّة اقتراح الرّجال، وكلّ امرأة هي الأكثر سعادة في خوارزميّة اقتراح النّساء (التمرين 11). وفي العرْف الاجتماعي تكون الأفضلية لصالح الرّجال.

وهناك استخدام آخر لهذه الخوارزميّة. ففي كلّ عام، نجد أنّ خرّيجي الكلّيّات الطّبّيّة يضعون قائمة أولويات بالمستشفيات التي يفضلون الإقامة فيها. والمستشفيات كذلك لها خياراتها؛ ونحن ننمذج أيّ مستشفى فيه عدة أماكن شاغرة كالعديد من المستشفيات التي لها قائمة الأولويّات نفسها. إنّ الفوضى في توزيع المقيمين قد أجبرت المستشفيات على تنفيذ الخوارزميّة قبل عشر سنوات من تعريف المسألة وحلّها في بحث جيل وشابلي. وكانت النتيجة برنامج مواءمة المقيمين الوطني، ففي العام 1952م أنشئت مؤسسة غير ربحية للتزويد بتواريخ تعيينات موحّدة وإجراءات مواءمة موجودة.

مَنِ الأكثر سعادة بالنتيجة؟ بما أنّ المنظمات الطّبّيّة قامت بتطبيق الخوارزميّة، فمن غير المستهجن

مبدئيا قيامهم بتنفيذ المقترحات؛ لذا فهم الأكثر سعادة. إلّا أنّ الاختلاف أكثر وضوحًا في مكان آخر؛ حيث لدى الطّلبة الذين يتقدّمون لوظائف أولويات، في حين يعدّ أصحاب العمل مقترحات تدعى "عروض الوظيفة". إلّا أنَّ عدم الشّعور بالسّعادة مع NRMP كان السّبب في تغيير النّظام في العام 1998م لخوارزميّة مقترح الطالب. ففي العام 1998م تعامل النّظام مع 35,823 طلبًا لـ 22,451 وظيفة. ويمكن إيجاد تفصيلات إضافية لهذا النّظام على موقع الشّبكة العالميّة الواسعة على العنوان الإلكترونيّ: . nrmp. aamc.org/ nrmp/ mainguid

يمكن أنْ توجد مواءمات مستقرّة غير الموجودة في نسختي خوارزميّة المقترحات. وللبحث عن مواءمة مستقرّة "عادلة" فإنّنا نستطيع إعطاء كلّ شخص عددًا من النقاط لتصنيف الأولويّات. فوزن الزّوج xa هو مجموع النّقاط التي يعطيها كلّ من x إلى a و a إلى x. لاحظ أنَّ الخوارزميّة الهنجاريّة يمكن أنْ تعطي مواءمة ذات وزن كلّيّ أكبر، ولكن قد لا تكون هذه المواءمة مستقرّة (التمرين 10). وهناك طرق حلّ أخرى تظهر في كتب Knuth [1976] و Gusfield – Irving [1989]، تبحث في حالات زواج مستقرّة ومواضيع متعلقة بها.

مواءمة ثنائيّ الفرع الأسرع (اختياري) (optional) (Faster Bipartite Matching)

نبدأ هذا الجزء بخوارزميّة لإيجاد مواءمات كبرى في البيانات الثنائيّة الفرع. من الممكن تحسين زمن التشغيل بالبحث عن مسارات موسّعة بترتيب فريد؛ وعندما تتوافر مسارات موسّعة قصيرة فلا نحتاج إلى استكشاف الكثير من الأضلاع لإيجاد مسار موسّع. وباستخدام خوارزميّة البحث الأفقيّ أولاً للرّؤوس غير المشبعة جميعها في X، فإنّنا نستطيع إيجاد العديد من المسارات التي لها الطول نفسه، مع فحص واحد لمجموعة الأضلاع. أثبت كلّ من هوبكروفت وكارب [1973] (Hopcroft and Karp) بأنَّ الموسّعات اللاحقة يجب أنْ تستخدم مسارات أطول. لذا، فبالإمكان جمع البحوث على حالات لإيجاد مسارات لها الطول نفسه، وقد وحّدا هذه الأفكار ليوضّحا أنّ بعض الحالات تكون ضرورية؛ لكي تساعد في إيجاد المواءمات العظمى في البيانات الثنائيّة الفرع على n من الرّؤوس في زمن $O(n^{2.5})$.

19.2.3. ملاحظة: إذا كانت M مواءمة بحجم r، و M^* مواءمة بحجم s، حيث $s > r$، فيوجد على الأقلّ $s - r$ من مثل هذه المسارات الموسّعة للمواءمة M منفصلة الرّؤوس. ويوجد كذلك على الأقلّ مثل هذا العدد من المسارات في $M \Delta M^*$. ■

تعطي التمهيدية الآتية أنَّ المتتالية لأطوال المسارات في تعاقب الموسّعات الأقصر هي متتالية غير تتناقصة. وهنا، سنعالج المسارات بوصفها مجموعات أضلاع. في حين يشير العدد الكاردينالّيّ (cardinal-ity) إلى عدد الأضلاع.

20.2.3. تمهيدية: إذا كان P المسارَ الأقصرَ الموسّع للمواءمة M، وP' هو الموسّع للمواءمة $M\Delta P$، فإنَّ $|P'| \geq |P| + 2|P \cap P'|$ (بمعاملة P بوصفها مجموعات أضلاع).

الإثبات: لاحظ أنَّ $M \Delta P$ هي المواءمة التي تمّ الحصول عليها باستخدام P لتوسيع M. لتكن N هي المواءمة $(M \Delta P) \Delta P'$ التي حُصل عليها باستخدام P' لتوسيع $M \Delta P$. بما أنَّ $|N| = |M| + 2$، فإنَّ الملحوظة 19.2.3 تضمن أنّ $M\Delta N$ تحوي P_1 و P_2 بوصفهما مسارين منفصلين موسّعين للمواءمة M. وبما أنَّ P هو المسار الأقصر الموسّع للمواءمة M، فإنَّ طول كلّ من P_1 و P_2 كطول P على الأقلّ.

وبما أنَّ N التي حُصل عليها من M بتبديل الأضلاع في P، ومن ثمّ تبديل الأضلاع في P'، فإنَّ ضلعًا ما

يكون منتميًا إلى إحدى المواءمتين $M،N$ إذا وفقط إذا انتمى إلى أحد المسارين P و P'. وعليه، فإنَّ $M \Delta N = P \Delta P'$. وهذا يؤدي إلى أنَّ $|P \Delta P'| \geq |P_1| + |P_2| \geq 2|P|$. إذن،

$$2|P| \leq |P \Delta P'| = |P| + |P'| - 2|P \cap P'|$$

ونستنتج أنَّ $|P'| \geq |P| + 2\,|P \cap P'| \geq |P'|$. ■

21.2.3. تمهيدية : إذا كانت $P_1, P_2, \ldots$ هي قائمة من الموسّعات الأقصر المتعاقبة، فإنَّ الموسّعات التي لها الطول نفسه هي مسارات منفصلة الرّأس.

الإثبات: سنستخدم أسلوب التناقض. لتكن P_l ، P_k حيث $l > k$ هما أقرب زوج في القائمة لهما الحجم نفسه، ولكنهما ليسا منفصلي الرّأس. من تمهيدية 20.2.3، فإنَّ متتالية أطول المسارات الموسّعة الأقصر المتعاقبة هي متتالية غير متناقصة. لذا، فإنَّ الموسّعات $P_k, \ldots P_l$ جميعها لها الطول نفسه. وبما أنَّ P_l، P_k هما أقرب زوج متقاطع لهما الطول نفسه ، فإنَّ المسارات $P_{k+1}, \ldots P_l$ هي مسارات منفصلة زوجًا زوجًا.

لتكن M' هي المواءمة المعطاة بالموسّعات $P_1, \ldots, P_k$. بما أنَّ $P_{k+1}, \ldots P_l$ منفصلة زوجًا زوجًا، فإنَّ P_l مسارٌ موسّع للمواءمة M'. ومن تمهيدية 20.2.3 نجد أنَّ $|P_l| \geq |P_k| + |P_l \cap P_k|$. وبما أنَّ $|P_l| = |P_k|$، فلا وجود لضلع مشترك بينهما.

من جهة أُخرى، يجب أنْ يكون هناك ضلعٌ مشتركٌ، فضلاً عن أنَّ كلّ رأس لـ P_k يكون مشبعًا في M' باستخدام ضلع في P_k، وكلّ رأس للمسار الموسّع للمواءمة M' مشبع في M' (كرأس مشترك لـ P_l و P_k) يجب أنْ يسهم بإشباع ضلع في P_l. إنَّ هذا التناقض يؤدي إلى عدم وجود مثل هذا الزّوج P_k, P_l. ■

22.2.3. نظرية : (هوبكروفت - كارب) (Hopcroft – Karp) [1973] تتحرّك خوارزميّة المواءمة العظمى المنفذة على المراحل الأولى للاتساع ضمن زمن $O(\sqrt{n}m)$ على البيانات الثنائيّة الفرع التي لها n رأسًا و m ضلعًا.

