الفصل الأوّل

مفاهيم أساسية (Fundamental Concepts)

1.1. ما البيان؟ (What is a Graph)

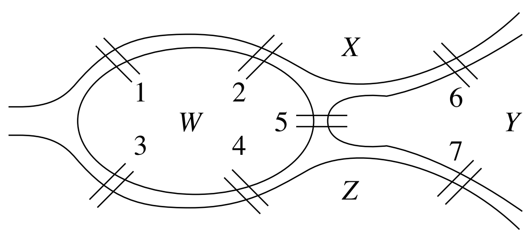
كيف نستطيع مدّ أسلاك لشبكة من الهواتف بأقلّ تكلفة ممكنة، بحيث يمكن الوصول لأيّ هاتف من أيّ هاتف آخر؟ ما أسرع مسلك يربط العاصمة الوطنية ببقية عواصم الولايات الأخرى؟ كيف نستطيع ملء n من شواغر الوظائف بـ n من الأشخاص المؤهلين؟ ما أكبر معدّل تدفّق من المصدر لغمر شبكة من الأنابيب؟ كم تحتاج شريحة الحاسوب من حزم الأسلاك؛ بحيث لا تتقاطع هذه الأسلاك معًا في الحزمة نفسها؟ كيف نستطيع أن نُجدّوَل الموسم الرياضي في أقلّ عدد ممكن من الأسابيع؟ ما الترتيب المناسب للمدن بحيث يستطيع مندوب المبيعات زيارتها في أقصر وقت ممكن؟ هل يمكن تلوين المناطق المختلفة في أيّ خريطة باستعمال أربعة ألوان، على أن تكون ألوان المناطق المتجاورة مختلفة؟

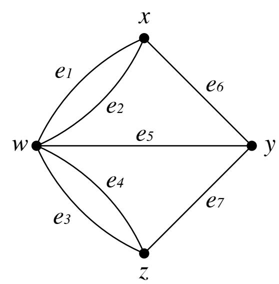
تتضمّن نظرية البيان هذه المسائل، وغيرها الكثير من المسائل العملية الأخرى، وفي هذا الكتاب، طوّرنا نظرية البيان وطبّقناها على مثل هذه المسائل، ومنذ البداية، فإننا نفترض الإلمام بالخلفية الرياضية الموجودة في الملحق A، حيث إنّ هذا الملحق يناقش المفاهيم الأساسية، ولغة الرياضيات المستخدمة.

التعريف (The Definition)

إنّ المسألة التي غالبًا ما يُقال إنها ولدّت نظرية البيان سوف تقترح تعريفنا الأساسي للبيان.

1.1.1. مثال. مسألة جسور كونجزبرج (*The Königsberg Bridge Problem*). تقع مدينة كونجزبرج على نهر بريجل (Pregel) في بروسيا، وتتكوّن هذه المدينة من جزيرة نيفوف (Kneiphopf)، ومساحات على ضفتي النهر. وقد وُصلت هذه المناطق بسبعة جسور، كما هو على اليسار أدناه، وتساءل مواطنو المدينة عما إذا كان يمكنهم مغادرة منازلهم، والسير على كل جسر من الجسور السبعة مرة واحدة فقط، ثمّ العودة إلى منازلهم، وقد اختزلت المسألة على تتبُّع الشكل الأيمن، حيث تمثّل النقاطُ الكثيفة الكتلَ اليابسةَ، أما المنحنيات، فتمثل الجسور.





النموذج الذي عن اليمين يُسهل تعليل عدم وجود مثل هذا الطريق، حيث نحتاج في كل مرة ندخل اليابسة ونخرج منها إلى استخدام جسرين ينتهيان بهذه اليابسة، وكذلك نستطيع أن نقرن الجسر الأول بالجسر الأخير، حيث بدأنا وانتهينا؛ لذلك، فإنّ وجود مثل هذا المسار المتعرّج، يتطلب أن يكون عدد زوجي من الجسور على كل كتلة يابسة، وهذا الشرط الضروري غير متحقّق في مدينة كونجزبرج. ■

إنّ مسألة جسور كونجزبرج تصبح أكثر متعة عندما نثبت في الدرس 2.1 أيًّا من الأشكال لها مسارات مستعرضة، وفي غضون ذلك، فإنّ هذه المسألة تقترح نموذجًا عامًّا لمناقشة مثل هذه القضايا.

2.1.1. تعريف. البيان (**G graph**): ثلاثية تتكوّن من مجموعة رؤوس (**vertex set**) $V(G)$، ومجموعة أضلاع (**edge set**) $E(G)$، وعلاقة تُرافِق كلّ ضلع مع رأسين (ليس بالضرورة أن يكونا مختلفين) يسمّيان نقاطًا طرفية (**endpoints**).

نرسم البيان على ورقة بوضع كل رأس على نقطة، ونمثّل كلَّ ضلع بمنحنى يربط بين نقاطه الطرفية.

3.1.1. مثال. في البيان في المثال 1.1.1، مجموعة الرؤوس هي: $\{x , y , z , w\}$ ، ومجموعة الأضلاع هي: $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$، ويمكن قراءة تعيين النقاط الطرفية للأضلاع من الصورة.

لاحظ أنّ الضلعين e_1، وe_2 لهما النقاط الطرفية نفسها وكذلك e_3، و e_4. وإذا كان هنالك جسر فوق مدخل، فإنّ نهايتيه سوف تكونان في الكتلة اليابسة نفسها، ونرسمه بوصفه منحنى يبدأ بالنقطة نفسها وينتهي بها، وتوجد لدينا مفردات ملائمة لمثل هذه الأنواع من الأضلاع في البيانات. ■

4.1.1. تعريف. نعرّف الأنشوطة (**loop**) على أنها ضلع، نقاطه الطرفية متساوية. ونعرّف الأضلاع المكررة (multiple edges) على أنها أضلاع لها الزوج نفسه من النقاط الطرفية.

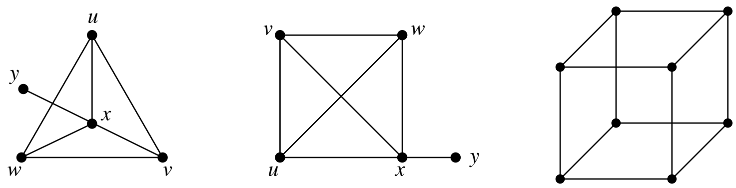
ونعرّف البيان البسيط (**Simple graph**) على أنه بيان لا عُرى ولا أضلاعًا مكررة، ونُحدد البيان البسيط بمجموعة رؤوسه ومجموعة أضلاعه، وذلك بافتراض مجموعة الأضلاع بوصفها مجموعة من الأزواج غير المرتبة من الرؤوس، وكتابة $e = uv$ (أو $e = vu$) للدلالة على الضلع e الذي تكون نقاطه الطرفية u، و v. وعندما تكون كل من u، و v نقاطًا طرفية لضلع ما، فإنها تدعى متجاورة (**adjacent**)، وتكونان جيرانًا (**neighbors**)، ونكتب $u \leftrightarrow v$ بدلاً من "u متجاور مع v".

لا تظهر العُرى ولا الأضلاع المتكررة في العديد من التطبيقات المهمة؛ لهذا نحصر اهتمامنا بالبيانات

البسيطة. في هذه الحالة، يحدّد الضلع بنقاطه الطرفية. لذا، نستطيع أن نسمي الضلع بنقاطه الطرفية، كما في التعريف 4.1.1. وهكذا، وفي البيان البسيط، فإننا ننظر إلى الضلع بوصفه زوج من الرؤوس غير المرتبة. نستطيع أن نهمل العلاقة التي تُرافق النقاط الطرفية مع الأضلاع صوريًّا. ويركز هذا الكتاب على البيانات البسيطة.

5.1.1. مثال. عن اليسار أدناه، تجد رسمين لبيان بسيط، حيث مجموعة الرؤوس هي$\{u,v,w,x,y\}$ ، ومجموعة الأضلاع هي: $\{uv,\ uw,\ vx,\ vw,\ xw,\ xy\}$.

ظهرت المفردتان ''رأس'' و ''ضلع'' من الهندسة الفراغية، أو هندسة المجسمات، حيث إنّ للمكعب رؤوسًا وأضلاعًا، وهي تشكل مجموعة كلّ من الرؤوس والأضلاع لبيان ما، وقد رُسم المكعب عن اليمين أدناه، وحُذفت أسماء الرؤوس والأضلاع. ■



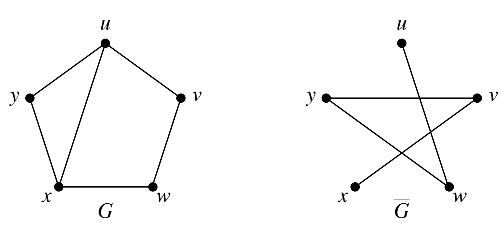
يكون البيان محددًا (**Finite**) إذا كانت مجموعة كلّ من رؤوسه وأضلاعه منتهيتين. وعليه سنتبنّى الاصطلاح الآتي: **كلّ بيان يُذكَرُ في هذا الكتاب هو بيان منتهٍ**، إلا إذا ذُكِرَ خلاف ذلك بصورة صريحة.

6.1.1. *ملاحظة. البيان الخالي (**null graph**) هو البيان الذي تكون مجموعة كلّ من الرؤوس والأضلاع فيه خاليتين، لاحظ أنّ تمديد المثبتات أو تعميمها لتنطبق على البيان الخالي، يقود إلى إرباك لا داعي له، لذلك ستهمله. وفي العبارات والتمارين كلّها سوف نأخذ في الحسبان البيانات التي لها مجموعة غير خالية من الرؤوس فقط. ■

البيانات بوصفها نماذج (Graphs as Models)

تظهر البيانات في أوضاع كثيرة، وتوحي التطبيقات لنا بأفكار ومصطلحات مفيدة حول بناء البيانات.

7.1.1. مثال. علاقات المعارف الشخصية والبيانات الجزئية. هل كلّ مجموعة مكونّة من ستة أشخاص تحوي ثلاثة أشخاص بعضهم على معرفة شخصية مسبقة ببعض، أو ثلاثة أشخاص غرباء غير متعارفين؟ بما أنّ علاقة المعرفة ''الشخصية'' متماثلة، فإننا ننمذجها باستعمال بيان بسيط، حيث يمثّل كلّ رأس شخصًا، وكلّ ضلع يمثّل شخصين يعرف أحدهما الآخر، بالإضافة إلى أنّ ''علاقة عدمِ المعرفة الشخصية'' على مجموعة الرؤوس نفسها تعطي بيانًا آخر، أضلاعه ''متممة'' مجموعة الأضلاع الأصلية. وسنعطي مصطلحات لهذه المفاهيم. ■



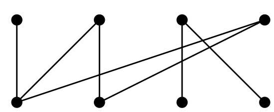
8.1.1. تعريف. المتّممة (**complement**) $\overline{G}$ للبيان البسيط G، هي البيان البسيط الذي مجموعة رؤوسه: $V(G)$، و $uv \in E(\overline{G})$ إذا وفقط إذا كان $uv \notin E(G)$. والعصبة (**clique**) في البيان هي مجموعة من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا، أما المجموعة المستقلة (**independent set**) أو المجموعة المستقرة (**stable set**) في البيان، فهي مجموعة رؤوس غير متجاورة زوجًا زوجًا.

نجد في البيان G الموجود في المثال 7.1.1 أن $\{u, x, y\}$ عصبة حجمها 3 و $\{u, w\}$، هي مجموعة مستقلة حجمها 2، وهما أكبر مجموعتين بهذه الصفات، لاحظ أنّ هذه القيم تنعكس في المتممة $\overline{G}$؛ لأنّ العصب تصبح مجموعات مستقلة (والعكس بالعكس) وذلك تحت تأثير التتام. يتضمن السؤال في المثال 7.1.1 ما إذا كان صحيحًا، إنّ كلّ بيان على 6 رؤوس يمتلك عصبة حجمها 3، أو مجموعة مستقلة حجمها 3 (التمرين 29). لاحظ إنّ حذف الضلع ux من G يعطي بيانًا بـ 5 رؤوس ليس له عصبة أو مجموعة مستقلة حجمها 3.

9.1.1. مثال. التعيين في الوظائف والبيانات ثنائية الفرع، يوجد لدينا m وظيفة و n شخصًا، ولكن الأشخاص ليسوا مؤهلين جميعهم للوظائف كلّها، فهل نستطيع ملء الوظائف الشاغرة بالأشخاص المؤهلين؟ ننمذج هذا باستخدام بيان بسيط مثل H، حيث تمثل رؤوسه الوظائف الشاغرة والأشخاص؛ تكون الوظيفة j مجاورة للشخص p إذا كان هذا الشخص يستطيع أن يؤدي هذه الوظيفة.

إنّ كلّ وظيفة يجب أن يشغلها شخص واحد فقط، وكلّ شخص يمكنه أن يعمل في وظيفة واحدة على الأكثر. لذلك، نبحث عن m من الأضلاع المنفصلة زوجًا زوجًا في H (ننظر إلى الأضلاع بوصفها أزواجًا من الرؤوس). وسنبين في الفصل 3 كيفية اختبار هذا الأمر؛ لاحظ أنه لا يمكن عمل هذا في البيان أدناه.

إن لاستخدام البيانات لنمذجة العلاقات بين مجموعتين منفصلتين الكثير من التطبيقات، وهذه هي البيانات التي تكون مجموعات رؤوسها قابلة للتجزئة إلى مجموعتين من المجموعات المستقلة؛ وحيث نحتاج إلى تسمية هذه البيانات. ■

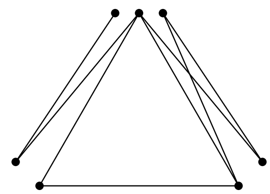


10.1.1. تعريف. نقول: إن البيان G ثنائي الفرع (**bipartite**) إذا كانت مجموعة رؤوسه $V(G)$ اتحادًا لمجموعتين منفصلتين (قد تكون إحداهما خالية) مستقلتين، تسمّيان مجموعات تجزئة للبيان G (أو مجموعات مجزأة للبيان G).

11.1.1. مثال. الجدولة وتلوين البيانات (*Scheduling and graph coloring*). افترض أننا نريد أن نجدول اجتماعات لجان مجلس الشيوخ بصورة دورية في كل أسبوع، حيث لا نستطيع أن نجدول لجنتين في الوقت نفسه إذا كان فيهما عضو مشترك. فكم دورة زمنية مختلفة نحتاج إليها؟

نضع رأسًا لكل لجنة، بحيث يكون الرأسان متجاورين عندما يكون هنالك عضو مشترك في اللجنتين المقابلتين لهذين الرأسين، ونضع عناوين (للفترات الزمنية) للرؤوس، بحيث يكون للنهايات الطرفية للأضلاع عناوين مختلفة. وفي البيان أدناه، نستطيع أن نستعمل عنوانًا واحدًا لكلّ مجموعة من المجموعات الثلاث المستقلة ذوات الرؤوس المجمّعة بعضها بالقرب من بعض، ويجب أن يعطى الأعضاء في العصبة عناوين مختلفة، لذلك وفي هذا المثال يكون أقلّ عدد ممكن من الفترات الزمنية هو ثلاث.

وبما أننا مهتمون بتجزئة الرؤوس فقط، وأنّ العناوين لا تحمل قيمًا عددية، فإنه من المناسب أن نسمّيها ألوانًا (**Colors**). ■



12.1.1. تعريف. نعرّف العدد اللوني (**Chromatic number**) للبيان G، يرمز إليه بالرمز $\chi(G)$ على أنه أقلّ عدد ممكن من الألوان نحتاج إليه لتلوين الرؤوس، بحيث تكون ألوان الرؤوس المتجاورة مختلفة. ويسمّى البيان G متعدد الفروع (مجزأ) من الدرجة (**k-partite**) إذا كان بالإمكان كتابة $V(G)$ على صورة اتحاد k من المجموعات المستقلة (ربما بعضها خال).

هذا يعمم فكرة البيانات الثنائية الفرع، وهي مجزأة من الدرجة 2 يجب أن تشكل. إن الرؤوس التي أعطيت اللون نفسه مجموعة مستقلة. لذلك، فإنّ $\chi(G)$ هو أقلّ عدد ممكن من المجموعات المستقلة نحتاج إليه لتجزئة $V(G)$، ويكون البيان متعدد الفروع (مجزأ) من الدرجة k إذا وفقط إذا كان عدده اللوني يساوي k على الأكثر، وقد استخدمنا المصطلح "مجموعة مجزأة" عندما نتحدث عن مجموعة في تجزئة لمجموعة معينة إلى مجموعات مستقلة.

سندرس العدد اللوني وتلوين البيانات في الفصل 5. لاحظ أنّ المسألة الأكثر شهرة في نظرية البيان هي تلوين "الخرائط".

13.1.1. مثال. الخرائط والتلوين (**Maps and coloring**). بكلام غير دقيق، **الخريطة** هي تجزئة للمستوى إلى مناطق مترابطة، فهل بالإمكان تلوين المناطق في أي خريطة باستخدام أربعة ألوان على الأكثر، بحيث يكون للمناطق المتجاورة ألوان مختلفة؟

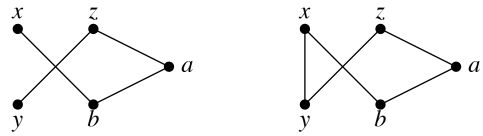
لربط تلوين الخرائط بتلوين البيانات، نضع رأسًا يمثّل كلّ منطقة، وضلعًا لتمثيل المناطق التي تتشارك بالحدود، ونتساءل في مسألة الخريطة عما إذا كان العدد اللوني للبيان الناتج يساوي 4 على الأكثر، لاحظ أنه يمكن رسم بعض البيانات في المستوى دون أن تتقاطع أضلاعها؛ مثل هذه البيانات تسمّى بيانات مستوية (**planar**) والبيان الذي يسبق التعريف 12.1.1 هو بيان سوي؛ لاحظ كذلك وجود تقاطعات في هذا الرسم، ولكن هنالك رسمًا آخر ليس فيه تقاطعات. سندرس البيانات المستوية في الفصل السادس. ■

14.1.1. مثال. المسالك في شبكات الطرق (*Routes in road networks*). نستطيع أن ننمذج شبكة الطرق باستخدام بيان أضلاعه التي تقابل قطع الطرق بين التقاطعات، ونستطيع أيضًا أن نعيّن أوزانًا للأضلاع لقياس المسافة أو زمن الرحلة، وفي هذا السياق، لاحظ أنّ الأضلاع تمثّل الروابط الفيزيائية (الطبيعية). فكيف نستطيع أن نجد أقصر مسلك من x إلى y؟ سنبين كيفية حساب هذا في الفصل الثاني.

إذا كانت الرؤوس في البيان تمثّل منزلنا والأماكن الأخرى المراد زيارتها، فلربما نريد أن نتبع مسلكًا نزور من خلاله الرؤوس جميعها مرة واحدة بالضبط ، كزيارة كل شخص دون المكوث عنده. وسنأخذ في الحسبان وجود مثل هذا المسلك في الفصل السابع.

لاحظ أننا نحتاج إلى مصطلحات لوصف هذين النوعين من المسالك في البيانات. ■

15.1.1. تعريف. المسار (**path**) هو بيان بسيط يمكن ترتيب رؤوسه، بحيث يكون الرأسان متجاورين إذا وفقط إذا كانا متتاليين في القائمة. أمّا الحلقة (**cycle**)، فهي بيان يتساوى فيه عدد كلّ من الرؤوس والأضلاع، ومن الممكن وضع رؤوسه حول دائرة بحيث يكون الرأسان متجاورين إذا وفقط إذا ظهرا متتالين على الدائرة.



لاحظ أن الشكل أعلاه يظهر مسارًا وحلقة، كما هو موضّح من جدولة الرؤوس بحسب الترتيب: x, b, a, z, y، فضلاً عن أنّ إهمال ضلع واحد من الحلقة ينتج مسارًا. وفي دراسة المسالك في شبكات الطرق، نفكر في المسارات والحلقات المحتواة في البيان. كذلك نأمل في الوصول إلى كلّ رأس في الشبكة من أيّ رأس آخر، والتعريف الآتي يجعل هذه المفاهيم دقيقة.

16.1.1. تعريف. نعرّف البيان الجزئي (**subgraph**) من البيان G على أنه البيان H، بحيث يكون $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، والنقاط الطرفية للأضلاع في H هي نفسها في G؛ لذلك، نكتب $H \subseteq G$، ونقول: إنّ "G **يحوي** H".

يكون البيان G مترابطًا (**connected**) إذا كان كلّ زوج من الرؤوس في G ينتمي إلى مسار؛ وبخلاف ذلك، يكون البيان G غير مترابط (**disconnected**).

يوجد للبيان الموجود قبل التعريف 12.1.1 ثلاثة بيانات جزئية تعدّ حلقات، وهو بيان مترابط، ولكن البيان في المثال 9.1.1 ليس كذلك.

المصفوفات والتشاكل (Matrices and Isomorphisms)

كيف نحدّد بيانًا ما؟ نستطيع وضع الرؤوس والأضلاع في قائمة (مع النقاط الطرفية)، ولكن هناك تمثيلات مفيدة أخرى. يضاف إلى ذلك أنّ قولنا إنّ البيان عديم أشواط أو خالٍ منها (**loopless**) يعني أن الأضلاع المكررة مسموحة، ولكن أشواطًا غير مسموحة.

17.1.1. تعريف. ليكن G بيانًا عديم أشواط، بحيث إنّ مجموعة رؤوسه هي: $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ومجموعة أضلاعه هي: $E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. نعرّف مصفوفة التجاور (**adjacency matrix**) للبيان G، وتكتب $A(G)$ على أنها هي المصفوفة من الحجم $n{\times}n$، حيث تكون المدخلة $a_{i,j}$ هي عدد الأضلاع في G التي نقاطها الطرفية $\{v_i, v_j\}$. أمّا مصفوفة الوقوع (**incidence matrix**) $M(G)$ فنعرفها على أنها المصفوفة من الحجم $n \times m$ بحيث تكون المدخلة $m_{i,j}$ هي 1 إذا كانت v_i نقطة طرفية للضلع e_j وبخلاف ذلك تكون 0.

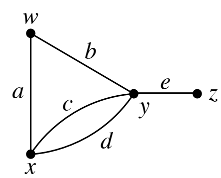
إذا كان الرأس v نقطة طرفية للضلع e، فإنّ v، و e تقع إحداهما على الأخرى (**incident**)، ونعرّف درجة (**degree**) الرأس v (في البيان عديم العرى) على أنها عدد الأضلاع الواقعة على هذا الرأس. تعتمد الطريقة المناسبة لتعريف مصفوفة كلّ من التجاور والوقوع، أو درجات الرؤوس للبيان الذي يحوي عرًى على التطبيق؛ لاحظ أنّ الدرسين 2.1 و 3.1 يناقشان ذلك.

18.1.1. ملاحظة. تحدّد مصفوفة التجاور بترتيب الرؤوس، وتجاور كلّ مصفوفة متماثلة (**symmetric**) $(a_{i,j} = a_{j,i})$ لكل i, j)، لاحظ أنّ مدخلات مصفوفة التجاور للبيان البسيط G تكون 0 أو 1، مع أصفار على القطر، إن درجة الرأس v هي مجموع المدخلات في الصف لـ v إما في $A(G)$ أو $M(G)$. ■

19.1.1. مثال. للبيان G أدناه الخالي من العرى، نجد مصفوفة كلّ من التجاور والوقوع الناتجتين عن ترتيب

الرؤوس: w، وx، وy، وz وترتيب الأضلاع: a و b و c و d و e ، حيث إنّ درجة الرأس y هي 4، وذلك من النظر إلى البيان، أو من جمع الصف لـِ y في أي من المصفوفتين. ■

$$\begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A(G) *G* *M(G)*

إن إيجاد مصفوفة التجاور لبيان ما يعطي ضمنيًّا تسمية للرؤوس بحسب ترتيب الصفوف؛ فالرأس i يقابل الصف والعمود i؛ إذ تخزين بيان في الحاسوب يتطلب تسمية الرؤوس.

ومع ذلك، نريد أن ندرس الخصائص (مثل خاصية الترابط) التي لا تعتمد على هذه الأسماء. حدسيًّا، إن الخصائص البنيوية لـ G وH ستكون هي نفسها إذا استطعنا إعادة تسمية الرؤوس في G باستخدام الرؤوس في H. وهكذا، فإن G سوف يصبح H. ونجعل التعريف مضبوطًا للبيانات البسيطة، لاحظ أنّ إعادة التسمية هي دالة من $(V)G$ إلى $V(H)$، بحيث يحدّد كلّ عنصر في $V(H)$ لعنصر واحد في $V(G)$. لذلك نقرنهما في صورة أزواج، وتكون مثل هذه الدالة مقابلة واحدًا لواحد (*one-to-one correspondence*)، أو تناظرًا (**bijection**) (انظر الملحق A). وعندما نقول: نقلب إعادة التسمية G إلى H، فإنّ هذا يماثل قولنا إنّ تناظر الرؤوس يحافظ على علاقة التجاور.

20.1.1. تعريف. التشاكل (**isomorphism**) من البيان البسيط G إلى البيان البسيط H هو تناظر $f: V(G) \to \mathrm{V(H)}$ بحيث $uv \in E(G)$ إذا وفقط إذا $f(u)\,f(v) \in E\ (H)$، ونقول إنّ " G يشاكل **isomorphic to** H " . ونكتب $\mathrm{G \cong H}$، إذا وُجِدَ تشاكل من G إلى H.

21.1.1. مثال. البيانان G و H المرسومان أدناه هما مساران على أربعة رؤوس، عرّف الدالّة $f: V(G) \to V(H)$ كما يأتي: $f(z) = c$ ،$f(y) = b$ ،$f(x) = d$ ،$f(w) = a$. لنبين أنّ f هو تشاكل، نفحص ما إذا كان f يحافظ على الأضلاع وغير الأضلاع. لاحظ أنّ إعادة كتابة $A(G)$ بوضع الصفوف في الترتيب w, y, z, x، وكذلك الأعمدة بهذا الترتيب، يعطي $A(H)$ كما هو موضّح أدناه، وهذا يؤكد أن f تشاكل.

تشاكل آخر يرسل w, x, y, z إلى c, b, d, a على الترتيب. ■

$$\begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w & y & z & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

22.1.1. ملاحظة : إيجاد التشاكلات. كما اقترح في المثال 21.1.1، فإن عرض مصفوفتي التجاور مع ترتيب الرؤوس بحيث تتطابق المصفوفتان، هي طريقة لاثبات أنّ البيانين متشاكلان، إضافة إلى أنّ تطبيق التبديلة σ على كل من صفوف المصفوفة $A(G)$ وأعمدتها له تأثير إعادة ترتيب رؤوس G. وإذا كانت المصفوفة الجديدة تساوي $A(H)$، فإن التبديلة تعطي تشاكلاً، ومن الممكن التحقق من المحافظة على علاقة التجاور دون كتابة المصفوفات.

لكي يكون تناظر الرؤوس تشاكلاً من G إلى H، فإن الصورة في H للرأس v من G يجب أن تمتلك خواص v نفسها في G. فعلى سبيل المثال، يجب أن تكون لهما الدرجة نفسها. ■

23.1.1. *ملاحظة : تشاكل للبيانات غير البسيطة، يمكن أن يعمم تعريف التشاكل إلى بيانات لها عرى وأضلاع متكررة، ولكن التعبير الدقيق يحتاج إلى لغة التعريف 2.1.1.

التشاكل (**isomorphism**) من G إلى H دالة تناظر f ترسل $V(G)$ إلى $V(H)$ و$E(G)$ إلى $E(H)$، بحيث يُرسل كل ضلع في G نقطتيه الطرفيتين u و v إلى ضلع في H نقطتاه الطرفيتان $f(u)$و $f(v)$.

لاحظ أنّ هذه الصفة التقنية لا تهمنا؛ لأننا سندرس التشاكلات في سياق البيانات البسيطة فقط. ■

بما أنّ H متشاكل مع G عندما يكون G متشاكلاً مع H، فغالبًا ما نقول إن "G و H متشاكلان" (نعني أحدهما للآخر)؛ حيث إنّ الصفة "تشاكل" تطبق فقط على أزواج من البيانات؛ فقولنا "G متشاكل" لا معنى له؛ (لأننا سنسأل بعد ذلك: "متشاكل مع ماذا؟"). وبالمثل، فمن الممكن أن نقول إن مجموعة من البيانات تكون "متشاكلة زوجًا زوجًا "(مأخوذة اثنين اثنين في الوقت نفسه)، ولكنّ القول بأن "هذه المجموعة من البيانات متشاكلة" ليس له معنى.

تعرّف العلاقة (**relation**) على المجموعة S على أنّها جمع من الأزواج المرتبة من S، وعلاقة التكافؤ (**equivalence relation**) علاقة منعكسة، ومتماثلة، ومتعدية (انظر الملحق A)، فعلى سبيل المثال: علاقة التجاور على مجموعة الرؤوس لبيان ما متماثلة، ولكنها ليست منعكسة، ونادرًا ما تكون متعدية. من جانب آخر، فإن علاقة التشاكل (**isomorphism relation**)، من الأزواج المرتّبة (G, H)، بحيث يكون G متشاكلاً مع H، ويحقق الخواص الثلاث جميعها.

24.1.1. قضية : علاقة التشاكل على أيّ مجموعة من البيانات (البسيطة)، تكون علاقة تكافؤ.

الإثبات : خاصية الانعكاس. التبديل المحايد على $V(G)$ هو تشاكل من G إلى نفسها. وعليه فإنّ $G \cong G$.

خاصية التماثل إذا كان $f : V(G) \to V(H)$ تشاكلاً من G إلى H، فإنّ f^{-1} هو تشاكل من H إلى G، لأنّ العبارة "$uv \in E(G)$ إذا وفقط إذا $f(u)f(v) \in E(H)$" تؤدي إلى أنّ "$xy \in E(H)$ إذا وفقط إذا $f^{-1}(x)f^{-1}(y) \in E(H)$". وهكذا، $G \cong H$ يؤدي إلى $H \cong G$.

خاصية التعدي. افّرض أنّ $g: V(G) \to V(H)$ و $f: V(F) \to V(G)$ تشاكلان، لاحظ أنّ "$uv \in E(F)$ إذا وفقط إذا $f(u)\ f(v) \in E(G)$"، وأيضًا "$xy \in E(G)$ إذا وفقط إذا $g(x)g(y) \in E(H)$"، بما أنّ f تشاكل، فلكلّ $xy \in E(G)$ نستطيع أن نجد $uv \in E(F)$، بحيث $f(u)=x$ و $f(v)=y$، وهذا يؤدي إلى أنّ "$uv \in E(F)$ إذا وفقط إذا $g(f(u))\ g(f(v)) \in E(H)$"؛ لذا، فإنّ التركيب $g\ o\ f$ هو تشاكل من F إلى H، وهكذا نكون أثبتنا أنّ $F \cong G$، و $G \cong H$ معًا يؤديان إلى $F \cong H$. ■

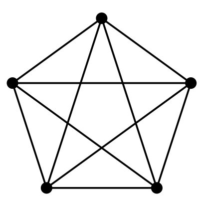
علاقة التكافؤ تجزئ المجموعة إلى صفوف تكافؤ؛ يحقق العنصران العلاقة إذا وفقط إذا كانا ينتميان إلى الصف نفسه.

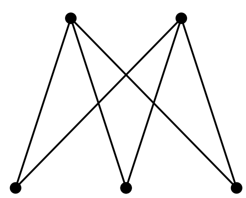
25.1.1. تعريف. صف التشاكل (**Isomorphism class**) للبيان، هو صف تكافؤ للبيانات تحت علاقة التشاكل، وتتشاكل المسارات على n من الرؤوس زوجًا زوجًا؛ لذا فإن مجموعة المسارات على n من الرؤوس تشكل صف تشاكل.

26.1.1. ملاحظة: البيانات "*غير الموسومة*" وصفوف التشاكل. عند مناقشة البيان G، يكون لدينا مجموعة ثابتة من الرؤوس، لكن تعليقاتنا البنيوية تُطبّق أيضًا على كل بيان متشاكل مع G، وتكون استنتاجاتنا مستقلة عن أسماء (أوسمة) الرؤوس. وهكذا، نستخدم التعبير غير الرسمي "البيانات غير الموسومة" ليعني صف التشاكل للبيانات. عندما نرسم بيانًا، فإنّ رؤوسه تسمى بمواقعها الفيزيائية، حتى لو لم نعطها أسماء أخرى. لذا فإنّ رسم البيان يكون عضوًا في صفه التشاكلي، وندعوه بيانًا فقط، وعندما نعيد رسم بيان لإظهار بعض أوجهه البنيوية فإننا نختار أنسب عضو في صف التشاكل، ونبقى نناقش "البيان غير الموسوم" نفسه. ■

حينما نناقش بنية البيانات، فمن المناسب أن نستعمل أسماء ورموزًا لصفوف التشاكلات المهمّة، وحيث يجب أن تكون هنالك مرونة في الرجوع إلى صف التشاكل أو لأيّ عنصر يمثّله.

27.1.1. تعريف. يرمز إلى المسار (غير الموسوم) أو الحلقة على n من الرؤوس بالرمزين P_n و C_n، على الترتيب؛ والحلقة- n هي حلقة على n من الرؤوس. ونعرّف البيان التام (**complete graph**) على أنه بيان بسيط، رؤوسه متجاورة زوجًا زوجًا؛ ويرمز إلى البيان التام (غير الموسوم) على n من الرؤوس بالرمز K_n، أمّا البيان الثنائي الفرع التام (**complete bipartite graph**) أو الثنائي العصبة (**biclique**) فيعرّف على أنه بيان ثنائي الفرع بسيط، بحيث يكون أيّ رأسين فيه متجاورين إذا وفقط إذا كانا في مجموعات مجزأة (جزئية) مختلفة. وعندما يكون حجم المجموعتين r و s، فإننا نستخدم الرمز $K_{r,s}$ للعصبة الثنائية (غير الموسومة).

K_5 

 $K_{2,3}$

28.1.1. *ملاحظة: عّرفنا البيان التام بوصفه بيانًا رؤوسه متجاورة زوجًا زوجًا، أمّا العصبة فهي مجموعة الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا في البيان. حيث يستعمل الكثير من المؤلفين المصطلحين بصورة متبادلة، ولكن الاختلاف يسمح لنا بمناقشة العصب باستخدام لغة المجموعات المستقلة نفسها.

في إطار ثنائي الفرع، نستخدم ببساطة "عصبة" لنختصر "البيان الثنائي الفرع التام". إن الاسم البديل "ثنائي العصبة" هو تذكير بأن البيان الثنائي الفرع التام لا يكون بيانًا تامًّا بوجه عام (التمرين 1). ■

29.1.1. ملاحظة. بيان بأيّ اسم آخر ... عندما نسمي بيانًا دون تسمية رؤوسه فإننا نعني صفة التشاكل غالبًا. تقنيًّا، "H بيان جزئي من G" وهذا يعني أنّ بعض البيانات الجزئية من G متشاكلة مع H (ونقول "G يحوي نسخة من H"). وهكذا، فإنّ C_3 بيان جزئي من K_5 (كلّ بيان تام على 5 رؤوس له 10 بيانات جزئية متشاكلة مع C_3) لكن ليس مع $K_{2,3}$.

