تستطيع أنت أيضًا ممارسة الدوران السريع، إذا استطاعت معدتك تحمّل السرعة الزاوية الكبيرة والتسارع المركزي لبعض ألعاب حديقة التسلية السريعة. وإن لم تستطع، فجرّب الأفعوانة البطيئة أو دولاب الشحذ. إنّ ألعاب (الكرنفال) الدوّارة لها طاقةٌ حركيّةٌ إضافة إلى الزخم الزاوي.

الفصل 8

الحركة الدورانية

حتى الآن، كان اهتمامنا منصبًّا على الحركة الانتقاليّة. وقد ناقشنا الكينماتيكا والديناميكا للحركة الانتقالية (دور القوّة)، وكذلك الطاقة والزخم المرافق لها. وفي هذا الفصل، سنعنى بالحركة الدورانيّة. سنناقش كينماتيكا الحركة الدورانية وبعدها الديناميكا (متضمنة العزم)، كذلك الطاقة الحركيّة الدورانيّة والزخم الدوراني (النظير الدوراني للزخم الخطي). وسنجد مناظرات كثيرة للحركة الانتقاليّة، مما سيجعل دراستنا أكثر سهولة. وفهمنا للعالم من حولنا سيزيد كثيرًا من عجلات الدرّاجة الدوّارة، والأقراص المدمجة إلى ألعاب مدينة الملاهي، وإلى التزلج/ لدوران الأرض، وكذلك إلى جهاز الطرد المركزي، وقد يكون هناك مفاجآت أخرى.

وسندرس بصورةٍ رئيسة دوران **الأجسام الجاسئة** (الصلبة). الجسم الجاسيء هو الجسم ذو الشكل المحدّد، الذي لا يتغيّر، لذلك فالجسيمات المكوّنة له تبقى ثابتةً في أماكنها بالنسبة لبعضها. كلُّ جسمٍ حقيقيٍّ يكون قابلًا للاهتزاز أو التشوّه عندما تؤثّر فيه قوّة. ولكن هذه الآثار تكون عادةً صغيرة. لذا، فإنّ مفهوم الجسم الجاسيء المثالي مفيدٌ جدًّا كتقريب جيد.

1-8 الكميات الزاوية

رأينا في الفصل السابع (البند 7-8) أنّ حركة جسمٍ جاسيءٍ يمكن تحليلها كحركةٍ انتقاليّةٍ لمركز كتلة الجسم، بالإضافة إلى حركة دورانية حول مركزِ كتلته. وقد سبق أن ناقشنا الحركة الانتقاليّة بالتفصيل، لذا سنركّز الآن على الحركة الدورانيّة المجرّدة التي تعني أن نقاط الجسم جميعها تدور في دوائر مثل النقطة p في الدولاب الدائر (الشكل 8-1). ومراكز هذه الدوائر جميعها تقع على خطٍّ واحدٍ يُسمّى "محور الدوران". في (الشكل 8-1) محور الدوران عموديٌّ على الصفحة ويمرّ في النقطة O . كلّ نقطةٍ في جسمٍ دائرٍ حول محورٍ ثابتٍ تتحرّك في دائرة يظهر متقطعاً للنقطة P كما في (الشكل 8-1) مركزها المحور ونصف قطرها r، وهي المسافة من تلك النقطة إلى محور الدوران. الخط المستقيم الذي يرسم من المحور إلى أيّ نقطةٍ يمسح الزاوية θ نفسها في. الوقت ذاته.

لبيان الموقع الزاوي لجسمٍ دائر، أو كم يكون قد دار؛ نحدّد الزاوية θ لخطٍّ معيّنٍ في الجسم أحمر في (الشكل 8-1) بالنسبة لخطٍّ مرجعي، كما هو الحال في محور x (الشكل 8-1). نقطة في الجسم مثل P في (الشكل 1-8) تتحرّك زاوية θ عندما تسير المسافة l التي تُقاس على محيط مسارها الدائري. تُقاس الزوايا عادة بالدرجات، ولكن رياضيّات الحركة الدائريّة تكون أسهل بكثيرٍ إذا استعملنا نصف الزاوية **القطرية (radian)** لقياس الزوايا، راديان واحدة (تختصر rad) تعرف بالزاوية التي تقابل قوسًا طوله يساوي نصف القطر. مثلاً، في (الشكل 8-1ب)، النقطة P تبعد مسافة r عن محور الدوران، وتحرّكت مسافة l على قوس الدائرة. يقال إنّ القوس l "يقابل" الزاوية θ. اذا كانت $l = r$، فإنّ θ تساوي بالضبط 1 rad. بالراديان؛ أي زاوية θ تعطى بـ.

$$\theta = \frac{l}{r} \qquad \textbf{(8-1أ)}$$

حيث r نصف قطر الدائرة، و l طول القوس المقابل للزاوية محدّدة بالراديان. إذا كانت $l = r$ فعندها $\theta = 1$ rad الراديان كميّة ليس لها وحدات؛ لأنّها النسبة بين طولين. وعلى الرغم من ذلك نذكر دائمًا rad عندما نعطي زاوية بالراديان، لنتذكّر أنّها ليست درجات. ومن المفيد أحيانًا أن نكتب (المعادلة 8-1أ) بدلالة القوس l:

$$l = r\theta \qquad \textbf{(8-1ب)}$$

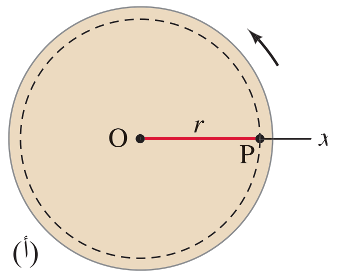
الراديان يمكن ربطها بالدرجات كما يلي: في دائرةٍ كاملةٍ هناك $360°$، وهذا يقابل طول قوسٍ يساوي محيط الدائرة، $l = 2\pi r$. وهكذا في دائرة كاملة: أي $\theta = l/r = 2\pi r/r = 2\pi$ rad

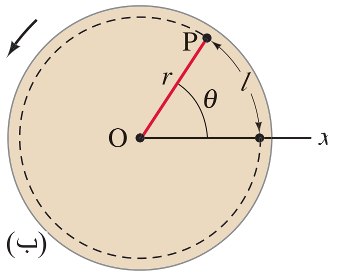
$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

وهكذا، فإن راديان واحدة تساوي $360°/2\pi \approx 360°/6.28 \approx 57.3°$

فالجسم الذي يكمل دورة كاملة (rev) يكون قد دار $360°$ أو 2π rad:

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad}.$$





الشكل 8-1 النظر إلى عجلة يدور عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور يمر بمركز الدولاب عند النقطة O (المحور عمودي على الصفحة). تدور كل نقطة مثل P، في مسار دائري؛ l هي المسافة التي تسيرها P عندما يدور الدولاب خلال زاوية θ.

θ بالراديان.

طول القوس = نصف القطر: 1 *rad*

تحويل الدرجات إلى راديان.

1 *rad* ≈ 57.3°

المثال 8-1 **عجلة الدّراجة.**

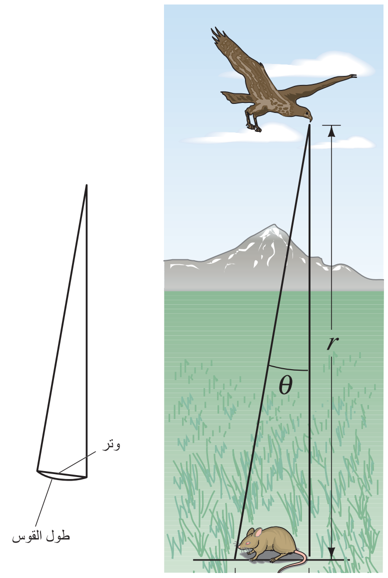
عجلة درّاجة يدور 4.50 دورةً.كم زاويةٍ نصف قطرية (راديان) دار؟

النهج: كلّ ما نحتاج إليه هو تحويلٌ مباشرٌ للوحدات باستعمال

$$1 \text{ دورة} = 360° = 2\pi \text{ rad} = 6.28 \text{ rad}$$

الحل:

$$4.50 \text{ دورة} = (4.50 \text{ rev})\left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) = 9.00\pi \text{ rad} = 28.3 \text{ rad}$$



(ب) (أ)

الشكل 8-2 (أ) (المثال 8-2) (ب) للزوايا الصغيرة، طولا القوس والوتر (خط مستقيم) متساويان تقريبا.

المثال 8-2 الطيور الجارحة – بالراديان

تستطيع عيون بعض الطيور أن تميز الأشياء التي تقابل زاوية لا تقل عن حوالي 3×10^{-4} rad . (أ) كم درجة تعادل هذه الزاوية؟ (ب) ما حجم الشيء الذي يستطيع الطائر تمييزه عندما يطير على ارتفاع 100 m (الشكل 8-2أ)؟

النهج: لـ (أ) نستخدم العلاقة 2π rad $= 360°$. في حين نستخدم لـ (ب) (المعادلة 8 - 1ب)، $l = r\theta$ لنجد طول القوس.

الحــل: (أ) نحوّل 3×10^{-4} rad إلى درجات:

$$(3 \times 10^{-4}\,\text{rad})\left(\frac{360°}{2\pi\,\text{rad}}\right) = 0.017°$$

(ب) نستعمل (المعادلة 8 - 1ب)، $l = r\theta$. للزوايا الصغيرة، القوس l وطول الوتر يكونان متساويان تقريبًا* (الشكل 8 - 2ب). بما أن $r = 100$ m و $\theta = 3 \times 10^{-4}$ rad، نجد

$$l = (100\,\text{m})(3 \times 10^{-4}\,\text{rad}) = 3 \times 10^{-2}\,\text{m} = 3\,\text{cm}$$

لذا يستطيع الطائر تمييز فأر صغير (طوله حوالي 3 cm) من على ارتفاع 100 m؛ هذه قوّة إبصار جيّدة.

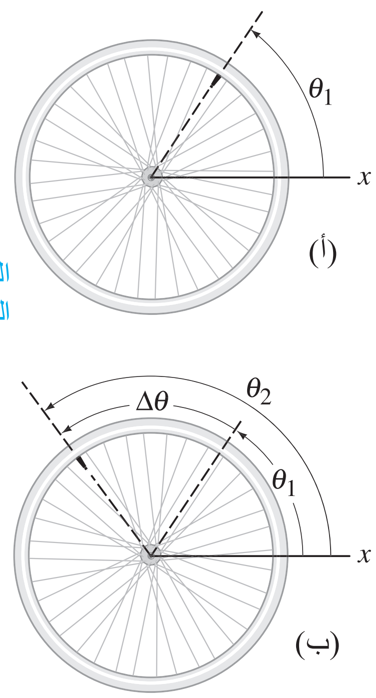
ملحوظة: لو أُعطيت الزاوية بالدرجات، كان علينا أولًا تحويلها إلى راديان لعمل هذه الحسابات. تنطبق (المعادلة 8-1)فقط إذا حدّدت الزاوية بالراديان. أما الدرجات (أو الدورات) فلا تصلح.

ولوصف الحركة الدورانيّة، نستفيد من الكميّات الزاوية، مثل السرعة الزاوية والتسارع الزاوي. وهذه تُعرف بالتناظر مع الكميّات المقابلة في الحركة الخطيّة، وتختار لتصف الجسم الدوّار كاملًا. لذلك، فهذه الكميّات متساوية لكلّ نقطةٍ في الجسم الدوّار. كما أنّ لكلِّ نقطةٍ في الجسم الدوّار كذلك سرعةً انتقاليّةً وتسارع، إلا أنّ هذه الكميّات تختلف من نقطةٍ إلى أخرى في الجسم.

الإزاحة الزاوية (راديان)

عندما يدور جسم، مثل دولاب الدرّاجة (الشكل 8-3)، من موضعٍ ابتدائيٍّ يحدّد بـ θ_1 إلى وضعٍ نهائيٍّ θ_2 فإنّ إزاحته الزاوية هي

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$



الشكل 8-3 عجلة تدور من (آ) الموقع الابتدائي θ_1 إلى (ب) الموقع النهائي θ_2. الإزاحة الزاوية هي $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

السرعة الزاوية

تُعرف **السرعة الزاوية** (يرمز إليها بالرمز اليوناني الصغير ω omega) بالتناظر مع السرعة الانتقاليّة (الخطيّة) التي تمّت مناقشتها في الفصل الثاني. وبدلًا من الإزاحة الخطيّة، نستعمل الإزاحة الزاوية. وهكذا تُعرف **السرعة الزاوية المتوسطة** بـ:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \textbf{(8-2أ)}$$

حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية التي دارها الجسم خلال الفترة الزمنية Δt. وتُعرف السرعة الزاويّة اللحظية بالزاوية الصغيرة جدًّا $\Delta\theta$ التي يدورها الجسم خلال فترةٍ زمنيّةٍ صغيرة جدًّا Δt.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \textbf{(8-2ب)}$$

تُقاس السرعة الزاوية عادةً بالراديان لكلِّ ثانية (rad/s). لاحظ أن النقاط كلّها في جسمٍ جاسيءٍ تدور بالسرعة الزاوية نفسها؛ لأنّ كلّ موضعٍ في الجسم يتحرّك بالزاوية نفسها خلال الفترة الزمنية ذاتها. إنّ كلّ جسمٍ كعجلة الدرّاجة في (الشكل 8-3) يمكنه الدوران حول محورٍ ثابتٍ مع اتجاه عقارب الساعة أو عكسها . ويمكن تحديد الاتجاه بإشارة + أو -، كما فعلنا بالحركة الخطيّة، الفصل الثاني، على امتداد $+x$ أو $-x$. الاصطلاح المعتاد هو اختيار الإزاحة $\Delta\theta$ والسرعة ω موجبة إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة. أمّا إذا كان الدوران مع اتجاه عقارب الساعة، فإنّ θ تقل، وبذلك تكون $\Delta\theta$، سالبتين**.

* حتى لو بلغت الزاوية حوالي $15°$، فإن الخطأ في إجراء هذا التقريب يكون 1% ويزداد الخطأ بسرعة للزوايا الكبيرة.

** وستناقش الطبيعة الاتجاهيّة للسرعة الزاوية والكميّات الزاوية في (البند 8-9 اختياري).

التسارع الزاوي (يُرمز إليه بالرمز اليوناني α ألفا) يقابل التسارع الخطّي، ويُعرف بالتغيّر في السرعة الزاوية مقسومًا على الزمن اللازم لعمل هذا التغيّر. **التسارع الزاوي المتوسط** يعرف بـ

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \textbf{(3 - 8أ)}$$

حيث ω_1 هي السرعة الزاوية الابتدائيّة، و ω_2 السرعة الزاوية بعد فترةٍ زمنيّة Δt. ويُعرف التسارع الزاوي الخطّي بالطريقة المعتادة نهاية هذه النسبة عندما تقترب Δt من الصفر:

التسارع الزاوي

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \textbf{(3 - 8ب)}$$

بما أنّ ω هي نفسها للنقاط جميعها للجسم الدائر، فإنّ (المعادلة 8-3) تخبرنا بأنّها ستكون متساويةً للنقاط جميعها أيضًا. وهكذا، فإن ω و α خاصتان للجسم الدوّار ككل. وعند قياس ω بالراديان لكلّ ثانية و t بالثانية، فإن α ستكتب بالراديان لكلّ ثانيةٍ مربّعة $(\mathrm{rad/s^2})$.