الإثبات: من التمهيديّتين 20.2.3 و 21.2.3، البحث الآنيّ عن أقصر الموسّعات من بين الرّؤوس غير المشبعة لـ X جميعها يؤدّي إلى مسارات منفصلة الرّأس، والتي بعدها تكون المسارات الموسّعة الأخرى كلّها أطول. لذلك، وبفحص واحد لمجموعة الأضلاع يمكن إيجاد الموسّعات بالأطوال جميعها، وضمن زمن $O(m)$. ويكفي لإثبات ذلك أنْ نبيّن أنّه يوجد $2 \lfloor \sqrt{n/2} \rfloor + 2$ حالة على الأكثر.

ضع المسارات الموسّعة في قائمة مرتّبة بحسب الطّول على الشّكل $P_1, \ldots, P_S$، حيث $s = \alpha'(G) \leq n/2$.

بما أنَّ المسارات التي لها الطول نفسه منفصلةُ الرّأس، فإنَّ كلّ P_{i+1} مسارٌ موسع لمواءمة M_i مشكّلة باستخدام $P_1, \ldots, P_i$. ويكفي أنْ نبرهن العبارة الأعمّ وهي أنّه عندما تكون $P_1, \ldots, P_S$ أقصرَ المسارات الموسّعة المتعاقبة التي تبني مواءمة كبرى، فإنَّ عدد الأطوال المختلفة خلال هذه المسارات يكون $2 \lfloor \sqrt{s} \rfloor + 2$ على الأكثر.

ليكن $r = \lfloor s - \sqrt{s} \rfloor$. لأنَّ $|M_r| = r$ وحجم المواءمة العظمى هو s، فإنَّ الملاحظة 19.2.3 تعطي $s - r$ مسارًا موسّعًا على الأقلّ للمواءمة M_r منفصل الرأس. ويستخدم أقصر هذه المسارات $\lfloor r / (s - r) \rfloor$ ضلعًا على الأكثر من M_r. لذا، فإنَّ $|P_{r+1}| \leq 2 \lfloor r/(s - r) \rfloor + 1$. وبما أنَّ $\lfloor r/(s - r) \rfloor < \lfloor s/\lceil \sqrt{s} \rceil \rfloor \leq \lfloor \sqrt{s} \rfloor$، فإنَّ المسارات التي تصل حتى P_r تعطي التوسيعات جميعها ما عدا آخر $\lceil \sqrt{s} \rceil$ توسيعًا، باستخدام طول يساوي $2 \lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ على الأكثر. وهناك $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ عددًا صحيحًا فرديًّا مختلفًا حتى هذه القيمة على الأكثر. وحتى لو كان آخر $\lceil \sqrt{s} \rceil$

مسارًا لها أطوال مختلفة، فإنَّها تزوّد بـ $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 1$ أطوالاً إضافية على الأكثر. لذا، فإنَّنا نستخدم $\lfloor \sqrt{s} \rfloor + 2$ 2 طولاً مختلفًا على الأكثر. ■

لقد وسّع إيفن وتارجان [1975] هذا لحلّ مسألة أكثر عمومية تحتوي على مواءمة ثنائيّة الفرع كبرى خلال زمن $O(\sqrt{n}m)$.

تمارين (Exercises)

1.2.3. (−) باستعمال أوزان غير سالبة للأضلاع، أنشئ بيانًا موزونًا على أربعة رؤوس بحيث لا تكون المواءمة ذات الوزن الأكبر مواءمة ذات حجم أكبر.

2.2.3. (−) بيّن كيفية استعمال الخوارزميّة الهنجاريّة لفحص إمكانيّة وجود مواءمة كاملة في البيان الثنائيّ الفرع.

3.2.3 (∗−) أعط مثالاً على مسألة المواءمة المستقرّة يتكوّن من رجلين وامرأتين، بحيث يكون هناك أكثر من مواءمة مستقرّة.

4.2.3. (∗−) حدّد المواءمات المستقرّة النّاتجة من خوارزميّة الأولويّات مع مقترحات كلّ من الرجال والنساء المعطاة بحسب قائمة الأولويّات الآتية:

رجال $\{u, v, w, x, y, z\}$	نساء $\{a, b, c, d, e, f\}$
$u: a > b > d > c > f > e$	$a: z > x > y > u > v > w$
$v: a > b > c > f > e > d$	$b: y > z > w > x > v > u$
$w: c > b > d < a > f > e$	$c: v > x > w > y > u > z$
$x: c > a > d > b > e > f$	$d: w > y > u > x > z > v$
$y: c > d > a > b > f > e$	$e: u > v > x > w > y > z$
$z: d > e > f > c > b > a$	$f: u > w > x > v > z > y$

• • • • •

5.2.3. جد مستعرضًا بأكبر مجموع كلّيّ (كَوزن) في المصفوفات الآتية جميعها، وبرهن أنّه لا يوجد مستعرض بوزن أكبر بإعطاء حلّ للمسألة الثّنويّة، وفسّر لماذا يبرهن هذا عدم وجود مستعرض أكبر.

(c)	(b)	(a)
1 2 3 4 5	7 8 9 8 7	4 4 4 3 6
6 7 8 7 2	8 7 6 7 6	1 1 4 3 4
1 3 4 4 5	9 6 5 4 6	1 4 5 3 5
3 6 2 8 7	8 5 7 6 4	5 6 4 7 9
4 1 3 5 4	7 6 5 5 5	5 3 6 8 3

6.2.3. جد مستعرضًا بأقلّ وزن في المصفوفة أدناه، واستخدم الثّنويّة لبرهنة أنّ هذا الحلّ هو الحلّ الأمثل. (مساعدة: استخدم تحويلاً للمسألة).

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 5 & 7 & 4 \\ 8 & 5 & 12 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 13 & 10 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

7.2.3. مسألة سائق الحافلة. افترض أنّ هناك n سائقًا و n مسلكًا صباحيًّا يقضي فيها السائق أوقاتًا $x_1,\dots,x_n$، و n مسلكًا مسائيًّا يقضي فيها أوقاتًا $y_1,\dots,y_n$. ويُدفع للسّائق أجر إضافي عندما يتجاوز المسلكين الصباحي والمسائي زمنًا كليًّا t. والهدف هو تعيين شوطين؛ صباحيّ ومسائيّ لكلّ سائق من أجل تخفيض قيمة الأجور الإضافيّة الكلّيّة إلى الحدّ الأدنى. عبّر عن هذه بوصفها مسألة مواءمة موزونة، وبرهن أنّ إعطاء أطول مسلك صباحيّ رقمه i وأقصر مسلك مسائيّ رقمه i للسّائق نفسه لكلّ i يعطي حلًّا مثاليًّا. (مساعدة: لا تستخدم الخوارزميّة الهنجاريّة؛ خذ التّركيب الخاص للمصفوفة). (R.B. Potts)

8.2.3. لتكن المدخلات في المصفوفة A لها الصورة $w_{i,j} = a_ib_j$، حيث $a_1,\dots,a_n$ أعداد مرافقة للصّفوف، و $b_1,\dots,b_n$ أعداد مرافقة للأعمدة. حدّد أكبر وزن لمستعرض للمصفوفة A. ماذا يحدث عندما يكون $w_{i,j} = a_i + b_j$؟ (مساعدة: في كلّ حالة، خمّن النّمط العام بفحص الحلّ عندما $n=2$).

9.2.3. (*) افترض أنّ قسم رياضيات يقدّم k ندوة في موضوعات مختلفة لطلبته البالغ عددهم n، بحيث يحضر كلّ طالب ندوة واحدة؛ فالندوة رقم i يجب أنْ يكون فيها k_i طالبًا، حيث $\sum k_i = n$. و بحيث يقدم كلّ طالب قائمة أولوية مرتّبة لـ k ندوة. ويكون تعيين الطّلبة للندوات مستقرًّا إذا لم يكن هناك طالبان يستطيع كلّ منهما الحصول على ندوات مفضلة أكثر من خلال تبادل النّدوات المعينة لكلّ منهما. بيّن كيف تجد تعيينًا مستقرًّا مستخدمًا مواءمة ثنائيّة الفرع موزونة. (Isaak)

10.2.3. (*) افترض أنّ لديك n رجلاً و n امرأة. وقد خصّص كلّ منهم $n - i$ نقطة إلى الشّخص i في قائمة أولويّاته، وليكن الوزن لزوج من الأشخاص هو مجموع النّقاط المخصصة من ذلك الزّوج من الأشخاص. أنشئ مثالاً لا تكون فيه أيّ مواءمة وزن كبرى مواءمةً مستقرّةً.

11.2.3. (*!) أثبت أنّه إذا وُضع رجل x في زوج مع امرأة a في مواءمة مستقرّة، فإنَّ a لم ترفض x في خوارزميّة مقترحات جيل وشابلي. استنتج أنّه من بين المواءمات المستقرّة جميعها، فإنّ كلّ رجل يكون أكثر سعادةً في المواءمة النّاتجة عن هذه الخوارزميّة. (مساعدة: خذ في الحسبان الحدوث الأول لمثل هذا الرفض).