بصورة مشابهة، فإنّ السؤال فيما إذا كان G "هو" C_n، يعني السؤال فيما إذا كان G مشاكلاً لحلقة على n من الرؤوس. ■

إنّ الخصائص البنيوية لبيان ما تُحدد بعلاقة التجاور. وعليه، تحفظ بالتشاكل. لاحظ أننا نستطيع إثبات أن G و H غير متشاكلين بإيجاد خاصية بنيوية يختلفان فيها. فإذا اختلفا في عدد الأضلاع، أو البيانات الجزئية، أو المتممات، إلخ، فلا يمكن أن يكونا متشاكلين.

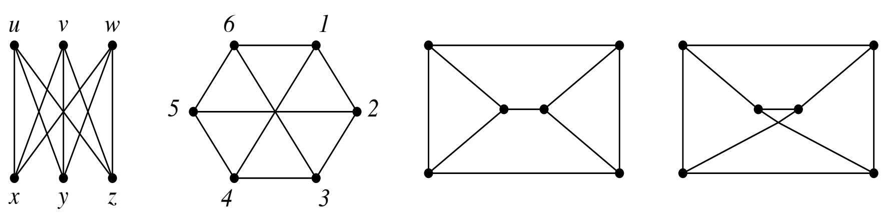
من جهة أخرى، فحص بعض الخصائص البنيوية وتشابهها لا يؤدي إلى أنّ G متشاكل مع H. لإثبات أن $G \cong H$، يجب أن نجد دالة تناظر $f: V(G) \to V(H)$ بحيث تحافظ على علاقة التجاور.

30.1.1. مثال. متشاكلة أم لا؟ لكل بيان أدناه ستة رؤوس، وتسعة أضلاع مترابطة، ولكن البيانات ليست متشاكلة زوجًا زوجًا.

لإثبات أنّ $G_1 \cong G_2$، نعطي أسماء للرؤوس، ونعيّن دالة تناظر، ونختبر محافظتها على علاقة التجاور. كما هو موسوم أدناه، فإنّ التناظر الذي يرسل u, v, w, x, y, z إلى 1،3،5،2،4،6 على الترتيب، هو تشاكل من G_1 إلى G_2. والدالة التي ترسل u, v, w, x, y, z إلى 6،4،2،1،3،5، على الترتيب، هي تشاكل آخر.

لاحظ أنّ كلًّا من G_1 و G_2 الثنائي الفرع هما رسمان لـ $K_{3,3}$ (كما في G_4)، البيان G_3 كذلك يحوي K_3، لذلك فإنّ رؤوسه لا تتجّزأ إلى مجموعتين مستقلتين. وعليه، فإنّ G_3 لا يكون متشاكلاً مع البقية.

نستطيع في بعض الأحيان أن نفحص التشاكل سريعًا باستخدام المتممات، ويكون البيانان البسيطان G و H متشاكلين إذا وفقط إذا كانت متمّماتهما متشاكلة (التمرين 4). هنا $\overline{G_1}$، $\overline{G_2}$، $\overline{G_4}$، جميعها تتكوّن من حلقتين منفصلتين على 3 رؤوس، وهي غير مترابطة، أمّا $\overline{G_3}$ فهي حلقة على 6 رؤوس، وهي مترابطة.



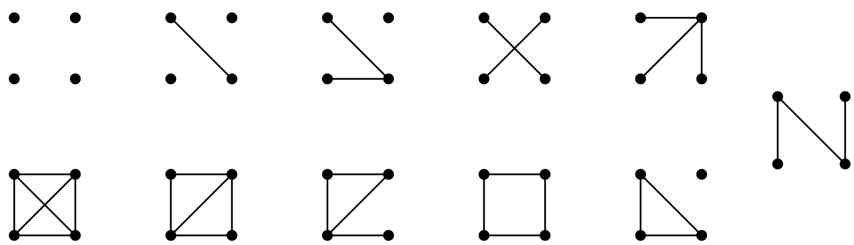
G_1 G_2 G_3 G_4

31.1.1. مثال. عدد الأشكال ذوات n من الرؤوس، عندما نختار رأسين من مجموعة حجمها n من الرؤوس نستطيع أن نختار واحدًا ثم نختار الآخر ولكن لا تهتم بالترتيب، وهكذا يكون عدد طرق الاختيار هو (n(n-1)/2) (الرمز لعدد طرق اختيار k من العناصر من n عنصر هو $\binom{n}{k}$، ويقرأ "n فوق k" (n choose k).

وتسمى هذه الأعداد معاملات ذات الحدين (**binomial coefficients**)؛ وللمزيد من المعلومات؛ انظر الملحق A.

في البيان البسيط على مجموعة الرؤوس X ذات الحجم n، لاحظ أنّ كلّ زوج من الرؤوس يمكن أن يشكل أو لا يشكل ضلعًا، فضلًا عن أنّ اختيار كل زوج يعطي وصفًا للبيان. لذلك فإنّ عدد البيانات البسيطة مع مجموعة الرؤوس X هو $2^{\binom{n}{2}}$.

فعلى سبيل المثال، يوجد 64 بيانًا بسيطًا على مجموعة ثابتة تحوي أربعة رؤوس، وتشكل هذه البيانات 11 صف تشاكل فقط. وفي الرسم أدناه، تظهر الصفوف في صورة أزواج متتامة؛ لاحظ أن P_4 فقط يتشاكل مع متممته، وأنّ لصفوف التشاكلات أحجامًا مختلفة، لذلك لا نستطيع عدّ صفوف التشاكلات للبيانات البسيطة على n رأسًا بتقسيم على حجم الصف. ■



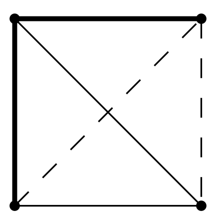
التفكيك والبيانات الخاصة (Decomposition and Special Graphs)

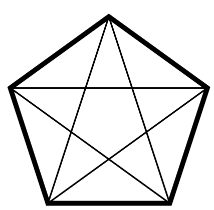
المثال $p_4 \cong \overline{p}_4$ يقترح عائلة من مسائل البيانات.

32.1.1. تعريف. يكون البيان ذاتي التتام (**self – complementary**) إذا كان متشاكلاً مع متممته. ويعرف تفكيك (**decomposition**) البيان على أنه قائمة من البيانات الجزئية، بحيث يظهر كل ضلع مرة واحدة بالضبط في إحدى البيانات الجزئية في القائمة.

يكون البيان H على n رأسًا ذاتي التتام إذا وفقط إذا وُجد لـ K_n تفكيك يتكوّن من نسختين من H.

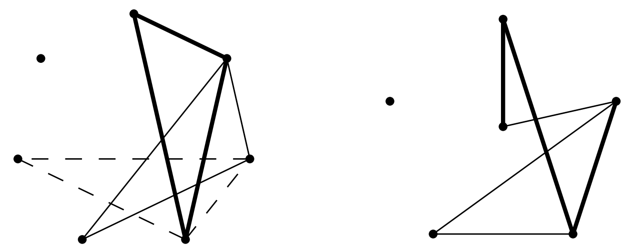
33.1.1. مثال. نستطيع أن نحلل K_5 إلى حلقتين من الدرجة 5. وعليه، تكون الحلقة من الدرجة 5 ذاتية التتام. وكل بيان له n رأسًا، ومتممته يفككان K_n. وكذلك فإنّ $K_{1,n-1}$ و K_{n-1} يفككان K_n، وذلك على الرغم من أنّ أحد البيانين الجزئيين يحذف رأسًا. ونعرض في اليمين في أدناه تفكيكًا لـ K_4 باستخدام ثلاث نسخ من P_3. وتأخذ التمارين 31 – 39 تفكيك البيانات في الحسبان. ■





34.1.1. *مثال. يعدّ السؤال حول أي البيانات التامة تتفكك إلى نسخ من K_3 سؤالاً أساسيًّا في نظرية التصاميم التوافقية (theory of combinatorial designs). ونقترح على اليسار أدناه تفكيكًا لـ K_7، حيث إنّ تدوير المثلث على سبعة مواقع يستخدم كل ضلع مرة واحدة بالضبط.

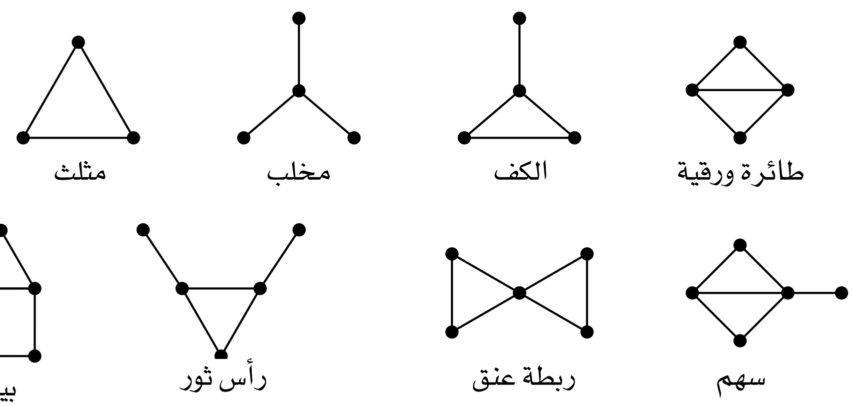
ونقترح على اليمين تفكيكًا لـ K_6 إلى نسخ من P_4. إنّ وضع رأس واحد في المركز يصنف الأضلاع إلى ثلاثة أنواع هي: الحلقة الخارجيةَ على 5 رؤوس، والحلقة الداخلية على 5 رؤوس من هذه الرؤوس، والأضلاع المرتبطة بالرأس المركزي. لاحظ أنّ كل مسار على 4 رؤوس في التفكيك يستخدم ضلعًا واحدًا من كل نوع؛ وندور الصورة لنحصل على المسار التالي. ■



ننظر إلى أيّ نسخة من K_3 بصفتها مثلثًا، ومن المناسب إعطاء أسماء مختصرة للبيانات التي تتكرر في مناقشاتنا كثيرًا.

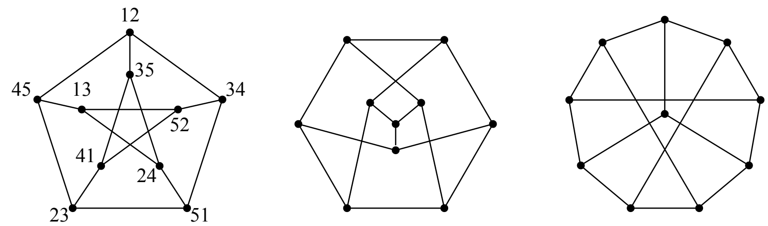
35.1.1 مثال. بيان معرض الوحوش (*The graph menagerie*). إن اسم (الاسم الجذاب) البيان عادة ما يأتي من رسم البيان؛ حيث نستخدم أيضًا مثل هذه الأسماء لأيّ رسوم أخرى للبيان، وعليه تكون أفضل رؤية كاسم لصف التشاكل. وقد أعطينا الشكل أدناه أسماءً لبعض البيانات التي لها على الأكثر خمسة رؤوس.

البيانات الأكثر أهمية من بين هذه البيانات هي المثلث **(triangle)** (K_3)، والمخلب **(claw)** ($K_{1,3}$)، وفي بعض الأحيان نناقش الكف ($K_{1,3}+e$) **(paw)** والطائرة الورقية **(kite)** ($K_4 - e$)؛ أما البيانات الأخرى فتظهر بتكرار أقل، لاحظ أنّ متممات البيانات الموجودة في الصف الأول غير مترابطة، فمُتمّمة المنزل هي P_5، ومتمّمة الثور (bull) هي نفسها، ويسأل التمرين 39: أيّ هذه البيانات يمكن استخدامه لتفكيك K_6؟ ■



لكي نفكّك H إلى نسخ من G، يجب أن يكون عدد الأضلاع في G يقسم عدد الأضلاع في H. وهذا غير كافٍ؛ لأنّ K_5 لا تتفكك إلى نسختين من الطائرة الورقية (K_4–e).

36.1.1. تعريف. بيان بيترسون (**Petersen graph**) هو البيان البسيط الذي تكون رؤوسه مجموعات جزئية ثنائية العناصر من مجموعة خماسية العناصر، في حين تكون أضلاعه أزواج المجموعات الجزئية الثنائية العناصر المنفصلة.



رسمنا في الأعلى بيان بيترسون بثلاث طرق، إذ إنّ هذا البيان مفيد جدًّا في كثير من الأحيان لدرجة أنه خُصّصَ كتابٌ بأكمله له ([Holton-Sheehan [1993])، وعلاوة على أنّ خصائصه تستنبط من علاقة التجاور التيَ استخدمت بوصفها تعريفًا له.

37.1.1. مثال. تركيب (بنية) بيان بيترسون. باستخدامنا $[5] = \{1، 2، 3، 4، 5\}$ بصفتها مجموعة خماسية العناصر، نكتب الزوج $\{a, b\}$ في صورة ab، أو ba، وبما أنّ 12 و 34 منفصلان، لهذا تكون هذه الرؤوس متجاورة عند تشكيل البيان، أمّا 12 و23 فليسا كذلك. لاحظ أنه لكل مجموعة ثنائية ab، هنالك ثلاث طرق لاختيار مجموعة ثنائية العناصر من العناصر الثلاثة المتبقية في [5]. لذلك فإنّ درجة كل رأس 3.

يتكوّن بيان بيترسون من حلقتين منفصلتين على 5 رؤوس إضافة إلى أضلاع لربط الرؤوس في هاتين الحلقتين. ومن تعريف خاصية الانفصال، نجد أنّ 12، 34، 51، 23، 45 على الترتيب، هي رؤوس لحلقة على 5 رؤوس، وبطريقة مشابهة تضبط بقية الرؤوس 13، 52، 41، 35، 24. لاحظ أيضًا أن 13 يكون متجاورًا مع 45 في حين يكون 52 متجاورًا مع 34، وهكذا دواليك، كما هو مبيّن على اليسار في الأعلى.

نستخدم هذا الاسم حتى عندما لا نعيّن عناوين الرؤوس؛ وفي الأساس، نستخدم ''بيان بيترسون'' بوصفه اسمًا لصف تشاكل. ولنبينّ أنّ البيانات في الأعلى متشاكلة معًا زوجًا زوجًا، فيكفي أن نسمي الرؤوس في كل بيان باستخدام مجموعات فرعية ثنائية العناصر من [5]، وحيث تكون علاقة التجاور في كل حالة هي خاصية الانفصال (تمرين 24). ■

38.1.1. قضية. إذا كان هنالك رأسان غير متجاورين في بيان بيترسون فإنه يوجد لهما بالضبط جار مشترك واحد فقط.

الإثبات: الرؤوس غير المتجاورة مجموعات ثنائية تتشارك في عنصر واحد؛ وحجم اتحادهما S يساوي 3، إضافة إلى أنّ الرأس المجاور لهما هو مجموعة ثنائية منفصلة عن كليهما، وبما أننا نختار المجموعات الثنائية من $\{1، 2، 3، 4، 5\}$، فتوجد مجموعة ثنائية واحدة بالضبط منفصلة عن S. ■

39.1.1. تعريف. نُعرّف الخصر (**girth**) للبيان الذي يمتلك حلقة على أنه طول أقصر حلقة في هذا البيان، أما البيان الذي ليس فيه حلقات فيكون خصره لا نهائيًّا.

40.1.1. نتيجة. خصر بيان بيترسون يساوي 5.

الاثبات: هذا البيان بسيط. ولذلك، ليس له حلقة على رأس واحد ولا حلقة على رأسين، لاحظ أن

الحلقة على ثلاثة رؤوس تتطلب ثلاثة أزواج من المجموعات الثنائية المنفصلة زوجًا زوجًا، وهذا لا يمكن حدوثه بين 5 عناصر، لاحظ أنّ الحلقة على أربعة رؤوس في غياب حلقة على ثلاثة رؤوس تتطلب رؤوسًا غير متجاورة مع رأسين جارين مشتركين، وهذا ما تمنعه القضية 38.1.1. وفي النهاية، نجد أنّ الرؤوس: 12، 34، 51، 23، 45 تعطينا حلقة خماسية، وبذلك يكون الخصر 5. ■

إن بيان بيترسون متماثل بشدة؛ حيث إنّ كلّ تبديلة من {1، 2، 3، 4، 5} تولّد تبديلة على المجموعات الجزئية الثنائية، وتحافظ على علاقة خاصية الانفصال. وعليه، فيوجد على الأقل $5! = 120$ تشاكلاً من بيان بيترسون إلى نفسه، ويؤكد التمرين 43 أنه لا يوجد غيرها.

41.1.1.* تعريف. التشاكل الذاتي (**Automorphism**) للبيان G، هو تشاكل من G إلى G. يكون البيان G متعدّي الرؤوس (*Vertex–transitive*) إذا وُجد لكلّ زوج $u,v \in V(G)$ تشاكل ذاتي يرسل u إلى v.
لاحظ أنّ التشاكلات الذاتية لـ G هي التباديل لـ $V(G)$ التي يمكن تطبيقها على كلّ من صفوف $A(G)$ وأعمدتها دون أن تغيّر $A(G)$.

42.1.1.* مثال. التشاكلات الذاتية. ليكن G هو المسار على مجموعة الرؤوس {1،2،3،4} ومجموعة الأضلاع {12، 23، 34}. يوجد لهذا البيان تشاكلان ذاتيان، هما: التبديل المحايد والتبديل الذي يبدل 1 مع 4 ويبدل 2 مع 3، ولاحظ أنّ تبادل الرؤوس 1 و 2 لا يشكل تشاكلاً ذاتيًّا لـ G، وذلك على الرغم من أنّ G يتشاكل مع البيان الذي تكون مجموعة رؤوسه {1، 2، 3، 4} ومجموعة أضلاعه {21، 13، 34}. ولاحظ في البيان $K_{r,s}$، أنّ تبديل الرؤوس في إحدى المجموعات المجزأة، لا يغيّر مصفوفة التجاور؛ وهذا يعطي $r!s!$ تشاكلاً، وعندما يكون $r = s$، فإننا نستطيع أن نُبادل المجموعات المجزأة؛ ولاحظ أنه يوجد $2(t!)^2$ تشاكلاً لـ $K_{t,t}$.

يكون البيان الثنائي العصبة $K_{r,s}$ متعدّي الرؤوس إذا وفقط إذا كان $r=s$. وإذا كان $n > 2$، فإن P_n لا يكون متعدي الرؤوس، ولكن كل حلقة تكون متعدية الرؤوس. لاحظ أيضًا أنّ بيان بيترسون متعدّي الرؤوس. ■

في البيان متعدّي الرؤوس، نستطيع أن نثبت عبارة ما حول كلّ رأس بإثبات تلك العبارة لرأس واحد؛ لأن هذه الخاصية تضمن أنّ البيان "يشبه بعضه بعضًا" عند كل رأسّ.

تمارين (Exercises)

عمومًا، لاحظ أنّ حلول المسائل يتطلب كتابة تعليل واضح في جمل مفيدة، ولاحظ كذلك أنّ العلامات على المسائل لها المعاني الآتية:

"(−)" = الأسهل أو الأقصر من المعظم.

"(+)" = الأصعب أو الأطول من المعظم.

"(!)" = لها فائدة خاصة أو تمرين تثقيفي وتعليمي.

"(*)" = يشمل مفاهيم معينة اختيارية في السياق.

تبدأ تمارين الدروس من المسائل الأبسط لفحص الفهم، وتنتهي مع خط من النقاط. أما المسائل المتبقية، فتتبع الترتيب الموجود في النص.

1.1.1. (−) حدّد أيّ البيانات الثنائية الفرع التامة هي بيانات تامة.

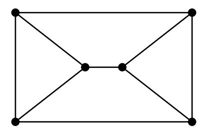
2.1.1. (-) اكتب الاحتمالات الممكنة جميعها لمصفوفات التجاور، ومصفوفات الوقوع للمسارات التي لها ثلاثة رؤوس. واكتب كذلك مصفوفة تجاور لمسار له ستة رؤوس، ولحلقة لها ستة رؤوس.

3.1.1. (-) باستخدام القوالب المستطيلة التي تكون مدخلاتها جميعها متساوية، اكتب مصفوفة التجاور لـِ $K_{m,n}$.

4.1.1. (-) من تعريف التشاكل، أثبت أنّ $G \cong H$ إذا وفقط إذا كان $\overline{G} \cong \overline{H}$.

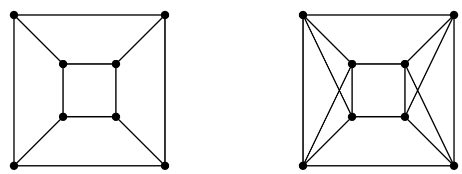
5.1.1. (-) أثبت أو انقض ما يأتي: إذا كانت درجة كلّ رأس في بيان بسيط G تساوي 2، فإنّ G يكون حلقة.

6.1.1. (-) بين ما إذا كان البيان المرسوم أدناه يتفكّك إلى نسخ من P_4.



7.1.1. (-) أثبت أنّ البيان الذي له أكثر من ستة رؤوس ذات درجة فردية، لا يمكن أن يتفكك إلى ثلاثة مسارات.

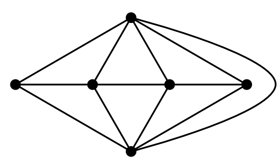
8.1.1. (-) أثبت أنّ البيان على 8 من الرؤوس الموجود على اليسار أدناه، يتفكك إلى نسخ من $K_{1,3}$، وكذلك إلى نسخ من P_4.



9.1.1. (-) أثبت أن البيان عن اليمين أعلاه متشاكل مع متمّمة البيان عن اليسار.

10.1.1. (-) أثبت أو انقض ما يأتي: يجب أن تكون متمّمة البيان البسيط غير المترابط بيانًا مترابطًا.

11.1.1. حدّد أكبر حجم لكلّ من عصبة وحجم لمجموعة مستقلة في البيان أدناه.



12.1.1. حدّد ما إذا كان بيان بيترسون ثنائي الفرع، وجد حجم أكبر مجموعة مستقلة لهذا البيان.

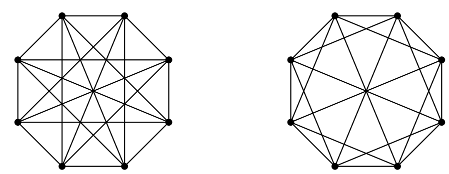
13.1.1. ليكن G البيان الذي تكون مجموعة رؤوسه هي المرتّبات من الدرجة k وإحداثياتها مأخوذة من المجموعة $\{0،1\}$، بحيث إنّ x يجاور y عندما يختلفان في موقع واحد بالضبط. حدّد ما إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع.

14.1.1. (!) أثبت أنّ إزالة الزوايا المربّعة المائلة من لوحة الفاحص التي حجمها 8 في 8 تترك لوحة جزئية، لا يمكن تجزئتها إلى مستطيلات من الحجم 1×2 و 2×1. وباستخدام التعليل نفسه، جد عبارة عامة حول البيانات الثنائية الفرع جميعها.

15.1.1. خذ العائلات الأربع للبيانات الآتية في الحسبان:

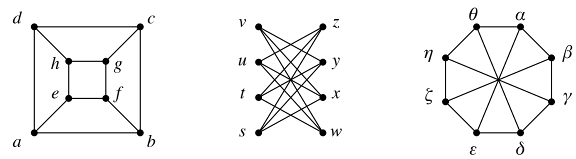
$A =$ {مسارات}، $B =${حلقات}، $C =$ {بيانات تامة} $D =$ {بيانات ثنائية الفرع}. لكلّ زوج من هذه العائلات، حدّد صفوف التشاكلات جميعها للبيانات التي تنتمي إلى عائلتين.

16.1.1. حدّد ما إذا كان البيانان أدناه متشاكلين.

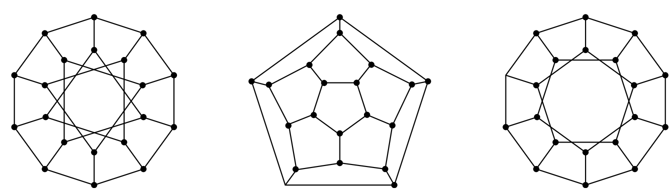


17.1.1. حدّد عدد صفوف التشاكل للبيانات البسيطة التي لها سبعة رؤوس، بحيث تكون درجة كل رأس 4.

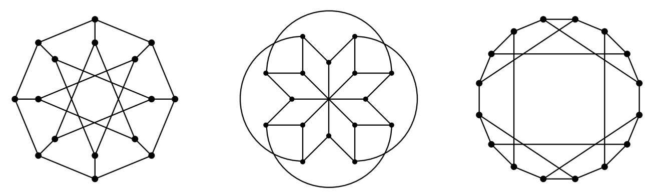
18.1.1. حدّد أيّ أزواج البيانات المرسومة أدناه متشاكلة؟



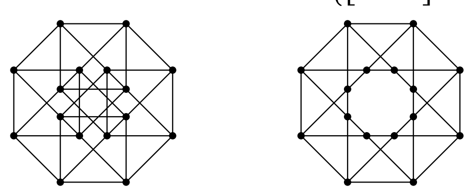
19.1.1. حدد أيّ أزواج البيانات أدناه متشاكلة؟



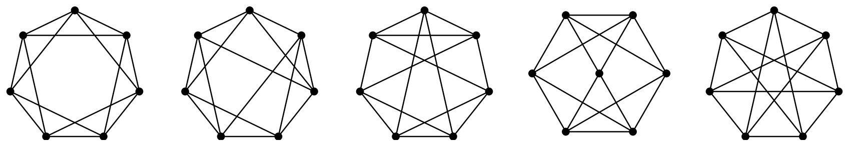
20.1.1. حدد أيّ أزواج البيانات المرسومة أدناه متشاكلة؟



21.1.1. حدّد ما إذا كان البيانان أدناه ثنائيي الفرع، وما إذا كانا متشاكلين. (البيان الموجود على اليسار يظهر على غلاف Watkins – Wilson [1990]).



22.1.1. (!) حدّد أيّ أزواج البيانات المرسومة أدناه تكون متشاكلة، واعرض الإثبات باختبار أقل عدد ممكن من الأزواج.

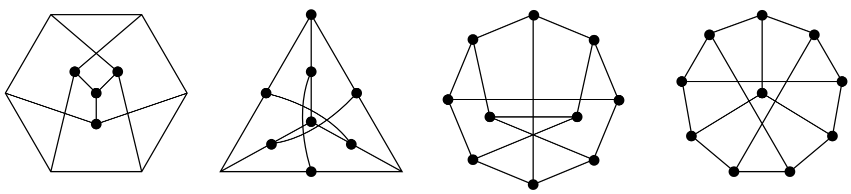


23.1.1. في كلّ صف أدناه، حدّد أقلّ عدد ممكن n بحيث توجد بيانات غير متشاكلة لها n من الرؤوس، ولها القائمة نفسها من درجات الرؤوس:

أ) البيانات جميعها. ب) البيانات التي لا تحوي عرًى. ج) البيانات البسيطة.

(مساعدة: بما أنّ كلّ صف يحوي الصف الذي يليه، فإنّ الإجابات تشكل ثلاثية غير متناقصة. للفرع (ج)، استخدم قائمة صفوف التشاكلات في المثال 31.1.1)

24.1.1. (!) أثبت أنّ البيانات المرسومة أدناه جميعها رسوم لبيان بيترسون (التعريف 36.1.1). (مساعدة: استخدم تعريف خاصية الانفصال للتجاور)



25.1.1. (!) أثبت أنه لا توجد لبيان بيترسون حلقة طولها 7.

26.1.1. (!) ليكن G بيانًا خصره 4، بحيث تكون درجة كلّ رأس من رؤوسه k. أثبت أنه يوجد لـِ G على الأقل $2k$ رأسًا، وحدّد مثل هذه البيانات جميعها التي لها $2k$ رأسًا بالضبط.

27.1.1. (!) ليكن G بيانًا خصره 5. أثبت أنه إذا كانت درجة كلّ رأس في G تساوي k على الأقل، فإن لـِ G على الأقلّ k^2+1 رأسًا. وعندما $k=2$ و $k=3$، جد بيانًا واحدًا له k^2+1 رأسًا بالضبط.

28.1.1. (+) البيان الفردي O_k. إنّ رؤوس البيان O_k، هي مجموعات جزئية من $\{1، 2، \ldots، 2k+1\}$ تحوي k عنصرًا، ويكون الرأسان متجاورين إذا وفقط إذا كانا مجموعتين منفصلتين. لذلك، فإنّ O_2 هو بيان بيترسون. أثبت أنّ خصر O_k هو 6 إذا كان $k \geq 3$.

29.1.1. أثبت أنّ كل مجموعة من ستة أشخاص تحوي (على الأقلّ) ثلاثة أشخاص متعارفين تمامًا أو ثلاثة أشخاص غرباء تمامًا.

30.1.1. ليكن G بيانًا بسيطًا له مصفوفة التجاور A، ومصفوفة الوقوع M. أثبت أنّ درجة V_i هي المدخلة i في قطر A^2 وفي MM^T. ماذا تقول المدخلات في الموقع (i, j) في A^2 و MM^T عن G؟

31.1.1. (!) أثبت أنه يوجد بيان ذاتي التتام على n من الرؤوس، إذا وفقط إذا كانت n أو $n-1$ تقبل القسمة على 4. (مساعدة: عندما تقبل n القسمة على 4، عمم بنية P_4 بتقسيم الرؤوس إلى أربع مجموعات، وإذا كانت $n \equiv 1 \bmod 4$، فأضف رأسًا للبيان المنشأ على $n-1$ من الرؤوس).

32.1.1. حدد أي ثنائي العصب يتفكك إلى بيانين جزئيين متشاكلين؟

33.1.1. لـ $n = 7$ ، $n = 5$ ، و $n = 9$ ، فكّك K_n إلى نسخ من C_n.

34.1.1. (!) فكّك بيان بيترسون إلى ثلاثة بيانات جزئية مترابطة بحيث تكون متشاكلة زوجًا زوجًا، وكذلك فكّكه إلى نسخ من P_4.

35.1.1. (!) أثبت أنّ K_n يتفكّك إلى ثلاثة بيانات جزئية متشاكلة زوجًا زوجًا، إذا وفقط إذا كان $n+1$ لا يقبل القسمة على 3. (مساعدة: للحالة حيث n تقبل القسمة على 3، قسم الرؤوس إلى ثلاث مجموعات متساوية الحجم).

36.1.1. أثبت أنه إذا كان K_n يتفكك إلى مثلثات، فإنّ $n-1$ أو $n-3$ تقبل القسمة على 6.

37.1.1. ليكن G بيانًا بحيث تكون درجة كل رأس فيه 3. أثبت أنّ G لا يتفكك إلى مسارات لكل منها خمسة رؤوس على الأقل.

38.1.1. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا، بحيث تكون درجة كل رأس فيه تساوي 3. أثبت أن G يتفكك إلى مخالب إذا وفقط إذا كان G ثنائي الفرع.

39.1.1. (+) حدّد أيّ البيانات في المثال 35.1.1 يمكن أن يستخدم ليشكل تفكيكًا لـ K_6 إلى بيانات جزئية متشاكلة زوجًا زوجًا. (مساعدة: كلّ بيان غير مستثنًى بشرطٍ ما على قابلية القسمة يصلُح.)

40.1.1. (*) ما عدد التشاكلات الذاتية لـ P_n، وC_n، وK_n؟

41.1.1. (*) أنشئ بيانًا بسيطًا على ستة رؤوس له تشاكل ذاتي واحد فقط، وأنشئ بيانًا بسيطًا له ثلاثة تشاكلات ذاتية تمامًا. (مساعدة: أضف مسارات إلى حلقة لتحصل على دوران ثلاثي الطية دون تقلبات (شقلبات).

42.1.1. (*) تحقّق من أنّ مجموعات التشاكلات الذاتية للبيان G تملك الخصائص الآتية:

a) تركيب تشاكلين ذاتيين هو تشاكل ذاتي.

b) التبديل المحايد تشاكل ذاتي.

c) معكوس التشاكل الذاتي أيضًا تشاكل ذاتي.

d) تركيب التشاكلات الذاتية يحّقق الخاصية التجميعية.

(تعليق: لذلك فإنّ مجموعة التشاكلات الذاتية تحقق خصائص الزمرة).

43.1.1. (*) التشاكلات الذاتية لبيان بيترسون. لنأخذ بيان بيترسون كما عرّف بخاصية الانفصال للمجموعات الثنائية من $\{1، 2، 3، 4، 5\}$. أثبت أنّ كلّ تشاكل ذاتي يرسل الحلقة ذات الرؤوس 12، 34، 51، 23، 45 إلى الحلقة ذات الرؤوس ab, cd, ea, bc, de يُحددّ بتبديل للمجموعة $\{1، 2، 3، 4، 5\}$ والذي يأخذ 1، 2، 3، 4، 5 إلى a, b, c, d, e على الترتيب. (تعليق: هذا يؤدي إلى أنه يوجد 120 تشاكلاً ذاتيًا).

44.1.1. (*) يوجد لبيان بيترسون تماثلات أكثر من مجرد تعدّي رؤوس، ليكن $P = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ و$Q = (v_0، v_1, v_2, v_3)$ مسارين بثلاثة أضلاع في بيان بيترسون. أثبت أنه يوجد بالضبط تشاكل ذاتي واحد لبيان بيترسون، بحيث يرسل u_i إلى v_i لكل $i = 0، 1، 2، 3$. (مساعدة: استخدم وصف خاصية الانفصال.)

45.1.1. (*) أنشئ بيانًا على 12 رأسًا، بحيث تكون درجة كل رأس 3، والتشاكل الذاتي الفريد عليه هو التشاكل المحايد.

46.1.1. (*) تعدّي الأضلاع. يكون البيان G متعدّي الأضلاع إذا وُجد لكل $e, f \in E(G)$ تشاكل ذاتي على G يرسل النقاط الطرفية للضلع e إلى النقاط الطرفية للضلع f (في أي ترتيب). أثبت أنّ البيانات في التمرين 21.1.1 متعدية الرؤوس ومتعدّية الأضلاع كذلك. (تعليق: البيانات التامة، وثنائية العصبة، وبيان بيترسون متعدية الأضلاع.)

47.1.1. (*) متعدّي الأضلاع مقابل متعدّي الرؤوس:

a) افترض أنه يمكن الحصول على البيان G من K_n $(n \geq 4)$ بأن يحل محل كلّ ضلع في K_n مسار يتكون من ضلعين؛ وذلك بإضافة رأس جديد درجته 2. أثبت أنّ G متعدّي الأضلاع ولكنه غير متعدّي الرؤوس.

b) افترض أنّ G متعدي الأضلاع، ولكنه غير متعدّي الرؤوس، وليس له رؤوس درجتها 0، أثبت أنّ G ثنائي الفرع.

c) أثبت أنّ البيان في التمرين 6.1.1 هو متعّدي الرؤوس، ولكنه ليس متعدي الأضلاع.