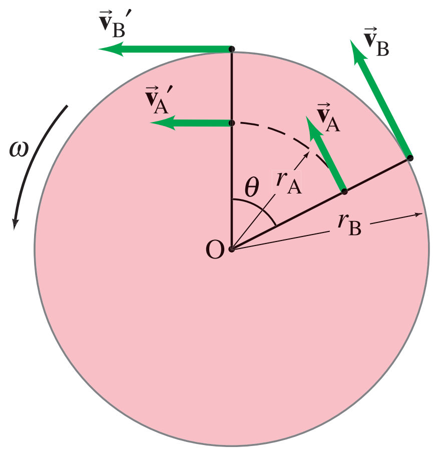
كلُّ نقطةٍ أو جسيمٍ من جسمٍ جاسيءٍ يدور، وعند أيّ لحظة، سيكون لها سرعةٌ خطيّة v وتسارعٌ خطّي a. ويمكننا ربط الكميات الخطيّة عند أيّ نقطة a , v بالكميّات الزاوية للجسم الدوار، ω و α. اعتبر نقطة P على بعد r من محور الدوران، كما في (الشكل 8-4) . فإذا كان الجسم يدور بسرعة زاوية ω، فسيكون لكلّ نقطة سرعة خطيّة اتجاهها باتجاه المماس لمسارها الدائري. إنّ مقدار هذه السرعة الخطيّة هو $v = \Delta l/\Delta t$. ومن (المعادلة 8-1 ب)، فإنّ التغيّر في زاوية الدوران $\Delta\theta$ (بالراديان) يرتبط بالمسافة الخطية المقطوعة بـ $\Delta l = r\,\Delta\theta$. حيث $v = \dfrac{\Delta l}{\Delta t} = r\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

أو

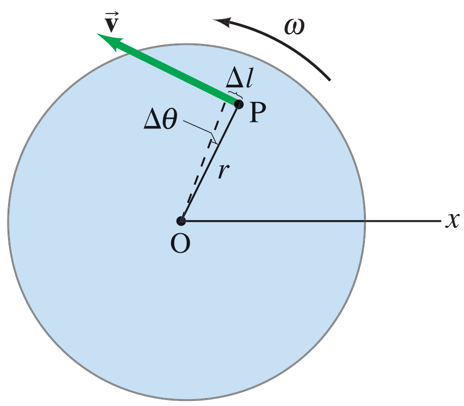
ارتباط السرعتين الدورانية بالخطية.

$$v = r\omega \qquad \textbf{(4 - 8)}$$

أخيرًا، وبالرغم من أنّ ω هي نفسها لكلّ نقطةٍ في الجسم الدائر عند أيّ لحظة، فإنّ السرعة الخطيّة v تكون أكبر كلّما ابتعدت النقاط عن محور الدوران (الشكل 8-5). لاحظ أنّ المعادلة 8-4 تنطبق في الحالتين اللحظيّة والمتوسّطة.



الشكل 8-5 دولاب يدور بانتظام عكس اتجاه عقارب الساعة. نقطتان على الدولاب على بعد r_A و r_B من المركز، لهما السرعة الزاوية ω نفسها لأنهما تقطعان الزاوية θ نفسها في الفترة الزمنية ذاتها. إلّا أنّ لهما سرعتين خطيتين مختلفتين لأنهما تقطعان مسافتين مختلفتين في الفترة الزمنية نفسها. وبما أن $r_B > r_A$، فإن $v_B > v_A$ $(v = r\omega)$



الشكل 8-4 نقطة P على دولاب دائر لها سرعة خطية $\vec{v}$ عند أيّ لحظة.

المثال المفاهيمي 8-3 **هل الأسد أسرع من الحصان؟**

على دوامة الخيل، يجلس طفلٌ على حصانٍ قرب الحافة الخارجيّة، في حين يجلس طفلٌ على أسدٍ في منتصف المسافة عن المركز. (أ) لأي الطفلين السرعة الخطيّة الأكبر؟ (ب) لأي الطفلين السرعة الدورانيّة هي الأكبر؟

الحل: (أ) السرعة *الخطيّة* هي المسافة المقطوعة مقسومةً على الفترة الزمنيّة. في دورةٍ واحدة، يقطع الطفل عند الحافة الخارجيّة مسافةً أطولَ من الطفل القريب من المركز، ولكن الفترة الزمنية لهما متساوية. وعليه، فإنّ الطفل عند الحافة الخارجية على الحصان له سرعةٌ خطيّةٌ أكبر.

(ب) السرعة *الزاوية* هي زاوية الدوران مقسومةً على الفترة الزمنية. في دورةٍ كاملةٍ يدور الطفلان الزاوية نفسها (راديان $360° = 2\pi$) . لذا، فإن للطفلين . السرعة الزاوية ذاتها.

إذا تغيرت السرعة للجسم الدائر، فإنّ الجسم ككل- وكل نقطة منه– له تسارع زاوي. وكلّ نقطه كذلك لها تسارع خطّي اتجاهه مماس للمسار الدائري لتلك النقطة. نستعمل المعادلة 8-4 $(v = r\omega)$ لنبيّن أنّ التسارع الزاوي α يرتبط بالتسارع الخطّي المماسي $a_{\tan}$ لنقطةٍ ما في الجسم الدائر بـ

$$a_{\tan} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = r\frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

أو

التسارع المماسي

$$a_{\tan} = r\alpha \qquad \textbf{(5 - 8)}$$

في هذه المعادلة، r هو نصف قطر الدائرة التي يتحرّك فيها الجُسَيم، والرمز السفلي "*tan*" في $a_{\tan}$ "tangential" (المماس).

التسارع الخطّيّ الكلّيّ لنقطةٍ ما، هو الجمع الاتجاهي لمركبتين:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{\tan} + \vec{\mathbf{a}}_{R}$$

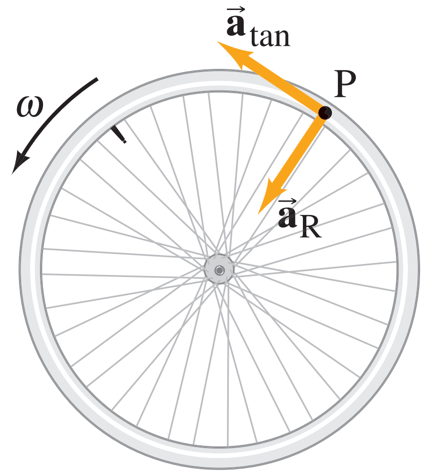
التسارع المركزي (نصف قطري)

حيث المركبة نصف القطريّة*، $\vec{\mathbf{a}}_R$ هو التسارع نصف القطريّ أو المركزيّ "centripetal" واتجاهه يكون نحو مركز المسار الدائريّ للنقطة. انظر (الشكل 8-6). رأينا في الفصل الخامس (المعادلة 5 - 1) أنّ $a_R = v^2/r$، ويمكننا إعادة كتابة ذلك بدلالة ω باستعمال (المعادلة 8-4):

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = \omega^2 r \qquad \textbf{(6-8)}$$

وهكذا، فإنّ التسارع المركزي يكون أكبر كلّما ابتعدت عن محور الدوران: الأطفال الأبعد في دوامة الخيل يشعرون بأكبر تسارع.(المعادلات 8 - 4 و 8 - 5 و 8 - 6) تربط بين الكميّات الزاوية التي تصف دوران جسمٍ ما مع الكميات الخطيّة لكلّ نقطةٍ من الجسم. (الجدول 8 - 1) يلخّص هذه العلاقات.

الشكل 8-6 على عجلة دائر تزداد سرعته الزاوية تتزايد، النقطة P لها مركبتان للتسارع الخطي: مماسية ونصف قطرية (مركزية). انظر أيضا الفصل 5.



الجدول 8-1 الكميات الخطية والدورانية

خطية	نوع	دورانية	العلاقة
x	إزاحة	θ	$x = r\theta$
v	سرعة	ω	$v = r\omega$
$a_{\tan}$	تسارع	α	$a_{\tan} = r\alpha$

* "نصف قطري" يعني على امتداد نصف القطر: أي نحو المركز أو المحور أو بعيدا عنهما.

المثال 4-8 السرعات والتسارعات الزاوية والخطيّة

دوّامة خيلٍ ساكنةٍ ابتدائيًّا. عند $t = 0$ تعطى تسارعًا زاويًا $\alpha = 0.060\ \text{rad/s}^2$، وهذا يزيد السرعة الزاوية لمدة $8.0\ \text{s}$. عند $t = 8.0\ \text{s}$ احسب الكميات التالية: (أ) السرعة الزاوية للدوامة. (ب) السرعة الخطية لطفل (الشكل 8-7أ) عند $2.5\ \text{m}$ من المركز، النقطة P من (الشكل 8-7ب). (جـ) التسارع المماسي (الخطّي) للطفل. (د) التسارع المركزي للطفل. (هـ) التسارع الخطّيّ الكلّيّ للطفل.

النهج: التسارع الزاوي α ثابت، لذلك يمكننا استخدام (المعادلة 8 - 3أ) لإيجاد ω بعد زمن $t = 8.0\ \text{s}$. بهذه ω والتسارع المعطى α، نحدّد الكميّات الأخرى باستعمال العلاقات التي طوّرناها حديثًا، (المعادلات 8 - 4، 8 - 5، 8 - 6).

الحل (أ) (المعادلة 8-3أ) تخبرنا

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

وأُعطينا أن $\omega_1 = 0$ و $\Delta t = 8.0\ \text{s}, \bar{\alpha} = 0.060\ \text{rad/s}^2$

نحل لإيجاد ω_2 فنحصل:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 + \bar{\alpha}\,\Delta t\\ &= 0 + (0.060\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s}) = 0.48\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

تسارعت الدوّامة من s خلال الفترة $8.0\ \text{s}$ من $\omega_1 = 0$ إلى $\omega_2 = 0.48\ \text{rad/s}$.

(ب) السرعة الخطيّة للطفل؛ حيث $r = 2.5\ \text{m}$ عند $t = 8.0\ \text{s}$ يمكن حسابها باستعمال (المعادلة 8-4):

$$v = r\omega = (2.5\ \text{m})(0.48\ \text{rad/s}) = 1.2\ \text{m/s}$$

لاحظ أنّ الـ (rad) أُسقطت هنا لأنّها كميّة لا أبعاد لها (فقط للتذكير) – إنّها نسبةٌ بين مسافتين، (المعادلة 8 - 1ب) .

(جـ) تسارع الطفل المماسي يُعطى وفق (المعادلة 8-5):

$$a_{\tan} = r\alpha = (2.5\ \text{m})(0.060\ \text{rad/s}^2) = 0.15\ \text{m/s}^2$$

ويبقى ثابتًا خلال فترة التسارع 8.0-s.

(د) التسارع المركزي للطفل عند $t = 8.0\ \text{s}$ يُعطى بالمعادلة 8-6:

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(1.2\ \text{m/s})^2}{(2.5\ \text{m})} = 0.58\ \text{m/s}^2$$

(هـ) مركبتا التسارع الخطيّ اللتان حسبتا في الفرعين (جـ) و (د) متعامدتان. وهكذا فمقدار التسارع الخطّيّ عند $t = 8.0\ \text{s}$ هو

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{a_{\tan}^2 + a_R^2}\\ &= \sqrt{(0.15\ \text{m/s}^2)^2 + (0.58\ \text{m/s}^2)^2} = 0.60\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

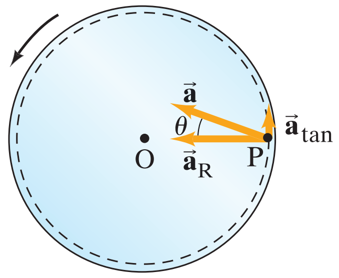
واتجاهه (الشكل 8-7ب) هو:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{\tan}}{a_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.15\ \text{m/s}^2}{0.58\ \text{m/s}^2}\right) = 0.25\ \text{rad}$$

أي $\theta \approx 15°$

ملحوظة: التسارع الخطّيّ معظمه مركزي، يحافظ على الطفل متحركًا في دائرةٍ مع الدوّامة. والمركبة المماسية التي تسرّع الحركة أقل.

(أ)



(ب)

الشكل 8-7 (المثال 8-4) متجه التسارع الكلي $\vec{a} = \vec{a}_{\tan} + \vec{a}_R$، عند اللحظة $t = 8.0\ \text{s}$

يمكننا ربط السرعة الزاوية ω بتردّد الدوران f. التردّد هو عدد الدورات الكاملة (rev) في الثانية، كما رأينا في (الفصل 5) . دورة واحدة (دولاب مثلا) تقابل زاوية 2π rad، وهذا $1\ \text{rev/s} = 2\pi\ \text{rad/s}$. وبالتالي، وعلى نحوٍ عام، فإنّ التردّد f يرتبط بالسرعة الزاوية ω بـ

التردد

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

أو

$$\omega = 2\pi f \tag{7-8}$$

وحدة التردّد، دوراتٌ لكلّ ثانية (rev/s)، تُعطى اسمًا خاصًّا هو هيرتز (Hz)؛ أي أنّ

$$1\ \text{Hz} = 1\ \text{rev/s}$$

لاحظ أنّ "الدورة" ليست وحدةً في الواقع، ولذلك يمكننا كتابة $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$.

الزمن اللازم لعمل دورةٍ كاملةٍ يُسمّى **الزمن الدوري** T ويرتبط بالتردّد؛ حيث

الزمن الدوري

$$T = \frac{1}{f} \tag{8-8}$$

إذا دار جُسيمٌ بتردّدٍ ثلاث دوراتٍ في الثانية، فإنّ الزمن لكلّ دورةٍ هو $\frac{1}{3}$s.

التمرين أ: في (المثال 8-4) ، وجدنا أنّ الدوّامة، بعد مرور 8.0 s تدور بسرعةٍ زاويةٍ $\omega = 0.48$ rad/s، وتستمرُّ بعمل ذلك بعد $t = 8.0$ s لأنّ التسارع يتوقّف. ما التردّد والزمن الدوريّ للدوّامة؟

تطبيق الفيزياء

القرص الصلب وسرعة الـ bit

المثال 8-5 **القرص الصلب.**

تدور أسطوانة القرص الصلب في الحاسوب بمعدل 7200 rpm (دورة/دقيقة). (أ) ما السرعة الزاوية للأسطوانة؟ (ب) إذا كان الرأس القارئ للقرص يقع على بعد 3.00 cm من محور الدوران، فما السرعة الخطيّة للنقطة على القرص تحت الرأس مباشرة؟ (جـ) إذا كانت ال bit الواحدة تحتاج إلى 0.50 μm طول على امتداد اتجاه الحركة، فكم bit في الثانية يستطيع الرأس الكاتب أن يكتب إذا كان على بعد 3.00 cm من المحور؟

النهج: نستعمل التردّد المُعطى f لحساب السرعة الزاوية ω للأسطوانة ومن ثَمّ السرعة الخطيّة لنقطةٍ على الأسطوانة ($v = r\omega$). وبحسب معدّل الـ bit بقسمة السرعة الخطيّة على طول bit الواحدة (الزمن / المسافة = v)

الحل: (أ) نجد أولا التردد بـ $f = 7200$ rev/min:

$$f = \frac{(7200\ \text{rev/min})}{(60\ \text{s/min})} = 120\ \text{rev/s} = 120\ \text{Hz}$$

ثم السرعة الزاوية تساوي

$$\omega = 2\pi f = 754\ \text{rad/s}$$

(ب) السرعة الخطيّة لنقطةٍ على بعد 3.00 cm من المحور تُعطى وفق (المعادلة 8-4):

$$v = r\omega = (3.00 \times 10^{-2}\ \text{m})(754\ \text{rad/s}) = 22.6\ \text{m/s}$$

(جـ) كلّ bit تحتاج إلى 0.50×10^{-6} m. لذلك عند سرعة 22.6 m/s، فإنّ عدد الـ bit التي تعبر الرأس في الثانية هو

$$\frac{22.6\ \text{m/s}}{0.50 \times 10^{-6}\ \text{m/bit}} = 45 \times 10^{6}\ \text{bits per second}$$

أو 45 megabits /s (Mbps) .

2-8 التسارع الزاوي الثابت

في الفصل الثاني، تمّ اشتقاق معادلات الكينماتيكا (المعادلات 2-11) التي تربط التسارع، والسرعة، والمسافة والزمن للحالة الخاصّة التي يكون فيها التسارع الخطّيّ منتظمًا. وقد تمّ اشتقاق هذه المعادلات من تعريف السرعة الخطيّة والتسارع بفرض أن التسارع ثابت. تعريفات السرعة الزاوية والتسارع الزاوي هي كما في مثيلاتها الخطيّة، ماعدا أنّ θ حلّت محلّ الإزاحة الخطيّة x, ω حلّت محلّ v و α محلّ a. لذلك، فالمعادلات الزاوية **للتسارع الزاوي الثابت** ستكون مشابهةً (المعادلات 2-11) مع استبدال x بـ θ ، v بـ ω ، a بـ α ، ويمكن اشتقاقها بالطريقة نفسها. وهي ملخّصة هنا، مقابل المعادلات الخطيّة (وقد اخترنا $\theta_0 = 0$ و $x_0 = 0$ عن زمن البدء $t = 0$).