12.2.3. (*) في مسألة رفقاء الغرف المستقرّة، كلّ شخص من $2n$ شخصًا له ترتيب أولويّات على الـ($2n$-1) شخصًا الآخرين. والمواءمة المستقرة هي مواءمة كاملة لا يوجد فيها زوج غير متوائم يفضل فيه كلّ منهما شخصًا آخر على رفقاء غرفهم الحاليين. أثبت أنّه لا توجد مواءمة مستقرّة عندما تكون الأولويّات على النحو الآتي أدناه. (Gale- Shapley [1962])

$$a:\ b> c> d \quad b:\ c> a> d \quad c:\ a> b> d \quad d:\ a> b> c$$

13.2.3. (*) في مسألة رفقاء الغرف المستقرّة، افترض أنَّ كلّ شخص يصرّح بالقسم العلويّ من قائمة الأولويّات بوصفه جزءًا "مقبول". عرف بيان المقبوليّة على أنّه البيان الذي تكون رؤوسُه الناسَ وأضلاعه هي الأزواج من النّاس الذين افترضوا أنَّ كلًّا منهما مقبول للآخر. أثبت أنَّ المجموعات العالية المنزلة في المقبوليّة G كلّها تؤدي إلى مواءمة مستقرّة إذا وفقط إذا كان G ثنائيّ الفرع.

14.2.3. (!) في خوارزميّة المقترحات حيث يقترح الرّجل، أثبت أنّه لا يوجد رجل مرفوض دائمًا من النساء جميعهنّ. (مساعدة: ماذا يحدث بعد أنْ يُرفض x من النّساء جميعهنّ ما عدا امرأة واحدة).

3.3 المواءمات في البيانات العامة (Matching in General Graphs)

عند مناقشة المواءمات الكاملة في البيانات، من الطّبيعيّ أنْ نأخذ في الحسبان البيانات الجزئيّة الأكثر عمومًا.

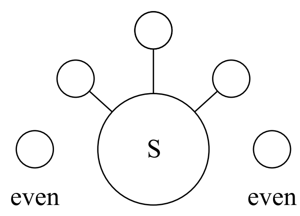
1.3.3. تعريف: العامل (factor) للبيان G هو بيان جزئيّ مولّد لـ G. **والعامل من الدّرجة** k (k- factor) هو بيان جزئيّ مولّد منتظم من الدّرجة k. أمّا **المركّبة الفرديّة** (odd component) لبيان ما فهي مركّبة ذات رتبة فرديّة، وعدد المركّبات الفرديّة للبيان H هو $o(H)$.

2.3.3. ملاحظة: المعامل من الدّرجة 1 والمواءمة الكاملة هما الشّيء نفسه تقريبًا. والفرق الدقيق بينهما هو أنَّ "المعامل من الدّرجة 1بيانٌ جزئيّ منتظم من الدّرجة 1 مولّد للبيان G، أمّا "المواءمة الكاملة" فهي مجموعة الأضلاع في هذا البيان الجزئيّ.

إنّ البيان المنتظم من الدّرجة 3 الذي له مواءمة كاملة يتفكّك إلى معاملين من الدّرجتين 1 و 2.

نظرية توت للمعامل من الدرجة 1 (Tutte's 1- Factor Theorem)

وجد توت (Tutte) الشّرط الضّروريّ والكافي للبيان الذي لديه معامل من الدّرجة 1. إذا كان للبيان G معامل من الدّرجة 1، وأخذنا في الحسبان المجموعة $S \subseteq V(G)$، فإنَّه يوجد لكلّ مركّبة فرديّة لـ G-S رأسٌ يتواءم مع رأس ما خارجها يوجد في S فقط، وبما أنَّ رؤوس S يجب أنْ تكون مختلفة، فإنَّ $o(G - S) \le |S|$.



الشّرط " لكلّ $S \subseteq V(G)$ فإنَّ $o(G - S) \le |S|$" هو شرط توت (Tutte's Condition). وقد أثبت توت أنَّ هذا الشّرطَ الضّروريّ الواضح شرطٌ كافٍ أيضًا (TONCAS). هناك الكثير من البراهين المعروفة

كما في التمرينين 13 و27. وهنا نقدّم إثبات لوفاز (Lov'asz) باستخدام أفكار الفرق التّماثليّ ومبدأ التّطرّفيّة.

3.3.3. نظرية : (توت [1947] Tutte) يوجد للبيان G معامل من الدّرجة 1 إذا وفقط إذا كان $o(G\text{-}S) \le |S|$ لكلّ $S \subseteq V(G)$.

الإثبات: (لوفاز [1975] Lova'sz). الضّرورة. لاحظ أنَّ المركّبات الفرديّة لـ G - S يجب أنْ تمتلك رؤوسًا متوائمة مع رؤوس مختلفة في S.

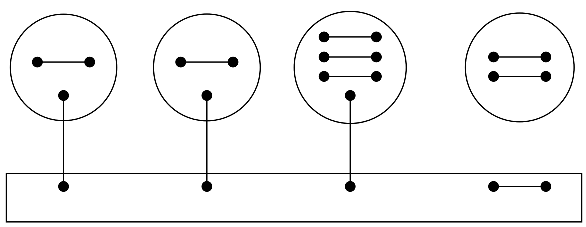
الكفاية. عندما نضيف ضلعًا يصل مركّبتين في G - S، فإنَّ عدد المركّبات الفرديّة لا يزداد (مركّبتان؛ الأولى فرديّة والأخرى زوجيّة تصبحان معًا مركّبة فرديّة واحدة. أمّا المركّبتان من النّوع نفسه فتصبحان مركّبة زوجيّة واحدة). لهذا، فإنَّ شرط توت يُحافظ عليه من خلال إضافة أضلاع: إذا كان $G' = G + e$ و $S \subseteq V(G)$، فإنَّ $o(G'\text{-} S) \le o(G - S) \le |S|$. وكذلك، إذا كان $G'= G + e$ لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1، فإنَّ G لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1.

بناءً على ذلك، فإنَّ النظرية تتحقّق إلا إذا وُجد بيان بسيط G يحقّق شرط توت، أي أنَّ G لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1. وأنَّ إضافة أيّ ضلع غير موجود لـ G يعطي بيانًا له معامل من الدّرجة 1. وليكن G مثل هذا البيان. سوف نحصل على تناقض بإظهار أنَّ G يحتوي بالفعل على معامل من الدّرجة 1.

لتكن U مجموعة الرّؤوس في G والتي درجتها $n(G)$-1.

الحالة 1: إذا كانت G - U مكوّنة من بيانات تامّة منفصلة، فيمكن وضع الرّؤوس في كلّ مركّبة لـ G - U في صورة أزواج بأيّ طريقة، مع وضع رأس آخر في كلّ مركّبة فرديّة. وبما أنَّ $o(G - U) \le |U|$، وأنَّ كلّ رأس في U مجاور لرؤوس $G\text{-}U$ جميعها، فباستطاعتنا مواءمة الرّؤوس المتبقيّة مع رؤوس في U.

تكون الرّؤوس المتبقيّة في U كعصبة. ولإكمال المعامل من الدّرجة 1؛ نحتاج إلى أنْ نبيّن أنّه يبقى عدد زوجيّ فقط من الرّؤوس في U. بما أنّنا واءمنا عددًا زوجيًّا من الرّؤوس، فإنه يكفي أنْ نبيّن بأنَّ $n(G)$ عددٌ زوجيّ. وهذا يتبع باستحضار شرط توت مع $S = \emptyset$؛ لأنّ بيانًا درجته فرديّة يجب أنْ يكون له مركبة درجتها فرديّة.



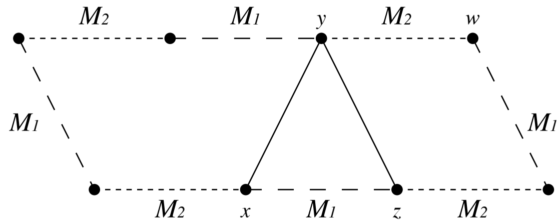
الحالة 2: G - U ليست اتحادًا منفصلاً لعصب. في هذه الحالة، يكون لـ G - U رأسان على مسافة 2، وهما رأسان غير متجاورين x,z ولهما جار مشترك $y \notin U$ (تمرين23.2.1أ). علاوة على ذلك، هناك رأسٌ آخر w لـ $G - U$ غير متجاور مع y؛ لأنّ $y \notin U$. من اختيار G، فإنَّ إضافة ضلع إلى G يعيّن معاملاً من الدّرجة 1؛ ليكن M_1، M_2 معاملين من الدّرجة 1 في $G + xz$ و $G + yw$ على التّرتيب. ويكفي أنْ نبرهن أنّ $M_1 \Delta M_2$ يحتوي على معامل من الدّرجة 1 متجنبًا xz و yw؛ لأنّ هذا سيكون معاملاً من الدّرجة 1 في G.

ضع $F = M_1 \Delta M_2$. بما أنَّ $xz \in M_1 - M_2$، و$yw \in M_2\text{-}M_1$، فإنّ كلًّا من xz و yw في F. وبما أنَّ

كلّ رأس للبيان G درجته 1 في كلّ من M_1 و M_2، فإنَّ درجة كلّ رأس في G تساوي 0 أو 2 في F. ولهذا، فإنَّ المركّبات في F هي حلقات زوجيّة ورؤوس معزولة (انظر التمهيدية 9.1.3). لتكن C الحلقةَ في F التي تحوي xz.

إذا لم تكن C تحوي yw، فإنَّ المعامل من الدّرجة 1 الذي نريده يتكون من الأضلاع في M_2 من C، والأضلاع جميعها الموجودة في M_1 وغير موجودة في C.