2.1 المسارات، والحلقات، والمسارب (Paths,Cycles, and Trails)

في هذا الدرس، نعود إلى مسألة جسور كونجزبرج، لتحديد إمكانية السير على أضلاع البيان جميعها. وسوف نطوّر أيضًا بعض الخصائص المفيدة للربط والمسارات والحلقات.

قبل أن نبدأ بهذا، دعنا نستذكر إحدى طرائق الإثبات المهمة، حيث يمكن أن نثبت العديد من العبارات في نظرية البيان باستخدام مبدأ الاستقراء. وبالنسبة إلى القراء الذين ليس لديهم إلمام بالاستقراء، فعليهم قراءة المادة حول هذا الأسلوب من الإثبات في ملحق A، وسوف نصف هنا صورة الاستقراء الذي سنستخدمه كثيرًا، وذلك لكي يألف القارئ الإثبات.

1.2.1 نظرية. (مبدأ الاستقراء القوي) (Strong Principle of Induction). لتكن $P(n)$ عبارة حول العدد الصحيح n. إذا تحقق الشرطان التاليان، فإنّ العبارة $P(n)$ تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب:

1) $P(1)$ صحيحة.

2) لكل $n > 1$، "$P(k)$ صحيحة لكل $1 \leq k < n$" تؤدي إلى أن "$P(n)$ صحيحة".

الإثبات. لنفترض خاصية حُسن الترتيب (**Well Ordering Property**) للأعداد الصحيحة الموجبة (كل مجموعة غير خالية من الأعداد الصحيحة الموجبة تحوي عنصرًا أدنى). الآن، افترض أن $P(n)$ غير صحيحة لبعض قيم n. من خاصية حُسن الترتيب، يوجد عنصر أدنى n بحيث تكون $P(n)$ غير صحيحة. العبارة (1) تضمن أنّ هذه القيمة لا يمكن أن تكون 1. أمّا العبارة (2)، فتضمن أنّ هذه القيمة لا يمكن أن تكون أكبر من 1، وهذا التناقض يؤدي إلى أنّ العبارة $P(n)$ متحققة للأعداد الصحيحة الموجبة n.■

ولكي نطبق الاستقراء، يتعين علينا التحقّق من العبارتين (1) و(2) لمتتالية العبارات خاصتنا؛ حيث إنّ تحقيق العبارة (1) هو الخطوة الأساس (**basis Step**) في الإثبات؛ أما تحقيق العبارة (2) فهو خطوة الاستقراء (**induction step**). في حين أنّ العبارة "$P(k)$ صحيحة لكل $k < n$"، فهي فرضية الاستقراء (**induction hypothesis**)؛ وذلك لأنها فرضية الاقتضاء، والتي تثبت في خطوة الاستقراء، ويسمى المتغيّر الذي يشير إلى متتالية العبارات بوسيط الاستقراء (**induction parameter**).

لاحظ أنّ وسيط الاستقراء يمكن أن يكون دالة صحيحة، مثل عدد الرؤوس أو عدد الأضلاع في بيان ما وذلك بحسب مسألتنا، ونقول إننا نستخدم "استقراءً على n" عندما يكون وسيط الاستقراء هو n.

هناك عدة طرق للتعبير عن براهين الاستقراء، فنستطيع أن نبدأ عند الصفر لإثبات عبارة حول الأعداد الصحيحة غير السالبة. وعندما يكون إثبات $P(n)$ في خطوة الاستقراء باستعمال $P(n-1)$ من فرضية الاستقراء، فإنّ هذا الأسلوب يدعى بالاستقراء "العادي"؛ أما استعمال العبارات السابقة جميعها فيدعى الاستقراء "القوي"، لاحظ أنه من النادر أن نميّز بين الاستقراءين القوي والعادي؛ وهذان النوعان متكافئان (انظر الملحق A).

يتعلم معظم الطلبة الاستقراء العادي أولاً بالأسلوب الآتي: 1) تحقق أنّ $P(n)$ صحيحة عندما $n = 1$ ، و 2)، أثبت أنه إذا كانت $P(n)$ صحيحة عندما n تساوي k، فإنّ $P(n)$ هي أيضًا صحيحة عندما n تساوي $k+1$. إثبات $P(k+1)$ من $P(k)$ لكل $k \geq 1$ يكافئ إثبات $P(n)$ من $P(n-1)$ لكل $n > 1$.

عندما نركّز على إثبات العبارة لقيمة الوسيط n في خطوة الاستقراء، فإننا لا نحتاج أن نقرر في البداية ما إذا كنا سنستخدم الاستقراء القوي أو الاستقراء العادي، فضلاً عن أن اللغة أبسط أيضًا؛ لأننا نتجنّب استحداث اسم جديد للوسيط. وسوف نشرح لماذا يكون هذا الأسلوب أقل عُرضةً للخطأ في الجزء 3.1.

الربط في البيانات (Connection in Graphs)

كما عرفنا في التعريف 1.1. 15، فإن المسار والحلقة هما بيانان؛ فضلاً عن أنّ المسار في البيان G هو بيان جزئي من G، بحيث يكون مسارًا (مشابهًا لذلك الحلقات)، وسوف نقدم تعريفات إضافية لنمذجة بقية الخصائص في البيانات. فمثلاً، ربما يريد سائح يتجّول في مدينة (أو راجل في مدينة كونجزبرج) أن تتكرر الرؤوس، ولكنه يتجنب تكرار الأضلاع. وكذلك فإنّ ساعي البريد يريد أن ينقل البريد إلى المنازل على جانبي الطريق، وعليه يتعيّن أن يقطع كلّ ضلع مرتين.

2.2.1. تعريف. الممر (**walk**) قائمة من الرؤوس والأضلاع $v_0, e_1, v_1,\ldots, e_k, v_k$، بحيث إنّ v_i و v_{i-1} النقاط الطرفية للضلع e_i ، لكل $1 \leq i \leq k$، ونعرّف المسرب (**trail**) على أنه ممرّ دون تكرار أضلاع. إن الممر من u إلى v (**u,v-walk**) أو المسرب من u إلى v (**u,v-trail**) يبدأ بالرأس u وينتهي بالرأس v؛ وهذه هي نقاطه الطرفية (**endpoints**). لاحظ أن المسار من u إلى v هو مسار درجة رؤوسه (نقاطه الطرفية) u, v تساوي 1؛ أمّا باقي الرؤوس، فهي رؤوس داخلية (**internal vertices**).

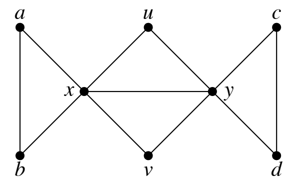
أما طول (**length**) الممر والمسرب والمسار أو الحلقة فهو عدد أضلاعه (أضلاعها)، ويكون الممر أو المسرب مغلقًا (**closed**) إذا كانت نقاطه الطرفية هي الرأس نفسه.

3.2.1. مثال. في بيان كونجزبرج (المثال 1.1.1)، القائمة $x, e_2, w, e_5, y, e_6, x, e_1, w, e_2, x$ هي ممر مغلق طوله 5؛ وبما أنه يكرر الضلع e_2، فإنه ليس مسربًا، لاحظ أنّ حذف آخر ضلع وآخر رأس يعطي مسربًا بطول 4؛ وهذا المسرب يكرر الرؤوس، ولكنه لا يكرر الأضلاع، أمّا البيان الجزئي الذي يتكوّن من الأضلاع e_1, e_5, e_6، والرؤوس x, w, y فهو حلقة طولها 3، وحذف أحد أضلاعها يعطي مسارًا، لاحظ أنّ ضلعين لهما النقاط الطرفية نفسها (مثل e_1 و e_2) يشكلان حلقة طولها 2. والأنشوطة هي حلقة طولها 1. ■

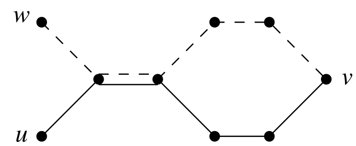
السبب في إدراج قائمة الأضلاع في ممرّ هو للتمييز بين الأضلاع المتكررة، ويحدث هذا عندما لا يكون البيان بسيطًا. أمّا في البيان البسيط، فإنّ الممرّ (المسرب) يتحدد تمامًا بترتيب قائمة رؤوسه. عادة ما نسمي المسار والدورة والمسرب أو الممرّ في البيان البسيط فقط بإدراج رؤوسه مرتبة، على الرغم من أنه يتألف من رؤوس وأضلاع. وعند النقاش حول الحلقة، نستطيع أن نبدأ بأيّ رأس ولا نكرره في النهاية، فضلاً عن أننا نستطيع استخدام الأقواس لتوضيح أنها حلقة وليس مسارًا.

4.2.1. مثال. سنوضّح الرموز المُبسطة في بيان بسيط. في البيان المرسوم أدناه، نجد أنّ $a, x, a, x, u, y, c, d, y, v, x, b, a$ تعين ممرًّا مغلقًا بطول 12، وأنّ حذف أول خطوتين يعطي مسربًا مغلقًا.

لاحظ أنّ لهذا البيان خمس حلقات، هي: (u,x,v,y)، (x,y,v)، (u,x,y)، (c,y,d)، (a,b,x)، وأنّ المسرب من u إلى v: u, y, c, d, y, x, v يحوي أضلاع المسار u, y, x, v من u إلى v ، ولا يحوي المسار u, y, v من u إلى v. ■



افترض أننا تتبّعنا مسارًا من u إلى v في بيان ما، ثّم تتبّعنا مسارًا من v إلى w، فليس شرطًا هنا أن يكون الناتج مسارًا من u إلى w؛ لأن المسار من u إلى v، والمسار من v إلى w ربما يكون لهما رأس داخلي مشترك. وعلى الرغم من ذلك، فإنّ قائمة الرؤوس والأضلاع التي نمر بها تشكل ممرًّا من u إلى w. وفي البيان الموضّح أدناه، نجد أنّ الممرّ من u إلى w يحوي مسارًا من u إلى w. لاحظ أنّ القول بأن الممر W يحوي **(contains)** المسار P يعني أنّ الرؤوس والأضلاع في P تظهر بوصفها قائمة جزئية من رؤوس وأضلاع W، مع الترتيب نفسه في P، ولكن ليس بالضرورة أن تكون متتالية في W.



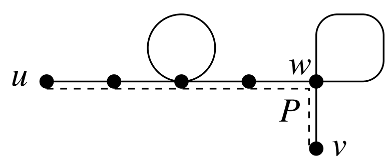
5.2.1. تمهيدية. كلّ ممرّ من u إلى v يحوي مسارًا من u إلى v.

الإثبات: نثبت العبارة بالاستقراء على الطول l للممر W من u إلى v.

خطوة الأساس: $l = 0$. يتكونّ W من رأس واحد $(u = v)$ فقط دون أضلاع. وهذا الرأس هو مسار من u إلى v بطول 0.

خطوة الاستقراء: $l \geq 1$. لنفترض أنّ الادعاء متحقق لكلّ ممر طوله أقلّ من l، فإذا كان W لا يحوي رأسًا متكررًا، فإن رؤوسه وأضلاعه تشكل مسارًا من u إلى v، وإذا كان w رأسًا متكررًا لـ W، فإن حذف الرؤوس والأضلاع بين أماكن ظهور الرأس w المتكرر (تاركين نسخة واحدة من w) يعطينا ممرًّا أقصر W' من u إلى v محتوى في W. ومن فرضية الاستقراء، نعلم أنّ W' يحوي مسارًا P من u إلى v، وهذا المسار P محتوًى في W. ■

التمرين 13b يطور إثباتًا أقصر، وسنطبق البديهية على خصائص الربط.



6.2.1. تعريف. يكون البيان G مترابطًا **(connected)** إذا احتوى على مسار من u إلى v لكل $u,v \in V(G)$ (غير ذلك، فإنّ G غير مترابط **(disconnected)**). إذا كان G مسارًا من u إلى v، فإن u مترابط مع **(connected to)** v في G، فضلاً عن أنّ علاقة الربط **(connection relation)** على $V(G)$ تتكونّ من الأزواج المرتبة (u,v)، بحيث u مترابط مع v.

لاحظ أنّ ''مترابط'' صفة نطبقها على البيانات وعلى الأزواج من الرؤوس فقط (قطعًا لا نقول ''يكون v

مترابطًا" عندما يكون v رأسًا). إن العبارة u "مترابط مع v " ملائمة لكتابة البراهين، ولكن يجب أن نفرق بين الربط والتجاور:

يوجد لـ G مسار من u إلى v	$uv \in E(G)$
u و v مترابطان	u و v متجاوران
u مرتبطة بـ v	u متجاور مع v

1.2.7. ملاحظة. من البديهية 1.2.5، نستطيع أن نثبت أن بيانًا ما يكون مترابطًا بإثبات أنه يوجد من كل رأس ممر إلى أي رأس محدد آخر.

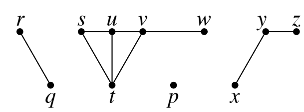
من البديهية 1.2.5، تكون علاقة الترابط متعدية: حيث إنه إذا كان لـ G مسار من u إلى v ومسار من v إلى w، فإن لـ G مسارًا من u إلى w. وكذلك تكون منعكسة (مسارات بطول 0) ومتماثلة (المسارات قابلة للعكس)، لذلك فهي علاقة تكافؤ. ■

يقودنا تعريفنا الآتي إلى صفوف التكافؤ لعلاقة الربط، ونعرف أكبر أو أعظم بيان جزئي مترابط من G على أنه بيان جزئي مترابط وغير محتوى في أي بيان جزئي آخر مترابط آخر في G.

1.2.8. تعريف. مركبات (**components**) البيان G هي أعظم بياناته الجزئية المترابطة، وتكون المركبة (أو البيان) تافهة (**trivial**) إذا كانت لا تحوي أضلاعًا؛ غير ذلك تكون غير تافهة (**nontrivial**). والرأس المعزول (**isolated vertex**) هو رأس درجته 0.

صفوف التكافؤ لعلاقة الربط على $V(G)$، هي مجموعات الرؤوس لمركبات G. والرأس المعزول يشكل مركبة تافهة، تتكوّن من رأس واحد دون أضلاع.

1.2.9. مثال. البيان أدناه له أربع مركبات، إحداها رأس معزول، ومجموعات الرؤوس للمركبات، هي: $\{p\}$ $\{q, r\}$ $\{s, t, u, v, w\}$ $\{x, y, z\}$ وهذه هي صفوف تكافؤ علاقة الربط. ■



1.2.10. ملاحظة. تكون المركبات منفصلة زوجًا زوجًا بعضها عن بعض؛ حيث إنه لا تتشارك مركبتان في رأس، وإضافة ضلع نقاطه الطرفية في مركبتين مختلفتين يجمعهما يجعلهما مركبة واحدة. لذلك فإنّ إضافة ضلع تنقص عدد المركبات بـ 0 أو 1، في حين يزيد حذف ضلع عدد المركبات بـ 0 أو 1. ■

1.2.11. قضية: يوجد لكل بيان على n من الرؤوس و k من الأضلاع $n-k$ مركبة على الأقل.

الإثبات: لاحظ أنه يوجد n مركبة للبيان الذي له n من الرؤوس وليس له أيّ أضلاع، ومن الملاحظة 1.2.10، فإنّ كلّ ضلع يُضاف، ينقص هذا العدد على الأكثر بـ 1، لذلك عندما يضاف k ضلعًا، فإنّ عدد المركبات يبقى على الأقل $n-k$. ■

إن حذف رأس أو ضلع يمكن أن يزيد عدد المركبات، وعلى الرغم من أنّ حذف ضلع من الممكن أن يزيد عدد المركبات فقط بـ 1، إلا أنّ حذف رأس يمكن أن يزيد عدد المركبات بأكثر من 1 (خذ ثنائي العصبة $K_{1,m}$ في الحسبان). وعندما نحصل على بيان جزئي ناتج عن حذف رأس، يجب أن يكون بيانًا. لذلك، فإن حذف الرأس يتبعه حذف الأضلاع الواقعة عليه جميعها.

1.2.12. تعريف. نعرّف ضلع القطع (**cut − edge**) أو رأس القطع (**cut − vertex**) لبيانٍ ما على أنه ضلع أو رأس بحذفه يزيد عدد المركبات، ونكتب $G-e$ أو $G-M$ للبيان الجزئي من G، والذي نحصل عليه بحذف الضلع e أو مجموعة الأضلاع M. نكتب $G-v$ أو $G-S$ للبيان الجزئي الناتج عن حذف

الرأس v أو مجموعة الرؤوس S. ونعرّف البيان الجزئي المُحدث (**induced subgraph**) على أنه بيان جزئي ناتج عن حذف مجموعة من الرؤوس، ونكتب $G[T]$ للدلالة على $G - \overline{T}$، حيث $\overline{T} = V(G) - T$؛ وهذا هو البيان الجزئي لـ G والمُحدث من T.

عندما يكون، $T \subseteq V(G)$ فإن البيان الجزئي المُحدّث $G[T]$ يتكوّن من T والأضلاع التي نقاطها الطرفية محتواة في T جميعها. أمّا البيان الكلي فإنه يكون بيانًا جزئيًّا مُحدّثًا لنفسه، كما هي الحال في حالة الرؤوس المنفردة، وتكون مجموعة من الرؤوس S مجموعة مستقلة إذا وفقط إذا كان البيان الجزئي المُحدث منها لا يمتلك أضلاعًا.

13.2.1. مثال. البيان في المثال 9.2.1 له رأسَا قطع v و y. وله أضلاع قطع، هي $qr,\ vw,\ xy$. و yz. (عندما نحذف ضلعًا فإن نقاطه الطرفية تبقى).

لاحظ أنّ C_4 و P_5 هما بيانان جزئيان لهذا البيان، ولكنهما ليسا كبيانات جزئية مُحدّثة، وأنّ البيان الجزئي المُحدث من قبل $\{s,\ t,\ u,\ v\}$ هو طائرة ورقية (kite) والمسارات على هذه الرؤوس الأربعة ليست بيانات جزئية مُحدّثة، أما البيان P_4 فيظهر بوصفه بيانًا جزئيًّا مُحدثًا؛ وهو البيان الجزئي المُحدّث من قبل $\{s,\ t,\ v,\ w\}$ (وكذلك من قبل $\{s,\ u,\ v,\ w\}$). ■

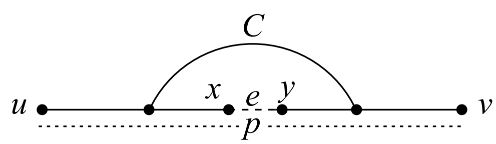
سنميّز لاحقًا أضلاع القطع بلغة الحلقات.

14.2.1. نظرية. يكون ضلع ما ضلع قطع إذا وفقط إذا كان لا ينتمي إلى أيّ حلقة.

الإثبات: ليكن e ضلعًا في البيان G (مع نقاط طرفية x، y)، ولتكن H هي المركبة التي تحوي e. بما أنّ حذف e لا يؤثر في بقية المركبات، فيكفي أن نثبت أنّ $H - e$ تكون مترابطة إذا وفقط إذا كان e ينتمي إلى حلقة.

أولاً، افترض أنّ $H - e$ مترابطة، هذا يؤدي إلى أنّ $H - e$ تحوي مسارًا من x إلى y، وهذا المسار مع e يكمل حلقة.

الآن، افترض أنّ e يقع في الحلقة C. اختر $u, v \in V(H)$، وبما أنّ H مترابطة، فإنّ لـ H مسارًا من u إلى v مثل P، وإذا كانّ P لا يحوي e، فإنّ P موجود في $H - e$، وإذا كان P يحوي e، فافترض من التماثل أنّ x بين u و y في P. وبما أنّ $H–e$ يحوي مسارًا من x إلى u على طول P، ومسارًا من x إلى y على طول C، ومسارًا من y إلى v على طول P، فإنّ خاصية التعدّي لعلاقة الترابط تؤدي إلى أنه يوجد لـ $H–e$ مسار من u إلى v، وبما أننا عملنا هذا لكلّ $u,v \in V(H)$، فإنّ $H–e$ يكون مترابطًا. ■



البيانات الثنائية الفرع (Bipartite Graphs)

هدفنا التالي إعطاء توصيفات مميّزة للبيانات الثنائية الفرع باستخدام الحلقات، وهذه التوصيفات عبارات متكافئة، مثل النظرية 14.2.1. وعندما يكون هنالك شرطان متكافئان، فإن اختبار أحدهما يغني عن اختبار الآخر، إنّ تمييز الصف $\mathbf{G}$ بواسطة الشرط P يعني إثبات التكافؤ " $G \in \mathbf{G}$ إذا وفقط إذا كان G يحقق P"، وبكلمات أخرى، فإنّ الشرط P ضروري وكافٍ للعضوية في G.

الضرورة	الكفاية
$G \in \mathbf{G}$ فقط إذا كان G يحقق P	$G \in \mathbf{G}$ إذا كان G يحقق P
$G \in \mathbf{G} \Rightarrow G$ يحقق P	G يحقق $P \Rightarrow G \in \mathbf{G}$

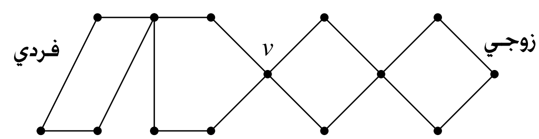
نذكّر أنّ الأنشوطة هي حلقة طولها 1، وكذلك فإنّ أيّ ضلعين مختلفين لهما النقاط الطرفية نفسها يشكلان حلقة بطول 2، ويكون الممرّ فرديًّا أو زوجيًّا بحسب طوله إذا كان فرديًّا أو زوجيًّا. كما في البديهية $5.2.1$، فإنّ الممرّ المغلق يحوي حلقة ما مثل C إذا كانت رؤوس C وأضلاعه تظهر بوصفها قائمة جزئية من W، بترتيب دائري، ولكن ليس ضروريًّا أن تكون بترتيب متعاقب. ونستطيع أن نعدَّ كلًّا من الممرّ المغلق أو الحلقة يبدأ أو تبدأ بأيّ رأس من رؤوسه والبديهية التالية تتطلب وجهة النظر هذه.

15.2.1 تمهيدية. كلّ ممرّ فردي مغلق يحوي حلقة فردية.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على الطول l لممر فردي مغلق W.

خطوة الأساس: $l = 1$. ممرّ مغلق طوله 1 يعبر حلقة طولها 1.

خطوة الاستقراء: $l > 1$. افترض أنّ الادعاء متحقّق لكلّ ممرّ فردي مغلق أقصر من W. إذا كان W لا يحوي رؤوسًا متكررة (غير الأول = الأخير)، فإنّ W نفسه شكل حلقة بطول فردي، ولكن إذا كان v رأسًا متكررًا في W، فإننا نعدّ أنّ W يبدأ عند v، ويقسم W إلى ممرّين من u إلى v، وبما أنّ طول W فردي، إذن، فإنّ أحد الممرين فردي والآخر زوجي، بالإضافى إلى أنّ طول الممرّ الفردي أقصر من W. ونجد من فرضية الاستقراء، أنه يحوي حلقة فردية تظهر بالترتيب الذي في W. ■



16.2.1. ملاحظة. ليس من الضروري أن يحوي الممر الزوجي المغلق حلقة؛ ببساطة ربّما تتكرّر. وعلى الرغم من ذلك، إذا ظهر ضلع ما مثل e بالضبط مرة واحدة في ممرّ مغلق مثل W، فإنّ W يحوي حلقة من خلال e. لتكن x, y النقطتين الطرفيتين لـ e، لاحظ أنّ حذف e من W يترك ممرًّا من x إلى y متفاديًا e. ومن البديهية $5.2.1$، نجد أنّ هذا الممرّ يحوي مسارًا من x إلى y، وهذا المسار يكمل حلقة مع e. (انظر التمرينين $15 - 16$). ■

البديهية $15.2.1$ سوف تساعدنا على تمييز البيانات الثنائية الفرع.

17.2.1. تعريف. التجزئة الثنائية (**bipartition**) للبيان G هي تحديد مجموعتين مستقلتين منفصلتين من رؤوس G، ويكون اتحادهما $V(G)$. إنّ العبارة "ليكن G بيانًا ثنائي الفرع مع التجزئة الثنائية X, Y" تحدد مثل هذه التجزئة، ونعني ببيان ثنائي بالتجزئة الثنائية (X, Y – **bigraph**) X, Y بيانًا ثنائي الفرع وله التجزئة الثنائية X, Y لمجموعة رؤوسه.

لاحظ أنّ مجموعات التجزئة الثنائية هي مجموعات مجزأة (التعريف $10.1.1$)، وأنّ للبيان الثنائي الفرع غير المترابط أكثر من تجزئة ثنائية واحدة، في حين أنّ البيان الثنائي الفرع المترابط له تجزئة ثنائية واحدة فقط ما عدا تبادل مجموعتي التجزئة (التمرين 7).

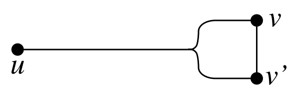
18.2.1. نظرية. (كونج [1936] (König)) يكون البيان ثنائي الفرع إذا وفقط إذا خلا من الحلقات الفردية.

الإثبات: الضرورة. ليكن G بيانًا ثنائي الفرع، وحيث إنّ كل ممر في G يتناوب بين مجموعتي التجزئة؛ لذلك فإنّ كل عودة إلى مجموعة التجزئة الأصلية تحدث بعد عدد زوجي من الخطوات، ومن هنا، لا توجد في G حلقات فردية.

الكفاية. ليكن G بيانًا خاليًا من الحلقات الفردية. سنثبت أنّ G ثنائي الفرع بإنشاء تجزئة ثنائية لكلّ

مركبة تافهة من مركبات G. ليكن u رأسًا في مركبة غير تافهة مثل H. لكلّ $v \in V(H)$، اجعل $f(v)$ تمثّل أقلّ طول لمسار من u إلى v، وبما أنّ H مترابط، فإنّ $f(v)$ معرفة لكل $v \in V(H)$.

ليكن $X = \{v \in V(H): f(v)$ زوجيًّا$\}$ و $Y = \{v \in V(H): f(v)$ فرديًّا$\}$. فإذا كان vv' ضلعًا في البيان G بحيث يكون v، v' رأسين في المجموعة X أو في المجموعة Y، فإنه يوجدُ ممرّ فردي مغلق باستخدام أقصر مسار من u إلى v، وهذا الممرّ هو الضلع vv'، ومعكوس أقصر مسار من u إلى v'. ولكن باستخدام البديهية 15.2.1، فإنّ مثل هذا الممرّ سوف يحتوي على حلقة فردية، وهذا يناقض افتراضنا. لذلك، فإنّ X و Y مجموعتان مستقلتان. كذلك $X \cup Y = V(H)$، وعليه، فإنّ H بيان ثنائي بالتجزئة الثنائية X، Y. ■

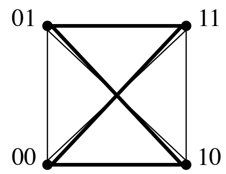


19.2.1. ملاحظة. اختبار البيان ما إذا كان ثنائي الفرع. لاحظ أنّ النظرية 18.2.1 تعطينا الحالة التي يكون فيها البيان ليس ثنائي الفرع؛ حيث نستطيع أن نثبت أنّ البيان ليس ثنائي الفرع عن طريق إيجاد حلقة فردية في G، وهذا أسهل كثيرًا من اختبار الاحتمالات جميعها للتجزئات الثنائية، والتأكد من أنّ البيان ليس ثنائي الفرع. عندما نريد أن نثبت أنّ البيان G ثنائي الفرع، فسوف نعرّف تجزئة ثنائية، ثمّ نثبت أنّ هاتين المجموعتين مستقلتان، وهذا أسهل كثيرًا من اختبار الحلقات في البيان G جميعها. ■

سنأخذ في الحسبان تطبيقًا واحدًا، وقبل ذلك لنأخذ التعريف الآتي:

20.2.1. تعريف. اتحاد (**union**) البيانات G_1، ...، G_k يكتب على الصورة $G_1 \cup \ldots \cup G_k$، ويعرف على أنّه البيان الذي تكون مجموعة رؤوسه $\bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)$، ومجموعة أضلاعه $\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)$.

21.2.1. مثال. في الشكل أدناه، نبيّن كيف أنّ K_4 اتحاد حلقتين لكلّ منهما أربعة رؤوس، لاحظ أنه عندما نعبّر عن البيان G بوصفه اتحادًا لبيانين جزئيين أو أكثر، فإنّ أي ضلعٍ في G يمكن أن ينتمي إلى أكثر من بيان جزئي، وهذا يميز الاتحاد عن التفكيك؛ حيث إنّ الضلع في حال التفكيك ينتمي إلى بيان جزئي واحد فقط في القائمة. ■



22.2.1. مثال. لنأخذ في الحسبان نظام حركة مرور الطائرات لـ k من الخطوط الجوية، وافترض أنّ:

1) خدمة مباشرة بين مدينتين تعني رحلة مباشرة ذهابًا وإيابًا (round trip).

2) لكل زوج من المدن توجد خدمة مباشرة على الأقل من خط جوي واحد.

وافترض أيضًا عدم وجود أيّ خط طيران يستطيع أن يضع في جدوله حلقة فردية من المدن. أوجد أكبر عدد ممكن من المدن في هذا النظام بدلالة k.

لاحظ من النظرية 18.2.1، أننا نبحث عن أكبر عدد n، بحيث يمكن كتابة K_n في صورة اتحاد k من البيانات الثنائية الفرع، بيان ثنائي الفرع لكلّ خط جوي، والجواب هو 2^k. ■

23.2.1. نظرية. يمكن التعبير عن البيان التام K_n كاتحاد k من البيانات الثنائية الفرع إذا وفقط إذا كان $n \leq 2^k$.

الإثبات. سوف نستخدم الاستقراء على k. خطوة الأساس: $k = 1$. بما أنّ K_3 يحوي حلقة فردية، و K_2 لا يحوي حلقة فردية، فإنّ K_n نفسه بيان ثنائي الفرع إذا وفقط إذا كان $n \leq 2$.

خطوة الاستقراء: $k > 1$. سوف نثبت كلّ اتجاه باستخدام فرضية الاستقراء.

أولاً: افترض أنّ $K_n = G_1 \cup \ldots \cup G_k$ ، حيث G_i ثنائي الفرع لكل i. نقوم بتجزئة مجموعة الرؤوس إلى المجموعتين X و Y، بحيث لا يكون لـ G_k ضلعًا داخل X أو داخل Y، لاحظ أنّ اتحاد البيانات الجزئية الثنائية الفرع المتبقية وعددها $k-1$ يجب أن يَغطي البيان الجزئي التام المُحدث من كلّ من X و Y، وبتطبيق فرضية الاستقراء على كل مجموعة، نستنتج أنّ $|X| \leq 2^{k-1}$ و $|Y| \leq 2^{k-1}$ ، لذا فإنّ $n \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$.

وبالعكس، افترض أنّ $n \leq 2^k$. جزّئ مجموعة الرؤوس إلى المجموعتين X ، Y، بحيث يساوي حجم كلّ مجموعة منهما 2^{k-1} على الأكثر. ونستطيع الآن، من فرضية الاستقراء، أن نغطي البيان الجزئي التام الناتج عن أيّ من المجموعتين X و Y بـ $k-1$ من البيانات الجزئية الثنائية الفرع، لاحظ أنّ اتحاد البيان الجزئي رقم i على X مع البيان الجزئي رقم i على Y يشكل بيانًا ثنائي الفرع. لذلك، نحصل على $k-1$ من البيانات الثنائية الفرع التي يتكوّن اتحادها من البيانات الجزئية التامة المُحدّثة من X و Y. أمّا الأضلاع المتبقية، فهي أضلاع ثنائية العصبة وتجزئتها الثنائية X, Y. وبجعل هذا البيان هو البيان الجزئي الثنائي الفرع، يكتمل البناء. ■

لاحظ أنه من الممكن أن نثبت هذه النظرية دون استخدام الاستقراء، وذلك بتشفير الرؤوس بوصفها مرتبات ثنائية من الدرجة k (التمرين 31).

حلقات أويلر (Eulerian Circuits)

نعود إلى تحليلنا السابق لمسألة جسور كونجزبرج، حيث إنّ الناس في هذه المدينة يريدون مسربًا مغلقًا يحوي الأضلاع جميعها في البيان. وكما لاحظنا، فإنّ الشرط الضروري لوجود مثل هذا المسرب، هو أن تكون درجة كل رأس زوجية، وأن تنتمي الأضلاع جميعها إلى المركبة نفسها في البيان.

في عام [1736م] بيّن العالم الرياضي السويسري ليونارد أويلر (Leanhard Euler) (تلفظ "أويلر") أنّ هذه الشروط كافية أيضًا، وتكريمًا لإسهاماته، فإننا نضع اسمه على مثل هذه البيانات، إلا أنّ بحث أويلر الذي ظهر في العام 1741م لم يقدم إثباتا واضحًا أن الشروط الضرورية هي كافية لهذه المسألة. وفي العام 1873م قدّم هيرهولز (Hierholzer) أول إثبات كامل ومنشور لهذه المسألة. ومن الجدير بالذكر أنّ البيان الذي رُسم في المثال 1.1.1 لنمذجة المدينة لم يظهر بصورة مطبوعة إلا في العام 1894م (انظر ويلسون Wilson) [1986] (لمناقشة السجل التاريخي لهذه المسالة).

24.2.1. تعريف. يكون البيان أويلريًّا (**Eulerian**) إذا وُجد فيه مسرب مغلق يحوي الأضلاع جميعها. والحلقة (**circuit**) مسرب مغلق لا يُحدّد فيه الرأس الأول في قائمة الرؤوس والأضلاع، ولكن يحافظ فيه على ترتيب القائمة بصورة دائرية. أمّا الحلقة الأويلرية (**Eulerian circuit**) أو المسرب الأويلري (**Eulerian trail**) في البيان فهي حلقة أو مسرب تحوي أو يحوي الأضلاع جميعها. يعرّف البيان الزوجي (**even graph**) على أنه البيان الذي تكون درجة كل رأس من رؤوسه زوجية، ويكون الرأس فرديًّا (**odd**) أو زوجيًّا [even] إذا كانت درجته فردية أو زوجية.

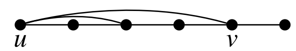
ينطبق نقاشنا حول الحلقات الأويلرية أيضًا على البيانات التي تملك عرًى؛ ويمكن تعميم فكرة درجة الرأس إلى البيانات التي فيها عرًى بإضافة 2 إلى درجة كلّ رأس يملك أنشوطة، وهذا لا يغيرّ النوعية (**parity**) للدرجة.

ووجود الأنشوطة لا يؤثر في البيانات فيما إذا كان البيان يملك حلقة أم لا، إلا إذا كانت أنشوطة في مركبة لها رأس واحد.

إن إثباتنا لتمييز البيانات الأويلرية يحتاج إلى بديهية، ونعرّف المسار الأعظم (**maximal path**) في البيان G على أنه المسار الذي لا يمكن احتواؤه في مسار أطول، ولاحظ أنه عندما يكون البيان محددًا، فإنه لا يوجد فيه مسار يمكن أن يستمر إلى ما لا نهاية، وعليه، فإن المسارات العظمى (غير القابلة للتوسيع) موجودة.