			خطي	زاوي
معادلات كينماتيكا	(8-9أ)	[α, a ثابت]	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
الحركة الدورانية لتسارع	(8-9ب)	[α, a ثابت]	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
زاوي ثابت	(8-9جـ)	[α, a ثابت]	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$
$(x_0 = 0, \theta_0 = 0)$	(8-9د)	[α, a ثابت]	$\bar{v} = \dfrac{v + v_0}{2}$	$\bar{\omega} = \dfrac{\omega + \omega_0}{2}$

لاحظ أنّ ω_0 تمثّل السرعة الزاوية عند $t = 0$، أما θ و ω، فتمثّلان الموقع الزاوي والسرعة الزاوية على الترتيب، عند زمن t. وبما أنّ التسارع الزاوي ثابت، إذن $\alpha = \bar{\alpha}$.

المثال 8-6 تسارع الطارد المركزي (النابذة)

يتسارع الدوّار في الطارد المركزيّ من السكون إلى 20,000 دورةٍ في الدقيقة خلال 30 s. (أ) ما تسارعه الزاوي المتوسط؟ (ب) كم عدد الدورات التي دارها الدوّار خلال فترة تسارعه، بفرض أنّ التسارع الزاوي ثابت؟

النهج: لتحديد $\bar{\alpha} = \Delta\omega/\Delta t$، نحتاج إلى السرعتين الزاويتين الابتدائيّة والنهائيّة. للجزء (ب)، نستعمل المعادلة 8-9 (تذكّر أنّ الدورة الواحدة تكافئ $\theta = 2\pi$ rad).

الحــل: (أ) السرعة الزاوية الابتدائيّة هي $\omega = 0$. أمّا السرعة الزاوية النهائية فهي

$$\omega = 2\pi f = (2\pi\ \text{rad/rev})\frac{(20{,}000\ \text{rev/min})}{(60\ \text{s/min})} = 2100\ \text{rad/s}$$

وبالتالي، بما أنّ $\bar{\alpha} = \Delta\omega/\Delta t$ و $\Delta t = 30\ \text{s}$

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{2100\ \text{rad/s} - 0}{30\ \text{s}} = 70\ \text{rad/s}^2$$

أي أنّه في كلّ ثانيةٍ تزداد سرعة الدوّار بـ 70 rad/s أو $(70/2\pi) = 11$ دورةً في الثانية.

(ب) لإيجاد θ: يمكننا استعمال (المعادلة 8-9ب، أو 8-9جـ)، أو كليهما لاختيار الإجابة. الأولى تعطي

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(70\ \text{rad/s}^2)(30\ \text{s})^2 = 3.15 \times 10^4\ \text{rad}$$

ولإيجاد عدد الدورات الكلّيّ، نقسم على 2π rad/rev للحصول على

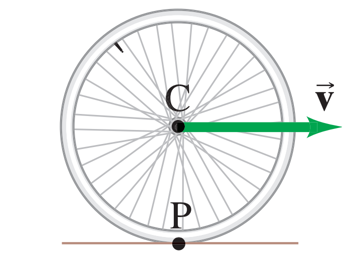
$$\frac{3.15 \times 10^4\ \text{rad}}{2\pi\ \text{rad/rev}} = 5.0 \times 10^3\ \text{rev}$$

ملحوظة: دعنا نحسب θ باستعمال المعادلة 8-9ج:

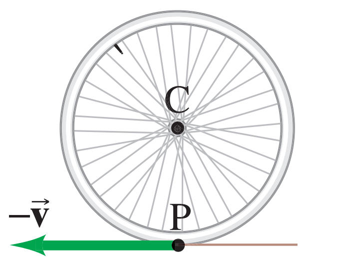
$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(2100\ \text{rad/s})^2 - 0}{2(70\ \text{rad/s}^2)} = 3.15 \times 10^4\ \text{rad}$$

التي تختبر نتيجتنا تمامًا.

3-8 حركة الدحرجة (من غير انزلاق)



(أ)



(ب)

الشكل 8-8 (أ) دولاب يتدحرج نحو اليمين مركزه C يتحرك بسرعة $\vec{\mathbf{v}}$. النقطة P ساكنة في هذه اللحظة. (ب) الدولاب نفسه كما يبدو من إطار مرجعي فيه محور الدولاب C في حالة سكون؛ أي أننا نتحرك نحو اليمين بسرعة $\vec{\mathbf{v}}$ بالنسبة إلى الأرض. النقطة P التي كانت ساكنة في(أ) هنا في (ب) تتحرك نحو اليسار بسرعة $-\vec{\mathbf{v}}$ كما هو مبين (انظر أيضا الجزء 3-8 عن السرعة النسبية).

حركة دحرجة كرةٍ أو عجلةٍ هي حركةٌ مألوفةٌ في حياتنا اليومية: كرةٌ تتدحرج على الأرض، أو دواليب، أو إطارات سيّارة، أو درّاجة على الرصيف. الدحرجة من غير انزلاق تمّ تحليلها، وتعتمد على الاحتكاك السكونيّ بين الجسم المتدحرج والأرض. ونقول الاحتكاك سكوني؛ لأنّ نقطة تماس الجسم المتدحرج بالأرض ساكنةٌ عند كلّ لحظة.

إنّ الدحرجة من غير انزلاق تتضمّن الدوران والانتقال معًا. لذا، فهناك علاقةٌ مبسّطةٌ بين سرعة المحور الخطيّة والسرعة الزاوية ω للدولاب الدوّار أو الكرة. في الواقع، $v = r\omega$ (حيث r هو نصف القطر) كما نبيّن الآن . يبين (الشكل 8-8أ) دولابًا يتدحرج إلى اليمين من غير انزلاق. عند اللحظة المبيّنة، النقطة P على الدولاب في حالة تماسٍ مع الأرض ولحظيًّا في حالة سكون. سرعة المحور C في منتصف الدولاب هي $\vec{\mathbf{v}}$. في (الشكل 8-8ب) وضعنا أنفسنا في الإطار المرجعيّ للدولاب؛ أي أننا نتحرك نحو اليمين بسرعة $\vec{\mathbf{v}}$ بالنسبة إلى الأرض. يكون المحور C في هذا الإطار المرجعيّ ساكنًا، أمّا الأرض والنقطة P فتتحركان إلى اليسار بسرعة $-\vec{\mathbf{v}}$ كما هو واضح. وهنا نرى دورانًا مجرّدًا. لذلك، نستطيع استعمال (المعادلة 8-4) للحصول على $v = r\omega$، حيث r نصف قطر الدولاب . هذه نفسها v (الشكل 8-8أ) .

ولذلك نرى أنّ السرعة الخطيّة v للمحور نسبةً إلى الأرض ترتبط بالسرعة الزاوية ω بـ

$$v = r\omega \qquad \text{[دحرجة من غير انزلاق]}$$

هذه العلاقة صحيحة فقط إذا لم يكن هناك انزلاق.

المثال 8-7 الدرّاجة

تتباطأ درّاجة بانتظام من $v_0 = 8.40\ \text{m/s}$ إلى السكون عبر مسافة $115\ \text{m}$، (الشكل 8-9). كلّ دولاب قطره $68.0\ \text{cm}$. احسب: (أ) السرعة الزاوية للدولابين عند اللحظة $t = 0$. (ب) عدد الدورات الكلّيّ التي يدورها كلُّ دولابٍ قُبيل التوقف. (ج) التسارع الزاوي للدولاب. (د) الوقت اللازم لتوقف الدولاب.

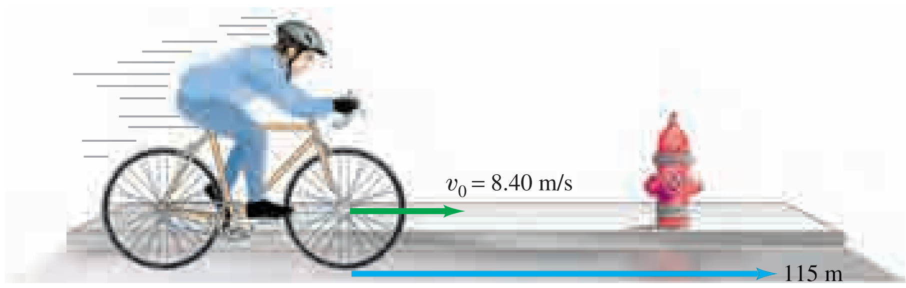
النهج: نفرض أنّ دواليب الدرّاجة تتدحرج من غير انزلاق، وأنّ الإطارات في تماسٍّ تامٍّ مع الأرض. سرعة الدرّاجة v والسرعة الزاوية للعجلات ω ترتبط بالعلاقة $v = r\omega$. ولأنّ الدرّاجة تتباطأ بانتظام، فإنّ التسارع الزاوي يكون ثابتًا. ويمكننا استعمال (المعادلات 8-9) .

الحل: (أ) السرعة الزاوية الابتدائية للدولاب الذي نصف قطره $34.0\ \text{cm}$ تساوي

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} = \frac{8.40\ \text{m/s}}{0.340\ \text{m}} = 24.7\ \text{rad/s}$$

(ب) للوصول إلى مرحلة التوقّف؛ تمّر الدرّاجة على $115\ \text{m}$ من الأرض. محيط الدولاب هو $2\pi r = (2\pi)(0.340\ \text{m})$. وهكذا، فإنّ عدد الدورات التي يعملها الدولاب للوصول إلى التوقّف هو

$$\frac{115\ \text{m}}{2\pi r} = \frac{115\ \text{m}}{(2\pi)(0.340\ \text{m})} = 53.8\ \text{rev}$$



الدرّاجة كما تبدو لناظرٍ على الأرض عند $t = 0$

الشكل 8-9 (المثال 8-7)

(جـ) التسارع الزاوي للدولاب يمكن الحصول عليه من المعادلة 8-9ج حيث نضع $\omega = 0$ و $\omega_0 = 24.7\ \mathrm{rad/s}$.
ولأنّ كل دورةٍ تقابل 2π راديان، فإنّ $\theta = 2\pi\ \mathrm{rad/rev} \times 53.8\ \mathrm{rev}\ (= 338\ \mathrm{rad})$، و

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\theta} = \frac{0 - (24.7\ \mathrm{rad/s})^2}{2(2\pi\ \mathrm{rad/rev})(53.8\ \mathrm{rev})} = -0.902\ \mathrm{rad/s^2}$$

(د) (المعادلة 8 - 9 أ أو ب) تسمح لنا بالحلّ للحصول على الزمن، لكن الأولى أسهل:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - 24.7\ \mathrm{rad/s}}{-0.902\ \mathrm{rad/s^2}} = 27.4\ \mathrm{s}$$

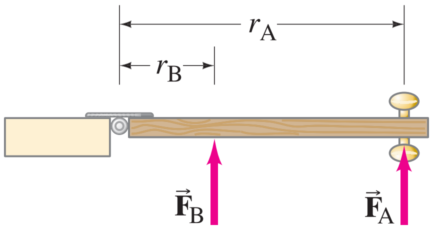
ملحوظة: عندما يكمل دولاب الدرّاجة دورةً واحدة، تتقدّم الدرّاجة مسافةً خطيّةً تساوي المحيط الخارجي $(2\pi r)$ للإطار، ما دام لا يوجد هناك انزلاق.

4-8 العزم

ناقشنا حتى الآن كينماتيكا الحركة الدورانيّة- وصف الحركة الدورانيّة بدلالة الزاوية، السرعة الزاوية، والتسارع الزاوي. والآن، سوف نناقش الديناميكا أو مسبّبات الحركة الدورانيّة. وإضافةً إلى ما وجدناه من متشابهاتٍ بين الحركتين: الخطيّة والدورانيّة من حيث وصف الحركة، فإنّه يوجد هنالك متشابهاتٌ في الديناميكا أيضًا.

لجعل جسم يبدأ بالدوران حول محورٍ ما؛ فإنّنا وبوضوحٍ نحتاج إلى قوّة. لكنَّ اتّجاه هذه القوّة وأين تؤثّر مهمٌّ أيضًا. خذ على سبيل المثال وضعًا عاديًّا، كالمنظر العلوي للباب المبيّن في الشكل 8-10. إذا أثّرت بقوة $\vec{\mathbf{F}}_A$ في الباب كما هو مبيّن، فستجد أنّه كلّما كان المقدار، F_A، أكبر، فتح الباب أسرع. ولكن لو أثّرت. بمقدار القوّة نفسها عند نقطة أخرى، $\vec{\mathbf{F}}_B$ مثلا (الشكل 8-10) فإنّ الباب لا يفتح بهذه السرعة. إنّ أثر القوّة يصبح أقل: أين تؤثر القوّة؟ بالإضافة إلى مقدارها واتّجاهها فإنّها تؤثّر في سرعة فتح الباب. في الواقع، إذا أثّرت هذه القوة في الباب فقط، فإنّ التسارع الزاوي للباب يتناسب طرديًّا، ليس مع مقدار القوة فقط، بل يتناسب طرديًّا أيضًا مع المسافة العموديّة من محور الدوران إلى الخطّ الذي تؤثّر القوّة في امتداده. هذه المسافة تُسمّى **ذراع الرافعة**، أو **ذراع العزم**، للقوّة، ويرمز إليهما r_A و r_B للقوّتين في (الشكل 8-10) . وهكذا، إذا كانت r_A في (الشكل 8-10) ثلاثة أمثال r_B، فإنّ التسارع الزاوي سيكون أكبر بثلاث مرات، بفرض أن مقدار القوّتين هو نفسه. وهناك طريقةٌ أخرى هي: إذا كان $r_A = 3r_B$، فإن F_B يجب أن تكون ثلاثة أمثال F_A لإعطاء التسارع الزاوي نفسه. (الشكل 8-11 يبني مثالين لأداتين طول ذراع العزم فيهما فاعل جدًّا).

ذراع الرافعة



الشكل 8-10 تطبيق القوة نفسها، ولكن بذراع رافعة مختلف، r_B و r_A. فإذا كانت $r_A = 3r_B$، للحصول على الأثر نفسه (التسارع الزاوي)، يجب أن تكون F_B ثلاثة أمثال F_A، أو $F_A = \frac{1}{3}F_B$.

(ب) (أ)

الشكل 8-11 (أ) يستطيع السّباك التأثير بعزمٍ أكبر عند استعمال مفتاح ذي ذراعٍ أطول. (ب) وكذلك مفتاح الدولاب يمكن أن يكون له ذراع عزمٍ أطول.

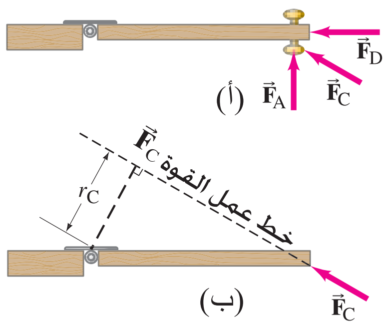
مقدار عزم الدوران

إذن، فالتسارع الزاوي يتناسب مع حاصل ضرب القوة بذراع العزم. يُدعى الناتج بعزم القوّة حول المحور، أو، بصورةٍ أشمل يُدعى **عزم الدوران**، ويُمثَّل بالرمز τ (حرف لاتيني صغير *tau*). وهكذا، التسارع الزاوي a لجسم ما يتناسب طرديًّا مع عزم الدوران المحصل τ:

$$\alpha \propto \tau$$

ونرى أنّ عزم الدوران هو الذي يعطي التسارع الزاوي. إنّ هذا هو الشبيه الزاوي لقانون نيوتن الثاني في الحركة الخطية، $a \propto F$.

عرفنا ذراع القوّة بالمسافة العموديّة من محور الدوران إلى خطّ عمل القوّة؛ أي المسافة العموديّة على محور الدوران والخطّ الوهميّ المرسوم على امتداد اتجاه القوّة. إنّنا نعمل ذلك لنأخذ بالحسبان أثر القوى التي تعمل بزاوية، مثل القوّة $\vec{\mathbf{F}}_C$ في (الشكل 8-12) ، وسيكون أثرها أقلَّ من قوّةٍ تؤثّر عموديًّا في الباب مثل $\vec{\mathbf{F}}_A$ (الشكل 8-12 أ). وإذا دفعت بقوّةٍ موجّهةٍ إلى نقطة التعليق (محور الدوران) كما في القوّة $\vec{\mathbf{F}}_D$، فإنّ الباب لا يدور أبدًا.