إذا احتوت الحلقة C كلًّا من yw و xz كما هو مبين أدناه، فنستخدم yx أو yz لتجنبهما. أمّا في جزء C الذي يبدأ من y خلال yw، نستخدم أضلاعًا لـ M_1 لنتجنب استخدام yw. ولكن عندما نصل $\{x,z\}$، فإنّنا نستخدم zy إذا وصلنا عند z (كما هو معروض). وبخلاف ذلك، نستخدم xy. وفيما يتبقى من C نستخدم الأضلاع في M_2. وهكذا نكون قد أنتجنا معاملاً من الدّرجة 1 لـ $C + \{xy,yz\}$ لا يستخدم xz أو yw. وبضمه مع M_1 أو M_2 خارج $V(C)$، يصبح لدينا معامل من الدّرجة 1 في G. ■



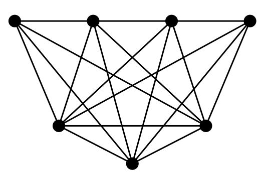
4.3.3. ملاحظة : مثل بقيّة نظريات التوصيف (كالنظريتين 18.2.1 و11.1.3)، فإنَّ النظرية 3.3.3 تؤدّي إلى إثباتات قصيرة في حالتي تحقق الخاصّيّة وعدم تحقّقها. نبرهن أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة 1 بعرض أحدها. عندما يكون هذا المعامل غير موجود، فإنَّ النظرية 3.3.3 تضمن أنّنا نستطيع إيجاد مجموعة يخلّف حذفها الكثير من المركّبات الفرديّة. ■

5.3.3. ملاحظة : للبيان G، ولأيّ $S \subseteq V(G)$، فإنَّ عدّ الرّؤوس بمقياس 2 يبيّن أنَّ $o(G - S) + |S|$ يمتلك النوعية نفسها مثل $n(G)$. لذا، فإنَّ الفرق $o(G - S) - |S|$ يمتلك النوعية نفسها مثل $n(G)$. نستنتج أنّه إذا كانت $n(G)$ زوجيّة وG لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1، فإنَّه يوجد S بحيث تزيد $o(G - S)$ على $|S|$ بـ 2 على الأقلّ. ■

للبيانات التي لا تكون ثنائيّة الفرع (كالحلقات الفرديّة)، ربما تكون هناك فجوة بين $\alpha'(G)$ و $\beta(G)$ (انظر التمرين 10 أيضًا). وعلى الرّغم من ذلك، فإنَّ مسألة التّصغير الأخرى تعطي علاقة أصغر – أكبر لـ $\alpha'(G)$ في البيانات العامّة. وهذه العلاقة تعمّم الملاحظة 5.3.3. يستخدم الإثبات تحويلاً لبيان؛ حيث يتضمّن هذا التحويل عملية بيان عام.

6.3.3. تعريف: إنّ **الرّبط** (join) لبيانين بسيطين G و H، يكتب $G \vee H$، هو البيان الناتج عن الاتحاد المنفصل $G+H$ بإضافة الأضلاع $\{xy: x \in V(G), y \in V(H)\}$.

$P_4 \vee K_3$

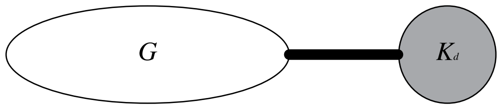


7.3.3. نتيجة : (صيغة بيرج وتوت – [1958]) إنَّ أكبر عدد من الرّؤوس المشبعة من مواءمة في G هو $\min_{S \subseteq V(G)} \{n(G) - d(S)\}$، حيث $d(S) = o(G-S) - |S|$.

الإثبات: لتكن $S \subseteq V(G)$. يوجد $|S|$ ضلعًا على الأكثر يمكن أنْ توائم رؤوسًا في S مع رؤوس في مركّبات فرديّة لـ $G - S$. لذا، فإنَّ كلّ مواءمة تمتلك $o(G - S) - |S|$ رأسًا غير مشبع على الأقلّ. والمطلوب بلوغ هذا الحَدّ.

ضع: $d=\max\{o(G-S)-|S|:S\subseteq V(G)\}$ الحالة $S = \emptyset$ تعطي $d \geq 0$. لتكن $G' = G \vee K_d$. بما أنّ $d(S)$ له النوعية نفسها مثل $n(G)$ لكلّ S، فإنَّ $n(G')$ زوجيٌّ. وإذا حقّق G' شرط توت فإنَّنا نحصل على مواءمة بالحجم المطلوب في G من المواءمة الكاملة في G'؛ لأنّ حذف الـ d رأسًا المضافة يزيل الأضلاع التي تشبع على الأكثر d رأسًا في G.

الشّرط $o(G'- S') \leq |S'|$ يتحقّق لـ $S'= \emptyset$؛ لأنّ $n(G')$ زوجيٌّ. إذا كانت S' غير خالية ولكنّها لا تحوي K_d كاملة، فإنَّ $G' - S'$ تمتلك مركّبة واحدة فقط، و $1 \leq |S'|$. أخيرًا، عندما تكون $K_d \subseteq S'$، نضع $S = S'- V(K_d)$. وبما أنَّ $G'- S'=G - S$، فإنَّ $o(G' - S') = o(G- S) \leq |S| + d= |S'|$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنَّ G' يحقّق شرط توت. ■



تضمن النتيجة 7.3.3. أنَّه يوجد إثبات قصير للعبارة: تمتلك المواءمة العظمى حجمًا أكبر بإيجاد مجموعة رؤوس S، حيث يخلّف حذفها عددًا ملائمًا من المركّبات الفرديّة.

تنطوي معظم التّطبيقات على نظرية توت على عرض بعض الشّروط الأخرى التي تعطي شرط توت، ومن ثم تضمن معاملاً من الدّرجة 1. وهناك براهين أخرى متوافرة قبل نظرية توت ولكن بصيغ مختلفة.

8.3.3. نتيجة: (بيترسون [1891]) يمتلك كلّ بيان منتظم من الدّرجة 3 ليس له ضلع قطع معاملاً من الدّرجة 1.

الإثبات: ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة 3 ليس له ضلع قطع. سوف نبرهن أنَّ G يحقق شرط توت. ليكن $S \subseteq V(G)$، نعدّ الأضلاع بين S والمركّبات الفرديّة لـ $G -S$. بما أنَّ G منتظم من الدّرجة 3، فإنَّ كل رأس في S يقع على ثلاثة أضلاع على الأكثر. إذا كانت كلّ مركّبة فرديّة H لـ $G-S$ تقع على الأقلّ على ثلاثة من مثل هذه الأضلاع، فإنَّ $3o(G - S) \leq 3|S|$ ومن ثمّ $o(G - S) \leq |S|$، كما نريد.

ليكن m عددَ الأضلاع من S إلى H. إذن، فإنّ مجموع درجات الرّؤوس في H هو $3n(H) - m$. وبما أنَّ H بيان، فإنَّ مجموع درجات رؤوسه يجب أنْ يكون زوجيًّا. وبما أنَّ $n(H)$ فرديّ، فإنَّنا نستنتج أنّ m يجب أنْ يكون فرديًّا أيضًا، وبما أنَّ G لا يمتلك ضلع قطع، فإنَّ m لا يمكن أنْ يساوي 1. ونستنتج أنّه يوجد ثلاثة أضلاع على الأقلّ من S إلى H كما نريد. ■

إنّ الإثبات بالتّناقض طبيعيّ هنا أيضًا. فالافتراض أنّ $o(G-S)>|S|$ يؤدي إلى $o(G - S) \leq |S|$، وهكذا نعيد كتابة الإثبات مباشرة. لاحظ أنَّ النتيجة 8.3.3 هي أفضل ما يمكن؛ وأنَّ بيان بيترسون يحقّق الفرضيّة، ولكنه لا يملك معاملين من الدّرجة 1 منفصلة الضّلع ([Petersen [1898]).

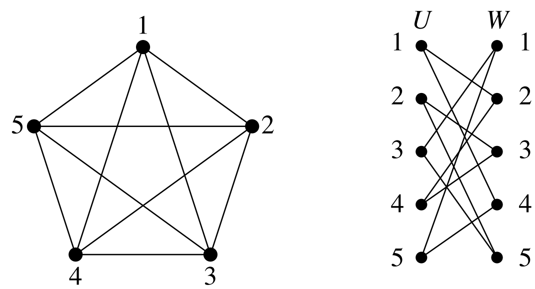
لقد أثبت بيترسون أيضًا شرطًا كافيًا للمعاملات من الدّرجة 2. يكون البيان المترابط الذي درجات رؤوسه زوجيّة أويلريًّا (النظرية 26.2.1) ويتفكّك إلى حلقات منفصلة الضّلع (القضيّة 27.2.1). وللبيانات المنتظمة التي درجاتها زوجيّة، يمكن تجميع الحلقات الناتجة عن تفكيك ما لتشكيل معاملات من الدّرجة 2.

9.3.3. نظرية: (بيترسون [1891]) كلّ بيان منتظم له درجة زوجيّة موجبة يمتلك معاملاً من الدّرجة 2.