25.2.1. تمهيدية. إذا كانت درجة كلّ رأس في البيان G تساوي 2 على الأقل، فإنّ G يحوي حلقة.

الإثبات: ليكن P مسارًا أعظم في G، ولتكن u نقطة طرفية للمسار P، بما أنّ P غير قابل للتوسيع، فإنّ كل جار لـ u يجب أن يكون في P، وبما أنّ درجة u هي 2 على الأقل، فإنه يملك جارًا v في $V(P)$ من خلال ضلع ليس في P، ولاحظ أنّ الجزء من v إلى u والمحتوى في P يكمل مع الضلع uv حلقة. ■



وللاحظة أهمّية أن يكون البيان محددًا، نأخذ المثال الآتي: إذا كانت $V(G) = \mathbb{Z}$ و $E(G) = \{ij: |i-j| = 1\}$، فإنّ درجة كلّ رأس في G تساوي 2، إلا أنّ G لا يحوي أيّ حلقة (وعليه لا يوجد مسار غير قابل للتمدد)، ويمكننا أن نتجنّب مثل هذه الأمثلة بافتراض أنّ البيانات جميعها في هذا الكتاب هي بيانات منتهية، مع استثناءات نادرة جدًّا.

26.2.1. نظرية. يكون البيان أويلريًّا إذا وفقط إذا كان يملك مركبة واحدة غير تافهة على الأقل ودرجة رؤوسه جميعها زوجية.

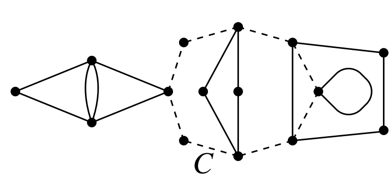
الإثبات: الضرورة. افترض أنّ G يملك حلقة أويلرية C، لاحظ أنّ كلّ مرور للحلقة C على رأس سوف يستخدم ضلعين متقاطعين في هذا الرأس، والضلع الأول يقرن مع الضلع الأخير عند الرأس الأول. وعليه، فإنّ درجة الرؤوس جميعها زوجية. ويكون الضلعان أيضًا في المسرب نفسه إذا وقعا في المركبة نفسها، لذلك يوجد على الأكثر مركبة واحدة غير تافهة.

الكفاية. إذا افترضنا أنّ الشروط متحققة، فسنحصل على حلقة أويلرية باستخدام الاستقراء على عدد الأضلاع m.

خطوة الأساس: $m = 0$. يكفي أن نأخذ رأسًا واحدًا ليمثّل مسربًا مغلقًا.

خطوة الاستقراء: $m > 0$. درجة كل رأس في المركبة غير التافهة تساوي 2 على الأقل، ونجد من البديهية 25.2.1 أنّ للمركبة غير التافهة حلقة C. ليكن G' هو البيان الذي نحصل عليه من G بحذف $E(C)$.

بما أنه يوجد لـ C ضلعان، أو ليس لها أضلاع عند كلّ رأس، فإنّ كلّ مركبة في G' هي أيضًا بيان زوجي، ولأنّ كلّ مركبة هي مركبة مترابطة وعدد أضلاعها أقلّ من m، فإنا نستطيع أن نطبق فرضية الاستقراء لاستنتاج أنّ لكلّ مركبة للبيان G' حلقة أويلرية، وللحصول على حلقة أويلرية في البيان G، فإننا نمشي على الحلقة C، وعندما ندخل مركبة من G' للمرة الأولى، فإننا نعمل تحويلة عبر حلقة أويلرية للمركبة نفسها، ومثل هذه الحلقة تنتهي عند الرأس حيث بدأنا التحويلة. وعندما ننهي مسيرنا على C، نكون قد حصلنا على حلقة أويلرية للبيان G. ■



ربما يكون ما تقوله طريقة الإثبات عن البيانات الزوجية مهمًّا كأهمّية خاصية توصيف البيانات الأويلرية.

27.2.1. قضية. كلّ بيان زوجي يتفكك إلى حلقات.

الإثبات: في إثبات النظرية 26.2.1، لاحظنا أنّ لكلّ بيان زوجي غير تافه حلقة، وأنّ حذف هذه الحلقة يبقيه بيانًا زوجيًّا، وعليه، فإنّ هذه القضية تُبَرْهَنُ بالاستقراء على عدد الأضلاع. ■

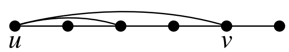
من السهل أن نرى تحقق شرط الضرورة في توصيف الحلقات الأويلرية، وهذا متحقّق أيضًا لتوصيف البيانات الثنائية الفرع في غياب الحلقات الفردية، ومتحقق للكثير من التمييزات الأخرى كذلك، ولسهولة تَذكّر مثل هذه المثبتات؛ استعمل ناش ووليامز (Nash − Williams) وآخرون: "**TONCAS**" لتعني "الشروط الضرورية الواضحة هي أيضًا كافية".

إثبات البديهية 25.2.1 مثال على أسلوب إثبات مهم في نظرية البيان يدعى مبدأ القيم القصوى أو مبدأ التطرفية (**extremality**). لاحظ أنّه عند الحديث عن البنى من نوع معيّن معطى، فإنّ اختيار مثال ذي قيمة تطرّفية من جانب معيّن، يمكن أن يؤدي إلى معلومات إضافية مفيدة. فعلى سبيل المثال، بما أنه لا يمكن توسيع أيّ مسار أعظمي P، فإننا نحصل على المعلومات الإضافية، وهي أنّ كل ّجار للنقطة الطرفية للمسار P تنتمي إلى مجموعة الرؤوس $V(P)$.

لاحظ أنه من جانب معين، نجد أنّ عمل اختيار متطرّف يذهب بنا مباشرة إلى الحالة المهمة في البديهية 25.2.1، حيث يمكننا البدء بأيّ مسار، فإذا كان هذا المسار قابلاً للتوسع، فإننا نوسعه، وإذا لم نستطع توسيعه، فإن شيئًا مهمًّا يكون قد حدث، ونوضح هذا الأسلوب بعدّة أمثلة. والتمارين 42 − 37 تستخدم أيضًا مبدأ القيم القصوى. وسنبدأ بتقوية البديهية 25.2.1 للبيانات البسيطة.

28.2.1. قضية. إذا كان G بيانًا بسيطًا درجة كل رأس فيه k على الأقل، فإنّ G يحوي مسارًا طوله k على الأقل. وإذا كان $k \geq 2$، فإنّ G أيضًا يحوي حلقة طولها $k+1$ على الأقل.

الإثبات: لتكن u نقطة طرفية لمسار أعظم مثل P في البيان G، بما أنه لا يمكن توسيع P، فإنّ كلّ رأس مجاور لـ u ينتمي إلى $V(P)$، وبما أنّ عدد الرؤوس المجاورة لـ u يساوي k على الأقل، وبما أن G بيان بسيط، فإن المسار P يمتلك على الأقل k رأسًا غير u، وطوله يساوي k على الأقل، وإذا كان $k \geq 2$، فإنّ الضلع من u إلى أبعد جيرانه v الموجود على P بالإضافة إلى الجزء من الممر P الممتد من الرأس v إلى الرأس u يكمل حلقة بطول كافٍ. ■



29.2.1. قضية. كلّ بيان خالٍ من العرى يمتلك على الأقل رأسين ليسا رأسي قطع.

الإثبات: إذا كانت u نقطة طرفية لمسار أعظمي P في البيان G، فإنّ الرؤوس المجاورة للرأس u تقع في P. وبما أنّ $P - u$ مترابط في G-u، فإنّ الرؤوس المجاورة لـِ u تنتمي إلى مركبة واحدة في $G - u$ ، وعليه، فإنّ u ليس رأس − قطع. ■

30.2.1. ملاحظة. لاحظ الفرق بين "أعظمي" (**maximal**) و "الأكبر" (**maximum**). بوصفها صفات، الأكبر تعني "الحجم − الأكبر" (maximum −sized)، وأعظمي تعني "لا يوجد أكبر منه يحويه". يكون المسار الأكبر مسارًا أعظميًّا دائمًا، ولكن المسارات الأعظمية ليست بالضرورة ذات طول أكبر. وبالمثل، فإن لثنائي العصبة $K_{r,s}$ مجموعتين مستقلتين أعظميين، ولكن عندما يكون $r \neq s$، فإنّ له مجموعة مستقلة كبرى واحدة فقط. وعندما توصف الأعداد بدلاً من الاحتواء، فإن المعنى يكون هو نفسه، وهو: درجة الرأس القصوى = درجة الرأس العظمى.

بجانب المسارات العظمى، أو القصوى، أو المجموعات المستقلة، توجد وجوه تطرّفية أخرى تشتمل على رؤوس ذات درجات صغرى أو كبرى، وعلى أول رأس يتباعد عنده مساران وبيانات جزئية مترابطة أعظمية إلخ. لاحظ أنه في البيان المترابط G حيث $S, T \subset V(G)$ مجموعتان منفصلتان، نستطيع أن نحصل على مسار من S إلى T نقاطه الطرفية فقط في $S \cup T$، وذلك باختيار أقصر مسار من S إلى T؛ والتمرين (40) يطبق هذا، ويستخدم التمرين (37) مبدأ القيم القصوى للحصول على إثبات قصير لخاصية التعدي لعلاقة الربط. ■

لاحظ أنّ العديد من البراهين باستخدام الاستقراء يمكن أن يُستخدم فيها مبدأ القيم القصوى، ويمكن أن تثبت العديد من البراهين بمبدأ القيم القصوى بالاستقراء، ولنؤكّد هذا التفاعل؛ سنعيد إثبات تصنيف البيانات الأويلرية باستخدام مبدأ القيم القصوى.

31.2.1. تمهيدية. في البيان الزوجي؛ كلّ مسار غير قابل للتوسيع يكون مغلقًا.

الإثبات. ليكن T مسارًا غير قابل للتوسيع، يبدأ عند الرأس u في بيان زوجي. في كل مرةّ يمرّ T خلال الرأس v المختلف عن الرأس u، يَسْتَخْدِمُ ضلعين إضافيين عند v، لذلك، فان كلّ وصول عند رأس ما مثل v،يبين لنا أنّ T يكون قد استخدم عددًا فرديًا من الأضلاع التي تقع على v، وبما أنّ درجة v زوجية، فإن هناك ضلعًا واحدًا يستطيع T أن يستمر خلاله.

وعليه، يتوقف T فقط عند u. وفي البيان المنتهي، يجب أن يتوقف T. لذا، نستنتج أنّ T مغلق. ■

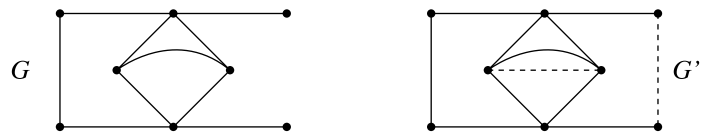
32.2.1. النظرية 26.2.1 – الإثبات الثاني. نثبت TONCAS. في البيان G الذي يحقق شروط النظرية، ليكن T مسربًا بأكبر طول؛ لذلك فإن T غير قابل للتوسع. ومن البديهية 31.2.1، يكون T مغلقًا.

افترض أنّ T يهمل الضلع e في G. بما أنّ البيان G له مركبة واحدة غير تافهة، فيوجد في G أقصر مسار من e إلى مجموعة الرؤوس في T. ولذلك يوجد ضلع مثل e' ليس في T يقع على رأس مثل v للمسرب T.

وبما أنّ T مغلق، فيوجد مسرب T' يبدأ عند الرأس v وينتهي به، ويستخدم الأضلاع مثل T نفسه. الآن، نوسع T'باستخدام e' لنحصل على مسرب أطول من T، وهذا يناقض اختيار T، وعليه فإنّ T يسير على أضلاع G جميعها. ■

هذا الإثبات وطريقة البناء الناتجة (تمرين 12) مشابهان لما هو موجود عند هيرهولزر [1873] (Hierholzer). والتمرين (35) يطورّ إثباتًا آخر.

الفصول القادمة تحوي العديد من التطبيقات حول العبارة بأنّ كلّ بيان زوجي مترابط له حلقة أويلرية. وهنا نعطي تطبيقًا بسيطًا: حينما نرسم شكلاً على ورقة، كم مرة يجب أن نتوقف ونحرك القلم؟ غير مسموح لنا أن نعيد مقاطع الرسم، لذلك كلّ عودة إلى الورقة تسهم في مسرب. وهكذا نبحث عن تفكيك لـ G بأقل عدد من المسارب. لاحظ أننا نستطيع أن نختزل المسألة إلى البيانات المترابطة؛ لأن عدد المسارب الذي نحتاج إليه لرسم G هو مجموع العدد الذي نحتاج إليه لرسم كل مركبة. فعلى سبيل المثال، للبيان G أدناه أربعة رؤوس فردية، وهو يتفكك إلى مسربين، وأنّ إضافة الأضلاع المنقطة في الرسم الأيمن يجعله أويلريًّا.



33.2.1. نظرية. إذا كان G بيانًا مترابطًا غير تافه له 2k رأسًا فرديًا، فإنّ أصغر عدد من المسارب لتفكيك البيان هو: $\max\{k،1\}$.

الإثبات: يسهم المسرب بدرجة زوجية لكلّ رأس ما عدا المسرب غير المغلق الذي يسهم بدرجات فردية لنقاطه الطرفية. لذا فإنّ تجزئة الأضلاع لمسارب يجب أن تحوي مسارب غير مغلقة تنتهي عند كل رأس فردي، وبما أنّ كلّ مسرب له نقطتان طرفيّتان فقط، لذلك يجب أن نستخدم k مسربًا على الأقل لتحقق $2k$ رأسًا فرديًا. ونحتاج أيضًا إلى مسرب واحد على الأقل لأن لـ G ضلعًا. والنظرية 26.2.1 تعطينا أنّ مسربًا واحدًا كافيًا عندما تكون $k = 0$.

بقي أن نثبت أنّ k مسربًا تكون كافية عندما $k > 0$. لنأخذ البيان G، نضع الرؤوس الفردية في G في صورة أزواج (بأيّ طريقة)، ثمّ نشكل البيان G' بإضافة ضلع إلى كل زوج من الرؤوس يربط رأسي الزوج كما هو موضّح في الأعلى. وبذلك، يصبح البيان الناتج G' بيانًا مترابطًا وزوجيًّا، وهكذا يملك حلقة أويلرية C. وبناءً على النظرية 26.2.1، فإنه عند عبور C في G'، فإننا نبدأ بمسرب جديد في G في كلّ مرة نعبر من خلال ضلع في $G' - E(G)$ وهذا يؤدي إلى أنّ k مسربًا تفكك G. ■

عادة ما نثبت المثبتات في السياق العام لنتجنب الجهد، إنّ إثبات النظرية 33.2.1 يوضّح ذلك؛ وذلك بتحويل البيان G إلى بيان يمكننا من تطبيق النظرية 26.2.1 عليه، وبذلك نتجنّب تكرار التعليل الأساسي للنظرية 26.2.1. ويطلب التمرين (33) إثبات النظرية 33.2.1 مباشرة باستخدام الاستقراء.

لاحظ أنّ النظرية 33.2.1 تأخذ في الحسبان البيانات التي لها عدد زوجي من الرؤوس التي درجتها فردية فقط، وأول نتيجة لنا في الدرس التالي توضّح لماذا يكون ذلك.

تمارين (Exercises)

معظم الأسئلة في هذا الكتاب تتطلب براهين، فالكلمات مثل "أنشئ"، "اعرض"، "احصل"، "حدّد"، إلخ، تنصّ صراحة على أنّ الإثبات مطلوب، علاوة على أنّ إثبات بطلان العبارة يتطلّب إعطاء مثال معاكس لها، والتأكيد على أنّ هذا المثال هو المثال المعاكس.

1.2.1. (−) اكتب "صواب" أو "خطأ" بجانب كل عبارة من العبارات الآتية:

a) يوجد لكل بيان غير مترابط رأس معزول. b) يكون البيان مترابطًا إذا وفقط إذا وُجدَ رأسٌ مربوطٌ مع الرؤوس الأخرى جميعها. c) يمكن تجزئة أضلاع كل مسرب مغلق إلى مجموعات أضلاع لحلقات.

d) إذا كان هنالك مسرب أعظمي غير مغلق في بيان ما، فإن درجة نقاطه الطرفية تكون فردية.

2.2.1. (−) حدّد ما إذا كان K_4 يحوي التالي (أعطِ مثالاً أو أثبت عدم الوجود):

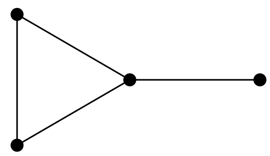
a) ممرًّا ليس مسربًا. b) مسربًا غير مغلق وليس مسارًا. c) مسربًا مغلقًا ولكنه ليس حلقة.

3.2.1. (−) ليكن G البيان الذي مجموعة رؤوسه $\{1,\ldots,15\}$، بحيث يكون i و j متجاورين إذا وفقط إذا كان أكبر عامل مشترك لهما يتجاوز العدد 1. احسب عدد مركبات G، وحدّد أكبر طول لمسار في G.

4.2.1. (-) ليكن G بيانًا لا يحوي عرىً. لكل $v \in V(G)$ و$e \in E(G)$، مجموعة مصفوفتي التجاور والوقوع لـِ $G - v$ و$G - e$ بدلالة المصفوفات المقابلة لـِ G.

5.2.1. (-) ليكن v رأسًا في البيان البسيط المترابط G. أثبت أنه يوجد لـِ v جارٌ في كل مركبة لـِ $G - v$، واستنتج أنه لا يوجد بيان له رأس قطع من الدرجة 1.

6.2.1. (-) في البيان أدناه (الكف)، جد المسارات الأعظمية والعصب الأعظمية والمجموعات المستقلة الأعظمية جميعها، وجد كذلك المسارات القصوى والعصب القصوى والمجموعات المستقلة القصوى جميعها.



7.2.1. (-) أثبت أنه يوجد للبيان الثنائي الفرع تجزئة ثنائية فريدة (ما عدا تبديل مجموعتي التجزئة) إذا وفقط إذا كان مترابطًا.

8.2.1. (-) حدّد قيم m و n بحيث يكون $K_{m,n}$ أويلريًّا.

9.2.1. (-) ما أقلّ عدد ممكن من المسارب نحتاج إليه لتفكيك بيان بيترسون؟ هل يوجد تفكيك لهذه المسارب باستخدام مسارات فقط؟

10.2.1. (-) أثبت أو انقض: a) يمتلك كلّ بيان أويلري ثنائي الفرع عددًا زوجيًّا من الأضلاع.
b) يمتلك كلّ بيان أويلري بسيط عدد رؤوسه زوجي عددًا زوجيًّا من الأضلاع.

11.2.1. (-) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا أويلريًّا يشترك فيه الضلعان f، e برأس، فتوجد في G حلقة أويلرية يظهر فيها الضلعان f، e بصورة متتابعة.

12.2.1. (-) حوّل الإثبات المعطى في المفردة 1.2.32 إلى طريقة لإيجاد حلقة أويلرية في البيان الزوجي المترابط.

• • • • •

13.2.1. براهين بديلة لإثبات أنّ كلّ ممر من u إلى v يحوي مسارًا من u إلى v (البديهية 5.2.1):
a) (استقراء عادي) إذا أعطيت أنّ كلّ ممرّ طوله $l - 1$ يحوي مسارًا من رأسه الأول إلى رأسه الأخير، فأثبت أنّ كلّ ممر طوله l يحقق هذا أيضًا.
b) (مبدأ القيم القصوى) إذا أعطيت الممر W من u إلى v، فخذ أصغر ممر من u إلى v محتوى في W.

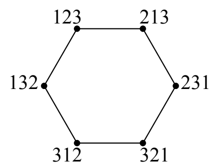
14.2.1. أثبت أو انقض العبارات الآتية حول البيانات البسيطة: (تعليق: "مختلفة" لا تعني "منفصلة").

a) اتحاد مجموعات الأضلاع لممرات مختلفة من u إلى v يجب أن يحوي حلقة.
b) اتحاد مجموعات الأضلاع لمسارات مختلفة من u إلى v يجب أن يحوي حلقة.

15.2.1. (!) ليكن W ممرًّا مغلقًا طوله 1 على الأقل ولا يحوي حلقة. أثبت أنّ بعض أضلاع W تتكرر مباشرة (مرة واحدة في كل اتجاه).

16.2.1. ليكن e ضلعًا يُظْهِرُ عددًا فرديًّا من المرات في الممر المغلق W. أثبت أنّ W يحتوي على أضلاع لحلقة ما خلال e.

17.2.1. (!) ليكن G_n هو البيان الذي تتكوّن رؤوسه من تباديل $\{1,\ldots,n\}$، بحيث يكون التبديلان $a_1, \ldots, a_n$، و $b_1,\ldots,b_n$ متجاورين إذا اختلفا بتبديل زوج متجاور من المدخلات (انظر G_3 أدناه). أثبت أن G_n مترابط.



18.2.1. (!) ليكن G هو البيان الذي تتكوّن فيه مجموعة الرؤوس من المرتّبات من الدرجة k التي مدخلاتها من المجموعة $\{0،1\}$، بحيث يكون x مجاورًا لـ y إذا كان كلّ من x و y يختلفان بالضبط في موقعين فقط. حدّد عدد المركبات لـ G.

19.2.1. ليكن s و r عددين طبيعيين. وليكن G هو البيان البسيط الذي تتكوّن رؤوسه من صفوف التطابق، $v_0, \ldots, v_{n-1}$ حيث يكون v_i و v_j متجاورين إذا وفقط إذا كان. أثبت أنّ S له k مركبة تمامًا، حيث k هو القاسم المشترك الأكبر للأعداد $\{n، r، s\}$.

20.2.1. (!) ليكن v رأس قطع للبيان البسيط G. أثبت أنّ $\overline{G}-v$ يكون مترابطًا.

21.2.1. ليكن G بيانًا ذاتيّ التتام. أثبت أنّ لـ G رأس قطع إذا وفقط إذا كان لـ G رأس درجته 1.(Akiyama – Harary [1981])

22.2.1. أثبت أنّ البيان يكون مترابطًا إذا وفقط إذا وُجد لكلّ تجزئة لرؤوسه إلى مجموعتين غير خاليتين ضلع نقاطه الطرفية في كلتا المجموعتين.

23.2.1. لكل عبارة أدناه، حدّد ما إذا كانت العبارة صحيحة لكل بيان بسيط مترابط غير تام G.
a) كلّ رأس في G ينتمي إلى بيان جزئي مُحدّث متشاكل مع P_3.
b) كلّ ضلع في G ينتمي إلى بيان جزئي مُحدّث متشاكل مع P_3.

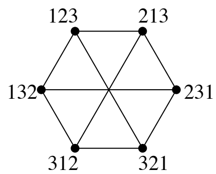
24.2.1. ليكن G بيانًا بسيطًا ليس فيه رأس معزول، وليس فيه بيان جزئي محدّث بضلعين فقط. أثبت أنّ G بيان تام.

25.2.1. (!) استخدام الاستقراء العادي على عدد الأضلاع أو الرؤوس لإثبات أنّ غياب الحلقات الفردية يكون شرطًا كافيًا ليكون البيان ثنائي الفرع.

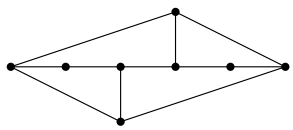
26.2.1. (!) أثبت أنّ البيان G يكون ثنائي الفرع إذا وفقط إذا وُجد لكلّ بيان جزئي H من G مجموعة مستقلة تتكوّن على الأقلّ من نصف $V(H)$.

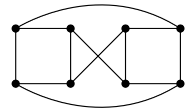
27.2.1. ليكن G_n هو البيان الذي تتكوّن رؤوسه من تباديل $\{1,\ldots,n\}$، بحيث يكون التبديلان

$a_1,\ldots,a_n$ و $b_1,\ldots,b_n$ متجاورين إذا اختلفا بتبديل مدخلتين. أثبت أنّ G_n ثنائي الفرع (G_3 معروض أدناه).
(مساعدة: لكلّ تبديل a، احسب عدد الأزواج j ، i، بحيث $i < j$، و $a_i > a_j$ هذه تدعى انعكاسات (**inversions**)).



28.2.1. (!) في كلّ بيان أدناه، جد بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع له أكبر عدد من الأضلاع، وأثبت أنّ هذا هو الأكبر، وحدّد ما إذا كان هذا هو البيان الجزئي الثنائي الفرع الفريد الذي له هذا العدد الكبير من الأضلاع.





29.2.1. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا لا يحوي P_4 أو C_3 كبيان جزئي مُحدث. أثبت أنّ G هو عصبة ثنائية (بيان ثنائي الفرع تام).

30.2.1. ليكن G بيانًا بسيطًا رؤوسه $v_1,\ldots,v_n$، ولتكن A^k ترمز إلى القوّة k لمصفوفة التجاور لـ G تحت عملية ضرب المصفوفات. أثبت أنّ المدخلة i, j في A^k هي عدد الممرات من vi إلى vj التي طولها k في G. وأثبت أنّ G ثنائي الفرع إذا وفقط إذا تحقق أنه لكلّ عدد صحيح فردي r قريب جدًّا من n، فإنّ مدخلات القطر جميعها تكون أصفارًا في A^r. (تذكير: الممر هو قائمة مرتبة من الرؤوس والأضلاع).

31.2.1. (!) اثبات النظرية 23.2.1 دون استخدام الاستقراء: (انظر المثال 21.2.1).

a) ليكن $n \le 2^k$ ، شَفّرْ رؤوس K_n بوصفها مرتبات ثنائية مختلفة من الدرجة k. استخدم هذه لبناء k من البيانات الثنائية الفرع التي اتحادها يساوي K_n.

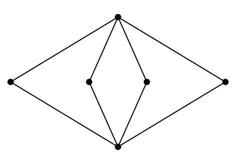
b) إذا أعطيت K_n بصفتها اتحاد بيانات ثنائية الفرع $G_1,\ldots,G_k$، شَفّرِ الرؤوس في K_n بوصفها مرتبات ثنائية مختلفة من الدرجة k. استخدم هذا لإثبات أن $n \le 2^k$.

32.2.1. العبارة الآتية غير صحيحة. أضف فرضية لتصحيحها، وأثبت العبارة المصحّحة.

"كلّ مسرب أعظمي في بيان زوجي هو حلقة أويلرية".

33.2.1. استخدم الاستقراء العادي على k أو على عدد الأضلاع (واحدًا بعد الآخر)؛ لإثبات أنّ البيان المترابط على 2k من الرؤوس الفردية يتفكك إلى k مسربًا إذا كان $k > 0$. هل هذه النتيجة تبقى صحيحة دون فرضية خاصية الترابط؟

34.2.1. تكون الحلقتان الأويلريتان متكافئتين إذا كان لهما الأزواج غير المرتبة نفسها من الأضلاع المتتالية، بنظرة حلقية أو دائرية (نقطتا البداية والاتجاه غير مهمتين). فإنّ الحلقة، على سبيل المثال، لها صف تكافؤ واحد فقط من الحلقات الأويلرية. ما عدد صفوف التكافؤ من الحلقات الأويلرية الموجودة للبيان المرسوم أدناه؟



35.2.1. خوارزمية توكر. (*Tucker's algorithm*) افترض أن G بيان زوجي مترابط. عند كل رأس، اعمل تجزئة للأضلاع المرتبطة بهذا الرأس إلى أزواج (كلّ ضلع يظهر في زوج لكلّ نقطة طرفية فيه)، ابدأ مع ضلع e لتشكل مسربًا (Trail) بمغادرة كلّ رأس على الضلع الذي يشكل زوجًا مع الضلع المستخدم لدخول هذا الضلع، منتهيًا بالضلع الذي يشكل زوجًا مع e، وهذا يحلل G إلى مسارب مغلقة، ما دام يوجد أكثر من مسرب في هذا التحليل، جد مسربين لهما رأس مشترك، ثمّ ضمّهما أحدهما إلى الآخر لتحصل على مسرب واحد أطول بتغيير المزاوجة (Pairing) عند رأس مشترك. وأثبت أنّ هذه الخطوات تعمل وتعطي حلقة أويلرية كمسربها النهائي ([1976] Tucker).

36.2.1. (+) توصيف بديل لبيانات أويلر:

a) أثبت أنه إذا كان G بيانًا أويلريًّا، وكانت $G' = G-uv$، فإنّ G' يحوي عددًا فرديًّا من المسارب من u إلى v. وأثبت كذلك أنّ عدد المسارب في هذه القائمة التي لا تشكل مسارات هو عدد زوجي.

b) إذا كان v رأسًا درجته فردية في بيان معين، فلكلّ ضلع e يرتبط بـ v، افترض أنّ $c(e)$ تمثّل عدد الحلقات التي تحوي e. استخدم $\sum_e c(e)$ لإثبات أنّ $c(e)$ يكون زوجيًّا لبعض e المرتبط بـ v.([1984] Mckee).

c) استخدم الفرعين (a) و (b) لتستنتج أنّ البيان غير التافة (nontrivial) المترابط يكون أويلريًّا إذا وفقط إذا كان كل ضلع ينتمي إلى عدد فردي من الحلقات.

37.2.1. (!) استخدم مفهوم الدرجة القصوى (extremality) لإثبات أن علاقة الربط هي علاقة تعدّ (مساعدة: إذا أعطيت ممرين p من u إلى v، و Q من v إلى w، فخذ في الحسبان أول رأس من P في Q).

38.2.1. (!) أثبت أن كلّ بيان على n من الرؤوس، وعدد أضلاعه يساوي n على الأقل يجب أن يحوي حلقة.

39.2.1. افترض أن G بيان خالٍ من العرى، درجة كلّ رأس من رؤوسه على الأقل 3. أثبت أنه يوجد في G حلقة طولها زوجي. (مساعدة: خذ في الحسبان أكبر مسار) (P.Kwok).

40.2.1. (!) افترض أن p و Q مساران في بيان مترابط G، بحيث إنّ طوليهما أكبر ما يمكن، أثبت أنه يوجد رأس مشترك بينهما.

41.2.1. افترض أنّ G بيان مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل، أثبت أنّه يوجد لـ G رأسان x و y بحيث إنّ: (1 $G- \{x,y\}$ مترابط. (2) x و y متجاوران أو يوجد لهما جار مشترك. (مساعدة: افترض أطول مسار) (chung [1978a]).

42.2.1. افترض أنّ G بيان بسيط مترابط لا نستطيع أن نستحدث منه p_4 ولا C_4. أثبت أنه يوجد لـ G رأس يجاور باقي رؤوس G (مساعدة: افترض رأسًا له أكبر درجة). ([1965] wolk).

43.2.1.(+) استخدم الاستقراء على k لتثبت أن كلّ بيان بسيط مترابط له عدد زوجي من الأضلاع يتفكك إلى مسارات طول كلّ منها 2. هل تبقى النتيجة صحيحة إذا حُذِفَ شرط الترابط؟

3.1. درجات الرؤوس والعدّ (Vertes Degress and Counting)

تتمتع درجات الرؤوس بأهمّية خاصة بوصفها وسائط للبيانات. لذا سنعيد التعريف من أجل تعريف بعض الرموز المهمة.

1.3.1. تعريف. تعرّف درجة الرأس v في بيان G على أنّها عدد الأضلاع التي يكون v رأسًا لها، ويرمز إلى ذلك بالرمز $d(v)$ أو $d_G(v)$، وإذا وجد عند الرأس v أنشوطة، فتحسب عروتين عند احتساب $d(v)$.

ونستخدم الرمز $\Delta(G)$ للتدليل على أكبر درجة من بين درجات رؤوس G، و $\delta(G)$ للتدليل على أصغر درجة من بين هذه الدرجات، ونقول: إن G منتظم في حال كانت $\delta(G) = \Delta(G)$، ونقول: إن G منتظم من الدرجة K (K-**regular**). إذا كانت $\Delta(G) = \delta(G) = K$، ثمّ نعرف جوار الرأس v على أنه مجموعة الرؤوس التي تجاور v، ونرمز إلى ذلك بالرمز $N(v)$.

2.3.1. تعريف. نعرف رتبة البيان G على أنها عدد رؤوس G، ونرمز إلى ذلك بالرمز $n(G)$ ونعرف حجم G على أنه عدد أضلاع G، ونرمز إلى ذلك بالرمز $e(G)$. في حين نستخدم الرمز $n \in \mathbb{N}$ للتدليل على المجموعة $\{1,2,\dots,n\}$.

وبما أنّ البيانات التي نتعامل معها منتهية (finite)، فإنّ $n(G)$ و $e(G)$ عددان صحيحان غير سالبين لا لبس فيهما (well defined)، وكذلك نستخدم الرمز e للتدليل على ضلع معين، وسوف يتّضح من السياق ما المقصود عند استخدام الحرف e. ونستخدم الرمز حلقة من الرتبة n (n- cycle) للتدليل على حلقة لها n من الرؤوس، وهذا ينسجم مع تعريف البيان على n من الرؤوس (n- vertex graph) أو الذي له n من الرؤوس.

العدّ والتناظر (Counting and Bijections)

سنبدأ بالحديث عن مسائل العدّ المتعلقة ببيانات جزئية لبيان معين، وأول هذه المسائل هي عملية حساب عدد الأضلاع أو عدّها؛ حيث نقوم بذلك من خلال استخدام درجات الرؤوس، والصيغة التي نحصل عليها هي من الأدوات المهمة في نظرية البيانات، وفي بعض الأحيان يطلق عليها اسم أول نظرية في نظرية الرسوم، فضلاً عن أنّها تسمى بديهية التصافح بالأيدي (Hand Shaking Lemma)

3.3.1. قضية. (**Proposition**) صيغة مجموعة الدرجات (Degree Sum Formula) إذا كان G بيانًا فإن:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2e(G)$$

الإثبات: بما أنه لكلّ ضلع طرفان، فإنّ كلّ ضلع يسهم باثنين في المجموع. لذا نحصل على الصيغة أعلاه. ■

لاحظ أنّ الإثبات يبقى صحيحًا عندما تحتوي G على عرى؛ وذلك لأنّ كلّ أنشوطة تسهم باثنين في هذا المجموع، وإذا خلا البيان من العرى، فإنّ الصيغة أعلاه تحسب عدد الأزواج (v,e) (حيث v هي طرف من أطراف e)، مجمعة بحسب الرؤوس، أو بحسب الأضلاع، ومن الجدير بالذكر أن مبدأ العدّ في اتجاهين (لمتغيرين) يعطي طريقة رائعة (أنيقة) لإثبات المتطابقات المتعلقة بالأعداد الصحيحة. (انظر التمرين 31 في الملحق A).

وهنا، لا بدّ من الإشارة إلى أنّ لصيغة مجموع الدرجات تطبيقات متعددة تأتي فيما بعد، ويمكن استنباط عدّة نتائج منها مباشرة (انظر النتيجة 5.3.1، والتمارين من 9 إلى 13).