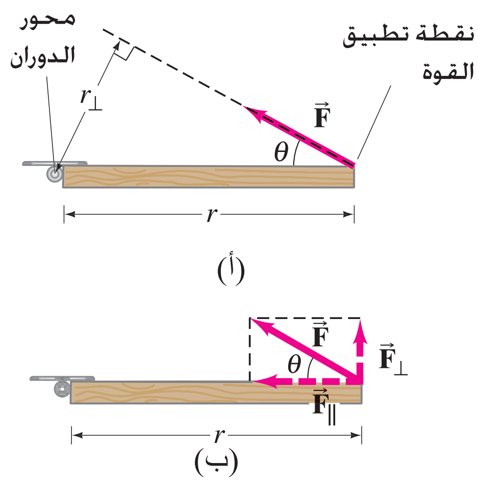


الشكل 8-12 (أ) قوى تؤثر بزوايا مختلفة في يد الباب.
(ب) ذراع القوة يعرف بالمسافة العمودية من محور الدوران (محور التعليق) إلى خط عمل القوة.

يمكن إيجاد ذراع القوّة لقوّةٍ مثل $\vec{\mathbf{F}}_C$ عن طريق رسم خطٍّ على امتداد اتجاه القوة $\vec{\mathbf{F}}_C$ (هذا هو "خط عمل $\vec{\mathbf{F}}_C$"). ثمّ نرسم خطًّا عموديًّا على خطّ العمل، يصل إلى محور الدوران وعموديًا عليه. طول هذا الخط الثاني هو ذراع القوّة ويرمز إليه بـ r_C في (الشكل 8-12ب). ذراع القوّة عموديٌّ على خطّ عمل القوّة من جهة، ومن جهةٍ أخرى عموديٌّ على محور الدوران.

إنّ مقدار عزم الدوران المرافق للقوّة $\vec{\mathbf{F}}_C$ هو $r_C F_C$. هذا ذراع القوّة القصير r_C وعزم الدوران الناجم عنه والمرافق للقوّة $\vec{\mathbf{F}}_C$ يتفق مع الواقع بأنّ $\vec{\mathbf{F}}_C$ أقلّ فاعليةً في تسارع الباب من $\vec{\mathbf{F}}_A$. وعند تعريف ذراع القوّة بهذه الطريقة، فإنّ التجربة تبيّن أنّ العلاقة $\alpha \propto \tau$ تنطبق بصورةٍ عامّة. لاحظ في (الشكل 8-12) أنّ خطّ عمل القوّة $\vec{\mathbf{F}}_D$ يمرّ بنقطة التعليق. ولذلك، فإنّ ذراع القوّة صفر. ومن ثَمَّ فإنّ عزم الدوران المرافق للقوّة $\vec{\mathbf{F}}_D$ يساوي صفرًا.

الشكل 8-13:
عزم الدوران $= r_\perp F = rF_\perp$



وبالتالي، فإنّ عزم الدوران المرافق للقوّة $\vec{\mathbf{F}}_D$ يساوي صفراً. وهذا لا يسبّب أيّ تسارعٍ زاوي، وهو ما ينسجم مع مشاهدتنا في الحياة اليومية.

وعلى نحوٍ عام، يمكننا كتابة مقدار عزم الدوران حول محور معيّن على النحو التالي:

$$\tau = r_\perp F \qquad \textbf{(8-10أ)}$$

حيث $r_\perp$ هو ذراع القوة والإشارة العموديّة ($\perp$) تذكّرنا أنّ علينا استعمال المسافة من محور الدوران العموديّة على خطّ عمل القوّة (الشكل 8-13أ).

وطريقة مكافئة لإيجاد عزم الدوران المرافق القوّة هي تحليل القوّة إلى مركبتين، موازية وعموديّة على الخطّ الواصل بين المحور ونقطة تأثير القوّة، (الشكل 8-13ب).

المركبة $F_\parallel$ لا تؤثّر بأيّ عزمٍ لأنّها باتجاه محور الدوران (ذراع عزمها يساوي صفرًا). ولهذا يكون عزم الدوران مساويًا لـ $F_\perp$ مضروبةً في المسافة r من المحور إلى نقطة تأثير القوّة:

$$\tau = rF_\perp \qquad \textbf{(8-10ب)}$$

يمكن أن نرى أنّ هذا يعطي النتيجة نفسها كما في (الشكل 8-10 أ) من العلاقات $F_\perp = F \sin\theta$ و $r_\perp = r \sin\theta$. [لاحظ أنّ θ هي الزاوية بين اتجاهي $\vec{\mathbf{F}}$ و r (الخطّ القطريّ من المحور إلى نقطة تأثير القوّة $\vec{\mathbf{F}}$)]. وهكذا

تعريف عزم القوة

$$\tau = rF \sin\theta \qquad \textbf{(8-10جـ)}$$

في أيٍّ من الحالتين يمكننا استعمال أيٍّ من (المعادلات 8-10) ، حسب أيّها أبسط. بما أنّ عزم الدوران هو حاصل ضرب مسافةٍ في قوّة، لذا فإنّه يُقاس بوحدات m•N في النظام الدولي* cm.dyne, SI في نظام cgs و ft.1b في النظام الإنجليزي.

* لاحظ أنّ وحدات عزم الدوران نفسها وحدات الطاقة. نكتب وحدات العزم m.N لتمييزها عن وحدات الطاقة m•N؛ لأنّ الكميتين مختلفتان كثيرًا. هناك فرقٌ واضح، وهو أنّ الطاقة كميّة قياسيّة، ولكنّ عزم الدوران كميّةٌ متجهة. الاسم الخاص "جول" (1 J= 1N.m) يُستعمل فقط للطاقة (وللشغل)، ولكن ليس للعزم أبدًا.

المثال 8-8 عزم دوران العضلة ذات الرأسين

تؤثّر العضلة ذات الرأسين بقوّةٍ في الذراع السفلي، المنثني في (الشكل 8-14أ، ب). احسب عزم الدوران حول محور الدوران خلال مفصل الكوع في الحالتين، بفرض أنّ العضلة مثبتةٌ على بعد 5.0 cm من الكوع كما هوّ مبين.

النهج: القوّة معطاةٌ. وكذلك ذراع القوّة في (أ) مُعطى أيضًا. في (ب) علينا أن نأخذ بالحسبان الزاوية للحصول على ذراع القوّة.

الحل: (أ) $F = 700\ \text{N}$ و $r_\perp = 0.050\ \text{m}$، لذلك

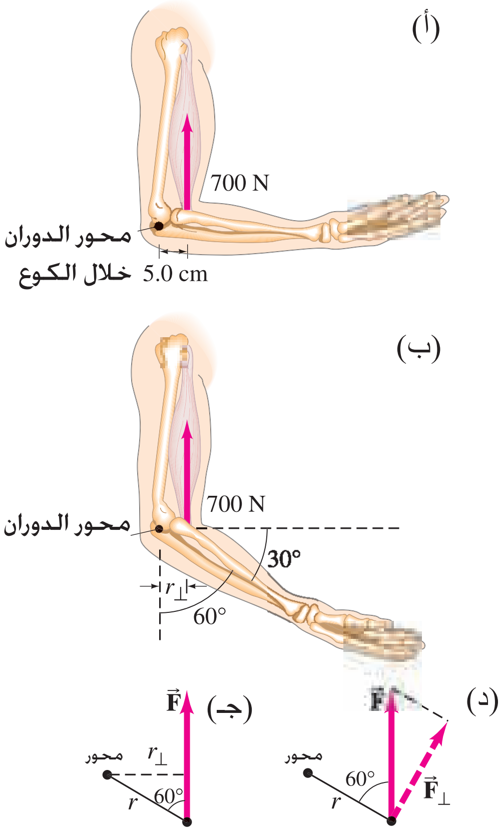
$$\tau = r_\perp F = (0.050\ \text{m})(700\ \text{N}) = 35\ \text{m}\cdot\text{N}$$

(ب) بما أنّ الذراع يصنع زاوية تحت الأفق، فإنّ ذراع القوّة أقصر (الشكل 8-14جـ) من الذراع في الجزء (أ): $r_\perp = (0.050\ \text{m})(\sin 60°)$ حيث $\theta = 60°$ هـو الزاوية بـين $\vec{\mathbf{F}}$ و F. r. لا زالت 700 N لذلك

$$\tau = (0.050\ \text{m})(0.866)(700\ \text{N}) = 30\ \text{m}\cdot\text{N}$$

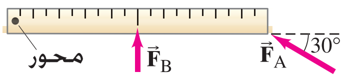
يستطيع الذراع التأثير بعزم دورانٍ أقلّ عند هذه الزاوية منه عندما تكون الزاوية $90°$. ولهذا فإنّ آلات الوزن في صالات الرياضة تصمّم عادةً لتأخذ هذا التغيّر بالحسبان.

ملحوظة: في (ب) يمكننا بدلًا من ذلك استعمال $\tau = rF_\perp$. كما هو مبيّن في (الشكل 8-14د)، $F_\perp = F \sin 60°$. لذلك $\tau = rF_\perp = rF\sin\theta = (0.050\ \text{m})(700\ \text{N})(0.866)$ لتعطي النتيجة نفسها.



الشكل 14-8 (التمرين 8-8)

التمرين ب: قوتان ($F_B = 20\ \text{N}$ و $F_A = 30\ \text{N}$) تؤثّران في مسطرةٍ متريّةٍ يمكنها الدوران حول نهايتها اليسرى، (الشكل 8-15) . القوّة $\vec{\mathbf{F}}_B$ تؤثّر عموديًّا عند المنتصف. أيّ القوّتين تولّد عزم دورانٍ أكبر؟



الشكل 15-8 التمرين ب

عندما يؤثّر في الجسم أكثر من عزم دورانٍ واحد، فإنّ التسارع الزاوي α يتناسب مع عزم الدوران المحصّل. إذا كانت كلّ عزوم الدوران تؤدّي بالجسم إلى أن يدور بالاتجاه نفسه حول محور ودوران ثابتين، فإن عزم الدوران المحصّل هو مجموع هذه العزوم. ولكن لو كان هناك عزمٌ يعمل على إدارة الجسم باتجاه، في حين يعمل عزمٌ آخر على إدارته بالاتجاه المعاكس كما في (الشكل 8-16) فإنّ العزم المحصّل يكون الفرق بين العزمين. ونستعمل عادةً إشارةً موجبةً للعزم الذي يدير الجسم بعكس اتجاه عقارب الساعة، وإشارة سالبة للعزوم التي تعمل لتدير الجسم مع اتجاه عقارب الساعة.

المثال 9-8 عزم دوران عجلة مركبة

دولابان رقيقان بشكل قرصين، نصفا قطريهما $r_A = 30\ \text{cm}$، و $r_B = 50\ \text{cm}$ ثُبّتا معًا على محورٍ يمرُّ من منتصفهما كما في (الشكل 8-16) .

احسب عزم الدوران المحصل على هذا الدولاب المركب الناتج من القوّتين المبيّنتين، مقدار كلٍّ منهما 50 N.

النهج: تعمل القوّة $\vec{\mathbf{F}}_A$ على إدارة النظام بعكس اتجاه عقارب الساعة، ولكن القوّة $\vec{\mathbf{F}}_B$ تعمل على إدارته مع اتجاه عقارب الساعة، أي أنّ القوتين تعملان باتجاهين متعاكسين. علينا أن نختار اتجاهًا موجبًا، ولنفرض أنّه عكس اتجاه عقارب الساعة. في هذه الحالة تنتج $\vec{\mathbf{F}}_A$ عزم دورانٍ موجب، $\tau_A = r_A F_A$؛ لأنّ ذراع القوّة هو r_A. $\vec{\mathbf{F}}_B$، وبالمقابل تنتج عزم دورانٍ سالب (مع اتجاه عقارب الساعة) ولا يؤثّر عموديًّا في r_B، لذلك علينا استعمال مركبتها العموديّة لحساب ما تنتجه من عزم: $\tau_B = -r_B F_{B\perp} = -r_B F_B \sin\theta$، حيث $\theta = 60°$.

(لاحظ أنّ θ يجب أن تكون الزاوية بين $\vec{\mathbf{F}}_B$ وخطٍّ قطريٍّ من المحور).

الحل: عزم الدوران المحصّل هو

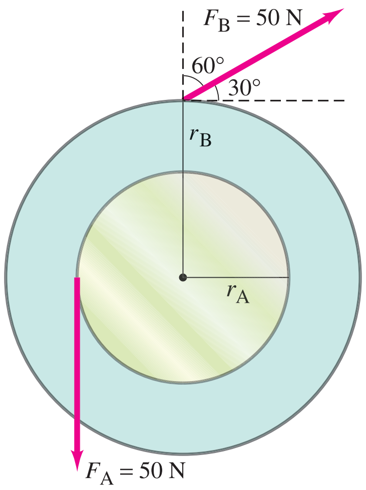
$$\tau = r_A F_A - r_B F_B \sin 60°$$
$$= (0.30\ \text{m})(50\ \text{N}) - (0.50\ \text{m})(50\ \text{N})(0.866) = -6.7\ \text{m}\cdot\text{N}$$

هذا العزم المحصّل يعمل على تسارع دوران الدولاب باتجاه عقارب الساعة.

ملحوظة: للقوّتين المقدار نفسه ، لكنّهما تنتجان عزمًا محصّلًا، نظراً لاختلاف ذراعي قوتيهما.

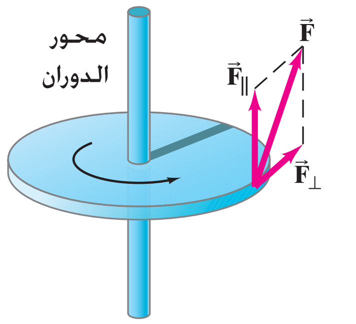
الشكل 16-8 (المثال 8-9).

عزم الدوران الناتج من $\vec{\mathbf{F}}_A$ يؤدي إلى تسارع الدولاب بعكس اتجاه عقارب الساعة أما العزم الناتج من $\vec{\mathbf{F}}_B$ فيؤدي إلى تسارع الدولاب مع اتجاه عقارب الساعة.



* القوى التي تعمل على إمالة المحور

نتناول هنا الدوران حول محورٍ ثابت، وهكذا نعتبر فقط القوى التي تؤثّر في مستوىً عموديٍّ على محور الدوران. فإذا كانت هناك قوّة (أو مركبة قوّة) تعمل موازيةً لمحور الدوران، فإنّها سوف تؤدّي إلى إمالة محور الدوران-المركبة $\vec{\mathbf{F}}_{\parallel}$ في (الشكل 8-17) كمثال على ذلك. وبما أنّنا نفرض أنّ اتّجاه المحور يبقى ثابتًا، فإمّا أن لا يكون هناك مثل هذه القوى، أو أنّ المحور سيكون مبنيًا على وسادةٍ أو مَفْصِلٍ تبقي المحور ثابتًا. وهكذا فإنّ قوّة، أو مركبة قوّة ($\vec{\mathbf{F}}_{\perp}$ في الشكل 8-17)، في مستوىً عموديٍّ على المحور ستؤدّي إلى الدوران، وهذه فقط هي التي نأخذها في الحسبان.



الشكل 8-17: مركبة $\vec{\mathbf{F}}$ فقط هي التي تعمل على المستوى العموديّ على محور الدوران، وتعمل $\vec{\mathbf{F}}_{\perp}$، على إدارة الدولاب حول المحور. أمّا المركبة الموازية للمحور $\vec{\mathbf{F}}_{\parallel}$ فستؤدّي إلى حركة المحور نفسه، الذي نفرض أن يكون مثبتًا.