الإثبات: ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة $2k$ رؤوسه $v_1, \dots, v_n$، لاحظ أنَّ كلّ مركّبة لـ G هي مركبة أويلريّة مع حلقة أويلريّة C. ولكلّ مركبة، عرف بيانًا ثنائيّ الفرع H مع الرّؤوس $u_1, \dots, u_n$ و $w_1, \dots, w_n$ بوضع $u_i \leftrightarrow w_j$ إذا كان v_j يتبع v_i مباشرة في مكان ما على C. لاحظ أنّ H منتظم من الدّرجة k؛ لأنّ C يدخل ويخرج كل رأس k مرة واحدة. (في الحقيقة، H هو شطر البيان الموجّه الناتج عن توجيه G بانسجام مع C. انظر التعريف 20.4.1.)

بما أنَّ البيان H ثنائيّ الفرع منتظم، فإنَّه يمتلك معاملاً M من الدّرجة 1 (النتيجة 13.1.3). إنَّ الضّلع الذي يقع على w_i في H يقابل الضّلع الذي يدخل v_i في C. أمّا الضّلع الذي يقع على u_i في H فيقابل الضّلع الذي يخرج من v_i. لذا، فإنَّ المعامل من الدّرجة 1 في H يتحول إلى بيان جزئي مولد منتظم من الدّرجة 2 لهذه المركبة في G. إنّ إجراء هذا لكلّ مركبة في G يعطي معاملاً من الدّرجة 2 للبيان G. ■

10.3.3. مثال: إنشاء معامل من الدّرجة 2. خذ في الحسبان الحلقة الأويلرية في $G=K_5$ التي تمر بالتتابع على 1231425435. إنَّ البيان الثنائيّ الفرع H المقابل (المرتبط) بـ C_5 موجود عن اليمين أدناه. وللمعامل من الدّرجة 1 الذي أزواجه من u إلى w هي: 12،43،25،31،54، نجد أنَّ المعامل من الدّرجة 2 الناتج هو الحلقة (1،2،5،4،3). أما الأضلاع المتبقية فإنَّها تشكّل معاملاً آخر من الدّرجة 1 يقابل المعامل من الدّرجة 2 (1،4،2،3،5) الباقي في G ■



المعاملات التي درجتها f للبيانات (اختياري) (f-factors of Graphs (optional))

معامل البيان G هو بيان جزئيّ مولّد له؛ ونسأل عن وجود معاملات بأنواع خاصة. والمعامل من الدّرجة k هو معامل منتظم من الدّرجة k؛ وقد درسنا معاملات من الدّرجتين 1 و 2، نستطيع محاولة تحديد الدّرجة عند كلّ رأس.

11.3.3. تعريف: لتكن $f: V(G) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ دالة. إنَّ **المعامل من الدّرجة f** (f-Factor) للبيان G هو بيان جزئيّ مولد H بحيث إنَّ $d_H(v) = f(v)$ لكلّ $v \in V(G)$.

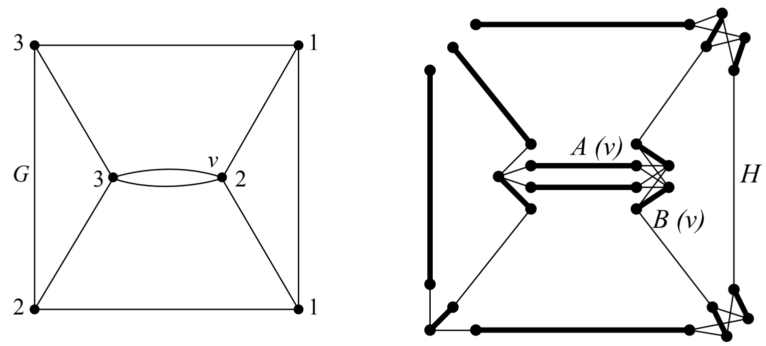
لقد أثبت توت [1952] الشّرط الضّروريّ والكافي ليملك البيان G معاملاً من الدّرجة f (انظر التمرين 29). ولاحقًا، سنختزل المسألة لاختبار وجود معاملات من الدّرجة 1 في البيانات البسيطة ذات العلاقة. وسنصف هذا الاختصار بأنّه مثال جيد لتحويل مسألة بيان إلى مسألة محلولة سابقًا.

12.3.3. مثال: تحويل بيان (توت [1954a]). نفترض أنَّ $f(w) \le d(w)$ لكلّ w. وخلاف ذلك، فإنَّ G يمتلك عددًا قليلاً جدًّا من الأضلاع عند w ليمتلك معاملاً من الدّرجة f. لذا، ننشئ بيان H يمتلك معاملاً من الدّرجة 1 إذا وفقط إذا كان G يمتلك معاملاً من الدّرجة f. ضع $e(w) = d(w) - f(w)$؛ وهذه هي درجة الزيادة عند w وهي غير سالبة.

لإنشاء H، ضع مكان كلّ رأس v عصبة ثنائيّة $K_{d(v), e(v)}$ مع مجموعات مجزأة $A(v)$ درجتها $d(v)$

و $B(v)$ درجتها $e(v)$. لكلّ $vw \in E(G)$، أضف ضلعًا يصل رأسًا في $A(v)$ إلى رأسٍ في $A(w)$. إنَّ كلّ رأس في $A(v)$ يشترك في ضلع واحد من مثل هذا الضّلع.

يعرض الرسم أدناه بيان G؛ حيث إنَّ أوسمة رؤوسه معطاة من خلال f، والبيان البسيط الناتج H. إنَّ الأضلاع السميكة في G تشكّل معاملاً من الدّرجة 1، والذي يقابل معاملاً من الدّرجة f لـ G. في هذا المثال، لاحظ أنَّ المعامل من الدّرجة f ليس وحيدًا. ■



13.3.3. نظرية: يمتلك البيان G معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان للبيان H الذي أنشئ من G و f في المثال 12.3.3 معامل من الدّرجة 1.

الإثبات: الضرورة. إذا كان G يمتلك معاملاً من الدّرجة f، فإنَّ الأضلاع المقابلة في H تترك $e(v)$ رأسًا من $A(v)$ غير متوائم. وائم هذه الرّؤوس بصورة عشوائية مع الرّؤوس في $B(v)$ لتحصل على معامل من الدّرجة 1 لـ H.

الكفاية. من معامل من الدّرجة 1 لـ H، فإنَّ حذف $B(v)$ والرّؤوس في $A(v)$ التي تتواءم مع $B(v)$ يخلف $f(v)$ رأسًا درجتها 1 وتقابل v. إنَّ عمل هذا لكلّ رأس v، ودمج الرّؤوس $f(v)$ المتبقية من كل مجموعة $A(v)$ يعطي بيانا جزئيًّا من G وتكون درجة v فيه هي $f(v)$. ويكون هذا معاملاً من الدّرجة f لـ G. ■

شرط توت لمعامل من الدّرجة 1 في البيان H المستمد من مثال 12.3.3 يتحول إلى شرط ضروري وكاف لمعامل من الدّرجة f في G. يكون الإثبات لتمييز درجة المتتاليات للبيانات البسيطة لايردوز وجالاي (Erdos- Gallai) [1960] في التّطبيقات (تمرين 29).

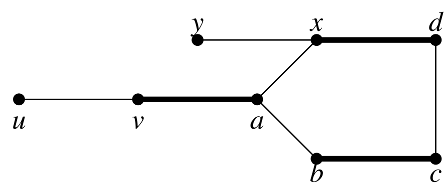
إذا أعطينا خوارزميّة لإيجاد معامل من الدّرجة 1، فإنَّ التشابه في النظرية 13.3.3 يزودنا باختبار وجود معامل من الدّرجة f. عوضًا عن البحث فقط عن معامل من الدّرجة 1 (يعني مواءمة كاملة)، نأخذ في الحسبان لاحقًا المسألة الأعم لإيجاد مواءمة كبرى في بيان ما.

خوارزمية البراعم لادموند (اختياري) (Edmond's Blossom Algorithm(optional))

تنصّ نظرية بيرج (النظرية 10.1.3) على أنَّ مواءمة M في G لها حجم أكبر إذا وفقط إذا كان G لا يمتلك مسارًا موسّعًا للمواءمة M. لذا، نستطيع إيجاد مواءمة كبرى باستخدام مسارات موسعة متتالية. بما أنَّنا نوسّع $n/2$ مرّة على الأكثر، فإنَّنا نحصل على خوارزميّة ملائمة إذا كان البحث عن مسار موسّع لا يأخذ وقتًا طويلاً. وقد قدم إدموند [1965a] أول خوارزميّة من هذا النوع في بحثه الشهير "مسارات وأشجار وأزهار" (Paths, trees, and flowers) .

في البيانات الثنائيّة الفرع، نستطيع البحث سريعًا عن المسارات الموسّعة (الخوارزميّة 1.2.3) لأننا نستكشف من كل رأس مسارًا واحدًا على الأكثر. إنَّ المسار المتناوب للمواءمة M من u يمكن أنْ يصل إلى رأس x في المجموعة المجزأة نفسها مثل u فقط من خلال ضلع مشبع. لذا، نستطيع أنْ نصل ونستكشف x فقط مرة واحدة. وهذه الخاصية تفشل في البيانات التي فيها حلقات فردية؛ لأنّ المسارات المتناوبة للمواءمة M من رأس غير مشبع يمكن أنْ تصل x من خلال ضلع مشبع، وكذلك من خلال أضلاعٍ غير مشبعة في الوقت نفسه.