4.3.1. نتيجة. (**Corollary**) إذا كان G بيانًا، فإنّ معدّل درجة رؤوسه هو: $\frac{2e(G)}{n(G)}$ وبناءً عليه، فإنّ

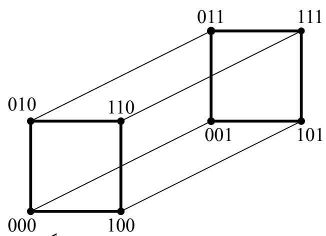
$$\delta(G) \le \frac{2e(G)}{n(G)} \le \Delta(G)$$ ■

5.3.1. نتيجة. إذا كان G بيانًا، فإنّ عدد رؤوسه ذوات الدرجة الفردية يكون زوجيًّا. لاحظ أنه لا يوجد بيان منتظم فردي الدرجة ذو رتبة فردية. ■

6.3.1. نتيجة. إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة K له n من الرؤوس، فإنّ عدد أضلاعه يساوي $nk/2$. ■

وفيما يلي نعرف عائلة مهمة من البيانات.

7.3.1. تعريف. نعرف المكعب الزائدي Q_k (**hypercube**)، أو المكعب ذا البعد K على أنه بيان بسيط، بحيث إن كلّ رأس من رؤوسه هو ترتيبة (عديد) تحوي K من الإحداثيات (K- tuple)، وأنّ كلّ إحداثي إما أن يكون 1 أو 0، وكلّ ضلع من أضلاعه هو زوج من هذه الترتيبات تختلف في إحداثي واحد فقط. ويعرف المكعّب الجزئي من Q_k ذو البعد j على أنه رسم جزئي من Q_k يشاكل Q_j.



يظهر الشكل أعلاه Q_3، يُعَدُّ المكعب الزائدي مهندسًا معماريًّا طبيعيًّا للحاسوب، حيث يمكن للمعالجات التواصل مباشرة إذا ارتبطت برؤوس متجاورة في Q_k، علمًا بأنّ الترتيبات التي لها K من الإحداثيات والتي تمثل الرؤوس التي تعمل بوصفها عناوين للمعالجات.

8.3.1. مثال: بنْية (تركيب) المكعبات الزائدية. (*Structure of hypercubes*) تُعرف (*Parity*) نوعية أيّ رأس في Q_k على أنها نوعية عدد الوحدات نفسها في تمثيل هذا الرأس، سواء أكان العدد زوجيًّا أم فرديًّا، لاحظ أنّ لكلّ ضلع في Q_k رأسين؛ الأول زوجي والآخر فردي. لذا، فإنّ الرؤوس الزوجية تمثل مجموعة مستقلة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى مجموعة الرؤوس الفردية. لذا، فإنّ Q_k يكون بيانًا ثنائي الفرع (bipartite).

وبما أنه يمكن تحديد كل موقع في الترتيبة التي عدد إحداثياتها K بطريقتين، فإن $n(Q_k)=2^k$، ويمكن الحصول على جوار لأيّ رأس بتغيير قيمة أحد المواقع في ترتيبة هذا الرأس، إما من 1 إلى صفر، أو من صفر إلى 1، وهذا يعني أن Q_k منتظم من الدرجة K، وباستخدام النتيجة (6.3.1) نجد أنّ $e(Q_k)=K2^{k-1}$.

تُظهر الأضلاع المضللة في بيان Q_3 أعلاه بيانين جزئيين من Q_3، كل منهما يشاكل Q_2. وقد تمّ الحصول عليهما بتثبيت الإحداثي الأخير عند القيمة 0 أو 1. وعمومًا، يمكن الحصول على مكعب جزئي ذي بعد j وذلك بتثبيت $k-j$ من الإحداثيات، وترك قيم ما تبقى من إحداثيات تتغير على الـ $2j$ من الترتيبات الممكنة التي عدد إحداثياتها j. إن البيان الذي نحصل عليه بهذه الطريقة يشاكل Q_j، وبما أنه توجد طريقة لاختيار j من الإحداثيات المتغيّرة و 2^{k-j} طريقة لتحديد قيم الإحداثيات المثبتة، فإن هذا يحدد $\binom{k}{j}2^{k-j}$ من هذه المكعبات. ويظهر التمرين (29) أنّ هذا هو كلّ ما نحصل عليه من هذه المكعبات.

إن نسخ Q_1 هي ببساطة أضلاع Q_k، والصيغة التي حصلنا عليها تصبح $K2^{k-1}$ عندما $j=1$، لذا نحصل على طريقة أخرى لإيجاد $e(Q_k)$. عندما $j=k-1$، فإن نقاشنا أعلاه يقترح وصف Q_k بطريقة متكررة أو دورية (recursive). (ألحق 0 باسم كل رأس في نسخة من Q_{k-1}، وألحق 1 باسم كل رأس في نسخة أُخرى من Q_{k-1}. أضف أضلاعًا تربط بين رؤوس النسختين التي تكون أول K_{-1} من إحداثياتها متساوية، تحصل على Q_k. إن الخطوة الأساسية في هذا البناء هي Q_o التي تمثل بيانًا له رأس واحد فقط. لذا فإن هذا الوصف يقود إلى إثبات استقرائي للعديد من خصائص المكعبات الزائدية بما في ذلك عدد الأضلاع (التمرين 23) $e(Qk) = k2^{k-1}$. ■

المكعب الزائدي بيان منتظم ثنائي الفرع (bipartite). وباستخدام تعليل (argument) حسابي بسيط، نستطيع إثبات ملاحظة أساسية ومهمة عن هذه البيانات.

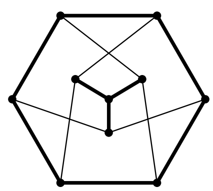
9.3.1. قضية. إذا كانت $k > 0$، فإنّ كلّ بيان ثنائي الفرع منتظمًا من الدرجة k يحوي عدد الرؤوس نفسه في كل من مجموعتي رؤوسه.

الإثبات: افترض أنّ G بيان منتظم من الدرجة k ثنائي الفرع، ومجموعتا رؤوسه هما X و Y. وبحساب عدد الأضلاع بحسب نقاطها الطرفية الموجودة في x، نجد أنّ عدد الأضلاع $e(G) = k\,|X|$ وبحساب $e(G)$ بحسب النقاط الطرفية الموجودة في y، نجد أنّ $e(G) = k|Y|$ وهذا يعطي أنّ: $|x| = k|Y|$ ومنها $|X| = |Y|$ عندما $k > o$. ■

لاحظ أنه يمكن احتساب عدد عناصر مجموعة معينة عن طريق إيجاد دالة تناظر (bijection) من المجموعة إلى مجموعة حجمها معروف. ومثالنا الآتي يستخدم هذه الطريقة إضافة إلى أنّ هناك أمثلة أخرى على تعليلات تركيبية لبعض مسائل العد الحسابية تظهر في الملحق A، وكذلك تتضمّن التمارين 18–35 مسائل تتعلق بالعدّ والحساب.

10.3.1. مثال يوجد 6 حلقات لبيان بيترسون. افترض أن G هو بيان بيترسون الثلاثي المنتظم الذي له عشرة مخالب ($claws$)، حيث نقصد بالمخلب نسخةً من $k_{1,3}$، وسنجد ارتباط واحد لواحد بين الحلقات الست وهذه المخالب.

بما أن طول أصغر حلقة في G هو 5، فإنّ كلّ حلقة سداسية F تمثل بيانًا جزئيًّا، وكلّ رأس في F له جار واحد خارج F. وبما أنه يوجد جار مشترك واحد فقط للرؤوس غير المتجاورة (الفرضية 38.1.1)، فإنّ هناك جارًا مشتركًا خارج F للرؤوس المتضادة الموجودة في F، وبما أنّ G بيان منتظم ثلاثي، فإنّ الرؤوس الثلاثة الناتجة خارج F تكون مختلفة. لذا فإنّ حذف $V(F)$ ينتج بيانًا جزئيًّا له ثلاثة رؤوس درجة كل منها واحد، ورأس رابع درجته ثلاث، لذا فهو مخلب.



سنرى فيما يأتي أنّ كل مخلب H في G يظهر مرة واحدة فقط بهذه الطريقة. افترض أنّ S تمّثل مجموعة الرؤوس في H التي درجة كل منها واحد، لاحظ أنّ S مجموعة مستقلة، الرأس المركزي في H يمثل جارًا مشتركًا. لذا فإن الأضلاع الستة الأخرى من S تصل إلى رؤوس مختلفة، وبناءً على ذلك، فإنّ $G- V(H)$ بيان منتظم ثلاثي. وبما أن طول أقصر حلقة في G يساوي 5، فإنّ $G-V(H)$ يجب أن يكون حلقة سداسية (طولها 6)، وهذه الحلقة السداسية تعطي H عندما نحذف رؤوسها. ■

سنعطي طريقة أخرى للعدد تتصل بمخمّنة طويلة الأمد، ونسمي البيان الجزئي الذي نحصل عليه من بيان معيّن بحذف رأس واحد فقط من رؤوسه بيانًا جزئيًّا محذوف الرأس (**vertex deleted subgraph**)، وهذه البيانات الجزئية التي نحصل عليها بهذه الطريقة يمكن ألا تكون مختلفة جميعها، فمثلاً، عند حذف أيّ رأس من رؤوس الحلقة C_n، فإننا نحصل على بيانات جزئية كل منها يشاكل المسار $Pn-1$.

11.3.1. *قضية. إذا كان G بيانًا بسيطًا رؤوسه $V_1,\ldots,V_n$ حيث $n \geq 3$، فإنّ.

$$d_G(v_i) = \frac{\Sigma e(G-vi)}{n-2} - e(G - v_i) \qquad \text{و} \qquad e(G)\,\frac{\Sigma e(G-v_i)}{n-2}$$

الإثبات: لاحظ أنه إذا كان e ضلعًا في G، فإنّ e يظهر في $G-vi$ إذا وفقط إذا لم تكن vi نقطة طرفية لهذا الضلع. لذا، فإنّ $\sum(G-vi)$ تحسب كلّ ضلع $n-2$ مرة.

إذن، عندما تُعرف $e(G)$، فإنّ درجة v_j تحسب بعدد الأضلاع المفقودة عند حذف v_j من $G- v_j$. ■

نموذجيًا، نُعطى البيانات الجزئية المحذوفة الرأس بوصفها بيانات دون تسمية (وضع علامات أو رسم على الأضلاع أو الرؤوس)، إذا إننا نعرف فقط ما يُسمى صفوفَ التشاكل (isomorphism classes) لهذه البيانات، ولا نعلم أيّ رأس في $G-v_i$ يرتبط بأيّ رأس في G، وهذا يجعل من الصعب معرفة ماهية البيان G، وعلى سبيل المثال: فإن K_2 ومتممة K_2 لهما القائمة نفسها من البيانات الجزئية محذوفة الرأس، وللبيانات ذات الحجم الأكبر، يوجد لدينا مخمنة إعادة البناء (**Reconstruction Conjecture**) التي صيغت من قبل كيلي وأولام (Kelly and Ulam) في العام 1942م.

12.3.1. *مخمّنة. مخمنة إعادة البناء (Reconstruction Conjecture) إذا كان G بيانًا بسيطًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، فإنه يُحدَّدُ تمامًا وبصورة فريدة بواسطة قائمة من بياناته (صفوف التشاكل) الجزئية المحذوفة الرأس. ■

قائمة البيانات الجزئية المحذوفة الرأس لبيان G تحوي $n(G)$ من المفردات، وتبيّن القضية 11.3.1 أنه يمكن إعادة بناء $e(G)$ ومجموعة درجات الرؤوس، وتبيّن قائمة درجات الرؤوس أنه يمكن إعادة بناء البيانات المنتظمة (التمرين 37)، وكذلك نستطيع أن نحدّد ما إذا كان G مترابطًا (التمرين 38)، وباستخدام هذا، فإنه يمكن إعادة بناء البيانات غير المترابطة (التمرين 39)، وهناك أيضًا بعض الشروط الكافية المعروفة التي تضمن إعادة البناء، لكن المخمّنة العامة تبقى مسألة دون حلّ.

مسائل القيم القصوى (أو القيم التطرّفية) (Extermal Problems)

تتعلق هذه المسائل بإيجاد القيم العظمى والصغرى لدالّة معروفة على مجموعة من الأشياء، فمثلاً، إن أكبر عدد من الأضلاع لبيان بسيط له n من الرؤوس هو $\binom{n}{2}$.

13.3.1. قضية. أصغر عدد من الأضلاع لبيان مترابط على n من الرؤوس هو $n-1$.

الإثبات: باستخدام القضية (11.2.1) نجد أنّ البيان الذي له n من الرؤوس، و K من الأضلاع له $n-k$ مُركبة على الأقل، لذا فإنّ كلّ بيان له n من الرؤوس، وعدد أضلاعه أقلّ من $n-1$ يمتلك مركبتين. وعليه، فهو غير مترابط. ونقيض هذا هو أنّ لكلّ بيان مترابط على n من الرؤوس $n-1$ ضلعًا على الأقل، وهذا الحدّ الأدنى متحقق في المسار P_n. ■

14.3.1. ملاحظة. لإثبات أنّ B أصغر قيمة في $f(G)$ لبيانات في صف $\mathbf{G}$؛ يتطلب إثبات أن:

1) $f(G) \geq \beta$ لكل $G \in \mathbf{G}$.

2) $f(G) = \beta$ لبعض $G \in \mathbf{G}$.

يجب أن يكون إثبات الحدّ صالحًا لكلّ $G \in \mathbf{G}$، وللمساواة؛ يكفي أن نجد مثالاً واحدًا في $\mathbf{G}$ يحقق القيمة المطلوبة للدالة f، وبتغيير $\leq$ بـ $\geq$، نحصل على طريقة لإثبات أنّ B أكبر قيمة في $f(G)$. ■

سنحل فيما يأتي مسألة قيم قصوى لم تكن معطاة أصلاً كذلك.

15.3.1. قضية. إذا كان G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس، بحيث إن $\delta(G) \geq (n-1)/2$ ، فإن G يكون بيانًا مترابطًا.

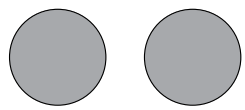
الإثبات: نختار u و v في $V(G)$. لذا، يكفي أن نثبت أنه يوجد جار مشترك لكليهما عندما يكونان غير متجاورين، وبما أنّ G بيان بسيط، إذن: وكذلك الأمر بالنسبة إلى الرأس v. وعندما $u \nleftrightarrow v$، فإنّ $|N(u) \cup N(v)| \leq n-2$ وبما أنّ u,v ليسا في الاتحاد، وباستخدام الملاحظة $A.13$ في الملحق A، فإننا نحسب: ■

$$|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} - (n-2) = 1.$$

ونقول: إنّ النتيجة التي تمّ الحصول عليها هي أفضل ما يمكن، أو أنها حادة (**Sharp**) عندما لا يمكن تقوية أحد أجزائها أو مضامينها دون أن تصبح عبارة غير صحيحة، وتوضح القضية 15.3.1 ذلك بجلاء؛ فعندما تكون $\delta(G)$ أصغر من $n(G)-1)/2$)، لا يمكننا الاستنتاج أن البيان δ مترابط.

16.3.1. مثال. افترض أنّ G بيان على n من الرؤوس، بحيث إنّ مركباته تشاكل $k_{\lceil n/2\rceil}$ و $k_{\lceil n/2\rceil}$ حيث $\lfloor x\rfloor$ هي دالةّ أكبر عدد صحيح أقلّ من x أو تساويها، وأنّ $\lceil x\rceil$ هي دالة أكبر عدد صحيح أكبر من x أو تساويها، وبما أنّ $\delta(G) = \lfloor n/2\rfloor -1$ و G غير مترابط، فإن المتباينة الموجودة في 15.3.1 حادة ($Sharp$).

تسمّى الدالة $\lfloor x\rfloor$ دالة أرضية x، أمّا الدالة $\lceil x\rceil$ فتسمّى دالة سقف x، ونستخدم هاتين الدالتين هنا من أجل إعطاء وصف لعائلة واحدة من البيانات، وذلك بإعطاء مثال لكل n. ■

$K_{[n/2]}$  $K_{[n/2]}$

بإعطاء مجموعة من الأمثلة التي تمثل أنّ الحدّ الذي حصلنا عليه هو أفضل ما يمكن، نكون قد حللنا مسألة قيم قصوى. لاحظ أنّ القضية 15.3.1، والمثال 16.3.1 يثبتان أنّ "أقل قيمة لـ $\delta(G)$ التي تضمن ترابط البيان البسيط G هي $\lfloor n/2\rfloor$، " أو أنّ "أكبر قيمة لـ $\delta(G)$ تجعل البيان غير مترابط هي $\lfloor n/2\rfloor -1$ "، وذلك على افتراض أنّ n من الرؤوس للبيان G.

17.3.1. تعريف: البيان الذي تمّ الحصول عليه من اتحاد بيانين G و H منفصلي الرؤوس يسمى الاتحاد المنفصل، أو المجموع للبيانين، ويرمز إليه بالرمز $G + H$. وبوجه عام، نستخدم الرمز mG للتدليل على البيان المؤلف من m نسخة من بيان G، حيث إنّ أضلاع أيّ نسختين من هذه النسخ تكون منفصلة زوجًا زوجًا (Pairwise disjoint edges).

18.3.1. مثال: إذا كان كلّ من G و H مترابطًا، فإنّ للبيان $G+H$ مركبتين هما: G و H، لذا، فإنّ البيان الموجود في المثال (16.3.1) هو $K_{\lfloor n/2\rfloor} + K_{\lceil n/2\rceil}$، ويذكر أن هذه الرموز مناسبة عندما لا نعطي أسماء للرؤوس. لاحظ أن $K_m + K_n = \overline{K_{m,n}}$، ولاحظ كذلك أنّ البيان mK_2 يتألف من m من الأضلاع المنفصلة زوجًا زوجًا. ■

نستخدم مسائل القيم القصوى في نظرية البيانات لإيجاد البيان الأمثل الذي يحقق خاصية معينة ضمن مجموعة (class) أو مجموعة من البيانات، وعندما نبحث عن القيم القصوى لبيان واحد، فالمسألة مختلفة من بيان إلى آخر. فمثلاً، يمكن أن نسأل عن حجم أكبر مجموعة مستقلة، أو حجم أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع، تتمييز هذه المسائل من المسائل التي ناقشناها سابقًا، فإننا نسميها مسائل الأمثلية (**optimization problems**). بما أنه يوجد مثل أو شاهد لمسائل الأمثلية في كلّ بيان، فلا نستطيع وضع قائمة لحلول المسألة جميعها. لذا نلجأ إلى إيجاد طريقة حلّ، أو لوضع حدود على الإجابة بدلالة سمات أخرى للبيان. وفي ضوء ذلك، نأخذ في الحسبان مسألة إيجاد أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع لبيان معين، وهذا يسمح لنا باستخدام أسلوب البناء، أو إيجاد خوارزمية تعطي الحلّ أو الإثبات (الخوارزمية: طريقة منظمة تتضمن عددًا من الخطوات لتحقيق هدف معين).

إن إحدى طرق إثبات وجود شيء هو القيام ببناء هذا الشيء، ويمكن افتراض هذا النوع من الإثبات

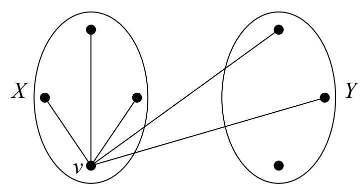
خوارزمية. ولإكمال الإثبات؛ لابدّ من إثبات أنّ الخوارزمية تنتهي بعد إجراء عدد من العمليات لإعطاء النتيجة المطلوبة. وربّما يتضمّن هذا النوع من البراهين استخدام الاستقراء الرياضي، والتناقض، والمحدودية أو الانتهائية (finiteness) ..... إلخ.

سنثبت أنه يوجد لكلّ بيان أكبرُ بيان جزئي ثنائي الفرع من خلال إعطاء خوارزمية تضمن وجود مثل هذا البيان الجزئي. التمارين (45 – 49) تتعلق بإيجاد أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع لبعض البيانات.

19.3.1. نظرية. يوجد لكل بيان G خالٍ من العرى بيانٌ جزئي ثنائي الفرع عدد أضلاعه $e(G)/2$ على الأقل.

الإثبات: ابدأ بأي تجزئة للمجموعة $V(G)$ إلى مجموعتين X و Y، فالأضلاع التي أحد طرفيها في X، والطرف الآخر في Y تشكل بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع H، وتمثل كلّ من X و Y تجزئة ثنائية لرؤوسه، وإذا كان عدد أضلاع H أقلّ من نصف عدد أضلاع G الذي يكون الرأس v طرفًا له، فإنّ عدد الرؤوس التي ترتبط بـ v بأضلاع، والخاصة بالمجموعة التي تنتمي إليها v، يكون أكثر من عدد رؤوس المجموعة الثانية التي ترتبط بـ v بأضلاع، كما هو موضح في الشكل أدناه. وبتحويل v من مجموعتها إلى المجموعة الأخرى، فإنها تكسب عددًا من الأضلاع أكثر من العدد الذي تخسره.

وبتكرار عملية تحريك الرؤوس هذه، مع ملاحظة أنّ هذه العملية تزيد حجم البيان الجزئي الثنائي الفرع الذي تحصل عليه، فلا بد لهذه العملية من الانتهاء عند حدّ معين. وعندئذ نحصل على $d_H(v) \geq d_G(v)/2$ لكل $v \in V(G)$. وبأخذ مجموع الطرفين، وباستخدام صيغة جمع الدرجات نجد أن $e(H) \geq e(G)/2$. ■

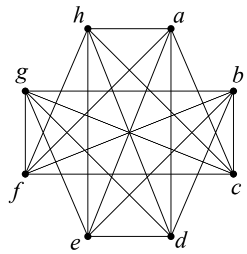


لاحظ أنّ البراهين باستخدام الخوارزميات ترتبط بالإثبات الاستقرائي غالبًا ، أو بإثبات يتعلق بالدرجات أو القيم القصوى. إنّ هذه البراهين تكون قصيرة وسهلة الإيجاد. لذا فغالبًا ما نبحث عن مثل هذا الإثبات، ثم نحوّله إلى خوارزمية، فعلى سبيل المثال: نعطي إثباتًا للنظرية (19.3.1) بلغة القيم القصوى والتناقض. وبالمحصلة، فإنّ اختيار قيمة قصوى لـ H يتجه مباشرة إلى نهاية الخوارزمية.

> افترض أنّ H بيان جزئي ثنائي الفرع للبيان G، بحيث إنّ عدد أضلاع H هو أكبر ما يمكن، إذا كانت لبعض $v \in V(G)$، وبتحريك v في التجزئة الثنائية من مجموعتها إلى المجموعة الأخرى، نحصل على تناقض لاختيار H.

20.3.1. مثال: قيمة عظمى محلية. لا تضمن الخوارزمية في النظرية (19.3.1) إنتاج بيان جزئي ثنائي الفرع له أكبر عدد من الأضلاع، لكن ما تعطيه هو بيان جزئي ثنائي الفرع عدد أضلاعه أكبر من نصف عدد أضلاع البيان الكلي أو يساويه. إن البيان أدناه منتظم من الدرجة 5، له 8 رؤوس و 20 ضلعًا، والتجزئة الثنائية $X = \{a,b,c,d\}$ و $Y = \{e,f,g,h\}$ تعطي بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع، وهذا البيان الجزئي منتظم من الدرجة 3 له 12 ضلعًا، حيث تنتهي الخوارزمية هنا، علمًا بأن تغيير (قلب) موقع أحد الرؤوس يكسبنا ضلعين، إلا أننا نخسر ثلاثة أضلاع.

وعلى الرغم من ذلك، فإن التجزئة الثنائية $X = \{a,b,g,h\}$ و $Y = \{c,d,e,f\}$ تعطينا بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع منتظمًا من الدرجة 4 وله 16 ضلعًا، وهنا لا بدّ من الإشارة إلى أنّ الخوارزمية التي تبحث عن قيمة عظمى بإجراء تغييرات موضعية (محلية) ربّما تحصل على قيمة عظمى محلية فقط، وليست قيمة عظمى كلية أو مطلقة. ■



21.3.1. ملاحظة : في البيان G، أكبر عدد كلي للأضلاع في بيان جزئي ثنائي الفرع هو $e(G)$ ناقصًا أقل عدد ممكن من الأضلاع التي تلزم للحصول على ضلع واحد على الأقل من كل حلقة فردية. ■

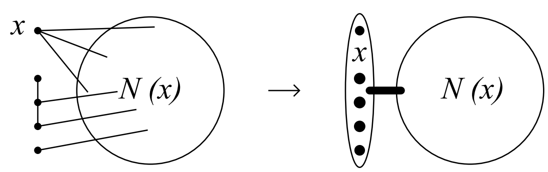
مسألتنا التالية المتعلقة بالقيم القصوى لا تبدأ بالبيانات الثنائية الفرع، ولكنها تنتهي هناك؛ إذ يندر أنْ تجد في السياسة والحروب عدوين لهما عدو مشترك، وعادة ما يتعاون اثنان ضد الثالث، والمسألة الآن إذا أعطينا n من الجماعات، فكم زوجًا من الأعداء يمكن أن يكون هناك، علمًا بأنه لا يوجد عدو مشترك لأي عدوين؟

بلغة البيانات نسأل عن أكبر عدد ممكن من الأضلاع يمكن أن يكون لبيان بسيط على n من الرؤوس إذا علم عدم وجود مثلثات (حلقات ثلاثية) لهذا البيان. لاحظ أنه لا توجد مثلثات في البيانات الثنائية الفرع. ولكن كثير من الرسوم غير ثنائي الفرع (مثل بيان بيترسون) لا يوجد فيها مثلثات أيضًا، وباستخدام القيم القصوى (باختيار رأس له أكبر درجة) سنثبت وجود رسوم تحقق هذه القيم، ومثال ذلك البيانات الثنائية الفرع التامة (Complete bipartite graphs).

22.3.1. تعريف. نقول: إنّ البيان G متحرر من H (أو خالٍ من H) (H-**free**) إذا كان يخلو من أي بيان جزئي يشاكل H.

23.3.1. نظرية : (Mantel [1907]) أكبر عدد ممكن من الأضلاع لبيان بسيط يخلو من المثلثات على n من الرؤوس هو $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

الإثبات: افترض أنّ G بيان بسيط خالٍ من المثلثات له n من الرؤوس، وافترض أن x رأس له أكبر درجة، ضع $k = d(x)$، بما أنّ G تخلو من المثلثات، فلا توجد أضلاع تربط بين الرؤوس الموجودة في جوار x. لذا، فإنّ جمع درجة x، ودرجة كل عنصر غير مجاور لها يسهم باحتساب نقطة طرفية واحدة على الأقل لكلّ ضلع، لذا، نجد أنّ: $\sum_{v \notin N(x)} d(v) \geq e(G)$ ، وبإيجاد المجموع على $n-k$ من الرؤوس درجة كل منها أقل من k أو يساويها ، نجد أن $e(G) \leq (n-k)k$.



بما أنّ $(n-k)k$ تُعدّ عدد الأضلاع في $K_{n-k,k}$، فنكون قد أثبتنا أنّ $e(G)$ محصورة (محدودة) بحجم عصبة ثنائية (biclique) لها n من الرؤوس. وبتحريك رأس من رؤوس k_{n-k},k من المجموعة التي حجمها k إلى المجموعة التي حجمها $n-k$، نربح $k-1$ ضلعًا، ونخسر $n-k$ ضلعًا. لذا فإن محصلة ما نربح هو $2k-1-n$ ضلعًا. وهذا يكون موجبًا عندما $2k > n+1$، وسالبًا عندما $2k < n+1$. وبناءً عليه، فإن $e(K_{n-k,k})$ تكون أكبر ما يمكن عندما $K = \lceil n/2 \rceil$ ، أو $\lfloor n/2 \rfloor$. لذا فإنّ حاصل الضرب يساوي عندما تكون n زوجية، ويساوي عندما تكون n فردية، إذن، $e(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

لإثبات أنّ هذا الحدّ هو أفضل ما يمكن؛ نأخذ في الحسبان البيان $K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$ الذي يخلو من المثلثات وعدد أضلاعه $\lfloor n^2/4\rfloor$ $K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$. ■

وعلى الرغم من أنه يمكن تكبير (تعظيم) $(n-k)k$ باستخدام التفاضل، إلا أن استخدام طريق متقطع (غير متصل) أفضل أحيانًا؛ لأن ذلك يضمن أن تكون K عددًا صحيحًا مباشرة، ويمكن تعميمها بسهولة لعدد أكبر من المتغيرات. إنّ فكرة نقل الرؤوس من مجموعة إلى المجموعة التي وردت في النظرية (19.3.1) قد استخدمت لإيجاد أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع للبيان kn في النظرية (9.2.5). سنعمّم النظرية (23.3.1) لتشمل البيانات التي تخلو من $kr+1$. تقودنا نتيجة مانتيل (Mantel's) إلى سبب آخر لصياغة براهين الاستقراء بالطريقة التي أوردناها، والسبب هو الأمان.

24.3.1. مثال. (إثبات غير صحيح). لنحاول إثبات النظرية (23.3.1) باستخدام الاستقراء الرياضي على n. الخطوة الأساسية: $n \leq 2$، لاحظ أن البيان التام kn له أكبر عدد من الأضلاع، ويخلو من المثلثات.

خطوة الاستقراء: $n > 2$. افترض أن ادعاءنا صحيح عندما $n = k$. إذن، فإنّ $K_{\lfloor k/2\rfloor \lceil k/2\rceil}$، هو أكبر بيان على k من الرؤوس يخلو من المثلثات، أضف رأسًا x للحصول على بيان خالٍ من المثلثات على $k+1$ من الرؤوس، لاحظ أنه إذا كانت x تجاور رؤوسًا من مجموعتي الرؤوس المنفصلتين، فإن ذلك ينتج مثلثًا. لذا، ومن أجل الحصول على أكبر عدد ممكن من الأضلاع الإضافية، اجعل x تجاور كل رأس في المجموعة التي عدد رؤوسها أكثر من مجموعتي رؤوس، $K_{\lfloor k/2\rfloor \lceil k/2\rceil}$. وبذلك، نحصل على $K_{\lfloor (k+1)/2\rfloor \lceil (k+1)/2\rceil}$ وهذا ينهي الإثبات.

إن هذا الإثبات غير صحيح؛ لأننا لم نأخذ في الحسبان البيانات جميعها التي تخلو من المثلثات التي لها $k+1$ من الرؤوس؛ لأننا عالجنا حالة البيانات التي لها أكبر بيان جزئي (من حيث عدد الأضلاع) على k من الرؤوس فقط، وهذا البيان يظهر في أكبر بيان له $k+1$ من الرؤوس، ولكن لا يمكن استخدام هذه الحقيقة قبل إثباتها، لاحظ أنه من الممكن الحصول على مثال ذي قيمة عظمى على $k+1$ من الرؤوس بإضافة رأس له أكبر درجة لبيان ليس له قيمة عظمى على k من الرؤوس. يطور التمرين (51) إثباتًا صحيحًا باستخدام الاستقراء على n. ■

إن الخطأ في المثال (24.3.1) هو أن خطوة الاستقراء لم تأخذ في الحسبان الشواهد الممكنة جميعها للعبارة المتعلقة بالقيمة الكبرى والجديدة للوسيط، ونسمي هذا الخطأ مصيدةَ الاستقراء. إذا كانت خطوة الاستقراء تنمي شاهدًا للقيمة الجديدة للوسيط من شاهد أصغر، فيجب علينا أن نثبت أن الشواهد والأمثلة للقيمة الجديدة جميعها قد أخذت في الحسبان.

عندما يكون هناك مثل واحد لكل قيمة من قيم وسيط الاستقراء (كما في حالة صيغ الجمع) عند ذلك لا توجد مشكلة. وعندما يكون هناك أكثر من شاهد، فمن الأسهل أن نبدأ بشاهد اختياري لقيمة الوسيط الأكبر؛ لأن هذا – وبوضوح- يأخذ في الحسبان شواهد G جميعها للقيمة القصوى. لذا، فمن غير الضروري أن نثبت أننا قد قمنا بتوليدها جميعًا.

على أي حال، عندما نحصل من G على شاهد أصغر، فعلينا أن نؤكد على أن فرضيات الاستقراء تنطبق عليها. فعلى سبيل المثال، في إثبات الاستقراء الخاص بحلقات أويلر (النظرية 62.2.1)، يجب علينا تطبيق فرضيات الاستقراء على كل مركبة من مركبات البيان نحصل عليها بحذف أضلاع حلقة معينة، وليس على البيان كله دفعة واحدة.

25.3.1. ملاحظة : في هذه الملاحظة، نعطي هيكلاً للاستقراء (A template for induction) غالبًا ما تكون العبارة التي نرغب في إثباتها بالاستقراء على n تضمينًا مثل $A(n) \Rightarrow B(n)$، حيث يجب أنّ نثبت أنّ كلّ شاهد G يحقق $A(n)$، ويحقق $B(n)$ أيضًا. إن خطوتنا الاستقرائية تتبع شكلاً نمطيًّا معينًا، حيث نحصل من G على شيء

أصغر G'، إذا أثبتنا أن G' تحقق $A(n-1)$ (للاستقراء العادي). وإذا أدت خطوات (فرضيات) الاستقراء إلى أن G' تحقق $B(n-1)$، فإننا نستخدم حينها حقيقة أنّ G' تحقق $B(n-1)$ لإثبات أن G تحقق $B(n)$.

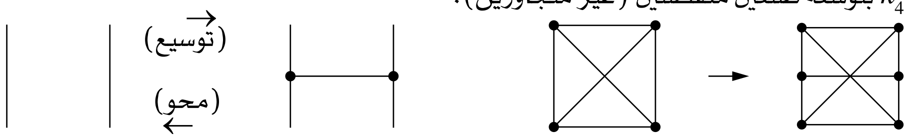
$$\begin{array}{ccc} G \text{ satisfies } A(n) & & G \text{ satisfies } B(n) \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ G' \text{ satisfies } A(n-1) & & G' \text{ satisfies } B(n-1) \end{array}$$

الخطوة الأساسية هنا خطوة الاستقراء، وأما باقي إجراء الخطوات، فعلينا نحن القيام بها، لاحظ أن براهين الاستقراء تتبع هذا الصورة أو النمط. ■

26.3.1. *مثال: مصيدة الاستقراء قد تؤدي مصيدة الاستقراء إلى استنتاج غير صحيح، لنحاول استخدام الاستقراء على عدد الرؤوس لإثبات أن كل بيان مترابط منتظم ثلاثي يخلو من ضلع قطع (cut − edge).

وباستخدام صيغة جمع الدرجات، نعلم أن كل بيان منتظم درجة رؤوسه فردية يجب أن يكون زوجي الرتبة. لذا نفترض أن لدينا بيانًا له $2m$ من الرؤوس، إن أصغر بيان منتظم ثلاثي هو k_4، وهو مترابط، وليس له ضلع قطع. وهذا يثبت خطوة الاستقراء الأساسية، حيث $m=2$.

خطوة الاستقراء: افترض أن النتيجة صحيحة لكل بيان G منتظم ثلاثي له $2k$ من الرؤوس. الآن يمكننا الحصول على بيان G' منتظم ثلاثي له $2(k+1)$ من الرؤوس (هذا يمثل أول بيان له رتبة أكبر) وذلك باستخدام عملية "توسعة للبيان G" على الصورة التالية: خذ ضلعين من G، واستبدلهما بمسارين طول كل منهما 2 من خلال إضافة رأسين جديدين على هذين الضلعين وربطهما بضلع جديد. يوضح الشكل أدناه كيفية الحصول على $k_{3,3}$ من k_4 بتوسعة ضلعين منفصلين (غير متجاورين).