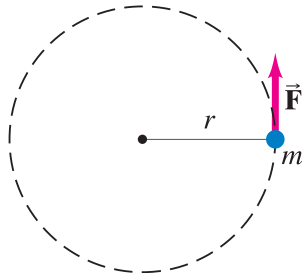
5-8 ديناميكا الدوران؛ عزم الدوران والقصور الدورانيّ

لقد ناقشنا أنّ التسارع الزاوي α لجسمٍ يدور يتناسب مع العزم المحصل τ المؤثّر فيه:

$$\alpha \propto \Sigma\tau$$

حيث نكتب $\Sigma\tau$ لنتذكّر أنَّ عزم الدوران المحَصَّل* (مجموع كلّ عزوم الدوران المؤثّرة في الجسم) هو الذي يتناسب مع α. وهذا يناظر قانون نيوتن الثاني في الحركة الانتقاليّة $a \propto \Sigma F$، ولكن هنا حلّ عزم الدوران مكان القوّة، وبالمقابل التسارع الزاوي α يأخذ مكان التسارع الخطّيّ a. في الحالة الخطيّة، فإنّ التسارع لا يتناسب مع القوّة المحصّلة فقط، بل إنّه يتناسب عكسيًّا مع قصور الجسم، الذي ندعوه بالكتلة m. وهكذا نستطيع كتابة $a = \Sigma F/m$. ولكن ما الذي يقوم بدور الكتلة في حالة الدوران؟ هذا ما سوف نشرع في تحديده. وفي الوقت نفسه، سنرى أنّ العلاقة $\alpha \propto \Sigma\tau$ تتبع مباشرة قانون نيوتن الثاني، $\Sigma F = ma$. نفترض أولًا حالةً بسيطةً جدًا: جُسيمٌ كتلته m يدور في دائرةٍ نصف قطرها r في نهاية خيطٍ أو قضيب، يمكن أن نهمل كتلته بالمقارنة مع m (الشكل 8-18)، وسنفرض قوّةً مفردة F تؤثّر في m كما هو مبيّن. العزم الذي يؤدّي إلى التسارع الزاوي هو $\tau = rF$. وإذا استخدمنا قانون نيوتن الثاني للكميّات الخطيّة، $\Sigma F = ma$، و (المعادلة 8-5) التي تربط التسارع الزاوي بالتسارع الخطّيّ المماسي، $a_{\tan} = r\alpha$ فإنّنا نحصل على

$$F = ma$$
$$= mr\alpha$$



الشكل 8-18: كتلة m تدور في دائرة نصف قطرها r حول نقطة ثابتة.

وعند ضرب طرفي هذه المعادلة في r، نجد أنَّ عزم الدوران $\tau = rF$ يعطى بـ

$$\tau = mr^2\alpha \qquad \text{[جسيم واحد]} \qquad \textbf{(8-11)}$$

وهنا أخيرًا لدينا علاقةٌ مباشرةٌ بين التسارع الزاوي وعزم الدوران المؤثر τ. الكمية mr^2 تمثّل القصور الدورانيَّ للجسيم وتعرف بـ **عزم القصور الذاتي**.

والآن، دعنا ندرس جسمًا جاسئًا يدور، مثل دولابٍ يدور حول محورٍ بمنتصفه. يمكن أن نفكّر في الدولاب بأنّه مكوّنٌ من عددٍ كبيرٍ من الجُسيمات على أبعادٍ متعدّدةٍ من محور الدوران. ويمكن تطبيق (المعادلة 8-11) لكلّ جُسيم، ثمّ نجمع على الجسيمات جميعها. مجموع عزوم الدوران المختلفة هو العزم المحصّل، $\Sigma\tau$، ولذلك نحصل على:

$$\Sigma\tau = (\Sigma mr^2)\alpha \qquad \textbf{(8-12)}$$

أخرجنا α عاملًا مشتركًا لأنّها متساوية للجسيمات جميعها.

والمجموع Σmr^2 يمثّل حاصل جمع الكتل للجسيمات جميعها مضروبةً في مربّع المسافة للجسيمات من محور الدوران.

* تذكَّر من خلال (الفصل 4)، أنَّ Σ (الحرف اليوناني سيجما) يعني "مجموع"

الدوران. إذا أشرنا إلى الجسيم برقم (...1,2,3)، عندها $\Sigma mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$

تُسمّى هذه الكميّة **بعزم القصور الذاتي** (أو القصور الدوراني) I للجسم:

$$I = \Sigma mr^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots \qquad \textbf{(13-8)}$$

عزم القصور الذاتي.

بدمج (المعادلتين 8-12 و 8-13)، يمكننا كتابة

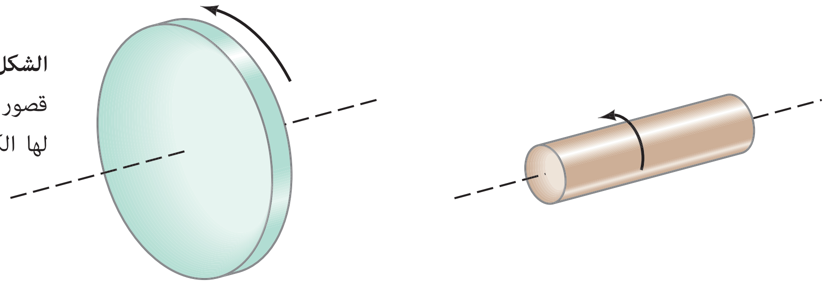
$$\Sigma \tau = I\alpha. \qquad \textbf{(14-8)}$$

قانون نيوتن الثاني في الدوران.

تذكّر من الفصل الرابع أنّ $\sum$ (حرفٌ يونانيٌّ سيجما) يعني "مجموع".

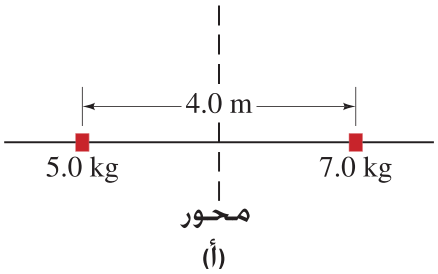
هذا هو المكافىء الدورانيُّ لقانون نيوتن الثاني. إنَّه ينطبق على دوران جسمٍ جاسيءٍ حول محورٍ ثابت*. نرى أنّ عزم القصور الذاتي، I، وهو مقياس للقصور الدوراني لجسم، يؤدّي الدور نفسه في الحركة الدورانيّة الذي تؤدّيه الكتلة في الحركة الانتقالية. وكما يمكن رؤيته من (المعادلة 8-13) ، يعتمد القصور الدوراني ليس على الكتلة فحَسْبُ، بل على كيفيَّة توزيع هذه الكتلة بالنسبة إلى المحور أيضًا. فمثلا أسطوانةٌ ذات قطرٍ كبيرٍ سيكون لها قصورٌ أكبر من أخرى مساوية في الكتلة، ولكن بقطرٍ أصغر (ومن ثَمَّ طول أكبر)، (الشكل 8-19)؛ فالأولى ستكون أصعب في البدء بالدوران، وكذلك أصعب عند الوقوف. عندما تتركّز الكتلة بعيدًا عن محور الدوران، فإنّ القصور الدورانيّ سيكون أكبر. و بالنسبة للحركة الدورانيّة، فإنّه لا يمكن اعتبار الكتلة كما لو أنّها مركّزةٌ في مركز الكتلة.

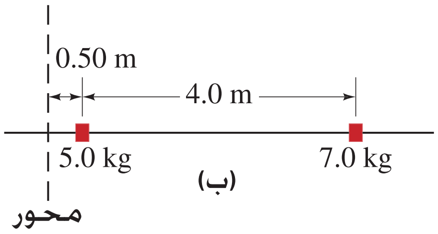
تنويه: لا يمكن اعتبار الكتلة مركزة في CM للحركة الدورانية.



الشكل 8-19: أسطوانة ذات قطر أكبر، يكون لها قصور دوراني أكبر من أخرى أصغر في القطر، لكن لها الكتلة نفسها.

الشكل 8-20: حساب عزم القصور الذاتي.





المثال 8-10 وزنان على قضيب: محور مختلف

وزنان صغيران كتلتاهما 5.0 kg و 7.0 kg مثبتان على بعد 4.0 m على قضيب خفيف (يمكن إهمال كتلته)، كما يبين (الشكل 8-20) . احسب عزم القصور الذاتي للنظام (أ) عندما يدور حول محور في منتصف المسافة بينهما، (الشكل 8-20أ) ، و (ب) عندما يدور حول محور على بعد 0.50 m إلى يسار كتلة 5.0-kg (الشكل 8-20ب).

النهج: في كل حالة، يحسب عزم القصور الذاتي بالجمع عند الجزأين باستعمال (المعادلة 8-13).

الحل: (أ) كلا الوزنين على بعد 2.0 m من محور الدوران. ومن ثَمَّ

$$I = \Sigma mr^2 = (5.0\,\text{kg})(2.0\,\text{m})^2 + (7.0\,\text{kg})(2.0\,\text{m})^2$$
$$= 20\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 28\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 = 48\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

(ب) الآن، الكتلة 5.0-kg على بعد 0.50 m من المحور، أمّا الكتلة 7.0-kg فعلى بعد 4.50 m من المحور وهكذا:

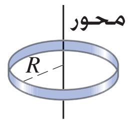
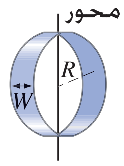
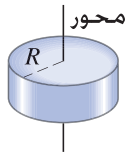
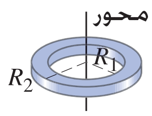
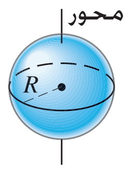
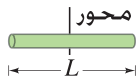
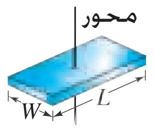
$$I = \Sigma mr^2 = (5.0\,\text{kg})(0.50\,\text{m})^2 + (7.0\,\text{kg})(4.5\,\text{m})^2$$
$$= 1.3\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 142\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 = 143\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

ملحوظة: يعرض هذا المثال نقطتين مهمَّتين.هما: 1 - عزم القصور الذاتي لنظامٍ معيّنٍ يختلف باختلاف محاور الدوران. 2 - نرى في الجزء (ب) أنّ مساهمة الكتلة القريبة من المحور تكون قليلةٌ في عزم القصور الذاتي، وهنا الكتلة 5.0-kg ساهمت بأقل من 1% من العزم الكلّي.

تنويه: I يعتمد على محور الدوران، وعلى توزيع الكتلة.

* (المعادلة 8-14) تنطبق أيضًا عندما ينتقل الجسم كذلك بتسارع. ما دام I و α يحسبان حول مركز كتلة الجسم. ومحور الدوران خلال مركز الكتلة لا يغيّر اتجاهه.

الشكل 8-21: عزم القصور الذاتي لأجسام مختلفة، تركيبها منتظم.

	الجسم	موضع المحور		عزم القصور
(أ)	**حلقة رقيقة نصف قطرها** R	خلال المركز		MR^2
(ب)	**حلقة رقيقة نصف قطرها** R وعرضها W	خلال القطر المركزي		$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}MW^2$
(جـ)	**أسطوانة مصمتة نصف** قطرها R	خلال المركز		$\frac{1}{2}MR^2$
(د)	**أسطوانه مجوّفة نصف قطرها** الداخلي R_1 ونصف قطرها الخارجي R_2	خلال المركز		$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
(هـ)	**كرة منتظمة نصف قطرها** R	خلال المركز		$\frac{2}{5}MR^2$
(و)	**قضيب طويل منتظم طوله** L	خلال المركز		$\frac{1}{12}ML^2$
(ي)	**قضيب طويل منتظم طوله** L	خلال النهاية		$\frac{1}{3}ML^2$
(ز)	**صفيحة مستطيلة رقيقة،** طولها L وعرضها W	خلال المركز		$\frac{1}{12}M(L^2 + W^2)$

تتوزّع الكتلة لمعظم الأجسام العاديّة بصورةٍ متصلة، وحساب عزم القصور الدوراني، Σmr^2، يكون صعبًا. وعلى أيّ حال، يمكن الوصول إلى صيغ عزم القصور الدوراني (باستخدام حساب التفاضل والتكامل) للأجسام المنتظمة بدلالة أبعاد الأجسام. (الشكل 8-21)يبيّن هذه الصيغ لبعض الأجسام الصلبة حول المحاور المحدّدة. الجسم الوحيد الذي تكون نتيجته مباشرةً وواضحةً هو الحلقة النحيفة حول محورٍ يمرُّ بمركزها وعموديٍّ على مستوى الحلقة (الشكل 8-21أ). لهذا الجسم الكتلة كلُّها مركّزةٌ على البعد نفسه من المحور، R. وهكذا $\Sigma mr^2 = (\Sigma m)R^2 = MR^2$ حيث M هي الكتلة الكليّة للحلقة (الطوق).

وإذا كان الحساب صعبًا، فيمكن إيجاد I بالتجربة، وذلك بقياس التسارع الزاوي α حول محورٍ ثابتٍ ناتجٍ من عزم دوران، $\Sigma\tau$، ومن ثم تطبيق قانون نيوتن الثاني $I = \Sigma\tau/\alpha$، (المعادلة 8-14).

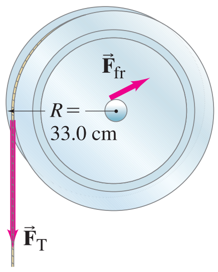
8-6 حل المسائل في الديناميكا الدورانية

عند التعامل مع عزم الدوران والتسارع الزاوي (المعادلة 8-14)، من المهمّ استعمال نظام وحداتٍ منسجم، وفي النظام الدولي SI فإن α بـrad/s^2؛ τ بـ $\text{m}\cdot\text{N}$، وعزم القصور، I، بـ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

طريقة حل المسائل	الحركة الدورانية

1. كما في العادة، **ارسم مخططًا** واضحًا وكاملًا.
2. اختر الجسم أو الأجسام التي ستكون النظام المراد دراسته.
3. ارسم **مخطط الجسم الحر** للجسم قيد الدراسة (أو لكل جسم إذا كان هناك أكثر من واحد) مبينًا (جميع) القوى المؤثرة في الجسم فقط وأين تؤثر بالضبط، ومن ثَمَّ يمكنك تحديد عزم الدوران لكلٍّ منها. قوّة الجاذبيّة تؤثر في مركز الجذب CG للجسم (البند 7-8).
4. ميّز محور الدوران، وحدّد عزم الدوران حوله. اختر اتجاهات موجبة وسالبة (عكس اتجاه عقارب الساعة ومع اتجاهها)، وضع الإشارة الصحيحة لكلِّ **عزم**.
5. طبّق **قانون نيوتن الثاني في الدوران**، $\Sigma\tau = I\alpha$. إذا لم يكن عزم القصور الذاتي مُعطًى، وليس هو المجهول المراد معرفته، فعليك تحديده أولاً. استعمل وحدات متناسقة، وهي في SI:
$\alpha\,\text{rad/s}^2; \tau\,\text{m}\cdot\text{N}; \text{kg}\cdot\text{m}^2$
6. طبّق **قانون نيوتن الثاني** للانتقال أيضًا $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$، وقوانين **أخرى**، أو مبادىء حسب اللزوم.
7. حلّ المعادلات الناتجة لإيجاد المجاهيل.
8. اعمل **تقييمًا** تقريبيًا لتحديد معقولية الحل.

المثال 8-11 **بكرةٌ ثقيلةٌ** قوّة 15.0-N (تُمثَّل بالرمز $\vec{\mathbf{F}}_T$) تؤثّر في حبلٍ ملفوفٍ حول بكرةٍ كتلتها $M = 4.00$ kg ونصف قطرها $R = 33.0$ cm، (الشكل 8-22). تتسارع البكرة من السكون إلى سرعة زاوية 30.0 rad/s في 3.00 s. إذا كان هناك عزم دوران ناجٌ من الاحتكاك $\tau_{fr} = 1.10\,\text{m}\cdot\text{N}$ حول المحور، حدد عزم القصور الذاتي للبكرة، إذا علمت أنّ البكرة تدور حول مركزها.



الشكل **8-22** (المثال 8-11).

النهج: نتّبع خطوات صندوق حلّ المسائل بصورةٍ صريحة.