14.3.3. مثال: في البيان أدناه، ومع M المشار إليها بخط سميك، فإنَّ البحث عن المسارات الموسّعة للمواءمة M الأقصر من u تصل x بواسطة الضّلع غير المشبع ax. إذا لم نأخذ في الحسبان مسارًا أطول يصل x بواسطة ضلع مشبع أيضًا، فإنَّنا نحذف المسار الموسّع u,v,a,b,c,d,x,y ■



وفيما يأتي نَصف حلّ إدموند لهذه العقبة. إذا كان استكشاف المسارات المتناوبة للمواءمة M من u تصل الرأس x من خَلال ضلع غير مشبع في مسار، وضلع مشبع في مسار آخر، فإنَّ x ينتمي إلى حلقة فرديّة. لاحظ أنَّ المسارات المتناوبة من u تكون متباعدة فقط عندما يكون الضّلع التالي غير مشبع (تغادر من الرّأس a في المثال 14.3.3)؛ وعندما يكون الضّلع التالي مشبعًا، فهناك خيار واحد فقط لهذا المسار. ومن الرّأس حيث تكون المسارات متباعدة، فإنَّ المسار الذي يصل x على ضلع غير مشبع له طول فرديّ، أمّا المسار الذي يصل x على ضلع مشبع فله طول زوجيّ. ويشكّلان معًا حلقة فرديّة.

15.3.3. تعريف: لتكن M مواءمة في البيان G، وليكن u رأسًا غير مشبع للمواءمة M. نعرِّف **الزّهرة** (flower) على أنّها اتحاد مسارين متناوبين للمواءمة M من u يصلان الرّأس x على خطوات متعاكسة النّوعية (لم تستخدم سابقًا). أمّا **ساق** (Stem) الزهرة فهو المسار الأعظم الابتدائيّ الشّائع (بطول زوجيّ غير سالب). **وبرعم** (blossom) الزهرة هو الحلقة الفرديّة الناتجة عن حذف السّاق.

في المثال 14.3.3، لاحظ أنَّ الزّهرة هي البيان كلّه ما عدا y. والسّاق هو المسار u,v,a، أمّا البرعم فهو الحلقة التي درجتها 5. يرجّح مصطلح البستنة استخدام مصطلح شجرة للدلالة على التّراكيب المعطاة من قبل معظم الإجراءات البحثية.

إنَّ البراعم لا تعيق بحثنا. لكلّ رأس z في برعم يوجد مسار من u إلى z متناوب للمواءمة M ، ويصل z على ضلع مشبع، وقد وجد بالتحرك في الاتجاه المناسب حول البرعم ليصل z من السّاق. لذلك، نستطيع

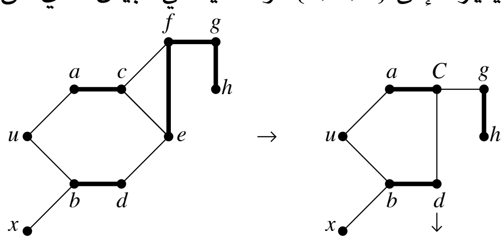
متابعة بحثنا على طول أيّ ضلع غير مشبع من البرعم إلى رأس لم يوصل إليه بعد. يعرض المثال 14.3.3 مثل هذا التوسّع الذي يصل مباشرة إلى رأس غير مشبع، ويكمل مسارًا موسّعًا للمواءمة M.

بما أنّ كلّ رأس في البرعم مشبعٌ بواسطة ضلع على هذه المسارات، فلا وجود لضلع مشبع يخرج من البرعم (باستثناء السّاق). لاحظ أنّ تأثير هاتين الملاحظتين هو أنّنا نستطيع افتراض البرعم برمّته بوصفه رأسًا أعلى أحاديًا يوصل إليه من خلال الضّلع المشبع عند نهاية السّاق. ونبحث من الرّؤوس جميعها عند الرّأس الأعلى الذي يمثل البرعم على طول الأضلاع غير المشبعة.

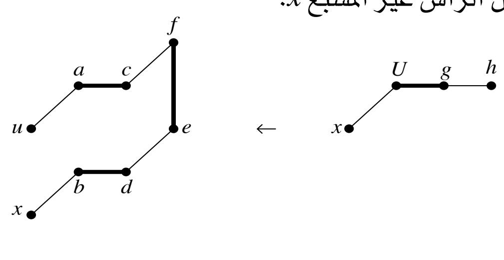
ونضمن هذا الدمج من خلال تقليص أضلاع البرعم B عندما نجده. ويكون الناتجُ رأسًا مشبعًا جديدًا يقع على آخر ضلع (مشبع) في السّاق. أمّا أضلاعه الأخرى التي يقع عليها فهي الأضلاع غير المشبعة التي تربط رؤوس B برؤوس خارج B. نستكشف من b بالطريقة العادية لكي نوسّع بحثنا. وقد نجد لاحقًا برعمًا آخر يحوي b؛ ونقلّصه مرة أخرى. وإذا وجدنا مسارًا متناوبًا للمواءمة M في البيان النهائي من الرّأس u إلى الرّأس غير المشبع x، فإنّنا نستطيع فكّ التّقليصات لنحصل على مسار موسّع للمواءمة M إلى الرّأس x في البيان الأصليّ.

وما عدا معالجة البراعم، فإنّ طريق الحلّ هو الخوارزميّة 1.2.3 لاستكشاف المسارات المتناوبة للمواءمة M. وفي الجهة المقابلة، فإنّ T هي مجموعة الرّؤوس للبيان الحاليّ الموصولة من خلال الأضلاع غير المشبعة، أمّا S فهي مجموعة الرّؤوس من خلال الأضلاع المشبعة. والرّؤوس التي تظهر بسبب تقليص البراعم تنتمي إلى S.

16.3.3. مثال: لتكن M المواءمةَ الموسومة بالخط الغامق في البيان الموجود على اليسار أدناه. نبحث من الرّأس غير المشبع u عن مسار موسّع للمواءمة M. أوّلاً، نستكشف الأضلاع غير المشبعة التي تقع على u، والواصلة من a إلى b. وبما أنّ a و b مشبعان، فإنّنا نوسّع المسارات على طول الأضلاع ac و bd مباشرة. الآن، $S = \{u, c, d\}$. وإذا استكشفنا بعد ذلك من c، فنجد أنّ e و f هما جاراها على طول أضلاع غير مشبعة. بما أنّ $ef \in M$، فنستكشف البرعم الذي تكون مجموعة رؤوسه $\{c, e, f\}$. ونقلّص البرعم لنحصل على الرّأس الجديد C، الذي يغيّر S إلى $\{u,C,d\}$. وهذا يعطي البيان الذي عن اليمين.



لنفترض أنّنا سنستكشف من الرأس $C \in S$. إنّ الأضلاع غير المشبعة ستقودنا إلى كلّ من g و d. وبما أنّ g مشبع من خلال الضّلع gh، فنضع h في S. وبما أنّ d موجود أصلاً في S، فنكون قد وجدنا برعمًا آخر. إنّ المسارات التي تصل d هي: u, b, d و u,a,C,d. الآن، نقلّص البرعم، لنحصل على الرّأس الجديد U والبيان الذي عن اليمين في الأسفل حيث $S= \{U, h\}$، ثمّ نستكشف من h، فلا نجد شيئًا جديدًا (إذا استنفدنا S دون الوصول إلى رأس غير مشبع، فهذا يعني عدم وجود مسار موسّع للمواءمة M من u). وأخيرًا نستكشف من U لنصل الرّأس غير المشبع x. ■



بتسجيل الضّلع الذي من خلاله وصلنا إلى الرّؤوس جميعها، نستطيع استخلاص مسار من u إلى x موسّع للمواءمة M. لقد وصلنا إلى x من U. لذا، نوسّع البرعم رجوعًا إلى $\{u, a, C, d, b\}$، ونجد أنَّ x وصل إليه من U من خلال bx. إنَّ المسار في البرعم U الذي يصل b على ضلع مشبع ينتهي بـ C,d,b. وبما أنَّ C برعمٌ في البيان الأصليّ، فنوسّع C رجوعًا إلى $\{c, f, e\}$. لاحظ أنَّ d موصول من C بوساطة الضّلع غير المشبع ed. المسار من الأساس "base" لـ C الذي يصل e على طول ضلع مشبع هو c,f,e. أخيرًا، فإنَّ c موصولة من a و a موصولة من u، وهكذا نحصل على مسار موسّع ممتلئ للمواءمة M u, a, c, f, e, d, b, x. ■

نلخّص خطوات الخوارزميّة بشرح مسهب يحتوي على التفاصيل، وخصوصًا معالجة التّقليصات أو الانقباضات.

17.3.3. خوارزميّة : (خوارزميّة برعم إدموند [1965a] (Sketch- Edmond's Blossom Algorithm

المدخلات: بيان G، ومواءمة M في G، ورأس u غير مشبع للمواءمة M.

الفكرة: استكشف المسارات المتناوبة للمواءمة M من u، مسجّلاً لكلّ رأس الرأسَ الذي وصل منه، وقلّص البراعم أينما وجدتها، وحافظ على مجموعات S و T مماثلة لتلك المجموعات في الخوارزميّة 1.2.3، حيث تتكون S من u والرّؤوس التي وصلت من خلال الأضلاع المشبعة. إنّ الوصول إلى رأس غير مشبع يؤدي إلى توسعة.