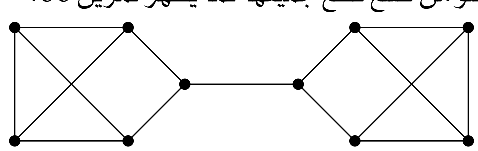


لاحظ أنه إذا كان البيان G مترابطًا فإن البيان الموسع G' يكون مترابطًا أيضًا. ولاحظ أنه بإضافة رأسين جديدين لضلعين غير متجاورين، فإننا نكون قد زدنا طول المسارات بين الرؤوس القديمة، وأنه يمكن الحصول على مسار إلى أحد الرؤوس الجديدة في G' من مسار في G إلى أحد جيران هذا الرأس.

إذا خلت G من ضلع قطع، فإن كل ضلع يقع في حلقة (النظرية 14.2.1)، وتبقى هذه الحلقات موجودة في G' (الحلقات التي تحوي الأضلاع المستبدلة تصبح أطول).

لاحظ أنّ الضلع الذي يربط بين الرؤوس الجديدة في G' يقع كذلك في حلقة تستخدم مسارًا في G بين الأضلاع المستبدلة، وباستخدام النظرية 14.2.1 نجد أنه لا يوجد لـ G' ضلع قطع (أو فصل).

لقد أثبتنا أنه إذا كان البيان G مترابطًا ويخلو من ضلع قطع، فإنّ G' أيضًا يكون مترابطًا وخاليًا من ضلع قطع. لاحظ أنه ربما يُعتقد أننا وباستخدام الاستقراء على m قد أثبتنا أن كلّ بيان بسيط مترابط منتظم ثلاثي له $2m$ من الأضلاع يخلو من ضلع قطع، لكن البيان الموضح في الشكل أدناه يعطينا مثالاً يناقض هذا. ويعدّ هذا الإثبات غير صحيح لأنه لا يمكن بناء كل بيان بسيط مترابط منتظم ثلاثي بعمل توسعة للبيان k_4، علمًا بأنه لا يمكننا الحصول على البيانات التي تخلو من ضلع قطع جميعها كما يُظهر تمرين 66. ■



تنويه: يوجد في المحلق A مثال آخر على مصيدة الاستقراء كذلك.

المتتاليات البيانية (Graphic Sequences)

سنتحدث عن درجات الرؤوس في ما يأتي:

27.3.1. تعريف: نعرف متتالية الدرجات لبيان على أنها قائمة بدرجات الرؤوس مرتبة تنازليًّا على الشكل $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ ، حيث d_i تمثل درجة الرأس Vi.

يوجد لكل بيان متتالية درجات، والسؤال هو ما إذا كان لدينا مجموعة من الأعداد الصحيحة غير السالبة d_1، ... d_n، فهل يوجد بيان تكون هذه الأعداد هي درجات رؤوسه.

إن صيغة جمع الدرجات تعطي أن $\sum d_i$ يجب أن يكون زوجيًّا، وعندما نسمح بوجود العرى والأضلاع المكررة، فإن الشروط الضرورية تكون كافية (TONCAS).

28.3.1. قضية: إذا كانت $d_1, \ldots, d_n$ أعدادًا صحيحةً غير سالبةٍ، فإن هذه الأعداد تصلح أن تكون رؤوسًا لبيان إذا وفقط إذا كان $\sum d_i$ زوجيًّا.

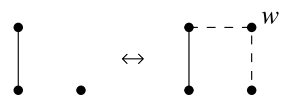
الإثبات: الضرورة: إذا وجد بيان G بحيث إن $d_1, \ldots, d_n$ هي رؤوسه، فإن صيغة جمع الدرجات تضمن أن $\sum d_i = 2e(G)$ وهذا عدد زوجي.

الكفاية: افترض أن $\sum d_i$ زوجي، وبما أنه كذلك، فإنّ عدد القيم الفردية عدد زوجي أيضًا. لذا سنجد بيانًا رؤوسه $v_1, \ldots, vn$، بحيث إن $d(v_i) = d_i$. في البداية، اختر أزواجًا من الرؤوس v_i التي درجاتها فردية، ثم اربط كل زوج من هذه الرؤوس بضلع، إن ما تبقى من درجة كل رأس هو عدد زوجي غير سالب. لذا ولكل i يمكن إضافة $\lfloor d_i/2 \rfloor$ أنشوطة على كل رأس v_i، وهذا يعطينا البيان المطلوب. ■

يعتمد الإثبات السابق على بناء البيان؛ لذا فإنه يسمى إثباتًا بنائيًّا. وقد كان بإمكاننا استخدام الاستقراء (تمرين 56). إن عملية البناء السابقة سهلة بوجود العرى، وغير سهلة فيما عدا ذلك؛ فمثلاً لا يوجد بيان درجات رؤوسه (2،0،0)، وعليه فإنّ شرط المجموع الزوجي غير كاف. إن التمرين 63 يعطي وصفًا لمتتاليات درجات البيانات الخالية من العرى. وفيما يأتي، سنعطي وصفًا لمتتاليات الدرجات لبيانات بسيطة باستخدام شرط مكرر يقودنا إلى خوارزمية، ولا بد من الإشارة إلى وجود توصيفات أخرى معروفة؛ حيث أعطى العالمان سيركسما وهوجيفين (Sierksma – Hoogeveen) في العام 1991 قائمة مؤلفة من سبعة توصيفات لمتتالية الدرجات.

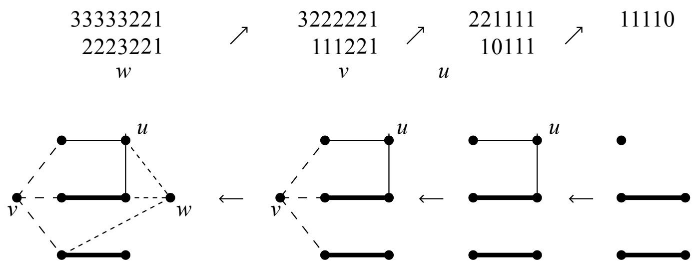
29.3.1. تعريف: نعرّف المتتالية البيانية على أنها قائمة من الأعداد الصحيحة غير السالبة التي تمثل متتالية درجات لبيان بسيط. ونقول: إن البيان البسيط يحقق d إذا كانت المتتالية d هي متتالية درجات هذا البيان.

30.3.1. مثال: شرط دوري (مكرر). (A recursive condition) لاحظ أن كلًّا من 2،2،1،1 و 1،0،1 متتاليتا بيان، حيث يحقق البيان $k_2 + k_1$ المتتالية 1،0،1، وبإضافة رأس جديد يجاور رأسًا درجته 1، ورأس آخر درجته 0 نحصل على بيان متتالية درجاته هي: 2،2،1،1 كما في الشكل أدناه. وبالعكس، إذا حقق بيان المتتالية 2،2،1،1، فإن له رأسا w، وله جاران أحدهما درجته 1، والآخر درجته 2، وبحذف w، نحصل على بيان درجاته: 1،0،1.



وبالمثل، إذا أردنا اختبار ما إذا كانت المتتالية 33333221 تحقق بيانًا أم لا، فإننا نبحث عن بيان له رأس w درجته 3، وله ثلاثة جيران درجة كل منها 3، وهذا يكون موجودًا إذا وفقط إذا كانت المتتالية 2223221 بيانية

(يحققها بيان معين)، نعيد ترتيب هذه ونختبر 3222221، ثمّ نستمر بالحذف وإعادة الترتيب حتى نستطيع أن نتبين ما إذا كانت المتتالية الباقية قابلة للتحقيق أم لا، وإذا كانت قابلة للتحقيق، فنعمل رجوعًا على إضافة رؤوس لها الجيران المطلوبة حتى نصل إلى بيان يحقق قائمة الدرجات الأصلية. لاحظ أن هذا التحقيق غير فريد، والنظرية التالية تبين عمل هذا الاختبار المكرر.

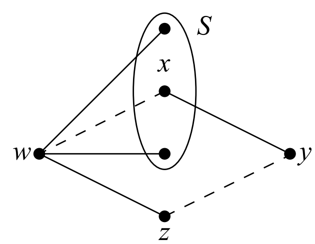


31.3.1. نظرية (Havel [1955] Hakimi [1962]) بكل $n > 1$، إذا كانت d مجموعة (قائمة) مؤلفة من n من الأعداد الصحيحة، فإن d تكون بيانية (تحقق بيانًا معينًا) إذا وفقط إذا كانت d' بيانية، حيث نحصل على d' من d بحذف عنصرها الأكبر Δ، وطرح 1 من العنصر الذي يسبق Δ (العنصر الذي هو أقل من Δ مباشرة)، لاحظ أن المتتالية الفريدة التي تتألف من عنصر واحد وتكون بيانية في الوقت نفسه هي: $d_1 = 0$.

الإثبات: إذا كانت $n = 1$، فإن العبارة متحققة تلقائيًّا. لذا افترض أن $n > 1$. سنثبت أولاً أن الشرط الموجود في النظرية كاف. إذا كانت القائمة d معطاة بحيث إن $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$، وأن G' بيان له متتالية درجات d'، فأضف رأسًا جديدًا للبيان G' يجاور رؤوس G' التي درجاتها $d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1} - 1$. تمثل هذه القيم لـ d_i أكبر العناصر Δ لعناصر d بعد (نسخة من) Δ نفسها، لكن $d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1} - 1$ ليست بالضرورة مساوية لأكبر العناصر م في d'

لإثبات أن الشروط ضرورية، نبدأ ببيان بسيط G يحقق d، ونحصل منه على بيان G' يحقق d'. افترض أن w رأس في G درجته Δ. وافترض كذلك أن S تمثل مجموعة مؤلفة من Δ من الرؤوس في G لها الدرجات المنشودة $d_2, \ldots, d_{\Delta+1}$. إذا كان $N(w) = S$، فإننا نحذف w لنحصل على G'.

وعلى النقيض من ذلك، بعض الرؤوس الموجودة في S غير موجودة في $N(w)$. وفي هذه الحالة، نعدّل G(modify) لزيادة $|N(w) \cap S|$ دون تغيير درجة أي رأس. بما أنه يمكن زيادة $|N(w) \cap S|$ بـ Δ مرة على الأكثر، وبإعادة هذه العملية، يتحول G إلى بيان آخر G^* يحقق d، وتمثل فيه S جوارًا للرأس w. وبحذف w من G^* نحصل على البيان المطلوب G' الذي يحقق d'. ولإيجاد هذا التعديل عندما $N(w) \neq S$؛ نختار $x \in S$ و$z \notin S$، بحيث إن $w \leftrightarrow z$ و $w \nleftrightarrow x$ ونرغب بإضافة wx وحذف wz، مع المحافظة على درجات الرؤوس. بما أنّ $d(x) \geq d(z)$، و w تجاور z ولا تجاور x، فيوجد رأس y يجاور x ولا يجاور z، الآن احذف $\{wz, xy\}$، وأضف $\{wx, yz\}$ لزيادة $|N(w) \cap S|$ (انظر الشكل أدناه). ■



النظرية (31.3.1) تعطي اختبارًا لقائمة من n من الأعداد باختبار قائمة مؤلفة من n-1 من الأعداد،

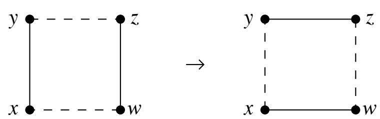
في الحقيقة تعطينا خوارزمية مكررة الخطوات (recursive algorithm) لاختبار ما إذا كانت d مُحققة بيانيًّا (بيانية). إن الشرط الضروري بأن يكون Σd_i زوجيًّا متحقق ضمنيًّا لأنّ:

$$\Sigma d'_i = (\Sigma d_i) - 2\Delta$$

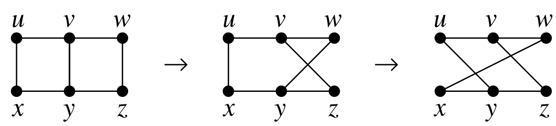
وهذا يعطي أنّ $\Sigma d'_i$ و Σd_i لهما النوعية نفسها، يؤدي الإثبات الخوارزمي (باستخدام خوارزمية) الذي يستخدم تغييرًا محليًّا (موضعيًّا) (Local change) إلى الشرط المطلوب، ويمكن صياغة ذلك بوصفه إثباتًا استقرائيًّا (الإثبات باستخدام الاستقراء) حيث إنّ متغيرّ (وسيط) الاستقراء هو البعد عن الشرط المطلوب، وفي الإثبات (31.3.1) كان البعد هو عدد رؤوس S غير الموجودة في $N(w)$.

لقد استخدمنا تبديل الأضلاع (edge Switches) لتحويل بيان له متتالية درجات d إلى بيان يحقق الشرط المطلوب. وسنرى فيما يأتي، سنرى أنّ كل بيان بسيط له متتالية درجات d يمكن تحويله بمثل هذا التبديل (التغيير) إلى أي بيان آخر.

32.3.1. تعريف: التبديل الثنائي (**2-switch**). نُعرّف التبديل الثنائي على أنه تبديل الضلعين xy و zw في بيان بسيط بالضلعين yz و wx بشرط عدم ظهور yz و wx بوصفهما ضلعين في البيان الأصلي.

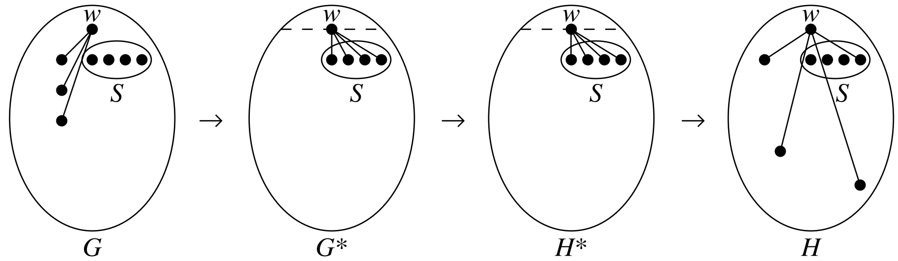


تشير الخطوط المنقطة أعلاه إلى أن الرأسين غير متجاورين. إذا كان $y \leftrightarrow z$ أو $w \leftrightarrow x$، فإنه لا يمكن عمل تبديل ثنائي؛ لأن البيان الناتج لا يكون بسيطًا. لاحظ أن التبديل الثنائي يحافظ على درجات الرؤوس، وإذا كان التبديل الثنائي يحول H إلى H^*، فإن عمل تبديل ثنائي آخر على الرؤوس الأربعة نفسها يحول H^* إلى H، والرسم أدناه يوضح تبديلين ثنائيين متتابعين.



33.3.1.* نظرية. (Berge [1973، p 153 − 154]) إذا كان G و H بيانين بسيطين لهما مجموعة الرؤوس V نفسها، فإن $d_G(v) = d_H(V)$ لكل $v \in V$ إذا وفقط إذا وُجِدَت متتالية تبديلات (تغييرات) ثنائية تنقل G إلى H.

الإثبات: بما أنّ كل تبديل ثنائي يحافظ على درجة الرؤوس، فإنّ هذا الشرط كاف. وبالعكس عندما $d_G(v) = d_H(v)$ لكل $v \in V$، فإننا نحصل على متتالية تغييرات (تبديلاتً) ثنائية مناسبة بالاستقراء على n التي تمثل عدد الرؤوس، إذا كانت $n \leq 3$ فلكل $d_1,\ldots,d_n$ يوجد على الأكثر بيان بسيط واحد يحقق أن $d_{(vi)} = d_i$. لذا، نستخدم $n = 3$ بوصفها خطوة الأساس في الاستقراء (الخطوة الأولى). خذ $n \geq 4$، واجعل w رأسًا درجته Δ أكبر ما يمكن، افترض أن $S = \{V_1,\ldots,V\Delta\}$ هي مجموعة الرؤوس المختلفة عن w والتي درجة كل منها Δ، كما في الإثبات (31.3.1) فإن هناك متتالية تغييرات (تبديلات) ثنائية تنقل G إلى بيان G^*، بحيث إن $N_{G_*}(w) = S$. ولذلك، توجد متتالية تغييرات ثنائية تنقل H إلى بيان H^* بحيث إن $N_H^*(w) = S$.



بما أن $N_G^*(w) = N_H^*(w)$، فإن حذف w يعطينا بيانين بسيطين $G' = G^* - w$ و $H' = H^* - w$ حيث $d_{G'}(v) = d_H'(v)$ لكل رأس v. وباستخدام فرضيات الاستقراء، توجد متتالية تغييرات ثنائية تنقل G' إلى H'، لاحظ أن هذه التغييرات لا تشمل w. وبما أنّ جيران w في G^* هي نفسها في H^*، فإنّ تطبيق متتالية التغييرات نفسها تنقل G^* إلى H^*. لذا، فإننا نستطيع تحويل G إلى H بتحويل G إلى G^*، ثم إلى H^*، وعليه (بعكس الترتيب) نحوّل H إلى H^*. ■

لاحظ أنه كان بإمكاننا استخدام الاستقراء على عدد الأضلاع التي تظهر في بيان واحد فقط من البيانين G و H، ولاحظ أيضًا أن هذا العدد يساوي صفرًا إذا وفقط إذا كان $G = H$، وإذا اتبعنا هذا الطريق لحل المسألة، فيكفي أن نجد متتالية تغييرات ثنائية تجعل G قريبة من H، أو متتالية تغييرات ثنائية تجعل H قريبة من G.

تمــارين (Exercises)

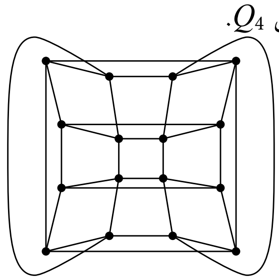
إذا وُجدت عبارة فيها متغير (وسيط) (parameter)، فيجب إثباتها لقيم هذا الوسيط جميعها، ولا يمكن الإثبات بإعطاء أمثلة. وأن عملية عدّ مجموعة تشمل إعطاء إثبات لذلك.

1.3.1. (-) أثبت أو انقض العبارة الآتية: في البيان G، إذا كان كل من u و v هما الرأسين الفريدين اللذين درجتهما فردية، فإنّ G يحوي مسارًا من u إلى v.

2.3.1. (-) تشمل مجموعة تسعة طلاب، إذا أرسل كلّ طالب ثلاث بطاقات معايدة لثلاثة من زملائه في الصف، بيّن إمكانية حصول كل منهم على بطاقات من الأشخاص أنفسهم الذين أرسل لهم بطاقاته.

3.3.1. (-) افترض أنّ u و v رأسان متجاوران في بيان بسيط G، وأثبت أنّ الضلع uv ينتمي إلى $d(u) + d(v) - n(G)$ من المثلثات على الأقل.

4.3.1. (-) أثبت أن البيان أدناه يشاكل Q_4.



5.3.1. (-) احسب عدد النسخ من P_3 و C_4 في Q_k.

6.3.1. (-) إذا كان لديك البيانان G و H، فحدّد عدد مركبات البيان $G + H$ وأكبر درجاته بدلالة الأعداد الخاصة لكل من G و H.

7.3.1. (−) حدّد أكبر عدد ممكن من الأضلاع لبيان جزئي ثنائي الفرع لكل من P_n ، و C_n، و K_n.

8.3.1. (−) أيّ المتتاليات الآتية تحقّق بيانًا؟ أعطِ بيانًا يحقق ذلك، أو أثبت عدم إمكانية وجود مثل هذا البيان:

a) (5,5,4,3,2,2,2,1), c) (5,5,5,3,2,2,1,1),
b) (5,5,4,4,2,2,1,1), d) (5,5,5,4,2,1,1,1).

• • • • •

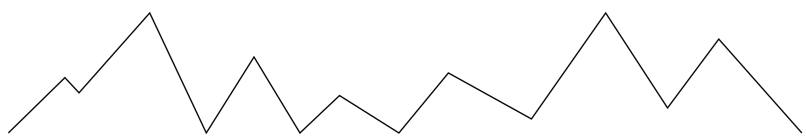
9.3.1. في اتحاد للعبة معينة، قُسّمَت الفرق إلى مجموعتين تضّم كل منهما 13 فريقًا. بيّن إمكانية ترتيب مباريات لهذه الفرق بحيث يلعب كل فريق تسعَ مباريات ضمن مجموعته، وأربع مباريات ضمن المجموعة الثانية.

10.3.1. افترض أن l,m,n ثلاثة أعداد صحيحة غير سالبة، بحيث إن $l + m = n$، جد الشروط الضرورية واللازمة التي تحققها l,m,n، بحيث يوجد بيان بسيط مترابط له n من الرؤوس، وبحيث يكون l منها رؤوسًا زوجية و m رؤوسًا فردية.

11.3.1. افترض أن w ممر مغلق في بيان G، وافترض أيضًا أن H هو البيان الجزئي من G الذي يتكوّن من الأضلاع التي ظهرت في W عددًا فرديًّا من المرات. أثبت أن $d_H(v)$ زوجية لكل $v \in V(G)$.

12.3.1. (!) أثبت أنه لا يوجد ضلع قطع للبيان الزوجي. وابنِ بيانًا بسيطًا منتظمًا بيان بسيط منتظم من الدرجة $2k+1$ له ضلع قطع لكل $k \geq 1$.

13.3.1. (+) نعرف سلسلة الجبال على أنها منحنى مضلع (متعدد الأضلاع) من $(a , 0)$ إلى $(b , 0)$ في النصف العلوي من المستوى. يبدأ المتنزهان A و B مسيرهما عند $(a , 0)$ و $(b , 0)$ على الترتيب، أثبت أن A و B سيلتقيان إذا سارا بطريقة معينة بحيث يبقيان طوال الوقت على الارتفاع نفسه فوق المحور الأفقي. (مساعدة: عرّف بيانًا بوصفه نموذجًا للحركة، واستخدم النتيجة 5.3.1) (تم وضع السؤال بالتواصل مع D.G. Hoffman).



14.3.1. أثبت أن كلّ بيان بسيط له رأسان على الأقل يمتلك رأسين لهما الدرجة نفسها. هل النتيجة صحيحة للبيانات الخالية من العرى؟

15.3.1. لكل $k \geq 3$، حدّد أصغر عدد n بحيث:

a) يوجد بيان بسيط منتظم من الدرجة k على n من الرؤوس.

b) توجد بيانات بسيطة منتظمة من الدرجة k غير متشاكلة على n من الرؤوس.

16.3.1. (+) برهن أنه يوجد لكل $k \geq 2$ و $g \geq 2$ بيان منتظم من الدرجة k وخصره يساوي g. (مساعدة: لبناء هذا البيان استقرائيًّا؛ استخدم H بصفته بيانًا منتظمًا من الدرجة $k-1$ له خصر g $(girth)$، وبيانًا له خصر $\lceil g/2 \rceil$ ومنتظمة من الدرجة $n(H)$. يسمّى مثل هذا البيان قفصًا من نوع(k,g) (Erdös − sachs [1963]).

17.3.1. (!) افترض أن G بيان له رأسان على الأقل، أثبت أو انقض كلًّا ممّا يأتي:

a) حذف رأس درجته $\Delta(G)$ لا يمكن أن يزيد معدل (متوسط) الدرجة.

b) حذف رأس درجته $\delta(G)$ لا يمكن أن ينقص معدل (متوسط) الدرجة.

18.3.1. (!) أثبت أنه لا يوجد ضلع قاطع (فاصل) لكلّ بيان ثنائي الفرع منتظم من الدرجة k لكل $k \geq 2$.

19.3.1. افترض أنّ G بيان بسيط يخلو من المخالب ($claw-free$)، أثبت أنه إذا كانت $\Delta(G) \geq 5$، فإن G تحوي حلقة رباعية لكل $n \in N$، ثم جد بيانًا منتظمًا من الدرجة 4 يخلو من المخالب، بحيث يكون عدد رؤوسه n على الأقل، ويخلو من الحلقات الرباعية.

20.3.1. (!) احسب عدد الحلقات التي طولها n في K_n، وعدد الحلقات التي طولها $2n$ في $K_{n,n}$

21.3.1. احسب عدد الحلقات السداسية $K_{m,n}$.

22.3.1. (!) افترض أن G بيان بسيط ليس ثنائي الفرع، يخلو من المثلثات، له n من الرؤوس ودرجته الصغرى k، وافترض أيضًا أن L تمثل أصغر طول لحلقة فردية في G:

a) افترض أن C حلقة في G طولها l، أثبت أنه إذا كان u رأسًا لا ينتمي إلى $V(G)$ فله على الأكثر جواران في $V(C)$.

b) بحساب عدد الأضلاع التي تربط $V(C)$ مع $V(G)-V(C)$ بطريقتين، أثبت أن $n \geq kL/2$. وبناء عليه، فإن ([Campbell – Staton [1991])

c) إذا كان K عددًا زوجيًّا، فأثبت أنّ المتباينة في فرع b هي أفضل ما يمكن (مساعدة: جد بيانًا له $k/2$ حلقة طول كل منها L بحيث تكون منفصلة زوجًا زوجًا).

23.3.1. استخدم الوصف التكراري للبيان Q_k (مثال) 8.3.1 لإثبات أن $e(Q_k)=k2^{k-1}$

24.3.1. أثبت أن $K_{2,3}$ غير محتوًى في أيّ مكعّب زائدي Q_k.

25.3.1. (!) أثبت أن كل حلقة طولها $2r$ في مكعب زائدي تكون محتواة في مكعب جزئي بُعْدُه على الأكثر r. هل يمكن لحلقة طولها $2r$ أن تكون محتواة في مكعب جزئي بُعده أقل من r؟

26.3.1. (!) احسب عدد الحلقات السداسية في Q_3. أثبت أنّ كل حلقة سداسية في Q_k تقع في مكعب جزئي واحد فقط ثلاثي البُعْد، استخدم هذا لحساب عدد الحلقات السداسية في Q_k لكل $k \geq 3$.

27.3.1. لتكن $k \in \mathbb{N}$، افترض أن G هو البيان الجزئي من Q_{2k+1} الذي تولده الرؤوس التي يختلف فيها عدد الواحدات عن عدد الأصفار بواحد، أثبت أن G منتظم، واحسب $e(G)$ ، $n(G)$ وخصر G.

28.3.1. افترض أن V مجموعة ثنائية للترتيبات التي عدد عناصرها k ($binary\ k-tuples$)، عرف بيانًا بسيطًا Qk رؤوسه المجموعة V، بحيث إن $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا اتفق كل من u و v في إحداثي واحد فقط. أثبت أن Qk يشاكل المكعب الزائدي Qk إذا وفقط إذا كان k زوجيًّا (D.G.Hoffman).

29.3.1. (*+) في التشاكلات الذاتية للمكعب الزائدي Q_k:

a) أثبت أن كل نسخة من Q_j في Q_k هي بيان جزئي توله مجموعة بها $2j$ من الرؤوس حُددت قيمها على مجموعة بها $k-j$ من الإحداثيات. (مساعدة: أثبت أن كل نسخة من Q_j يجب أن تحوي رأسين يختلفان في j من الإحداثيات).

b) استخدم فرع a لحساب عدد التشاكلات الذاتية للبيان Q_k.

30.3.1. أثبت أن كل ضلع في بيان بيترسون ينتمي إلى أربع حلقات خماسية فقط، واستخدم ذلك لإثبات أن بيان بيترسون يحوي 12 حلقة خماسية بالضبط. (مُساعدة: لإثبات الجزء الأول وسِّعْ كل ضلع للحصول على نسخة من P_4، واستخدم القضية 38.1.1).

31.3.1. (!) استخدم البيانات التامة، وأسلوب عدّ معينًا (طريقة غير جبرية) لإثبات أن:

a) $\binom{n}{2}=\binom{k}{2}+k(n-k)+\binom{n-k}{2}$ لكل $0 \leq k \leq n$.

b) إذا كان $\sum ni = n,$ فإن $\binom{n}{2} \le \sum\binom{n_i}{2}$.

1.3.32. (!) أثبت أن عدد البيانات الزوجية البسيطة التي رؤوسها المجموعة $[n]$ هو $2^{\binom{n-1}{2}}$. (مساعدة: جد دالة تناظر مع مجموعة البيانات البسيطة التي رؤوسها $[n-1]$).

1.3.33. (+) افترض أن G بيان بسيط يخلو من المثلثات على n من الرؤوس، بحيث يوجد لكلّ زوج من الرؤوس غير المتجاورة جاران مشتركان فقط:

a) أثبت أن $n(G) = 1 + \binom{d(x)+1}{2}$ حيث $x \in V(G)$ ، استنتج أن G منتظم.

b) أثبت أنه إذا كانت $k = 5$، فإن حذف x وجوارها من G يُبقي بيان بيترسون (تعليق: في هذه الحالة، نجد أنّ البيان G هو البيان الذي نحصل عليه من $Q4$ بإضافة أضلاع تربط بين الرؤوس المتتامة (complementary vertices)

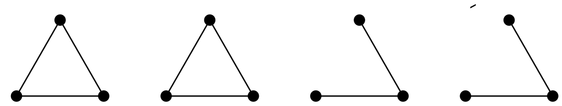
1.3.34. (+) افترض أن G بيان بسيط على n من الرؤوس يخلو من طائرة ورقية (k_4-e)، بحيث يوجد لكلّ زوج من الرؤوس غير المتجاورة جاران مشتركان فقط، أثبت أن G يكون منتظمًا (Calvin).

1.3.35. (+) افترض أن n و k عددان صحيحان، بحيث إنّ $1 < k < n - 1$، وافترض أيضًا أن G بيان بسيط على n من الرؤوس بحيث يمكن تكوين كلّ بيان جزئي على k من الرؤوس يحوي m من الأضلاع:

a) افترض أن G' بيان جزئي من G له L من الرؤوس حيث $L > k$، أثبت أن $e(G') = m\ \binom{l}{k}/\binom{1-2}{k-2}$.

b) استخدم الفرع a لإثبات أن $G \in (K_n, \overline{K}_n)$. (مساعدة: استخدم فرع a لإثبات أنّ عدد الأضلاع التي تربط بين u و v لا يُعْتَمَدُ عليه).

1.3.36. افترض أن G بيان على أربعة رؤوس، وأن البيانات الجزئية التي يمكن تحصيلها من G بحذف أحد الرؤوس هي كما في الشكل أدناه، حَدِّدْ (جد) G.



1.3.37. افترض أنه تمّ تشكيل البيان H من البيان المنتظم خالي العرى G بحذف أحد رؤوس G ، حيث $n(G) \ge 3$، صفْ (علّل) كيفية الحصول على G من H.

1.3.38. افترضَ أن G بيان له ثلاثة رؤوس على الأقل، أثبت أن G مترابط إذا وفقط إذا وُجِدَ بيانان جزئيان مترابطان على الأقل من البيانات المُحصلّة من G بحذف أحد رؤوسها (مساعدة: استخدم القضية 1.2.29).

1.3.39. (*+) أثبت أنه يمكن إعادة بناء كل بيان غير مترابط G إذا كان لهذا البيان ثلاثة رؤوس على الأقل. (مساعدة: باستخدامك لتمرين 1.3.38، تكون قد حدّدت أن G غير مترابط. استخدم $G_1, \dots G_n$ لإيجاد مركبة M من مركبات G التي تتكرر أكثر عدد من المرات من بين المركبات التي عدد رؤوسها أكبر ما يمكن، ثمّ استخدم القضية 1.2.29 لاختيار v بحيث إن $L = M - v$ يكون مترابطا، ثمّ أعد بناء G؛ بإيجاد $G - v_i$ التي تصبح فيها النسخة من M نسخة من L).

1.3.40. (!) افترض أن G بيان بسيط على n من الرؤوس ، حيث $n \ge 2$، وحدّد أكبر عدد ممكن من الأضلاع في G تحت كل شرط من الشروط الآتية:

a) يوجد لـ G مجموعة مستقلة من الحجم a.

b) يوجد لـ G بالضبط K مركبة.

c) G غير مترابط.

1.3.41. (!) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس ، بحيث إن أكبر درجة فيه $\lceil n / 2 \rceil$ ، وأقل درجة $\lfloor n / 2 \rfloor - 1$ ، فإنه يكون مترابطًا.

1.3.42. افترض أن S مجموعة رؤوس في بيان منتظم G من الدرجة k، بحيث يكون أيّ رأسين في S غير متجاورين، وليس لهما جار مشترك. استخدم مبدأ صناديق الحمام (eigeonhole pricipte). لإثبات أن

$|S| \le \lfloor n(G)/(K+1) \rfloor$. أثبت أن هذا الحدّ هو أفضل ما يمكن للمكعب Q_3 (تعليق: هذا الحدّ ليس أفضل ما يمكن للمكعب Q_4).

43.3.1. (+) افترض أن G بيان بسيط ليس له رؤوس معزولة، وافترض أيضًا أن $a = 2e(G)/n(G)$ هي معدل درجة رؤوس G. لتكن $t(v)$ تمثل معدل الدرجة لرؤوس جيران v. أثبت أن $t(v) \ge a$ لبعض $v \in V(G)$. ثم ابن عائلة غير منتهية من البيانات المترابطة التي تحقق أن $t(v) > a$ لكل رأس v. (مساعدة للجزء الأول؛ احسب معدّل $t(v)$ باستخدام المتباينة $x/y + y/x \ge 2$ عندما $0 < x,y$. (Ajtai – komlo's – Szemer'di [1980]).

44.3.1. (+) افترض أن G بيان خالٍ من العرى، ومعدل درجة رؤوسه $a = 2e(G)/n(G)$:

a) أثبت أن معدّل درجة $G - x$ هو على الأقل a إذا وفقط إذا كان $d(x) \le a/2$.

b) استخدم فرع a لإعطاء إثبات خوارزمي للعبارة: إذا كانت $a > 0$ ، فيوجد بيان جزئي لـ G حيث أقل درجة لرؤوسه أكبر من $a/2$.

c) أثبت أنه لا يوجد ثابت c أكبر من $1/2$ ، بحيث يجب وجود بيان جزئي من G تكون أقل درجة لرؤوسه أكبر من ca. إن هذا يثبت أنّ الحدّ الموجود في الفرع (b) هو أفضل ما يمكن. (مساعدة: استخدم $k_{1,n-1}$).

45.3.1. جد أكبر عدد من الأضلاع لبيان جزئي ثنائي الفرع من بيان بيترسون.

46.3.1. أثبت أو انقض: عندما نطبق الخوارزمية الموجودة في النظرية 19.3.1. على بيان ثنائي الفرع، فإننا نحصل على بيان جزئي ثنائي الفرع له أكبر عدد من الأضلاع (البيان كلّه).

47.3.1. استخدم الاستقراء على $n(G)$ لإثبات أنه يوجد لكل بيان غير تافه (nontrivial) خالٍ من العرى بيانٌ جزئيٌّ ثنائي الفرع H عدد أضلاعه يزيد على $e(G)/2$.