الحل:

1. ارسم مخطّطًا. البكرة والحبل المثبت مبيّنةٌ في (الشكل 8-22).
2. اختر النظام: البكرة
3. ارسم مخطّط الجسم الحر. القوّة التي يولّدها الحبل على البكرة مبيّنة $\vec{\mathbf{F}}_T$ في (الشكل 8-22). قوّة الاحتكاك واضحة أيضًا، ولكنّنا أُعطينا عزمها فقط. وقوتان أخريان يمكن وضعهما ضمن المخطط: قوة الجاذبية mg للأسفل وأيّ قوة $\vec{\mathbf{F}}_T$ تعمل على تثبيت المحور في مكانه. هاتان القوتان لا تساهمان في العزم (ذراعهما يساوي صفرًا) ولذلك فهما ليستا مبيّنتان في الرسم.
4. حدّد العزوم الدورانيّة. يؤثّر الحبل بقوّة $\vec{\mathbf{F}}_T$ تعمل على حافّة البكرة، لذلك يكون ذراع عزمها R. العزم الناتج من الحبل RF_T بعكس اتجاه عقارب الساعة؛ حيث اخترناه ليكون موجبًا. عزم الاحتكاك مُعطًى $\tau_{fr} = 1.10\,\text{m}\cdot\text{N}$; ويعاكس الحركة وهو سالب.
5. طبّق قانون نيوتن الثاني في الدوران. العزم المحصل هو

$$\begin{aligned}\Sigma\tau &= RF_T - \tau_{fr}\\ &= (0.330\,\text{m})(15.0\,\text{N}) - 1.10\,\text{m}\cdot\text{N} = 3.85\,\text{m}\cdot\text{N}\end{aligned}$$

التسارع الزاوي يوجد من البيانات المعطاة حيث يستغرق تسارع البكرة 3.0 s من السكون إلى السرعة الزاوية $\omega = 30.0\,\text{rad/s}$:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{30.0\,\text{rad/s} - 0}{3.00\,\text{s}} = 10.0\,\text{rad/s}^2$$

نستطيع الآن أن نحل لإيجاد I بقانون نيوتن الثاني (الخطوة 7).
6. حسابات أخرى: لسنا بحاجة إليها.
7. الحل لإيجاد المجاهيل. نحل لإيجاد I باستعمال قانون نيوتن الثاني في الدوران، $\Sigma\tau = I\alpha$

$$I = \frac{\Sigma\tau}{\alpha} = \frac{3.85\,\text{m}\cdot\text{N}}{10.0\,\text{rad/s}^2} = 0.385\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

8. اعمل تقديرًا تقريبيًّا. يمكن حساب عزم القصور الذاتي بالتقريب بفرض أن البكرة أسطوانة منتظمة، وباستعمال (الشكل 8-21جـ).

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 = \tfrac{1}{2}(4.00\,\text{kg})(0.330\,\text{m})^2 = 0.218\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

فائدة وقدرة الحسابات التقديرية

هذه القيمة. برتبة النتيجة نفسها التي توصّلنا إليها، ولكنّها أقلّ عدديًّا. هذا بفرض أن البكرة ليست أسطوانة منتظمة، بل معظم كتلتها مركّز نحو الحافّة الخارجية. مثل هذه البكرة يتوقّع أن يكون عزمها القصوري أكبر من أسطوانةٍ منتظمةٍ مُصمتةٍ لها الكتلة نفسها ، طوقًا رقيقًا، (الشكل 8-21 أ) ، له عزم قصورٍ دورانيٍّ أكبر من بكرتنا، وفي الواقع $I = MR^2 = 0.436$ kg.m^2.

مثال إضافي – ذو تحدٍّ أكبر.

المثال 8-12 **البكرة والدلو.**

افترض مّرةً أخرى البكرة في (الشكل 8 - 22 والمثال 8 - 11) . ولكن هذه المرّة،بدلًا من قوّة ثابتة 15.0-N تؤثّر في الحبل، لدينا الآن دلوٌ وزنه $w = 15.0\,\text{N}$ $(m = w/g = 1.53\,\text{kg})$ معلّق بالحبل. انظر (الشكل 8 - 23أ) . نفرض أنّ الحبل مهمل الكتلة، ولا يُمطّ أو ينزلق على البكرة. احسب التسارع الزاوي α للبكرة والتسارع الخطّيّ a للدلو.

النهج: هذا الوضع يشبه إلى حدٍّ ما (المثال 8 - 11، الشكل 8 - 22) . لكنّ هناك فرقٌ كبير: الشدّ في الحبل الآن غير معروف، ولم يعد يساوي وزن الدلو إذا تسارع الدلو. نظامنا له جزءان: الدلو الذي يستطيع عمل حركةٍ انتقاليّة (الشكل 8-23ب هو مخطط الجسم الحر)؛ والبكرة لا تنتقل من مكانها، ولكنّها تدور. نطبّق الصيغة الدورانيّة لقانون نيوتن الثاني على البكرة، $\Sigma\tau = I\alpha$، والصيغة الخطيّة على الدلو، $\Sigma F = ma$.

الحل: لتكن F_T الشدّ في الحبل، ومن ثَمّ فإنّ قوّة F_T تعمل عند حافّة البكرة ، نطبّق قانون نيوتن الثاني، (المعادلة 8 - 14) ، لدوران البكرة:

$$I\alpha = \Sigma\tau = RF_\text{T} - \tau_\text{fr} \qquad \text{[البكرة]}$$

ثم ننظر إلى الحركة (الخطيّة) للدلو ذي الكتلة m.. مخطط الجسم الحر للدلو، يبين أن هناك قوتين تؤثران في الدلو: قوّة الجاذبية mg تؤثّر للأسفل، والشدّ في الحبل F_T يسحب للأعلى. نطبّق قانون نيوتن الثاني، $\Sigma F = ma$، للدلو، فنحصل على (آخذين الاتجاه نحو الأسفل موجبًا):

$$mg - F_\text{T} = ma \qquad \text{[الدلو]}$$

لاحظ أنّ الشدّ F_T وهو القوّة المؤثّرة في حافّة البكرة، لا يساوي وزن الدلو $(= mg = 15.0\,\text{N})$. لا بدَّ من وجود قوّة محصّلة على الدلو إذا كان متسارعًا، وهكذا $F_\text{T} < mg$. ونرى ذلك من المعادلة الأخيرة $F_\text{T} = mg - ma$.

للحصول على α: نلاحظ أنّ التسارع المماسيَّ لنقطةٍ على حافّة البكرة هو التسارع نفسه للدلو إذا لم يُمطّ الحبل أو ينزلق. ومن ثَمّ نستطيع استعمال (المعادلة 8-5) ، $a_\text{tan} = a = R\alpha$ بتعويض $F_\text{T} = mg - ma = mg - mR\alpha$ في المعادلة الأولى (قانون نيوتن الثاني لدوران البكرة)، نحصل على

$$I\alpha = \Sigma\tau = RF_\text{T} - \tau_\text{fr} = R(mg - mR\alpha) - \tau_\text{fr} = mgR - mR^2\alpha - \tau_\text{fr}$$

تظهر في الحدّ الثاني على اليمين، نأخذ هذا الحدّ إلى الجانب الأيسر، ونحل لإيجاد α:

$$\alpha = \frac{mgR - \tau_\text{fr}}{I + mR^2}$$

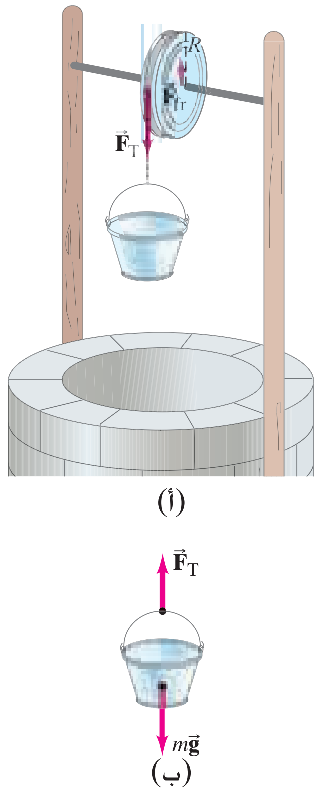
يشير البسط $(mgR - \tau_\text{fr})$ إلى عزم الدوران المحصل، أمّا المقام $(I + mR^2)$ فيشير إلى عزم القصور الدورانيّ للنظام. وهكذا بما أنّ $I = 0.385\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ و $m = 1.53\,\text{kg}$، و $\tau_\text{fr} = 1.10\,\text{m}\cdot\text{N}$ (من المثال 8-11)،

$$\alpha = \frac{(15.0\,\text{N})(0.330\,\text{m}) - 1.10\,\text{m}\cdot\text{N}}{0.385\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + (1.53\,\text{kg})(0.330\,\text{m})^2} = 6.98\,\text{rad/s}^2$$

التسارع الزاوي هنا أقل من $10.0\,\text{rad/s}^2$ في (المثال 8 - 11).؟ لأن $F_\text{T}\ (= mg - ma)$ أقل من 15.0-N وزن الدلو، mg. التسارع الخطّيّ للدلو هو

$$a = R\alpha = (0.330\,\text{m})(6.98\,\text{rad/s}^2) = 2.30\,\text{m/s}^2$$

ملحوظة: الشدّ في الحبل F_T أقلّ من mg؛ لأن الدلو يتسارع.



الشكل 8-23 (المثال 8-12) .
(أ) البكرة والدلو الساقط كتلته m.
(ب) مخططات الجسم الحر للدلو.

8-7 الطاقة الحركية الدورانية

إنّ الكمية $\frac{1}{2}mv^2$ هي الطاقة الحركيّة لجسمٍ يخضع لحركة انتقاليّة. والجسم الذي يدور حول محورٍ ما يُقال إنّ له **طاقةٌ حركيّةٌ دورانيّة**. بمقابلة الطاقة الحركيّة الانتقاليّة، نتوقع أنّ الطاقة الدورانيّة تُعطى بالعلاقة $\frac{1}{2}I\omega^2$، حيث I عزم القصور الذاتي للجسم، و ω سرعته الزاوية. ومن المؤكد إثبات صحة هذا.

افترض أنّ أيّ جسمٍ يدور كأنّه مكوّنٌ من جسيماتٍ دقيقةٍ كثيرة، كتلة كلٍّ منها m. إذا فرضنا أنّ r تمثّل المسافة لكلّ جسيمٍ عن محور الدوران، فإنّ سرعته الخطيّة تكون $v = r\omega$. الطاقة الحركيّة الكليّة للجسم كلّه هي مجموع الطاقات الحركيّة للجسيمات جميعها.

$$\text{KE} = \Sigma(\tfrac{1}{2}mv^2) = \Sigma(\tfrac{1}{2}mr^2\omega^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma(mr^2)\omega^2$$

أخذنا $\frac{1}{2}$ و ω^2 خارجًا لأنّهما ثابتان للجسيمات جميعها في الجسم الجاسئ. بما أنّ $\Sigma mr^2 = I$، عزم القصور الدوراني، نرى أنّ الطاقة الحركيّة لجسمٍ جاسئٍ يدور كما نتوقّع

عزم القصور الذاتي.

$$\text{KE}_{\text{دورانيّة}} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \textbf{(15-8)}$$

الوحدات هي جول (joule) كما في أنواع الطاقة كلّها.

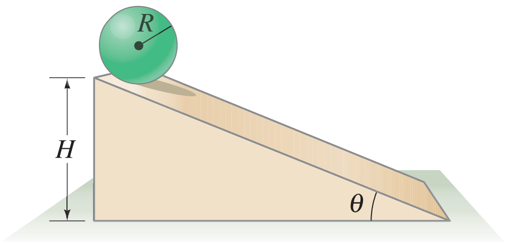
الجسم الذي يدور في حال مركز كتلته (CM) يعمل حركة انتقاليّة، سيكون له طاقةٌ حركيّةٌ وأخرى دورانيّة.

(المعادلة 8-15)تعطي الطاقة الحركيّة الدورانيّة إذا كان محور الدوران ثابتًا. وإذا كان الجسم متحركًا (مثل دولاب يتدحرج نحو أسفل تلّة) فإنّ هذه المعادلة لا زالت تنطبق ما دام محور الدوران ثابتًا من حيث الاتجاه. الطاقة الحركيّة الكليّة هي:

الطاقة الكلية KE (انتقالية + دورانية)

$$\text{KE} = \tfrac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\,\omega^2 \qquad \textbf{(16-8)}$$

حيث v_{CM} هي السرعة الخطيّة لمركز الكتلة، أمّا I_{CM} فهو عزم القصور حول محورٍ يمرّ بمركز الكتلة، وω هي السرعة الزاوية حول هذا المحور، في حين تشير M إلى الكتلة الكليّة للجسم.



الشكل 8-24: كرة تتدحرج إلى أسفل منحدر لها طاقتين؛ انتقالية ودورانية. (المثال 8-13).

المثال 8-13 كرةٌ تتدحرج إلى أسفل منحدر (سطح مائل)

ماذا ستكون سرعة كرةٍ مصمتةٍ كتلتها M ونصف قطرها R عندما تصل إلى قاعدة سطح مائل، حيث تبدأ من السكون من على ارتفاع رأسي H وتتدحرج من غير انزلاق؟ (انظر الشكل 8-24) . (افرض أنّ هناك قدرًا من الاحتكاك السكوني، الذي لا يعمل شغلًا، ولذلك لا يحدث انزلاق.) قارن النتيجة مع تلك التي لجسم ينزلق أسفل منحدرٍ عديم الاحتكاك.

النهج: نستعمل قانون حفظ الطاقة مع طاقة وضع الجاذبيّة؛ لأنّها تتضمّن طاقةً حركيّةً دورانيّةً بالإضافة إلى الطاقة الحركيّة الانتقاليّة.

الحل: الطاقة الكليّة عند أيّ نقطةٍ على ارتفاع y فوق قاعدة السطح المائل هي

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\,\omega^2 + Mgy$$

حل المسألة:
يتم إضافة طاقة الحركة الدورانية إلى الأشكال الأخرى للطاقة للحصول على الطاقة الكلية والتي تكون محفوظة.

حيث v هي سرعة مركز الكتلة، و Mgy هي طاقة وضع الجاذبيّة. وبتطبيق قانون حفظ الطاقة، نساوي الطاقة الكليّة عند القمّة $(y = H, v = 0, \omega = 0)$ بالطاقة الكليّة عند القاعدة $(y = 0)$:

$$0 + 0 + MgH = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + 0$$

عزم القصور الذاتيّ لكرةٍ مصمتةٍ حول محورٍ يمرّ بمركزها هو $I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2$، (الشكل 8-12ي) . بما أنّ الكرة تتدحرج من غير انزلاق، فإنّ لدينا $\omega = v/R$ (تذكر الشكل 8-8). ومن ثَمَّ

$$MgH = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

وباختصار M و R نجد أن

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}\right)v^2 = gH$$

أو

$$v = \sqrt{\tfrac{10}{7}gH}$$

يمكن مقارنة هذه النتيجة، كرةٌ تتدحرج بتلك السرعة لجسمٍ ينزلق على منحدرٍ من غير دوران أو احتكاك. $\frac{1}{2}mv^2 = mgH$ (انظر نتيجتنا فوق بإزالة حدّ الدوران). ومن ثَمَّ $v = \sqrt{2gH}$، وهي أكبر من نتيجتنا السابقة. الجسم الذي ينزلق على سطحٍ دون دورانٍ أو احتكاكٍ يحوّل طاقة الوضع كلّها إلى طاقةٍ حركيةٍ انتقاليّة (لا شيء يُحوّل إلى طاقة حركية دورانية). لذا، تكون سرعة مركز كتلته أكبر.

ملحوظة: نتيجتنا للكرة المتدحرجة تبين (ربما مستغربًا) أنّ السرعة v لا تعتمد على الكتلة M أو نصف القطر R للكرة.