البداية: $S = \{u\}$ و $T = \emptyset$.

مرات الحدوث: إذا كانت S لا تملك رأسًا غير معلم، فتوقف؛ لأنّه لا يوجد مسار موسّع للمواءمة M من u. وبخلاف ذلك، اختر $v \in S$ غير معلم. لتستكشف من v. خذ في الحسبان $y \in N(v)$ كلّها على التوالي، بحيث إنَّ $y \notin T$.

إذا كان y غير مشبع بواسطة M، فارجع إلى الخلف إلى ما قبل y (ووسّع البراعم كما تحتاج) لتقرر مسارًا موسّعًا للمواءمة M من u إلى y.

إذا كان $y \in S$، فنكون قد وجدنا برعمًا. لذا، أوقف الاستكشاف لـ v، وقلّص البرعم، واستبدل رؤوسها في S و T برأس جديد واحد في S، ثم تابع البحث من هذا الرّأس في البيان الأصغر. وبخلاف ذلك، فإنَّ y متوائمة مع رأس ما في M وليكن w. ضع y في T (موصولة من v)، أمّا w فضعها في S (موصولة من y).

بعد استكشاف الجيران المماثلين لـ v جميعهم، علّم v وكرّر العملية. ■

لا تستطيع استكشاف الرّؤوس غير المشبعة جميعها آنيًّا كما في الخوارزميّة 1.2.3؛ لأنّ عضوية الرّؤوس في البراعم تعتمد على اختيار الرّأس غير المشبع الأوليّ. وعلى الرغم من ذلك، فإنْ لم نجد مسارًا موسّعًا للمواءمة M من u، فإنا نستطيع حذف u من البيان ونتجاهله في البحث التّالي للمواءمة العظمى (التمرين 26). ■

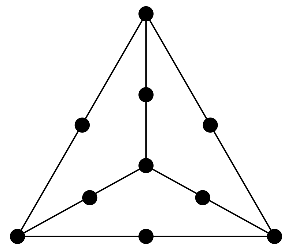
18.3.3. ملاحظة : تحتاج خوارزميّة إدموند الأصلية إلى زمن $O(n^4)$. أما تطبيقها في Ahuja –Mag-nati – orlin [1993, p483- 493] فإنه يحتاج إلى زمن $O(n^3)$. وهذا يتطلب ما يأتي: (1) قواعد بيانات مناسبة لتمثّل البراعم وتعالج التقليصات. (2) تحليلًا دقيقًا لعدد التّقليصات التي يمكن إنجازها، والزمن الذي احتجنا إليه في كلّ من: استكشاف الأضلاع، و التقليصات، وتوسعة البراعم. ■

تعدّ خوارزميّة إيفن وكاريف (Even – Kariv) [1975] أوّلَ خوارزميّة حلّت مسألة المواءمة العظمى في زمن أقلّ من مكعب الزّمن حيث احتاجت إلى $O(n^{5/2})$. فضلًا عن أنَّ أفضل خوارزميّة معروفة الآن تحتاج إلى زمن $O(n^{1/2}m)$ لبيان عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه m (هذا أسرع من $O(n^{5/2})$ للبيانات المتناثرة). تظهر الخوارزميّة بصورة معقدة أكثر في Micali- Vazirani [1980]، مع إثبات كامل في Vazirani [1994].

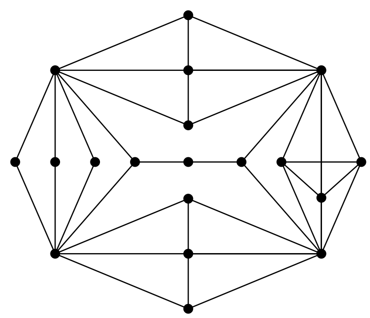
لم نناقش مسألة المواءمات الموزونة للبيانات العامة. وقد وجد إدموند [1965d] خوارزميّة لهذه المسألة تتشارك في زمن $O(n^3)$ مع كلّ من Gabow [1975] و Lawler [1976]. وهناك خوارزميات أسرع تظهر في Gabow [1990] وفي Gabow -Tarjan [1989]. ■

تمـارين (Exercises)

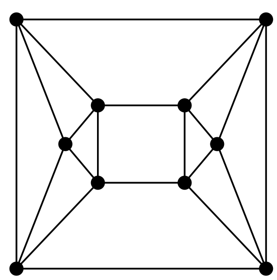
1.3.3. (−) حدّد ما إذا كان البيان أدناه يمتلك معاملاً من الدّرجة 1.



2.3.3. (−) أظهر مواءمة كبرى في البيان أدناه، واستخدم نتيجة في هذا الدرس لإعطاء إثبات قصير على عدم وجود مواءمة أوسع. ■



3.3.3.(−) في البيان أدناه، أظهر معاملاً من الدّرجة k لكلّ k في $\{0,1,2,3,4\}$. ■



4.3.3. (−) ليكن G بيانًا ثنائيّ الفرع منتظمًا من الدّرجة k. أثبت أنّه يمكن تفكيكه إلى معاملات من الدّرجة r إذا وفقط إذا كانت r تقسم k. ■

5.3.3. (−) ليكن G و H بيانين. حدّد عدد المركّبات والدّرجة العظمى لِـ $G \vee H$ بدلالة متغيرات G و H.

6.3.3. (!) أثبت أنّ الشّجرة T تملك مواءمة كاملة إذا وفقط إذا كان $o(T\text{-}v)=1$ لكلّ $v\in V(T)$ (Chungphaisan).

7.3.3. (!) لكلّ $k > 1$، أنشئ بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدّرجة k لا يمتلك معاملاً من الدّرجة 1. ■

8.3.3. أثبت أنَّه إذا كان البيان G يتفكك إلى معاملاتٍ من الدّرجة 1، فإنَّه لا يملك رأس قطع. ثم ارسم بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدّرجة 3 ومترابطًا، ويملك معاملاً من الدّرجة 1، ويملك رأس قطع.

9.3.3. أثبت أنَّ كلّ بيان ليس له رؤوس معزولة يملك مواءمة حجمها $(n(G)/(1+\Delta(G))$ على الأقلّ. (مساعدة: طبّق الاستقراء على $(e(G)$ (Weinstein [1963]))

10.3.3. (!) لكلّ بيان G، أثبت أنَّ $\beta(G) \leq 2\alpha'(G)$. لكلّ $k \in \mathbb{N}$، وأنشئ بيانًا بسيطًا G فيه $\alpha'(G) = k$ و $\beta(G)=2k$.

11.3.3. لتكن T مجموعة رؤوس في بيان G. أثبت أنَّ G يملك مواءمة مشبعة لـ T إذا وفقط إذا كان لكلّ $S \subseteq V(G)$، فإنَّ عدد المركّبات الفرديّة لـِ $G\text{-}S$ المحتواة في $G[T]$ هي $|S|$على الأكثر.

12.3.3. (!) تعميم نظرية كونج وإيجرفاري إلى البيانات العامة. ليكن G بيانًا. ولتكن $S_1,\ldots,S_k$ و T مجموعات جزئية من $V(G)$ بحيث يكون حجم كلّ مجموعة S_i فرديًّا. إنَّ هذه المجموعة تشكّل **غطاء معمّما** (generalized cover)لـ G إذا كان كلّ ضلع في G يملك نقطة طرفيّة في T أو يوجد i بحيث تكون النّقطتان الطّرفيتان للضّلع في S_i. إنَّ **وزن** (*weight*) الغطاء المُعمّم هو $|T|+\sum\lfloor|S_i|/2\rfloor$. لتكن $\beta^*(G)$ الوزنَ الأصغر لغطاء معمّم. أثبت أنَّ $\alpha'(G)=\beta^*(G)$. (مساعدة: طبّق النتيجة 3.3.7. تعليق: كلّ غطاء رأسيّ هو غطاء معمّم. لذا، فإنَّ $\beta^*(G) \leq \beta(G)$).

13.3.3. (+) نظرية توت من نظرية هال. ليكن G بيانًا، بحيث إنَّ $o(G-S) \leq |S|$ لكلّ $S \subseteq V(G)$. ولتكن T مجموعة رأس أعظميّة جزئيّة بحيث إنَّ $o(G-T)=|T|$:

a) أثبت أنَّ كلّ مركبة لـ $G\text{-}T$ هي فردية، واستنتج أنَّ $T \neq \emptyset$.

b) لتكن C مركبة لـ $G\text{-}T$. أثبت أنَّ شرط توت يتحقّق لكلّ بيان جزئيّ من C ناتج عن حذف رأس واحد. (مساعدة: بما أنَّ $C\text{-}x$ ذو رتبة زوجيّة، فإنَّ الانتهاك يتطلّب تحقّق $o(C-x-S) \geq |S|+2$).

c) ليكن H بيانًا ثنائيّ الفرع مع مجموعات مجزأة T و $\mathbf{C}$، حيث $\mathbf{C}$ هي مجموعة المركّبات لـ $G-T$. لكلّ $t \in T$ و لكلّ $C \in \mathbf{C}$ ضع $tC \in E(H)$ إذا وفقط إذا كان $N_G(t)$ يحتوي على رأس من $\mathbf{C}$. أثبتَ أنَّ H يحقّق شرط هال لمواءمة مشبعة لـ C.

d) استخدم الفروع (a) و (b) و (c)، ونظرية هال أيضًا لتبرهن نظرية توت للمعامل من الدّرجة 1 بالاستقراء على $n(G)$ (Anderson [1971],Mader [1973]).