48.3.1. ابن بيانات $G_1, G_2, \ldots$ بحيث إن عدد رؤوس G_n يساوي $2n$، وبحيث إن $\lim_{n\to\infty} f_n = 1/2$ حيث fn تمثل الجزء من $E(Gn)$ الذي ينتمي إلى أكبر بيان جزئي ثنائي الفرع من Gn.

49.3.1. لكل $k \in \mathbb{N}$ ، ولكل بيان G خالٍ من العرى، أثبت أنه يوجد للبيان G بيانٌ جزئيٌّ H له k من الفروع (التعريف 12.1.1، بحيث إنّ $e(H) \ge (1-1/k)e(G)$

50.3.1. (+) لكل $n \ge 3$، حدّد أقل عدد ممكن من الأضلاع لبيان مترابط على n من الرؤوس، بحيث ينتمي كل ضلع منها إلى مثلث (Erdös [1988]).

51.3.1. (+) افترض أنّ G بيان بسيط على n من الرؤوس، حيث $n > 3$:

a) استخدم 11.3.1 لإثبات أنه إذا كان G يحوي أكثر من $n^2/4$ ضلعًا، فإنه يحوي رأسًا نحصل بحذفه على بيان له أكثر من $(n-1)^2/4$ ضلعًا. (مساعدة: عدد الأضلاع في كل بيان هو عدد صحيح).

b) استخدم فرع a والاستقراء الرياضي لإثبات أن G يحوي مثلثًا إذا كانت $e(G) > n^2/4$.

52.3.1. أثبت أنّ كلّ بيان بسيط لمثلث له n من الرؤوس، وعدد أضلاعه أكبر ما يمكن، يشاكل $k_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$. (مساعدة: قم بتقوية الإثبات 23.3.1).

53.3.1. (!) يشارك فريقان في لعبة البريدج (نوع من لعب الورق). كل فريق مؤلف من لاعبَيْن. افترض أن لدينا ناديًا يمنع اللاعبين الأربعة من اللعب إذا صدف أن تشارك أيّ اثنين منهما في لعبة سابقة تلك الليلة، افترض وصول خمسة عشر لاعبًا إلى النادي في تلك الليلة، إلا أن أحدهم قرر أن يدرس نظرية البيانات، أما الأربعة عشر شخصًا الباقون ، فلعبوا بحيث لعب كل منهم أربع مرات. بعد ذلك، تسمح لهم قواعد اللعبة بلعب ستة أدوار إضافية (12 مشاركة). أثبت أنه إذا وافق الآن دارسُ نظرية البيانات على اللعب، فإنه يمكن لعب لعبة أخرى على الأقل. (أخذ بتصرف من كتاب Bondy – murty [1976] p111

54.3.1. (+) افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، وافترض أيضًا أن $t(G)$ ترمز إلى عدد المثلثات الكلي في G و $\overline{G}$:

a) أثبت أن $t(G) = \binom{n}{3} - (n-2)e(G) + \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2}$ مساعدة (خذ مساهمة كل ثلاثة رؤوس في كل من طرفي المساواة).

b) أثبت أن $t(G) \geq n(n-1)(n-5) / 24$. مساعدة (استخدم حدًّا أدنى على $\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2}$ بدلالة معدل الدرجة).

c) إذا كانت $n-1$ تقبل القسمة على 4، فجد بيانًا يحقق المساواة في فرع b أعلاه ([1959] Goodman).

55.3.1. (+) لأكبر حجم دون إحداث P_4:

a) افترض أن G متممة بيان بسيط غير مترابط. أثبت أن: $eG \leq \Delta(G)^2$، وأن المساواة تتحقق عندما $k_{\Delta(G), \Delta(G)}$.

b) افترض أن G بيان بسيط مترابط يخلو من P_4، بحيث إن أكبر درجة للرؤوس هي k، أثبت أن $e(G) \leq k^2$ (*Seinsohe* [1974]، *chung – west* [1993]).

56.3.1. استخدم الاستقراء الرياضي (على n أو على $\sum d_i$) لإثبات أنه إذا كانت $d_1, \ldots, d_n$ أعدادًا صحيحةً غير سالبة، بحيث إن $\sum d_i$ عدد زوجي، فإنّ هناك بيانًا له n من الرؤوس، ودرجات هذه الرؤوس هي: $d_1, \ldots, d_n$. (تعليق: هذا يتطلب إعطاء إثبات بديل للقضية 28.3.1).

57.3.1. (!) افترض أن n عدد صحيح، وأن d تتكوّن من قائمة من الأعداد الصحيحة غير السالبة ذات مجموع زوجي، بحيث إن أكبر عدد منها أقل من n، ويختلف عن أصغر عدد بمقدار واحد على الأكثر. أثبت أن d قابلة للرسم (geraphic)؛ أي أنها متحققة بيانيًّا (بيانية) (مساعدة: استخدم نظرية هافل وحكيمي).

58.3.1. تعميم نظرية هافل وحكيمي.

افترض أن لديك قائمة (مجموعة) غير متزايدة من الأعداد الصحيحة غير السالبة. وافترض أيضًا أنه يمكن تحصيل d' بحذف d_k، وبطرح 1 من الـ k عنصرًا القصوى المتبقية في القائمة (المجموعة). أثبت أن d تكون بيانية إذا وفقط إذا كانت d' بيانية. (مساعدة: تتبع خطوات إثبات نظرية 31.3.1 (wang – kleitman [1973])).

59.3.1. عرّف $d = (d_1, \ldots, d_{2k})$ على الشكل $d_{2i} = d_{2i-1} = i$ لكل $1 \leq i \leq k$، أثبت أن d بيانية. (مساعدة: لا تستخدم نظرية هافل وحكيمي).

60.3.1. (+) افترض أن d قائمة (مجموعة) من الأعداد الصحيحة تتألف من k نسخة من a و $n-k$ نسخة من b، حيث $a \geq b \geq 0$، جد الشروط اللازمة حتى تكون d بيانية.

61.3.1. (!) افترض أن $G \cong \overline{G}$، وأن $n(G) \equiv 1 \bmod 4$. اثبت أن G يمتلك رأسًا واحدًا من الدرجة $(n(G)-1)/2$ على الأقل.

62.3.1. افترض أن $n \equiv 0 \bmod 4$، أو $n \equiv 1 \bmod 4$، جد بيانًا بسيطًا له n من الرؤوس و $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ من الأضلاع بحيث إن $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$.

63.3.1. (!) افترض أن $d_1, \ldots, d_n$ أعداد صحيحة تحقق أن $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n \geq 0$، أثبت أنه يوجد بيان دون عرى، بحيث تكون متتالية درجات رؤوس هذا البيان $d_1, \ldots, d_n$ إذا وفقط إذا كان $\sum d_i$ عددًا زوجيًا، و $d_1 \leq d_2 + \ldots + d_n$ (Hakimi [1962]).

64.3.1. (!) افترض أن $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ هي درجات رؤوس بيان بسيط G، أثبت أن G مترابط إذا كانت $dj \geq j$ عندما $j \leq n-1-d_n$. (مساعدة: خذ في الحسبان أحد مركبات G التي تحذف رأسًا ذا درجة كبرى).

65.3.1. (+) افترض أن $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ أعداد صحيحة مختلفة، أثبت أنه يوجد بيان بسيط له $ak + 1$ من الرؤوس بحيث إن درجات هذا الرؤوس هي $a_1, \ldots, a_k$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على k لبناء مثل هذا البيان)، (Kapoor – polimeni – wall [1977]).

66.3.1. (*) توسيع (تمديد) بيانات منتظمة ثلاثية. (انظر المثال 26.3.1) افترض أن $n = 4k$ حيث $k \geq 2$، جد بيانًا بسيطًا مترابطًا ثلاثيًّا له n من الرؤوس لا يحوي ضلع فصل (قطع) ولكن لا يمكن تحصيله من بيان ثلاثي بسيط عن طريق التمديد لهذا البيان. (مساعدة: لا يوجد في هذا البيان أي ضلع يمكن أن نطبق عليه العملية العكسية للحصول على بيان بسيط أصغر).

67.3.1. (*) بناء بيانات بسيطة منتظمة ثلاثية:

a) أثبت أنه يمكن عمل مفتاح ثنائي من خلال مجموعة من عمليات التوسعة والمحو (العملية العكسية للتوسعة). هذه العمليات معرفة في المثال 26.3.1. (تنويه: عملية المحو التي تولد ضلعًا مكررًا غير مسموحة).

b) استخدم فرع a أعلاه لإثبات أن كلّ بيان بسيط منتظم ثلاثي يمكن الحصول عليه من k_4 بمجموعة من عمليات التمديد (التوسعة) والمحو. ([Batageli [1984).

68.3.1. (*) افترض أنّ G و H بيانان بسيطان ثنائيان، لكل منهما تجزئتان Y ، X. أثبت أن $d_G(v) = d_H(v)$ لكل $v \in X \cup Y$ إذا وفقط إذا وُجِدَت متتاليةٌ من المفاتيح الثنائية التي تنقل G إلى H دون تغيير على التجزئتين (كلّ مفتاح ثنائي يستبدل ضلعين يربطان X و Y بضلعين آخرين يربطان بينهما).

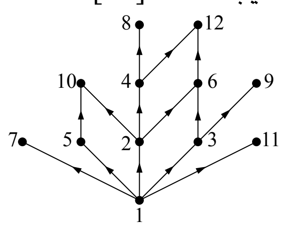
4.1 البيانات الموجّهة (Directed Graphs)

لقد استخدمنا البيانات بوصفها نماذج لعلاقات التماثل، ومن المعلوم أن العلاقات عمومًا لا تكون متماثلة؛ لأن العلاقة على مجموعة S هي مجموعة جزئية من $S \times S$ (انظر ملحق A). لذا فإننا بحاجة إلى نموذج أكثر عمومًا لمثل هذه العلاقات.

تعريفات وأمثلة (Definitions and Examples)

إن البحث عن تمثيل بياني للمعلومات المتعلقة بعلاقة عامة على مجموعة S يقود إلى نموذج البيانات الموجهة.

1.4.1. مثال: إذا كان كل من x و y عددين طبيعيين، فإننا نقول إن x هي أكبر قاسم لـ y إذا كان y/x عددًا أوليًّا. وإذا كانت $S \subseteq \mathbb{N}$، فإن المجموعة $\{x$ أكبر قاسم لـ $Y: R \ \{(x,y) \in S^2 = S \times S$ تمثل علاقة على S. ولتمثيل هذه العلاقة بيانيًّا؛ فإننا نحدد نقطة في المستوى لكل عنصر من عناصر S، ثم نرسم سهمًا من x إلى y لكل $(x,y) \in R$. لاحظ أن البيان أدناه يمثل النتيجة عندما $S = [12]$. ■



2.4.1. تعريف: يعرف **البيان الموجه** G على أنه ثلاثية تتألف من: $V(G)$= مجموعة الرؤوس و$E(G)$= مجموعة الأضلاع، ودالة تحدد لكل ضلع زوجًا مرتبًا من الرؤوس، يُسَمّى الإحداثيّ الأول ذيلَ الضلع، والإحداثيّ الثاني رأسَ الضلع، ويطلق عليهما معًا طرفا الضلع أو رأسا الضلع. ونقول إن الضلع هو ضلع من الذيل إلى الرأس، لاحظ أن كلمتي رأس وذيل تأتيان من الأسهم المستخدمة للتدليل على البيان الموجه. وكما في حال البيانات، فإننا نحدّد لكل رأس نقطة في المستوى، ولكل ضلع منحنى يربط بين طرفيه. وعند رسم بيان موجه، فإننا نعطي اتجاهًا للمنحنى من الذيل إلى الرأس.

عندما يُسْتخدمُ البيان الموجه نموذجًا لتمثيل علاقة، فإنّ كل زوج مرتب يمثل (ذيلاً/ رأسًا) لضلع واحد على الأكثر. في مثل هذه الحالة، وكما في حال البيانات البسيطة، فإننا نهمل حرفية وجود دالة تحدد طرفين لكل

ضلع. وببساطة، فإننا نتعامل مع الضلع بوصفه زوجًا مرتبًا من الرؤوس.

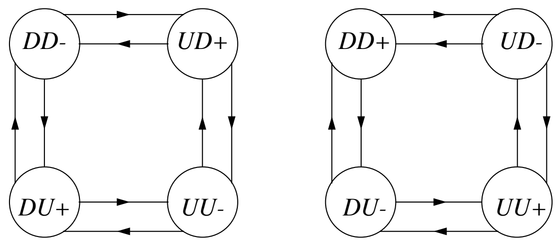
3.4.1. تعريف: في البيان الموجه، نعرّف الأنشوطة على أنها ضلع يبدأ بالرأس نفسه ،وينتهي به، وتعرّف الأضلاع المكررة على أنها الأضلاع التي يمثل طرفاها الزوج المرتّب نفسه، أي أنها الأضلاع جميعها التي تبدأ كلها برأس معين، وتنتهي كذلك برأس معين آخر، ونقول إنّ البيان الموجّه بسيط إذا خلا من العرى والأضلاع المكررة، وهذا يعني أنّ كلّ زوج مرتب يمثل رأسًا وذيلاً لضلع واحدٍ على الأكثر، ولاحظ أنه يمكن رسم أنشوطة عند كل رأس من رؤوس البيان الموجود لدينا.

في البيان الموجّه البسيط، نستخدم الرمز uv للتدليل على الضلع الذي ذيله u ورأسه v، وفي حال وجود ضلع uv، فنسمّي v بخلف u ، ونسمي v بسابق (سلف) u ونرمز إلى ذلك برسم سهم من u إلى v على الشكل $u \to v$.

4.4.1. تطبيق: الآلة ذات العدد المحدود أو المنتهي من الحالات. (نظام متقطع، أو نظام آلي ذو عدد محدود من الحالات الممكنة). يمكن استخدام البيانات الموجهة لوضع نماذج لمثل هذا النظام، حيث تُمَثِّلُ الرؤوسُ الحالات، في حين تمثل الأضلاعُ الانتقالَ من حالة إلى أخرى.

يكون الانتقال من حالة إلى أخرى عادة في اتجاه واحد. لذا فإن البيان الموجّه يعطي النموذج المناسب. ويمكن وضع علامات على الأضلاع لرصد الأحداث التي تسبب عملية الانتقال. فيمكن تمثيل الحدث الذي يمثل الحالة نفسها بأنشوطة. أما إذا وُجِد حدثان يمثلان الانتقال نفسه من حالة إلى أخرى فإننا نمثل ذلك بضلع مكرّر.

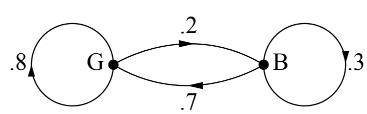
الآن، تأمل ضوءًا يُدار بمفتاحين (غالبًا، يسمى مفتاح التحويل بثلاثة طرق)، يكونان إلى الأعلى أو إلى الأسفل، وبناءً على ذلك يمكن إضاءة الضوء (+) أو إطفائه (-). لذا، هناك حالات ثمانية، لاحظ أن الانتقال من حالة إلى أُخرى يمثل إنتقالًا بين هذه المفاتيح. وفي الرسم أدناه، يمثل الضلع الأفقي انتقالاً ناتجًا عن قلب المفتاح الأول، في حين يمثل الضلع العمودي انتقالًا ناتجًا عن قلب المفتاح الثاني، أما الدائرة الكبيرة، فتمثل رأسًا، في حين يمثل حرف U حالة المفتاح إلى أعلى، أما الحرف D فيمثل حالة المفتاح إلى الأسفل. ■



5.4.1. تطبيق: عندما يعمل نظام معين بصورة عشوائية، فيمكن عندئذ استخدام العلامات الموجودة على الأضلاع لتسجيل التغير في الاحتمال. إن مجموع الاحتمالات المسجلة على الأضلاع الخارجة أو المغادرة لرأس معين يساوي واحدًا صحيحًا.

ويُسَمّى مثل هذا النظام سلسلة أو **سلاسل ماركوف**، لاحظ أنه يمكن استخدام طرق الجبر الخطي لحساب الزمن اللازم للانتقال من حالة إلى أخرى، فعلى سبيل المثال، افترض أنّ هناك حالتين لحالة الطقس هما: جيد ورديء، وافترض أنّ الكتل (الجبهات) الهوائية تتحرك ببطء لدرجة أنّ الحالة الجوية ليوم غد هي كالحالة الجوية لهذا اليوم، وافترض أن العواصف لا تلبث طويلاً في معظم المناطق. لذا، وفي مثل هذه الظروف، فإنه يمكننا الحصول على تغيّر (انتقال) أو تبديل في الاحتمالين، كما هو موضّح في الشكل أدناه. ■

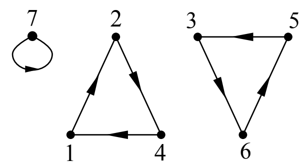
لاحظ أنه إذا سجّلنا الحالة كل ساعة بدلاً من تسجيلها بصورة يومية، فإن احتمالية البقاء في الحالة نفسها تكون أكبر كثيرًا.



6.4.1. تعريف: يعرف المسار على أنه بيان موجه بسيط يمكن ترتيب رؤوسه (على خط مستقيم) خطيًّا، بحيث يكون uv ضلعًا في هذا البيان إذا وفقط إذا كان ترتيب الرأس v يأتي مباشرة بعد ترتيب الرأس u. وتعرف الحلقة بالأسلوب نفسه، ولكن ترتيب الرؤوس يكون في صورة دائرة بدلاً من خط مستقيم.

7.4.1. مثال: البيانات الموجهة الدالية (الاقترانية). يمكن دراسة الدالة $f: A \to A$ باستخدام البيانات الموجهة. ويعرف البيان الموجه للدالة f على أنه بيان موجه بسيط؛ حيث تمثّل المجموعة A مجموعة الرؤوس، في حين تمثّل المجموعة $\{(x, f(x)): x \in A\}$ مجموعة الأضلاع. لاحظ أنه لكل رأس x نحصل على الضلع الذي يبدأ بـ x، وينطلق كسهم في اتجاه $f(x)$ ($f(x)$ هي صورة x تحت f).

إن تتبع مسار في بيان موجّه لدالة يمثل عملية تكرار (إعادة) لهذه الدالة. فمثلاً، إذا كانت الدالة تمثل تبديلة، فإن كل عنصر يمثل صورة لعنصر واحد فقط. لذا فإن للبيان الموجه لهذه الدالة ذيلاً واحدًا ورأسًا واحدًا عند كل رأس. لذلك؛ فإن البيان الموجه لدالة التبديلة يتألف من مجموعة من الحلقات غير المترابطة (المنفصلة). ويمثّل الشكل أدناه البيان الموجه لدالة التبديلة (7) (365) (124) الموجودة في $[7] = S7$. ■

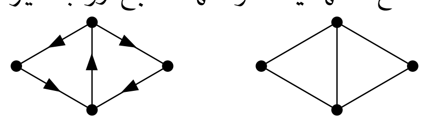


8.4.1. *ملاحظة: نستخدم في كثير من الأحيان الأسماء نفسها للمفاهيم المتناظرة عند الحديث عن نماذج البيانات، أو البيانات الموجّهة، علمًا بأن كثيرًا من المؤلفين يستخدمون كلمتي (عقدة وقوس) بدلاً من رأس وضلع عند الحديث عن البيانات الموجهة، ولكن هذا - من وجهة نظرنا - يجعل بعض المفاهيم مبهمة. وحيث إن بعض المفاهيم والمثبتات لها النص والإثبات نفساهما، فإننا نرى أنّ إعادة هذه المفاهيم من أجل استخدام مصطلحات جديدة فقط تعدُّ مضيعة للوقت والجهد (وخصوصًا في الفصل الرابع).

بالإضافة إلى ذلك، لاحظ أنه يمكن استخدام البيان الموجه D لعمل نموذج للبيان G حيث نستبدل uv الموجودة في $E(G)$ بـ vu أو uv الموجودة في $E(D)$، وبهذه الطريقة يمكن استخدام النتائج الخاصة بالبيانات الموجّهة لتكون نتائج خاصة بالبيانات، وبما أن كلمة ضلع في البيان الموجه تبقى ضلعًا في البيان، فإن استخدام الاسم نفسه له معنى.

يستخدم بعض المؤلفين كلمة (مسار موجه أو حلقة موجهة) للتعبير عن مفاهيمنا الخاصة بالمسار والحلقة في البيان الموجّه التي عرفناها سابقًا، ولكن من وجهة نظرنا فإنّ هذا غير ضروري. وللنسخة الضعيفة من تعريف البيان التي لا تتبع الأسهم، فإننا نستخدم مسارًا وحلقة في البيان مع إهمال الاتجاه. وهذا ما سنعرفه فيما يأتي. ■

9.4.1. تعريف: يعرف (البيان) المُتَضمن في بيان موجه D على أنه بيان يمكن الحصول عليه من D بمعاملة أضلاع D على أنها أضلاع غير مرتبة. لذا، فإن مجموعة كلّ من الرؤوس والأضلاع تبقى كما هي، وأطراف أي ضلع في G هي أطراف هذا الضلع نفسها في D، ولكنها تصبح أزواجًا غير مرتبة في G. (انظر الشكل أدناه).



D G

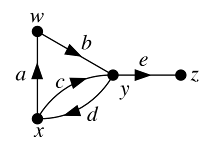
إن معظم الأفكار والطرق والمفاهيم المستخدمة في نظرية البيانات تظهر من خلال دراسة البيانات. لذا وكما حاولنا أن نبين، فإن البيانات الموجهة تستخدم بوصفها أداة مساعدة للفهم، وخصوصًا في التطبيقات. ونأمل أن تساعد دراسة أوجه التشابه والاختلاف بين البيانات والبيانات الموجهة على توضيح هذه المفاهيم. عندما نقارن بيانًا موجهًا ببيان، فإننا نستخدم الرمز G للبيان، والرمز D للبيان الموجه، وعندما نتكلم عن بيان موجه واحد فإننا نستخدم الرمز G غالبًا للتدليل على ذلك.

10.4.1. تعريف: إن تعريفات **البيان الجزئي، والتشاكل، والتفكيك**، والاتحاد للبيانات، لا تختلف عنها للبيانات الموجهة، ونعرف مصفوفة التجاور $A(G)$ للبيان الموجّه G على أنها المصفوفة التي تمثل مدخلتها في الموقع i,j عدد الأضلاع التي تصل v_i و v_j، وكذلك نعرّف مصفوفة التقاطع (الوقوع) $M(G)$ للبيان الموجه G الخالي من العرى على أنها المصفوفة التي تكون مدخلتها m_{ij} تساوي 1 ، إذا كانت v_i هي ذيل الضلع ej و -1 ، وإذا كانت v_i تمثل رأس الضلع e_j.

11.4.1. مثال: يمثّلُ (البيانُ) المتضمّن في البيان الموجّه المرسوم أدناه البيانَ الموجودَ في مثال 19.1.1، لاحظ أوجه التشابه والاختلاف في المصفوفات. ■

$$\begin{array}{c|cccc} & w & x & y & z \\ \hline w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$A(G)$



G

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline w & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ x & +1 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ y & 0 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

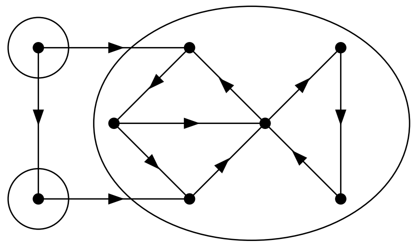
$M(G)$

x

فيما يأتي نعرف البيان الموجّه المترابط. وإحدى الطرق للتعريف أن يكون البيان المتضمن في هذا البيان الموجه مترابطًا، إلا أنّ ذلك لا يكفي لأخذ الفائدة الكامنة في تعريف الترابط للبيانات الموجهة.

12.4.1. تعريف: البيان الموجّه مترابط ترابطًا ضعيفًا إذا كان البيان المتضمن فيه مترابطًا. ونقول إنه مترابط ترابطًا قويًّا، أو أنه مترابط قوي إذا وُجدَ فيه مسار يربط بين أيّ رأسين من رؤوسه أو يصل بينهما. وتعرف المركبة القوية للبيان الموجه على أنها أكبَر (أضخم) بيان جزئي مترابط ترابطًا قويًّا. أو أننا نقول: مترابط بقوة بدلاً من مترابط ترابطًا قويًّا).

13.4.1. مثال: يمتلك البيان الموجه ذو الرأسين والمؤلف من الضلع xy مسارًا من x إلى y ،ولكنه لا يمتلك مسارًا من y إلى x. لذا، فهو غير مترابط ترابطًا قويًّا. أما إذا أخذنا بيانًا موجهًا له n من الرؤوس فإنه يمتلك n مركبة قوية. وإذا أخذنا حلقة، فلها مركبة قوية واحدة. انظر البيان الموجّه أدناه، ولاحظ أنّ البيانات الجزئية المحاطة بالدوائر ا لثلاثة تمثل مركبات قوية. **تنويه:** سندرس خصائص المركبات القوية في التمارين من 10 إلى 13. ■



14.4.1.* تطبيق: الألعاب. يمكن وصف الكثير من الألعاب التي يلعب بها لاعبان على أنها (finite state ma-

(chines) آلات ذات عدد منتهٍ من الحالات (المراحل). حيث تُمثل مجموعةُ الرؤوس مجموعةَ مراحل (حالات) اللعبة، وعليه يكون هناك ضلع من الحالة x إلى الحالة y إذا قام اللاعب (صاحب دور اللعب) بحركة تنقله من الحالة x إلى الحالة y.

لتكن W تمثل مجموعة الرؤوس التي يكون فيها اللاعب رابحًا عند الوصول إليها. وعليه، لا يوجد ضلع يخرج من W. لاحظ أن اللاعب الذي يُوصل اللعبة إلى المرحلة التي يفصله فيها ضلع واحد فقط عن W يخسر؛ ولأن اللاعب الآخر يصل W. إن إحدى الطَرق لتحليل هذه اللعبة إيجاد مجموعة S من الرؤوس تحوي W بحيث إنه إذا أخذنا أي رأسين في S فإنهما يكونان غير متجاورين (لا يوجد ضلع يصل بينهما)، وبحيث إنّ كل رأس لا ينتمي إلى المجموعة S يرتبط بضلع مع أحد الرؤوس الموجودة في S. لاحظ أن اللاعب الذي يصل بلعبة إلى موقع في S يربح، أما اللاعب الذي عليه الابتعاد عن موقع في S فإنه يخسر.

على سبيل المثال، افترض أن لديك كومتين من القطع النقدية، وأن اللاعب الذي له دور اللعب يستطيع أن يُزيح أي جزء من القطع النقدية من إحدى الكومتين، ويعدُّ اللاعب رابحًا إذا أزاح آخر قطعة من القطع النقدية الموجودة. لاحظ أن المواقع المختلفة لهذه اللعبة هي مجموعة الأزواج المرتبة $(r،s)$ من الأعداد الصحيحة حيث $r، s \geq o$. لذا فإن الموقع الرابح الفريد في هذه اللعبة هو $(0،0)$، واستنادًا إلى ذلك، فإن المجموعة S التي تمثل مجموعة المواقع التي يرغب اللاعبون في الحصول عليها هي: $\{(r،r): r \geq 0\}$ وبما أنه يمكن إنقاص أحد الإحداثيين خلال الحركة الواحدة، فإنه لا يوجد أضلاع داخل S. ولكل رأس $(r ، s)$ لا ينتمي إلى المجموعة S يمكن للاعب صاحب الدور في اللعب إزاحة $|r - s|$ من الكومة القصوى للوصول إلى S.

عمومًا، تبدأ هذه الألعاب (ألعاب نم Nim) بعدد اختياري من الأكوام ذات الأحجام الاختيارية، وتبقى قواعد اللعب الأخرى كما في السابق دون تغيير. وسنرى في التمرين (18) أن لدى (Nim) دائمًا مجموعة ربح استراتيجية S، وبما أن البيان الموجه لهذه اللعبة لا يحوي حلقات، لذا فإن اللاعب الثاني يربح عندما يكون موقع البداية لهذه اللعبة في S (على افتراض لعب مثالي) وبعكس ذلك، فإن اللاعب الأول هو الرابح. ■

15.4.1.* تعريف. تعرف النواة في البيان الموجه D على أنها مجموعة جزئية S من $V(D)$ بحيث إن كل رأس خارج S له رأس تابع في S، وكل رأس في S ليس له تابع خارج S، وهذا يعني أنه إذا كان v رأسًا خارج S، فإنه يوجد رأس u في S، بحيث إن $v \rightarrow u$ ضلع في هذا البيان، وكذلك لا يوجد أي ضلع ينطلق من u وينتهي برأس خارج S.

عدم وجود نواة للحلقة الفردية الموجهة (التمرين 17) وعليه، تكون للبيان الموجه نواة إذا لم تكن له حلقة جزئية فردية، ولإثبات هذا؛ فإن المسارات، والحلقات، والممرات المستخدمة جميعها تكون موجهة. وعند الحديث عن البيانات الموجهة، فإننا بحاجة إلى استخدام بعض العبارات الخاصة بالبيانات التي تبقى صحيحة (بالإثبات نفسه) عند الحديث عن البيانات الموجهة. مثال: كل ممر من u إلى v في بيان موجه يحوي مسارًا من u إلى v (تمرين 3)، وكل ممر فردي مغلق في بيان موجه يحوي حلقة فردية (التمرين 4).

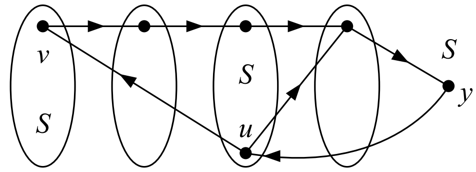
سنشرح مفهوم المسافة (distance) من x إلى y بتفصيل أكثر في الجزء 2.1. وهي تعرّف على أنها أقل طول ممكن لمسار من x إلى y.

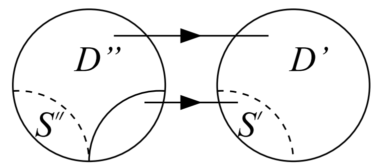
16.4.1. نظرية : ([1953] Richardson)). توجد نواة لكل بيان موجه خالٍ من الحلقات الفردية.

الإثبات: افترض أن D بيان موجه. في هذا الإثبات نعالج حالتين: الأولى، نفرض أن D مترابط بقوة (Strongly Connected) انظر الشكل (على الجانب) الأيسر أدناه. افترض أن $y \in V(D)$ واجعل S تمثل الرؤوس التي بُعْدُها عن y زوجي. لاحظ أن كل رأس ذي بُعْد فردي عن y له تابع (Successor) في S كما هو مطلوب.

لاحظ أنه إذا لم تكن الرؤوس الموجودة في S غير متجاورة زوجًا زوجًا، فإن هناك ضلعًا uv حيث

$u، v \in S$. ومن تعريف S يوجد مسار P طوله زوجي من u إلى y، ويوجد مسار زوجي P' من v إلى y. وبإضافة الضلع uv إلى بداية المسار P'، فإنه يعطينا ممرًّا فرديًّا (طوله فردي) W من u إلى y، وبما أن D مترابط بقوة، فإنه يوجد في D مسار Q من y إلى u، وبضم Q مع P أو مع W نُحصِّل ممرًّا فرديًّا مغلقًا في D. وهذا مستحيل؛ لأن الممر الفردي المغلق يحوي حلقة فردية (ذات طول فردي)، لذا فإن S نواة في D.





أما الثانية فهي للحالة العامة؛ حيث نستخدم الاستقراء على $n\ (D)$ التي تمثل عدد رؤوس D.

إذا كانت $n\ (D) = 1$، فإن المثال الفريد على ذلك هو بيان برأس واحد دون عرى. وهذا الرأس يمثل نواة.

خطوة الاستقراء: افترض أن $n\ (D) > 1$، وافترض أن D غير مترابط بقوة (الحالة الأولى تعالج حالة الترابط بقوة). افترض أن D' هي إحدى مركبات D المترابطة بقوة؛ حيث لا يوجد ضلع يربط رأسًا من D' مع رأس خارج D' (التمرين 11)، لذا وكما بيّنّا سابقًا، فإنه توجد نواة S' للمركبة D'.

افترض أن D'' هي البيان الموجه الجزئي الذي يمكن الحصول عليه من البيان الموجه D، وذلك بحذف D' أسلاف $predecessors(S')$ جميعها، إذن، وباستخدام خطوة الاستقراء، فإن هناك نواة S'' لـ D''. والآن ندعي أن $S' \cup S''$ هي نواة للبيان الموجه D. وبما أن D'' لا تحوي أيًّا من أسلاف S' فإنه لا يوجد ضلع في S'' S'. ولكل رأس في $D''-S''$ تابع في S'' ويوجد تابع في S' للرؤوس جميعها غير الموجودة في $S'.S''$ ■

درجات الرؤوس (Vertex Degrees)

نستخدم في البيان الموجّه الرموز المستخدمة نفسها في حالة البيان للدلالة على عدد كلّ من الرؤوس والأضلاع، وتُجسد (incorporates) الرموز المستخدمة للتدليل على درجة الرأس التمييز بين رأس ذلك الضلع وذيله.

17.4.1. تعريف: ليكن v رأسًا في بيان موجّه، نعرّف درجة الخروج (**outdegree**) $d^{+}(v)$ على أنها عدد الأضلاع التي يكون v ذيلاً لها. في حين نعرف درجة الدخول $d^{-}(v)$ (**indegree**) على أنها عدد الأضلاع التي تكون v رأسًا لها، ونعرّف (**out − neighborhood**) جوار الخروج أو (**successorset**) مجموعة التوابع (الخلف) $N^{+}(v)$ على أنها $\{x \in V(G): v \to x\}$، ونعرّف كذلك مجموعة (**in − neighborhood**) جوار الدخول أو (**predecessorset**) مجموعة السلف $N^{-}(v)$ على أنها $\{x \in V(G): x \to v\}$، ونرمز إلى أقل درجة دخول بالرمز $\delta^{-}(G)$ ولأكبر درجة دخول بالرمز $\Delta^{-}(G)$. في حين نستخدم الرمزين $\Delta^{+}(G)$ و $\delta^{+}(G)$ للإشارة إلى أقل وأكبر درجة خروج على التوالي.

نعطي فيما يأتي صيغة جمع الدرجات الموجهة التي تقابل صيغة جمع الدرجات للبيانات.

18.4.1. قضية. في البيان الموجّه G، يكون $\sum_{v \in V(G)} d^{+}(v) = e(G) = \sum_{v \in V(G)} d^{-}(v)$

الإثبات: كل ضلع له ذيل واحد ورأس واحد. لذا نحصل على هذه النتيجة. ■

لقد عرّفنا متتالية الدرجات (متتالية درجات الرؤوس) لبيان معين سابقًا، وفي حال البيان الموجه، نجد أن قائمة الأزواج $(d^{+}(vi)\ ،\ d^{-}(vi))$ هي التي تقابل هذه المتتالية، وتسمى عناصر هذه القائمة بأزواج الدرجات. والقضية (19.4.1) الآتية تعطي الشرط اللازم والضروري لكي تكون هذه القائمةُ قائمةَ أزواج درجات لبيان موجه معين، حيث يكون الأمر سهلاً عند السماح بوجود أضلاع مكررة.