المثال المفاهيمي 14-8 من الأسرع؟

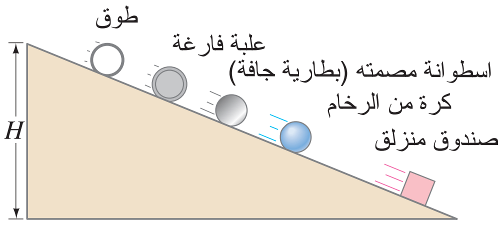
أجسامٌ متعدّدةٌ تتدحرج من غير انزلاق أسفلَ سطحٍ مائل من على ارتفاع H، تبدأ كلّها من السكون وفي اللحظة نفسها. الأجسام هي طوقٌ رقيق، قطعة رخام كرويّة، أسطوانة مُصمتة (بطاريّة خليّة D –) علبة صابون فارغة. بالإضافة إلى صندوقٍ ينزلق من غير احتكاك. بأيّ ترتيب تصل الأجسام إلى قاعدة السطح المائل؟

الحل: الصندوق المنزلق يكسب السباق؛ لأنّ النقصان في طاقة الوضع (MgH) يتحوّل كاملًا إلى طاقةٍ حركيّةٍ انتقاليّة KE للصنوق، ولكن للأجسام المتدحرجة، فإنّ طاقة الوضع PE الابتدائيّة تقسم بين طاقةٍ حركيةٍ انتقاليّةٍ وأخرى دورانيّة، ولذلك تكون سرعتها الخطّية أقل. ولكلّ جسمٍ متدحرج، يمكننا أن نقول إنّ النقص في طاقة الوضع يساوي الزيادة في الطاقة الحركيّة:

$$MgH = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

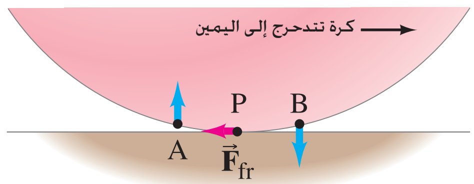
إنّ لكلّ هذه الأجسام المتدحرجة، عزم القصور الدوراني I_{CM}، وهو معاملٌ عدديٌّ مضروبٌ في الكتلة M ومربّع نصف القطر R^2 (الشكل 8-21). الكتلة M موجودةٌ في كلّ حد، ولذلك فإنّ السرعة الخطيّة N لا تعتمد على الكتلة M، ولا تعتمد على نصف القطر R لأن $\omega = v/R$، ولهذا R^2 تختصر للأجسام المتدحرجة جميعها، كما في (المثال 8-13). وهكذا تعتمد السرعة عند قاعدة المنحدر على المعامل I_{CM} الذي يعبر عن كيفيّة توزيع الكتلة. الطوق الذي تتوزّع كتلته كلّها عند بعدٍ يساوي نصف القطر R $(I_{CM} = MR^2)$، له أكبر عزمٍ قصوري، فسوف يكون له أقلّ سرعة، وسوف يصل بعد البطارية-D $(I_{CM} = \tfrac{1}{2}MR^2)$، التي ستكون بعد قطعة الرخام الكرويّة $(I_{CM} = \tfrac{2}{5}MR^2)$. العلبة الفارغة، وهي طوقٌ وقرصٌ صغير، معظم كتلتها مركّز عند نصف القطر R، ولذلك ستكون أسرع قليلًا من الطوق، ولكنّها أبطأ من البطاريّة D. (انظر الشكل 8-25) .

ملحوظة: كما في (المثال 8-13)، السرعة أسفل المنحدر لا تعتمد على كتلة الجسم M أو نصف القطر R، وإنّما تعتمد على شكل الجسم فقط (وارتفاع المنحدر H).



الشكل 8-25: المثال 8-14

الشكل 8-26: كرة تتدحرج إلى اليمين على سطح مستو. نقطة التماس مع الأرض عند أي لحظة، P، لحظيا ساكنة. نقطة A إلى يسار P تتحرك تقريبا رأسيا نحو الأعلى في اللحظة المبينة، أما النقطة B إلى اليمين فتتحرك رأسيا نحو الأسفل تقريبا. بعد لحظة ستمس النقطة B المستوى وتصبح ساكنة لحظياً. وهكذا لا يعمل شغل بواسطة قوة الاحتكاك السكوني.

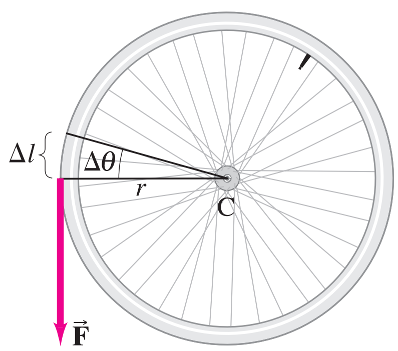


تنويه: تتحرك الأجسام المتدحرجة أبطأ من المنزلقة بسبب الطاقة الحركية الدورانية وليس الاحتكاك.

لو كان هناك بعض الاحتكاك السكوني بين الأجسام المتدحرجة والمستوى في هذه الأمثلة، لكانت الأجسام المستديرة ستنزلق بدلاً من التدحرج، أو لكانت ستنزلق وتتدحرج معًا. لا بدّ من وجود الاحتكاك السكونيّ لجعل الجسم المستدير يتدحرج. لا توجد حاجةٌ لأخذ الاحتكاك بالحسبان عند حساب الطاقة؛ لأنّه احتكاكٌ سكونيٌّ ولا يعمل شغلاً-نقطة تماسّ الكرة في كلّ لحظةٍ لا تنزلق، ولكنّها تتحرّك عموديًّا على المستوى (أولًا للأسفل، ومن ثمّ نحو الأعلى كما هو مبيّن في الشكل 8-26) عند تدحرج الكرة. لهذا، لا يعمل شغلاً من قبل الاحتكاك السكوني؛ لأنّ القوّة وكذلك الإزاحة عموديتان. إنّ سبب بطء الأجسام المتدحرجة في (المثالين 8-13 و8-14) عن الأجسام المنزلقة ليس لأنّ الاحتكاك يعمل شغلا، بل لأنّ بعض طاقة الوضع PE تتحوّل إلى طاقةٍ حركيّةٍ دورانيّة تاركًا مقدارًا أقلّ للطاقة الحركيّة الانتقاليّة.

الشغل المبذول من عزم الدوران

الشغل المبذول على جسمٍ يدور حول محورٍ ثابت، مثل البكرات في (الشكل 8-22 والشكل 8-23) ، يمكن كتابته بدلالة الكميات الزاوية. كما هو مبيّن في (الشكل 8-27) ، القوة F تولّد عزمًا $\tau = rF$ على دولاب تبذل شغلا $W = F\Delta l$ في إدارة الدولاب مسافةً صغيرة Δl عند نقطة تأثير القوّة $\vec{F}$.



الشكل 8-27: عزم الدوران $\tau = rF$ ينتج شغلا عند إدارة دولاب $W = F\Delta l = Fr\Delta\theta = \tau\Delta\theta$

الدولاب دار زاوية صغيرة $\Delta\theta = \Delta l/r$ (المعادلة 8-1).

أي

$$W = F\Delta l = Fr\Delta\theta$$

وبما أن $\tau = rF$، لذلك

الشغل المبذول من عزم الدوران

$$W = \tau\Delta\theta \quad \textbf{(17-8)}$$

هو الشغل المبذول من عزم الدوران τ عن دوران الدولاب خلال زاوية $\Delta\theta$. وأخيرًا القدرة P هي معدّل عمل الشغل:

$$P = W/\Delta t = \tau\Delta\theta/\Delta t = \tau\omega$$

8-8 الزخم الزاوي وحفظة

لاحظنا خلال هذا الفصل أنّه إذا استعملنا المتغيّرات الزاوية المناسبة، فإنّ معادلات الحركة الدورانيّة تشبه تلك التي في الحركة الانتقاليّة العاديّة. ورأينا في البند السابق، مثلًا، أنّ الطاقة الحركيّة الدورانيّة يمكن كتابتها $\frac{1}{2}I\omega^2$ وهي تشبه الطاقة الحركيّة الانتقاليّة $\frac{1}{2}mv^2$. وبصورةٍ مماثلة، الزخم الخطّيّ $p = mv$، له نظيرٌ دورانيٌّ يُدعى الزخم الزاوي، L. لجسمٍ يدور حول محورٍ ثابت يعرف بـ

الزخم الزاوي

$$L = I\omega \quad \textbf{(18-8)}$$

حيث I هو **عزم القصور الذاتي**، و ω هي السرعة الزاوية حول محور الدوران. الوحدات الدوليّة SI للزخم الزاوي L هي $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ وليس لها اسمٌ خاص.

رأينا في الفصل 7 (البند 7-1) أن قانون نيوتن الثاني ليس فقط $\Sigma F = ma$، بل أيضًا على نحوٍ عامٍّ بدلالة الزخم (المعادلة 7-2) $\Sigma F = \Delta p/\Delta t$، و بطريقةٍ مماثلةٍ مكافئ قانون نيوتن في الحركة الدورانية، الذي رأيناه في (المعادلة 8-14)يمكن كتابته $\Sigma\tau = I\alpha$، كذلك يمكن أن يُكتب بدلالة الزخم الزاوي:

قانون نيوتن للدوران

$$\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad \textbf{(19-8)}$$

حيث $\Sigma\tau$ هو العزم الكلّي، الذي يعمل لإدارة الجسم، ΔL التغيّر في الزخم الزاوي في فترةٍ زمنيّة Δt.

(المعادلة 8-14)، $\Sigma\tau = I\alpha$ هي حالةٌ خاصّةٌ من (المعادلة 8-19) عندما يكون عزم القصور الذاتيّ ثابتًا.

ويمكن رؤية ذلك كما يلي: إذا كان لجسمٍ سرعةٌ زاوية ω_0 عند $t = 0$، وسرعةٌ زاوية ω بعد فترةٍ زمنيةٍ Δt، عندها يكون التسارع الزاوي (المعادلة 8-3):

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t}$$

ثمّ من (المعادلة 8-19) ، لدينا

$$\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I\omega - I\omega_0}{\Delta t} = \frac{I(\omega - \omega_0)}{\Delta t} = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I\alpha$$

وهي (المعادلة 8-14).

الزخم الزاوي مفهومٌ مهمٌّ في الفيزياء؛ لأنّه تحت ظروفٍ معيّنة، يكون كميّةً محفوظة. ويمكن أن نرى من (المعادلة 8-19) أنّه إذا كان العزم الكلّي $\Sigma\tau$ على جسمٍ يساوي صفرًا، ومن ثَمَّ $\Delta L/\Delta t = 0$. أي أن L لا يتغيّر. هذا هو **قانون حفظ الزخم الزاوي** لجسمٍ يدور.

حفظ الزخم الزاوي

الزخم الزاوي الكلّي لجسمٍ يدور يبقى ثابتًا إذا كان العزم الكلّي المؤثّر فيه يساوي صفرًا.

يعدّ قانون حفظ الزخم الزاوي من أروع قوانين الحفظ في الفيزياء، بالإضافة إلى الطاقة والزخم الخطّي. إذا كان العزم الدورانيّ الكلّيّ المؤثّر في جسمٍ يساوي صفرًا، والجسم يدور حول محور ثابت، أو محورٍ يمرّ من مركز كتلة الجسم وله اتّجاه ثابت، فيمكننا كتابة

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{ثابت}$$

I_0 و ω_0 هما عزم القصور والسرعة الزاوية على الترتيب عند لحظةٍ زمنيّةٍ ابتدائيّة $(t = 0)$ و I ، ω هما قيمتاهما عند لحظةٍ لاحقة.

أجزاء الجسم يمكن أن تغيّر مواقعها نسبةً إلى بعضها بعضًا، لذا يتغيّر I، لكن عندما تتغيّر ω أيضًا للإبقاء على حاصل الضرب $I\omega$ ثابتًا.

وهناك ظواهر كثيرةٌ مهمّةٌ يمكن فهمها على أساس حفظ الزخم الزاوي. اعتبر متزلّجةً تعمل حركةً مغزليّة على أطراف زلّاجتها، (الشكل 8-28). إنّها تدور بسرعةٍ صغيرةٍ نسبيًّا عندما تكون ذراعاها ممتدتين، وعندما تضع ذراعيها بالقرب من جسمها، فإنّها تبدأ بالدوران فجأةً بسرعةٍ أكبر. ومن تعريف عزم القصور الذاتي، $I = \Sigma mr^2$، يبدو واضحًا عند جذبها ذراعيها قريبًا من محور دوران جسمها يقلّ عزم القصور I. وحيث إنّ الزخم الزاوي $I\omega$ يبقى ثابتًا (نهمل العزم القليل بسبب الاحتكاك)، إذا قلت I يجب على السرعة الزاوية ω أن تزيد. وإذا أَنقصت المتزلّجة عزم القصور إلى النصف، فإنّها ستدور بسرعةٍ زاويةٍ مُضاعفة.

التمرين جـ: عندما تسحب المتزلّجة ذراعيها قريبًا. "ينقص عزم قصورها، ولحفظ الزخم الزاوي تزيد سرعتها الزاوية. هل تزداد طاقة حركتها الدورانيّة أيضًا؟ وإذا كان كذلك، فمن أين أتت زيادة الطاقة هذه؟

مثال مشابه هو الغطّاس المبيّن في (الشكل 8-29) . إنّ الدفعة عندما تترك لوحة القفز تعطيها زخمًا زاويًا ابتدائيًّا حول مركز كتلتها. وعندما تلف نفسها في وضع القرفصاء، فإنّها تدور مرّةً أو اثنتين بسرعة.

ثمّ تمدّ نفسها ثانية، تزيد عزم قصورها لتتقلّص السرعة الزاوية لقيمةٍ صغيرة، وبعدها تغوص في الماء.

تغيّر عزم القصور من الوضع الممتد إلى وضع القرفصاء يكون بمعامل حوالي $3\frac{1}{2}$.

لاحظ أنّه لأجل حفظ الزخم الزاوي، يجب أن يكون عزم الدوران الكلّيّ صفرًا، ولكنّ القوّة المحصّلة لا تساوي صفرًا بالضرورة. القوّة المحصّلة على الغطّاس (الشكل 8-29) ليست صفرًا (قوّة الجاذبيّة تؤثّر)، أمّا العزم المحصّل فيساوي صفرًا؛ لأنّ قوّة الجاذبيّة تؤثّر في مركز الكتلة.

المثال 8-15 جسم يدور في نهاية خيط متغيّر الطول كتلةٌ صغيرة m مثبتةٌ في نهاية خيط تدور في دائرةٍ على سطح منضدةٍ عديمة الاحتكاك. يمرّ الطرف الثاني للخيط عبر ثقبٍ في المنضدة (الشكل 8-30). في البداية، تدور الكتلة بسرعة $v_1 = 2.4\,\text{m/s}$ في دائرة نصف قطرها $r_1 = 0.80\,\text{m}$. ثمّ يسحب الخيط ببطءٍ عبر الثقب بحيث ينقص نصف القطر إلى $r_2 = 0.48\,\text{m}$. ما سرعة الكتلة v_2 الآن؟

النهج: ليس هناك عزم دورانٍ محصّل على الكتلة m؛ لأنّ القوّة المتولّدة من الخيط كي تستمر في الحركة تمرّ عبر مركز الكتلة. ولذلك، فإنّ ذراع القوّة يساوي صفرًا. لذا، يمكننا تطبيق قانون حفظ الزخم الزاوي.

الحل: حفظ الزخم الزاوي يعطي

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

كتلتنا الصغيرة هي جسيم عزم قصوره الذاتي حول الثقب هو $I = mr^2$ (البند 8-5، معادلة 8-11)، لذلك لدينا

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$$

أو

$$\omega_2 = \omega_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$$

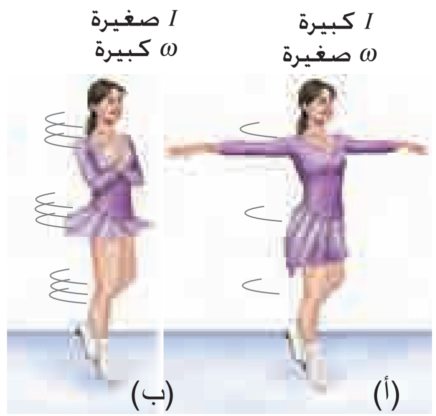
وحيث إن $v = r\omega$، يمكننا كتابة

$$v_2 = r_2\omega_2 = r_2\omega_1\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = r_2\frac{v_1}{r_1}\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = v_1\frac{r_1}{r_2}$$

$$= (2.4\,\text{m/s})\left(\frac{0.80\,\text{m}}{0.48\,\text{m}}\right) = 4.0\,\text{m/s}$$

تزداد السرعة كلّما نقص نصف القطر.