14.3.3. (+) لكلّ $k \in \mathbb{N}$، ليكن G بيانًا بسيطًا بحيث إنَّ $\delta(G) \geq k$ و $n(G) \geq 2k$. أثبت أنَّ $\alpha'(G) \geq k$. (مساعدة: طبّق النتيجة 7.3.3.) (Brandt [1994])

15.3.3. ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة 3 وله ضلعا قطع على الأكثر. أثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة 1. (Petersen [1891])

16.3.3. (!) ليكن G بيانًا زوجيًّا منتظمًا من الدّرجة k (درجته زوجيّة) بحيث يبقى مترابطًا بعد حذف أيّ $(k-2)$ ضلعًا. أثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة 1.

17.3.3. ليكن G كما في تمرين 16.3.3، استخدم الملاحظة 5.3.3 لإثبات أنَّ كلّ ضلع فيه ينتمي إلى معامل من الدّرجة 1. (تعليق: هذا يقوي التمرينين 16.3.3 لـِSchonberge r [1934]) (Berge [1973, p162], $k=3$)

18.3.3. (+) لكلّ عدد فردي k أكبر من 1، أنشئ بيانًا لا يوجد فيه معامل من الدّرجة 1، بمعنى أنْ يكون

منتظمًا من الدّرجة k، ويبقى مترابطًا عند حذف أيّ (k-3) ضلعًا. (تعليق: لهذا فإنَّ التمرينين 16.3.3 هو أفضل ما يمكن).

19.3.3. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدّرجة 3 ليس فيه ضلع قطع. أثبت أنَّ G يتفكّك إلى نسخ من P_4. (مساعدة: استخدم النتيجة .9.3.3).

20.3.3. (!) أثبت أنَّ البيان البسيط المنتظم من الدّرجة 3 يملك معاملاً من الدّرجة 1 إذا وفقط إذا كان يتفكّك إلى نسخ من P_4.

21.3.3. (+) ليكن G بيانًا منتظمًا من الدّرجة $2m$، ولتكن T شجرة لها m ضلعًا. أثبت أنَّه إذا كان القطر لـ T أقلّ من الخصر لـ G، فإنَّ G يتفكك إلى نسخ من T. (مساعدة: استخدم أثبت 9.3.3 لإعطاء إثبات استقرائيّ للنتيجة الأقوَى، وهي أنَّ G له مثل هذا التفكك، ويكون كلّ رأس فيه مستخدمًا مرّة واحدة بوصفه صورة لكل رأس في T (Haggkvist).

22.3.3. (!) ليكن G بيانًا ثنائيًّا بالتّجزئة الثّنائيّة X,Y، وليكن H هو البيان الناتج عن G بإضافة رأس واحد إلى Y إذا كان n(G) فرديًّا، ثم إضافة أضلاع لجعل Y عصبة:

a) أثبت أنَّ G يملك مواءمة حجمها $|X|$ إذا وفقط إذا امتلك H معاملاً من الدّرجة 1.

b) أثبت أنَّه إذا حقّق G شرط هال ($|N(S)| \geq |S|$ لكل $S \subseteq X$)، فإنَّ H يحقّق شرط توت ($o(H\text{-}T) \leq |T|$ لكل $T \subseteq V(H)$).

c) استعن بـ (a) و (b) لتحصل على نظرية هال من نظرية توت.

23.3.3. ليكن G بيانًا مترابطًا خاليًا من المخالب ذا درجة زوجيّة:

a) لتكن T شجرة مُولّدة للبيان G بالبحث الأفقي أولاً (الخوارزميّة 8.3.2). وليكن x و y رأسيّن لهما والد مشترك في T غير الجذر. أثبت أنَّ x و y يجب أنْ يكونا متجاورين.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة 1. (تعليق: دون الاستعانة بفرع (a) يمكن إثبات النتيجة الأقوى، وهي أنَّ الضّلع الأخير في المسار الأطول ينتمي إلى معامل من الدّرجة 1) (Las Vergnas [1975], Sumner [1974a]).

24.3.3. (!) ليكن G بيانًا زوجيًّا بسيطًا درجته n، ويملك مجموعة S حجمها k بحيث إنَّ $o(G - S) > k$. أثبت أنَّ G يملك $\binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n\text{-}2k\text{-}1}{2}$ ضلعًا على الأكثر؛ وهذا الحدّ هو أفضل ما يمكن. استخدم هذا لتحدّد أكبر حجم لبيان بسيط على n من الرّؤوس لا يملك معاملاً من الدّرجة 1. (Erdös – Gallai [1961]).

25.3.3. **يعدّ** البيانُ G **حرجَ المعامل** (***factor – critical***) إذا كان كلّ بيان جزئيّ $G - v$ ناتج عن حذف رأس واحد يملك معاملاً من الدّرجة 1. أثبت أنَّ G حرجُ المعامل إذا وفقط إذا كان $n(G)$ فرديًّا و $o(G - S) \leq |S|$ لكلّ مجموعة غير خالية $S \subseteq V(G)$ (Gallai [1963a]).

26.3.3. (!) لتكن M مواءمة في البيان G، وليكن u رأسًا غير مشبع للمواءمة M. أثبت أنَّه إذا كان G لا يملك مسارًا موسّعًا للمواءمة M يبدأ عند u، فإنَّ u غير مشبع في مواءمة كبرى ما في G.

27.3.3. (*) افترض أنَّ الخوارزميّة 17.3.3 صحيحة. سنطوّر إثباتًا خوارزميًّا لنظرية توت (النظرية 3.3.3):

a) ليكن G بيانًا لا توجد فيه مواءمة كاملة، ولتكن M مواءمة كبرى في G. ولتكن S و T هما المجموعتين

المولدتين عند تطبيق خوارزميّة 17.3.3 من u. أثبت أنَّ $|T| < |S| \leq o(G\text{-}T)$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت النظرية 3.3.3. ■

28.3.3. (*) ليكن $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ ، ولتكن $f\colon V(G) \to \mathbb{N}_0$، يكون البيان G **قابلاً للذّوبان** (Soluble) من الدّرجة f إذا وجد $w\colon E(G) \to \mathbb{N}_0$ بحيث $\sum_{uv\in E(G)} w(uv) = f(v)$ لكلّ $v \in V(G)$.

a) أثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان البيان H الناتج عن G بتقسيم جزئيّ لكلّ ضلع مرتين، وتعريف f لتكون 1 على الرّؤوس الجديدة قابلاً للذّوبان من الدّرجة f. (هذا يختزل الاختبار لمعامل من الدّرجة f إلى اختبار قابلية الذّوبان من الدّرجة f). ■

b) إذا أعطيت G و $f\colon V(G) \to \mathbb{N}_0$ ، أنشئ بيانًا H (مع الإثبات) بحيث يكون G قابلاً للذّوبان من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان H يملك معاملاً من الدّرجة 1 (Tutte [1954a]).

29.3.3. (+*) شرط توت للمعاملات من الدّرجة f والمتتاليات البيانيّة. ليكن $f\colon V(G) \to \mathbb{N}_0$ ، عرّف $f(S) = \sum_{v\in S} f(v)$ لكلّ $S \subseteq V(G)$. ولكلّ مجموعتين منفصلتين S،T من $V(G)$، اجعل $q(S, T)$ ترمز إلى عدد مركّبات Q في $G - S - T$ بحيث يكون $e(Q, T) + f(V(Q))$ فرديًّا، حيث $e(Q,T)$ هو عدد الأضلاع من Q إلى T. لقد أثبت توت [1952, 1954a] أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا تحقّق أنَّ:

$$q(S,T) + f(T) - \sum_{v\in T} d_{G-S}(v) \leq f(S)$$

لاختيارات المجموعات الجزئيّة المنفصلة $S, T \subset V$ جميعها.

تمهيدية النّوعيّة (The Parity Lemma):

(a) ليكن $\delta(S, T) = f(S) - f(T) + \sum_{v\in T} d_{G-S}(v) - q(S, T)$ أثبت أنَّ $\delta(S,T)$ يملك النوعية نفسها مثل $f(V)$ لكلّ مجموعتين منفصلتين $S,T \subseteq V(G)$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $|T|$).

(b) افترض أنَّ $G=K_n$ و $f(v_i)=d_i$، بحيث يكون $\sum d_i$ زوجيًّا و $d_1 \geq \ldots \geq d_n$. استخدم شرط المعامل من الدّرجة f وفرع (a) لتثبت أنَّ G يملك معاملاً من الدّرجة f إذا وفقط إذا كان $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq (n-1-s)k + \sum_{i=n+1-s}^{n} d_i$ لكلّ k,s حيث $k + s \leq n$.

(c) استنتج أنَّ $d_1,\ldots,d_n \geq 0$ تكون درجات الرّؤوس لبيان بسيط إذا وفقط إذا كان $\sum d_i$ زوجيًّا و $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$ لكلّ $1 \leq k \leq n$ (Erdös – Gallai [1960]).