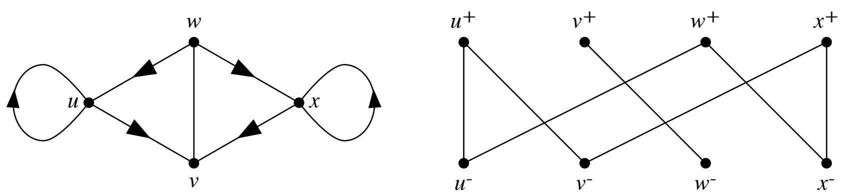
19.4.1. *قضية : إذا كانت لدينا قائمة من أزواج الأعداد الصحيحة غير السالبة، فإن هذه القائمة تصلح لأن تكون قائمة أزواج درجات لبيان موجه إذا وفقط إذا كان حاصل جمع عناصر الإحداثي الأول مساويًا لحاصل جمع عناصر الإحداثي الثاني.

الإثبات : إن ضرورة هذا الشرط تنبع من أن كل ضلع له ذيل واحد ورأس واحد فقط. لذا، فإن كل ضلع يسهم بواحد لكل مجموع. ولرؤية كفاية هذا الشرط؛ خذ الأزواج $\{(d_i^+ , d_i^-): 1 \le i \le n\}$، والرؤوس $v_1,\dots,v_n$، وافترض أن $m = \sum d_i^+ = \sum d_j^-$.

خذ m من النقاط وأعطها علامات دالة (تسميات) (Labels) موجبة بحيث إن d_i^+ منها لها العلامة i، وكذلك أعط النقاط علامات دالة سالبة ، بحيث إن d_j^- منها لها العلامة $-j$. لكل نقطة لها العلامات i و $-j$ ضع ضلعًا من v_i إلى v_j، ولاحظ أن هذا يبني بيانًا موجهًا فيه $d^+(v_i)=d_i^+$ و $d^-(v_i) = d_i^-$. وهذا ينهي الإثبات. ■

إنّ السؤال المناظر في حال البيان الموجّه البسيط يكون أصعب، ولكن يمكن إعادة صياغة السؤال بدلالة البيانات الثنائية الفرع (bipartite) عن طريق تحويل (transformation) معين يكون مفيدًا للعديد من المسائل المتعلقة بالبيانات الموجّهة.

20.4.1. *تعريف : ليكن D بيانًا موجهًا، نعرف شطر D ($split$) على أنه بيان ثنائي الفرع G حيث مجموعتا رؤوسه هما: V^+، V^-، وكل منهما تمثل نسخة من $v(D)$، حيث يوجد لكل رأس x في x^+ $x^- \in V^-$ في V^+ رأس x^- في V^-. ولكل ضلع uv في D يوجد ضلع في G طرفاه هما: u^+ و v^- (انظر الشكل أدناه).



21.4.1. *ملاحظة : إنّ درجات رؤوس مشطور D هي درجات كلّ من الدخول والخروج لرؤوس D.

بالإضافة إلى ذلك، يمكن تحويل (نقل) البيان الثنائي X,Y إلى بيان موجّه على n من الرؤوس ،حيث $|X| = |Y| = n$ وذلك برسم ضلع v_iv_j في D لكل ضلع $x_i y_j$ في G. في هذه الحالة، تكون G مشطور ($split$) D. (لهذا السبب، سُمِحَ بإضافة العرى إلى البيانات الموجّهة البسيطة).

بناءً على ما سبق، يوجد بيان بسيط له أزواج الدرجات $\{(d_i^+ , d_i^-): 1 \le i \le n\}$ إذا وفقط إذا وُجِدَ بيان ثنائي الفرع بسيط G، درجات رؤوسه هي $d_1^+, \dots, d_n^+$ لإحدى مجموعتي الرؤوس، و $d_1^-, \dots, d_n^-$ لمجموعة الرؤوس الثانية. يقدم التمرين (32) طريقة لاختبار وجود مثل هذا البيان الثنائي، علمًا بأن النص والإثبات يشبهان نظرية هافل وحكيمي. وسيوضح ذلك من خلال التمارين. ■

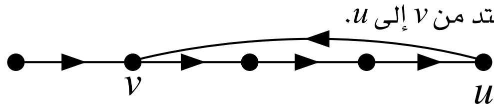
بيانات أويلر الموجّهة

إن تعريفات كل من المسرب، والممر، والحلقة، وعلاقة الربط للبيانات الموجهة هي تعريفاتها للبيانات نفسها، وذلك عندما نضع قائمة الأضلاع في صورة أزواج مرتبة من الرؤوس في البيان الموجه، لاحظ أن الأضلاع المتتابعة "تتبع الأسهم" وفي الممر $v_0, e_1, v_1, \dots\dots, e_k, v_k$ يكون v_{i-1} ذيلاً للضلع e_i، ويكون v_i رأسًا له.

22.4.1. تعريف: يعرف مسرب أويلر في البيان (الموجه) على أنه مسرب يحوي الأضلاع جميعها، وتعرف حلقة أويلر على أنها مسرب مغلق يحوي الأضلاع جميعها، ويسمى البيان أويلريًّا (نسبة إلى أويلر) إذا وُجِدَت فيه حلقة أويلرية، حيث إن توصيف بيانات أويلر الموجهة يماثل توصيف بيانات أويلر، فضلاً عن الإثبات يماثل الإثبات في حالة البيانات. لذا، سيُوضّحُ ذلك من خلال التمارين. ■

23.4.1. تمهيدية: إذا كان G بيانًا موجّهًا، بحيث إنّ $\delta^{+}(G) \geq 1$، فإن G يحوي حلقة، وكذلك تكون النتيجة نفسها صحيحة عندما $\delta^{-}(G) \geq 1$.

الإثبات: افترض أنّ P تمثل أكبر مسار في G، ولتكن u هي آخر رأس في P، وبما أنه لا يمكن تكبير P أو توسيعها، فإن كل تابع لـ u يجب أن يكون رأسًا في P، وبما أن $\delta^{+}(G) \geq 1$ فإنه يوجد تابع $u > v$ في P، والضلع uv يكمل الحلقة مع جزء P الممتد من v إلى u. ■



24.4.1. نظرية: يكون البيان الموجه أويلريًّا إذا وفقط إذا كان $d^{+}(v) = d^{-}(v)$ لكل رأس v، وبحيث تكون للبيان المتضمن في البيان الموجه مركبة واحدة غير (تافهة) بديهية على الأكثر.

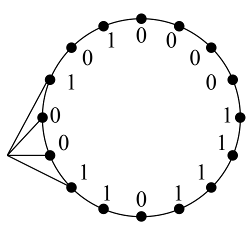
الإثبات: انظر التمرين (19) أو التمرين (20). ■

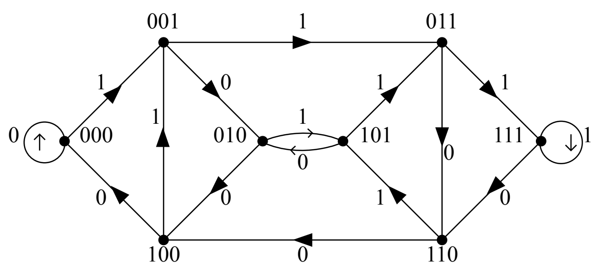
كل بيان موجه أويلري لا يحوي رؤوسًا معزولة يكون مترابط بقوة، على الرغم من أن التوصيف يشير إلى أن الترابط الضعيف كافٍ.

25.4.1. تطبيق: لحلقات ديبروجن (de Bruijn) يوجد 2^n صف (strings) ثنائي، طول كل منها n. هل توجد ترتيبة حلقية لـ 2^n رقم ثنائي، بحيث إن الـ 2^n صف المؤلفين من n من الأرقام المتتابعة تكون مختلفة؟ إذا كانت $n=4$، فإن الترتيب (0000 1111 0 11 00 1 0 1) يفي بالغرض.

يمكن استخدام مثل هذه الترتيبة لمتابعة موقع طبل يتحرك بصورة دورانية (Good [1946]). حيث يوجد لهذا الطبل 2^n موقع دوراني. تنقسم الفرقة حول المحيط إلى 2^n جزء يمكن تشفيرها بـ 0 أو 1. يستطيع جهاز الإحساس أن يقرأ n جزءًا متتابعًا. إذا تمتع التشفير بالخاصية المحددة أعلاه، فإن موقع الطبل يتحدد بالصف الذي تقرأه أجهزة الإحساس.

للحصول على هذه الترتيبة الدورانية؛ عرّف بيانًا موجهًا D_n بحيث تكون رؤوسه هي الثنائيات التي تحوي $(n-1)$ من الإحداثيات (binary ($n-1$) tuples)، ضع ضلعًا من a إلى b إذا كانت آخر $n-2$ من مدخلات a تتوافق مع أول $n-2$ من مدخلات b. سَمِّ (علّم أو أعطِ علامة) الضلع الذي يحوي آخر مدخلة من b. يظهر الشكل أدناه D_4. سنثبت فيما يأتي أن D_n أويلري. وكذلك سنرى كيف نحصل على الترتيبة الدائرية المطلوبة من حلقة أويلرية. ■





26.4.1. نظرية: إن البيان الموجه D_n الموجود في التطبيق (25.4.1) هو بيان أويلري. وعلامات (تسميات) الأضلاع في أي حلقة أويلرية من D_n تشكل ترتيبة حلقية (دائرية) ويوجد فيها 2^n قطعة متتابعة مختلفة طول كل منها n.

الإثبات: أولاً، سنثبت أن D_n أويلري. كل رأس له درجة خارجة 2 (out degree)؛ وذلك لأنه يمكن إلحاق (تذييل) 0 أو 1 لاسم الرأس من أجل الحصول على اسم الرأس التابع. وبالمثل، فإن الدرجة الداخلة لكل رأس هي 2 أيضًا؛ لأن التعليل (argument) نفسه ينطبق عندما نتحرك عكس الاتجاه السابق، وذلك بوضع 0 أو 1 على مقدمة الاسم. إضافة إلى أن D_n مترابط بقوة؛ لأنه يمكننا الوصول إلى الرأس ($b = (b_1,\ldots b_{n-1}$ من أي رأس آخر بتتبع الأضلاع المسماة $b_1,\ldots,b_{n-1}$ بالتتابع. لذا، فإن D_n تحقق فرضيات النظرية (24.4.1). لذا، فإن D_n أويلري.

افترض أن C حلقة أويلرية في D_n. إن الوصول إلى الرأس ($a = (a_1,\ldots,a_{n-1}$ يجب أن يتمّ من خلال ضلع علامته (اسمه) a_{n-1}؛ لأن العلامة (الاسم) على الضلع الذي يدخل على رأس معين تتطابق مع آخر إحداثي (مدخلة) من اسم الرأس.

وبما أننا نحذف المقدمة، وننقل مواقع باقي الإحداثيات للحصول على باقي الاسم عند الرأس، فإن التسميات (العلامات) المتتابعة السابقة (بالنظر إلى الخلف) يجب أن تكون $a_{n-2},\ldots,a_1$ على الترتيب.

وعليه، إذا استخدمت C ضلعًا له اسم a_n، فإنّ القائمة المؤلفة من n من الأضلاع المسماة بأقرب وقت هي: $a_1,\ldots,a_n$، وبما أن الـ 2^{n-1} اسم للرؤوس مختلفة، وكلّ ضلعين يغادران (ينطلقان من) كل رأس لهما أسماء مختلفة، وبما أننا نتتبع كلّ ضلع من كلّ رأس مرة واحدة من خلال C، عندها، نكون قد أثبتنا أن الـ 2^n صف (خط) التي طول كل منها n في الترتيبة الدائرية المعطاة باسم (بعلامة) الضلع من خلال C مختلفةٌ (يختلف كل منهما عن الآخر). ■

إنّ البيان الموجه D_n هو بيان ديبروجن (**de bruijn**) من الرتبة n على حرفين هجائيين، وهي مفيدة لأغراض أخرى؛ ولأن فيها العديد من الرؤوس، والقليل من الأضلاع (ضعف عدد الرؤوس فقط). ومع ذلك، نستطيع الوصول إلى أيّ رأس من أيّ رأس آخر بمسار قصير، حيث يمكننا الوصول إلى أيّ رأس نريده من خلال $n-1$ خطوة وذلك من خلال إدخال (introducing) قواطع (bits) على اسم ذلك الرأس بترتيب معين وبدءًا من الرأس الحالي.

التوجيهات والتدويرات (Orientations and Tournaments):

يوجد n^2 زوجًا مرتبًا من العناصر التي يمكن تكوينها (تشكيلها) من مجموعة الرؤوس التي عددها n. إن البيان البسيط يسمح بوجود العرى، ولكنه يسمح باستخدام كل زوج مرتب بوصفه ضلعًا مرة واحدة على الأكثر. لذا، هناك n_2 زوجًا مرتبًا يمكن أن تكون أو لا تكون أضلاعًا، ويوجد 2^n بيان موجه بسيط رؤوسه $v_1,\ldots,v_n$. أحيانًا، نرغب في منع وجود العرى.

27.4.1. تعريف. نعرف التوجيه لبيان G على أنه البيان الموجه D الذي نحصل عليه من G باختيار اتجاه (توجيه) (إما $x \rightarrow y$ أو $y \rightarrow x$) لكل ضلع xy في $E(G)$. **وتوجيه البيان** يعني إعطاء اتجاه لهذا البيان، ويعرف **الدوري** (تدوير البيان) على أنه إعطاء اتجاه لبيان تام.

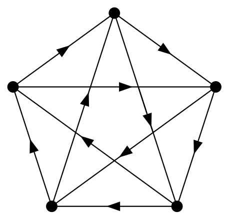
لاحظ أن توجيه البيان يعني بيانًا موجهًا خاليًا من العرى. عندما تمثل أضلاع البيان مقارنة بين أشياء ترتبط (تُمثّل) بالرؤوس، فبإمكاننا تسجيل النتائج بوضع $x \rightarrow y$ للتدليل على أن وضع x أفضل من وضع y خلال المقارنة، والناتج من هذا هو توجيه للبيان G.

لاحظ أنّ عدد البيانات المعطاة إتجاها على الرؤوس $v_1,\ldots,v_n$ هو $3^{\binom{n}{2}}$، وأنّ عدد التدويرات (الدوريات) هو $2^{\binom{n}{2}}$.

28.4.1. مثال: إن إعطاء اتجاهات (توجيه) للبيانات التامة يعطي نموذجًا لدورة المباريات المستديرة. افترض

أن لديك اتحادًا يضمّ n من الفرق، وكل فريق يلعب مع كل فريق آخر مباراة واحدة فقط. لكل زوج u و v نعدُّ $u\,v$ ضلعًا إذا ربح الفريق u، ويُعَدُّ $v\,u$ ضلعًا إذا كان الرابح هو فريق v، ومع نهاية الموسم، يكون لدينا توجيه للبيان K_n. وتكون علامة الفريق هي الدرجة الخارجة للرأس (cutdegree) وهي تساوي عدد المرات التي ربحها الفريق الذي يمثله الرأس u. لذا، نطلق على متتالية الدرجات الخارجة متتاليةَ الدرجات (العلامات). لاحظ أن الدرجات الخارجة تحدد الدرجات الداخلة، وبما أن $d^+(v) + d^-(v) = n - 1$ لكل رأس v، فإن التعامل مع متتالية علامات (درجات) الدوري أسهل من التعامل مع متتالية درجات الرؤوس للبيانات البسيطة (التمرين 35). ■

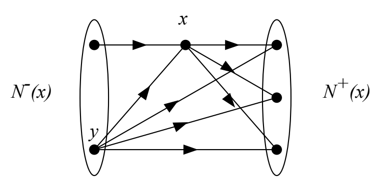
لاحظ أنه من الممكن (خلال دوري معين) الحصول على أكثر من رأس له الدرجة القصوى نفسها، وفي مثل هذه الحالة، لا يكون هنالك رابح واضح (في المثال أدناه كل رأس له درجة خارجة 2 ودرجة داخلة 2). إن اختيار البطل لا يكون سهلاً عادة في حال تساوي العلامات (الدرجات) القصوى لبعض الفرق، وعلى الرغم من أنه ليس هناك حاجة لأن يكون هنالك رابح واضح، إلا أننا سنرى فيما يأتي وجود فريق x دائمًا، بحيث يكون x قد فاز على كل فريق z، أو أن x قد فاز على فريق آخر كان قد فاز على z.



29.4.1. تعريف: في البيان الموجه، نعرِّف **الملك** على أنه رأس يمكن الوصول منه إلى أي رأس آخر من خلال مسار طوله 2 على الأكثر.

30.4.1. قضية: (Landau [1953]) كل دوري له ملك.

الإثبات: افترض أن x رأس في دوري T، إذا لم يكن x ملكًا، فيوجد عندها رأس y لا يمكن الوصول إليه من x بمسار طوله أقل من 2 أو يساويه. لذا، لا يوجد للرأس x تابع (خلف) من أسلاف (سوابق) y. وبما أن T توجيهٌ لبيان تام، فإن كل خلف للرأس x يكون خلفًا للرأس y، وكذلك $y \to x$. واستنادًا إلى ذلك، فإن $d^+(y) > d^+(x)$. إذا لم يكن y ملكًا، فإننا نعيد التعليل السابق من أجل إيجاد رأس z درجته الخارجة أكبر. وبما أن T منتهية، فإن هذه العملية يجب أن تنتهي، وبانتهائها نحصل على الرأس الملك. ■



لقد أثبتنا أن كل رأس في البيان الذي يمثل دوريًّا معينًا ذا درجة خارجة كبرى يكون ملكًا. في التمارين (36 – 38) نجد أسئلة أخرى تتعلق بالملوك (انظر [1980] Maurer). يعمم التمرين 39 النتيجة لبيانات موجهة اختيارية.

تمـــارين (Exercise)

1.4.1 (-) جد علاقة واقعية لا توجد حلقات لبيانها الموجه، وجد علاقة أخرى ذات حلقات إلا أنها غير تماثلية.

2.4.1 (-) في التطبيق (4.4.1) المتعلق بمفتاح الضوء، افترض أن المفتاح الأول مفصول من السلك، ارسم البيان الموجه الذي يمثل النظام الناتج.

3.4.1 (-) أثبت أنّ كلّ ممرّ من u إلى v في بيانٍ موجه يحوي مسارًا من u إلى v.

4.4.1 (-) أثبت أن كلّ ممرّ مغلق فردي الطول في بيانٍ موجه يحتوي على ضلع لحلقة فردية (مساعدة: تتبع البديهية 15.2.1).

5.4.1 (-) افترض أنّ G بيان موجه، فيه الدرجة الخارجة لكلّ رأس تساوي الدرجة الداخلة لذلك الرأس، أثبت أنه يمكن تحليل (تفكيك) G إلى حلقات.

6.4.1 (-) ارسم D_2 و D_3 من بيانات ديبروجن.

7.4.1 (-) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كان D توجيهًا لبيان بسيط له عشرة رؤوس، فإنه لا يمكن أن تكون الدرجات الخارجة لرؤوس D مختلفة.

8.4.1 (-) أثبت أنه يوجد دوري له n من الرؤوس، بحيث إن الدرجة الداخلة تساوي الدرجة الخارجة لكل رأس إذا وفقط إذا كان n عددًا فرديًّا.

• • • • •

9.4.1 أثبت $n \geq 1$ العبارة الآتية أو انقضها: يوجد في كل بيان موجه بسيط رأسان لهما الدرجة الخارجة نفسها أو الدرجة الداخلة نفسها.

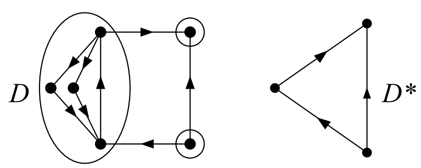
10.4.1 (!) أثبت أن البيان الموجه يكون مترابطًا بقوة إذا وفقط إذا تحقق أنه لكل تجزئة لمجموعة رؤوسه إلى مجموعتين غير خاليتين S و T يوجد ضلع من أضلاعه يربط بين S و T.

11.4.1 (!) أثبت أنه في كل بيان موجه، توجد مركبة قوية (مترابطة بقوة) ليس لها أضلاع داخلة (لا يدخلها أضلاع) كما توجد مركبة قوية ليس لها أضلاع خارجة (لا يخرج منها أضلاع).

12.4.1 للبيان الموجه D، عرّف علاقة R على $V(D)$ على الصورة الآتية: (x,y) إذا وجد مسار من x إلى y، ومسار آخر من y إلى x في $\acute{D}$، فأثبت أن R علاقة تكافؤ، وأن صفوف التكافؤ هي مجموعات رؤوس المركبات القوية للبيان الموجه D.

13.4.1 a) أثبت أن المركبات القوية لبيان موجه D تكون منفصلة زوجًا زوجًا.

b) افترض أن $D_1,\ldots,D_k$ هي المركبات القوية للبيان الموجه D، وافترض أيضا أن D^* هي البيان الموجه الخالي العرى الذي رؤوسه $v_1,\ldots,v_k$، بحيث إن $v_i \to v_j$ إذا وفقط إذا كانت $i \neq j$ ويوجد في D ضلع من D_i إلى D_j. أثبت أنه لا توجد حلقات في D^*.



14.4.1 (!) افترض أن G بيان موجه له n من الرؤوس دون حلقات. أثبت أنه يمكن ترتيب رؤوس D على الصورة $v_1,\ldots,v_n$ ، بحيث إنه إذا كان $v_iv_j \in E(G)$، فإن $i < j$.

15.4.1. افترض أن G بيان موجه بسيط مجموعة رؤوسه هي $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \le i \le m$ و $0 \le n\}$؛ ويوجد ضلع من (i,j) إلى (i',j') إذا وفقط إذا أمكن الحصول على (i',j') من (i,j) بإضافة العدد 1 إلى أحد إحداثيي (i,j). أثبت أن عدد المسارات في G من $(0,0)$ إلى (m,n) هو $\binom{m+n}{n}$.

16.4.1. (+) نظرية فيرمات الصغيرة: (*Fermat's Little theorem*). افترض أن n عدد أولي. عرف علاقة التكافؤ $\equiv$ على $\mathbb{Z}$ على الصورة $a \equiv b \bmod n$ إذا وفقط إذا كان $a-b$ يقبل القسمة على n (انظر الملحق A) اجعل $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ تمثل صفوف تكافؤ هذه العلاقة. افترض أن a عدد طبيعي ليس له عوامل أولية مشتركة مع العوامل الأولية للعدد n. إن الضرب في a يمثل تبديلة لعناصر $\mathbb{Z}$. وافترض أن l هي أقل عدد طبيعي يحقق أن: $a^l \equiv a$:

a) افترض أن G هي البيان الموجه الدالي الذي رؤوسه $\mathbb{Z}_n$ وذلك للتبديلة المعرفة بدلالة الضرب في a. أثبت أن طول كل حلقة في G (ما عدا الأنشوطة على الرأس n) يساوي $l-1$.

b) استنتج من الفرع a أن $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$.

17.4.1. (*) أثبت أن الحلقة الفردية (الموجهة) تمثل بيانًا موجهًا ليس له نواة. جد مثالاً لبيان موجه له حلقة فردية مستحدثة بوصفها بيانًا جزئيًّا، ولكن له نواة.

18.4.1. (*) أثبت أنه توجد نواة واحدة للبيان الموجه الذي ليس فيه حلقات.

19.4.1. استخدم البديهية (23.4.1) والاستقراء على عدد الأضلاع لإثبات الخاصية المميزة للبيانات الموجهة الأويلرية (النظرية (24.4.1). (مساعدة: تتبع النظرية 26.2.1)

20.4.1. أثبت صحة الصفة المميزة للبيانات الموجهة الأويلرية (النظرية 24.4.1) باستخدام مفهوم المسارب القصوى (مساعدة: اتبع 32.2.1) والإثبات الثاني للنظرية 26.2.1).

21.4.1. تعطي النظرية 24.4.1 الشروط الضرورية والكافية لكي يكون للبيان الموجه (حلقة) أويلرية، حدد (مثبتًا) الشروط الضرورية والكافية لكي يكون للبيان الموجه مسربٌ أويلريّ. (التعريف 22.4.1)، (Good [1946]).

22.4.1. افترض أن D بيان موجه فيه $d^-(v) = d^+(v)$ لكل رأس v ما عدا $d^+(x) - d^-(x) = k = d^-(y) - d^+(y)$ استخدم الصفة المميزة للبيانات الموجهة الأويلرية لتثبت أن D تحوي K ممرًا من x إلى y، بحيث إنّ هذه الممرات منفصلة الأضلاع (pairwise edge disjoint) زوجًا زوجًا (أي أنّ مجموعة تقاطع أضلاع أيّ ممرين من هذه الممرات تكون مجموعة خالية).

23.4.1. أثبت أنّ لكلّ بيان G توجيه D (بيان موجه D) موزون عند كل رأس؛ بمعنى أن $|d_D^+(v) - d_D^-(v)| \le 1$ لكل $v \in V(G)$

24.4.1. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: يوجد لكل بيان G توجيه بحيث إنه إذا كانت S مجموعة جزئية من $S \subseteq V(G)$، فإنّ عدد الأضلاع التي تدخل S وتخرج منها تختلف عن بعضها بمقدار 1 على الأكثر.

25.4.1. (!) التوجيهات والتفكيك إلى P_3:

a) أثبت أنّ لكل بيان مترابط توجيهًا فيه عدد الرؤوس التي درجتها الخارجة فردية على الأكثر يساوي 1 (Rotman [1991])

b) استخدم فرع (a) لتستنتج أن كلّ بيان بسيط مترابط عدد أضلاعه زوجي يمكن أن يُحَلّلَ (يفكك) إلى مسارات طول كل منها 2.

26.4.1. رتّب 7 أصفار و 7 آحاد حلقيًّا، بحيث يكون 14 صفًّا المكون كل منها من أربعة حدود ثنائية متتابعة، هي كل ما يمكن تكوينه من صفوف رباعية (باستخدام هذين الرقمين) مختلفة عن 0101 و 1010.

27.4.1. متتالية (De Bruijn) ديبروجن لأيّ هجائية (al phapet) مهما كان طولها. افترض مجموعة حروف هجائية حجمها k. أثبت وجود ترتيبة حلقية مؤلفة من k^l من الحروف المختارة من A، بحيث تكون الـ k^l صفًّا التي طول كل منها l في هذه المتتالية مختلفة بعضها عن بعض، أي أن يكون كلّ منها مختلفًا عن الآخر (Good [1966]، Rees [1946])

28.4.1. افترض أن S هجائية حجمها m. وضّح كيف يمكن الحصول على ترتيبة حلقية مؤلفة من $m^4 - m$ حرفًا من S بحيث إنّ الصفوف المؤلفة من أربعة أحرف من الحروف المتتابعة جميعها تكون مختلفة بعضها عن بعض، وتحوي حرفين مختلفين على الأقل.

29.4.1. (!) افترض أن G بيان، وأن D توجيه (إعطاء اتجاه) للبيان G ، بحيث إن D مترابط بقوة. أثبت أنه إذا وُجِدَت حلقه فردية في G، فإنه توجد حلقة فردية في D. (مساعدة: خذ في الحسبان الأزواج $\{v_i, v_{j+1}\}$ في حلقة فردية ($v_1, \ldots, v_k$) في G).

30.4.1. (+) إذا كان D بيانًا موجهًا قويًّا، افترض أن $f(D)$ هو طول أقصر ممر مغلق يمر بكل رأس. أثبت أن أكبر قيمة لـ $f(D)$ على البيانات جميعها الموجهة القوية التي لها n من الرؤوس هي $[(n+1)^2/4]$ على افتراض أن $n \geq 2$ (cull [1980]).

31.4.1. حدّد أصغر عدد n بحيث توجد بيانات لدورين غير متشاكلين لكل منهما n من الرؤوس، ولهما قائمة الدرجات الخارجة نفسها.

32.4.1. افترض أنّ $P = P_1,\ldots,P_m$ و $q = q_1,\ldots,q_n$ قائمتان من الأعداد الصحيحة غير السالبة. نقول: إن الزوج (P, q) قابل للتمثيل بوصفه بيانًا ثنائيًّا إذا وجد بيان بسيط ثنائي الفرع ، بحيث تمثل $P_1,\ldots,P_m$ إحدى مجموعتي رؤوسه، في حين تمثل $q_1,\ldots,q_n$ المجموعة الثانية من الرؤوس. عندما يكون مجموع p موجبًا، أثبت أن (p, q) قابل للتمثيل بوصفه بيانًا ثنائيًّا إذا وفقط إذا كان (p', q') قابلاً لهذا التمثيل ، حيث يمكن الحصول على (p', q') من (p, q) بحذف أكبر عنصر Δ من P، وبطرح 1 من كل عنصر Δ من عناصر q القصوى. (مساعدة: اتبع طريق إثبات النظرية 31.3.1).

33.4.1. (*) افترض أن A و B مصفوفتان من الحجم $m \times n$، وبحيث إن مدخلاتهما من {1 ، 0} تعوض عملية التبادل مصفوفة من النوع $\binom{01}{10}$ بمصفوفة من النوع $\binom{10}{01}$ أو بالعكس . أثبت أنه إذا كان حاصل جمع عناصر أي صف $\binom{01}{10}$ في A يماثل حاصل جمع عناصر الصف $\binom{10}{01}$ الذي يناظره في B، فإنه يمكن تحويل A إلى B بعدد محدود من عمليات التبادل. وضّح هذه النتيجة في حال البيانات الثنائية (الثنائية الفرع)، (Ryser [1957]).

34.4.1. (!) افترض أن G و H بيانان دوريان على مجموعة من الرؤوس V. أثبت أن $d_G^+(v) = d_H^+(v)$ لكل $v \in V$ إذا وفقط إذا أمكن تحويل G إلى H عن طريق عمل مجموعة من عكس الاتجاهات على حلقات ثلاثية الطول. (مساعدة: خذ في الحسبان رأسًا له درجة خارجة كبرى في البيان الجزئي من G الذي يتألف من أضلاع أعطيت اتجاهًا معاكسًا في H. (Ryser [1964]).

35.4.1. (+) افترض أن $p_1,\ldots,p_n$ أعداد صحيحة غير سالبة، بحيث إن $p_1 \leq \ldots \leq p_n$. افترض أن $p'_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$. أثبت أنه يوجد بيان يمثل دوريًّا درجاته الخارجة $p_1,\ldots,p_n$ إذا وفقط إذا كان $p'_k \geq \binom{k}{2}$. لكل $1 \leq K < n$، و $p'_k = \binom{n}{2}$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على $\sum_{k=1}^{n}[p'_k - \binom{k}{2}]$) (Landau [1953]).

36.4.1. من القضية 30.4.1، نعلم أنه يوجد ملك لكل دوري. افترض أن T بيان يمثل دوريًّا ليس له رأس درجته الداخلة صفر:

a) أثبت أنه إذا كان x ملكًا في T، فإن ملكًا آخر يوجد لـ T في $N^-(x)$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت وجود ثلاثة ملوك على الأقل للدوري T.

c) لكل $n \geq 3$، جد دوري T يحقق أنه $\delta^-(T) > 0$، وله ثلاثة ملوك فقط.

(تعليق: يوجد دوري على n من الرؤوس له k من الملوك عندما $1 \leq k \leq n$ ما عدا عندما $k = 2$ وعندما

.(($n = k = 4$)Maurer [1980])

37.4.1. خذ في الحسبان الخوارزمية الآتية التي مدخلها دوري T:

1- اختبر رأسًا x في T.

2- إذا كانت درجة x الداخلة مساوية للصفر، فسَمّ x ملكًا لـ T وتوقف.

3- بعكس ذلك، احذف $\{x\} \cup N^{+}(x)$ من T لتحصل على T'.

4- طبق الخطوات السابقة على T'، وسمّ المخرج ملكًا لـ T وتوقف.

أثبت أن هذه الخوارزمية تنتهي وتنتج ملكًا في T.

38.4.1. (+) لكل $n \in \mathbb{N}$، أثبت أنه يوجد دوري له n من الرؤوس، بحيث إن كل رأس يكون ملكًا إذا وفقط إذا كانت $n \notin \{2،4\}$.

39.4.1. (+) أثبت أنه يوجد لكل بيان موجه خال من العرى D مجموعة S من الرؤوس غير المتجاورة زوجًا زوجًا، بحيث يمكن الوصول إلى أيّ رأس خارج S من S بمسار طوله 2 على الأكثر. (مساعدة: استخدم الاستقراء القوي على $n(D)$. تعليق: هذا يعمم القضية 30.4.1). ([chvatal – Lovaz [1974]).

40.4.1. نقول: إن البيان الموجه فريد المسار إذا وجد على الأكثر مسار واحد (موجه) يربط بين أي رأسين x و y. افترض أن Tn دوري على n من الرؤوس، حيث إن الضلع الذي يربط v_i بـ v_j يكون موجهًا في اتجاه الرأس الذي دليله أكبر. ما أكبر عدد للأضلاع الموجودة في بيان جزئي فريد المسار من Tn؟ كم بيانًا جزئيًا فريد المسار عدد أضلاعه أكبر ما يمكن موجودًا في مثل هذا البيان؟ (مساعدة: أثبت أن البيان المتضمن في هذا البيان الموجه لا يحوي أي مثلثات) [Maurer – Rabinovitch – Trotter [1980).

41.4.1. افترض أن G دوري، وافترض كذلك أن L_0 هي قائمة بعناصر $V(G)$ بترتيب معين. إذا كان y يتبع x مباشرة في L_0، ولكن $x \to y$ في G، فإن yx ضلع معكوس (عكسي). يمكننا تبديل x مع y في الترتيب عندما يكون yx ضلعًا معكوسًا (هذا يمكن أن يزيد عدد الأضلاع المعكوسة). افترض أن متتالية. .... L_0، L_1، تنتج بسبب عمليات تبديل الأضلاع المعكوسة في الترتيب الحالي ضلعًا واحدًا في كل مرة وبالتتابع. أثبت أن هذا يعطي قائمة من الأضلاع خالية من الأضلاع المعكوسة دائمًا، وحدّد عدد الخطوات اللازمة للانتهاء من هذه العملية (تعليق: في الحالة الخاصة، عندما تمثل الرؤوس بأعداد، ويشير كل ضلع في اتجاه العدد الأعلى، فإنّ النتيجة تشير إلى أن تبديل الأعداد المتجاورة بالتتابع وغير المرتبة دائمًا وبالنهاية يعطي تصنيفًا للقائمة) (*Locke* [1995]).

42.4.1. (!) افترض أن $\sigma = v_1,\ldots,v_n$ تمثل ترتيبًا لرؤوس دوري (بيان يمثل دوريًا). اجعل $f(\sigma)$ تمثل مجموع أطوال الأضلاع الراجعة (feedback edges)، ونعني بذلك مجموع $j - i$ على الأضلاع $v_j v_i$ حيث $j > i$. أثبت أن كل ترتيب يجعل لـ $f(\sigma)$ قيمة صغرى يرتب الرؤوس ترتيبًا غير متزايد بحسب الدرجة الخارجة. (مساعدة: حدد كيف تتغير $f(\sigma)$ عندما نبدل عنصرين متتابعين من عناصر (σ)و(-Kano – Sakamoto [1983]، Isaak – Tes .(man [1991]