التمرين د: زادت سرعة الكتلة m في (المثال 8-15) ومن ثَمّ زادت طاقتها الحركيّة. من أين أتت هذه الطاقة؟



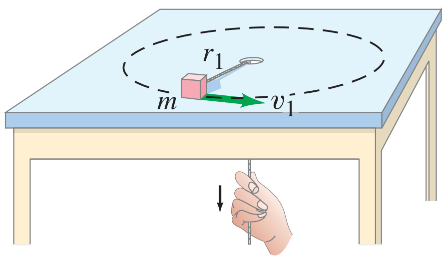
الشكل 8-28: متزلجة تقوم بحركة مغزلية (دورانية) على الجليد، موضحة حفظ الزخم الزاوي. ففي (أ) I كبيرة ولكن ω صغيرة؛ وفي (ب) I صغيرة ومن ثَمّ ω كبيرة.

تطبيق الفيزياء

الحركة المغزلية في التزلج على الجليد والغوص.

الشكل 8-29: يدور الغطاس أسرع عندما يضم ذراعيه وساقيه مما لو كانت ممدودة، ويكون الزخم الزاوي محفوظا.

الشكل 8-30: (المثال 8-15)



المثال 8-16 قدّر **انهيار نجم**

تطبيق الفيزياء
نجم نيوتروني

عادةً يكشف الفلكيون عن نجومٍ تدور بسرعةٍ فائقة، تُعرف بالنجوم النيوترونيّة. يُعتقد أنّ هذه النجوم تشكّلت من قلب داخلي لنجمٍ كبيرٍ منهار، نتيجة جاذبيته الذاتية، إلى نجمٍ ذي نصف قطرٍ صغيرٍ جدًّا وبكثافةٍ عاليةٍ جدًّا. قبل الانهيار، افرض أنّ قلب نجمٍ بحجم شمسنا ($R \approx 7 \times 10^5$ km) وأنّ كتلته ضعفا كتلة الشمس، ويدور بسرعة دورةٍ واحدةٍ كل عشرة أيام. إذا انهار هذا النجم إلى نجم نيوتروني بنصف قطر 10 km، فماذا ستكون سرعة دورانه؟ افرض أنّ النجم كرةٌ منتظمةٌ في الحالات جميعها.

النهج: بما أنّ النجم معزولٌ (ليس هناك قوى خارجية)، فإنّنا نستطيع تطبيق قانون حفظ الزخم الزاوي لهذه العملية.

الحل: من حفظ الزخم الزاوي¬

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

حيث 1 و 2 تعود إلى ابتدائي (النجم العادي) ونهائي (نجم نيوتروني) على الترتيب. وبفرض عدم ضياع أي كتلة،

$$\omega_2 = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\omega_1 = \left(\frac{\frac{2}{5}M_1R_1^2}{\frac{2}{5}M_2R_2^2}\right)\omega_1 = \frac{R_1^2}{R_2^2}\omega_1$$

التردد، لذلك $f = \omega/2\pi$:

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{R_1^2}{R_2^2}f_1$$

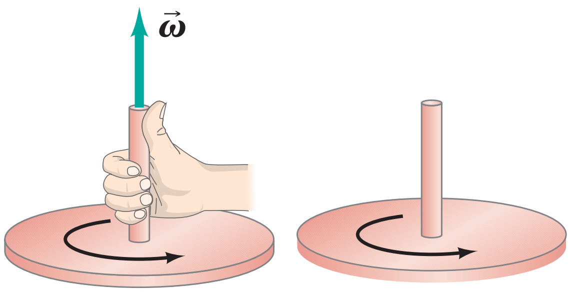
$$= \left(\frac{7 \times 10^5\,\text{km}}{10\,\text{km}}\right)^2\left(\frac{1.0\,\text{rev}}{10\,\text{d}(24\,\text{h/d})(3600\,\text{s/h})}\right) \approx 6 \times 10^3\,\text{rev/s}$$

* 9-8 الطبيعة المتجهة للكميات الزاوية

حتى الآن، افترضنا المقدار فقط للكميات الزاوية، مثل ω ، α، L. ولكن لها سمة الاتجاهية أيضًا، وسنأخذ الاتجاهات الآن بالحسبان. وفي الواقع، علينا تعريف الاتجاهات للكميات الدورانيّة، ونأخذ أولًا السرعة الزاوية، $\vec{\omega}$.

افترض الدولاب الدوّار المبيّن في (الشكل 8-31أ) . السرعات الخطيّة للجسيمات المختلفة للدولاب تشير إلى الاتجاهات المختلفة كلّها.

إلّا أنّ الاتجاه الوحيد في الفراغ للدوران هو على امتداد محور الدوران عموديًّا على الحركة الفعليّة. لذلك، سنختار محور الدوران ليكون اتجاه السرعة الزاوية. في الحقيقة، لا يزال هناك غموضٌ لأنّ يمكن أنّ تشير إلى أحد الاتجاهين على امتداد محور الدوران (للأعلى أو للأسفل في الشكل8-31أ).



الشكل 8-31: (أ) دولاب يدور. (ب) قاعدة اليد اليمنى للحصول على اتجاه $\vec{\omega}$.

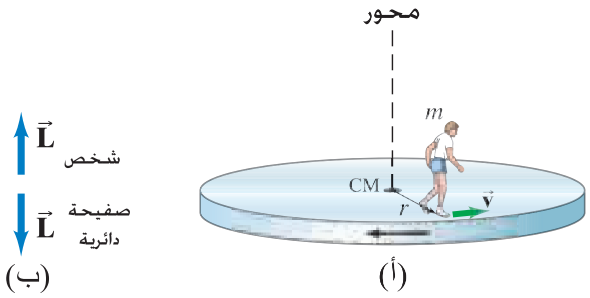
قاعدة اليد اليمنى

إنّ الاصطلاح الذي نستعمله المُسمّى **قاعدة اليد اليمنى** كالتالي: عندما تلتف أصابع اليد اليمنى حول محور الدوران، وتشير إلى اتجاه الدوران، فإنّ الإبهام يشير إلى اتجاه $\vec{\omega}$. وهذا مبيّن في (الشكل 8-31ب) . لاحظ أنّ $\vec{\omega}$ تشير باتجاه تقدّم برغي عندما يلفّ مع اتجاه الدوران. وعليه، إذا كان دوران الدولاب في (الشكل 8-31ب) عكس اتجاه عقارب الساعة، فإنّ اتجاه $\vec{\omega}$ سيكون نحو الأعلى. ولكن إذا دار الدولاب مع عقارب الساعة، فإنّ $\vec{\omega}$ تشير إلى الاتجاه المعاكس، أي نحو الأسفل. لاحظ أنّه لا يوجد جزءٌ من الجسم الدائر يتحرك باتجاه $\vec{\omega}$.إذا ثبت محور الدوران، فيمكن لـ أن تتغيّر فقط من حيث المقدار. ومن ثَمّ $\vec{\alpha} = \Delta\vec{\omega}/\Delta t$ يجب أن يكون على امتداد محور الدوران أيضًا. إذا كان الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة كما في (الشكل 8 - 31أ) ، وكان مقدار ω متزايدًا، فإنّ $\vec{\alpha}$ تشير إلى الأعلى، أمّا إذا كانت ω تتناقص (الدولاب يتباطأ)، فإنّها تشير إلى الأسفل. وإذا كان الدوران مع اتجاه عقارب الساعة، فإن $\vec{\alpha}$ تشير نحو الأسفل. إذن، ω تتزايد، وتشير نحو الأعلى. وعليه، فإنّ ω تتناقص.

الزخم الزاويّ مثل الزخم الخطّي، هو كميةٌ متجهةٌ لجسمٍ متماثل يدور حول التماثل (مثل دولاب، أو أسطوانة، أو طوق، أو كرة)، يمكننا كتابة الزخم الزاوي محور المتجه كـ

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\omega} \qquad \textbf{(20-8)}$$

السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ (وهكذا أيضًا $\vec{\mathbf{L}}$) تتجه على امتداد محور الدوران بالاتجاه الذي تعطيه قاعدة اليد اليمنى (الشكل 8-31ب).



الشكل 8-32: (أ) شخص يقف على منصة دائرية، في البداية يكون ساكنًا، يبدأ بالسير على الحافة بسرعة v . يفترض أن تكون المنصة مركبة على كرات (بيليات) عديمة الاحتكاك، تبدأ بالدوران بالاتجاه المعاكس، بحيث يبقى الزخم الزاوي الكلّي يساوي صفرًا، كما هو مبيّن في (ب).

إنّ الطبيعة الاتجاهية للزخم الزاويّ يمكن استعمالها لتفسير ظواهر مهمّةٍ (وأحيانًا مدهشة). مثلًا، افترض شخصًا يقف ساكنًا على منصّةٍ دائريّةٍ قابلةٍ للدوران حول محورٍ عديم الاحتكاك يمّر بمركزها (دوّامة بسيطة). إذا بدأ الشخص الآن بالسير عند حافة المنصّة الشكل 8-32أ، فإنّ المنصّة تبدأ بالدوران بالاتجاه المعاكس. لماذا؟ يمكن النظر إلى ذلك من جهة أنّ قَدَمَ الشخص تولّد قوّةً على المنصّة، ومن جهةٍ أخرى (وهذا التحليل الأكثر فائدةً هنا) يُعدّ هذا مثالًا على حفظ الزخم الزاوي. إذا بدأ الشخص بالسير عكس اتجاه عقارب الساعة، فإنّ زخمه الزاوي يشير إلى الأعلى على امتداد محور الدوران (تذكّر كيف عرّفنا اتجاه $\vec{\omega}$ باستعمال قاعدة اليد اليمنى). مقدار الزخم الزاوي للشخص $L = I\omega = (mr^2)(v/r)$ سيكون حيث v سرعة الشخص (نسبةً إلى الأرض وليس إلى المنصّة)، و r البعد عن محور الدوران، و m كتلته، أمّا mr^2 فهو عزم القصور الذاتي للشخص إذا افترضناه جُسيمًا (الكتلة مركزه عند نقطة). المنصّة تدور بالاتجاه المعاكس؛ لذا فإنّ زخمها الزاوي الكلّي الابتدائي يشير إلى النظام (الشخص والمنصة) الذي يساوي صفرًا (الشخص والمنصّة ساكنان) فسوف يبقى صفرًا بعد أن يبدأ الشخص بالحركة. أي أنّ الزخم الزاوي للمنصّة نحو الأسفل (الشكل 8-32ب)، وهكذا يبقى الزخم الزاوي الكلّي يساوي صفرًا. بالرغم من أنّ الشخص يولّد قوّة (وعزمًا) على المنصّة، فالمنصّة تؤثّر بعزم دورانٍ مساوٍ ومعاكس على الشخص. لذلك يكون العزم الدورانيّ المحصّل على النظام المكوّن من الشخص والمنصّة يساوي صفرًا (بإهمال الاحتكاك)، ويبقى الزخم الزاوي الكلّي ثابتًا.

الشكل 8-33 (المثال 8-17).

المثال المفاهيمي 8-17 دولاب درّاجة يدور مغزليًا

يمسك معلّم الفيزياء دولاب درّاجة يدور مغزليًّا في أثناء وقوفه على منضدةٍ دوارةٍ ساكنةٍ وعديمة الاحتكاك. (الشكل 8-33). ماذا سيحصل إذا قلب المعلم الدولاب فجأةً كي يدور بالاتجاه المعاكس؟

الحل: نفترض أنّ النظام مكوّنٌ من المنضدة، والمعلّم، والدولاب. الزخم الزاوي الكلّي $\vec{\mathbf{L}}$ أولا رأسيًّا نحو الأعلى. وهذا ما يجب أن يكون عليه الزخم الكلّيّ للنظام لاحقًا؛ لأنّ $\vec{\mathbf{L}}$ محفوظٌ حيث ليس هناك عزم دورانٍ خارجي. فإذا كان الزخم الزاوي بُعدّ قلب الدولاب هو $-\vec{\mathbf{L}}$ للأسفل، فإنّ الزخم الزاوي للمعلّم والمنضدة يجب أن يكون $+2\vec{\mathbf{L}}$ لنحو الأعلى. يمكننا استنتاج أنّ المعلم سوف يبدأ بالدوران بالاتجاه نفسه الذي كان يدور فيه الدولاب أولًا.

ملخص

عندما يدور جسمٌ جاسئ حول محورٍ ثابت، فإنّ كلّ نقطةٍ من الجسم تتحرّك في مسارٍ دائري. الخطوط المرسومة قطريًّا من محور الدوران إلى النقاط المختلفة من الجسم تمسح الزاوية θ نفسها في أيّ فترةٍ زمنيّة.

تقاس الزوايا اصطلاحًا **بالراديان**: حيث راديان واحد هي الزاوية المقابلة لقوسٍ طوله يساوي نصف القطر، أو

$$2\pi\ \text{rad} = 360^\circ$$
$$1\ \text{rad} \approx 57.3^\circ$$

السرعة الزاوية، ω، تُعرف بمعدّل التغيّر للموقع الزاوي:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \textbf{(2-8)}$$

أجزاء الجسم الجاسئ الدائر كلّها حول محورٍ ثابتٍ لها السرعة الزاوية نفسها، وعند أيّ لحظة، **التسارع الزاوي**، α يُعرف بمعدّل تغيّر **السرعة الزاوية**:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \textbf{(3-8)}$$

السرعة الخطّية v والتسارع a لنقطةٍ ثابتةٍ عند مسافة r من محور الدوران يرتبطان بـ ω و α بـ:

$$v = r\omega \qquad \textbf{(4-8)}$$
$$a_{\tan} = r\alpha \qquad \textbf{(5-8)}$$
$$a_R = \omega^2 r \qquad \textbf{(6-8)}$$

حيث $a_{\tan}$ و a_R وهما المركبتان المماسيّة والقطريّة (المركزية) للتسارع الخطّي، على الترتيب:

التردّد f يرتبط بـ ω حيث:

$$\omega = 2\pi f \qquad \textbf{(7-8)}$$

وبالزمن الدوري T بـ

$$T = 1/f \qquad \textbf{(8-8)}$$

المعادلات التي تصف الحركة الدورانيّة المتسارعة بانتظام (α = ثابت)، لها المظهر نفسه (الشكل) كما في الحركة الخطّيّة بتسارع ثابت:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \qquad \theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \qquad \bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2} \qquad \textbf{(9-8)}$$

تشبه ديناميكا الدوران ديناميكا الحركة الخطّيّة. تستبدل القوّة بعزم الدوران τ، الذي يُعرف بحاصل ضرب القوّة في ذراع **العزم** (المسافة العموديّة من محور الدوران إلى خط عمل القوّة):

$$\tau = rF\sin\theta = r_\perp F = rF_\perp \qquad \textbf{(10-8)}$$

تُستبدل الكتلة **بعزم القصور الذاتي** I، الذي يعتمد ليس على كتلة الجسم فقط، ولكن على كيفيّة توزيع الكتلة حول محور الدوران أيضًا. التسارع الخطّيّ يُستبدل بالتسارع الزاوي. المكافئ الدوراني لقانون نيوتن الثاني هو

$$\Sigma\tau = I\alpha \qquad \textbf{(14-8)}$$

الطاقة الحركيّة الدورانية لجسمٍ يدور حول محورٍ ثابتٍ وبسرعةٍ زاوية

$$\text{KE} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \textbf{(15-8)}$$

لجسمٍ ينتقل ويدور أيضًا الطاقة الحركيّة الكليّة، هي مجموع طاقتي الحركة الانتقاليّة لمركز الكتلة والدورانية للجسم حول مركز الكتلة:

$$\text{KE} = \tfrac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 \qquad \textbf{(16-8)}$$

ما دام محور الدوران ثابت الاتّجاه.

الزخم الزاوي L **لجسم حول محور الدوران** يُعطى بـ

$$L = I\omega \qquad \textbf{(18-8)}$$

قانون نيوتن الثاني بدلالة الزخم الزاوي، هو

$$\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \qquad \textbf{(19-8)}$$

إذا كان عزم الدوران المحصّل على الجسم يساوي صفرًا، $\Delta L/\Delta t = 0$، فإنّ L= ثابت. هذا هو **قانون حفظ الزخم الزاوي لجسم دائر.**

تُلخّص القائمة التالية الكميات الزاوية (الدورانية) مقارنة بنظيرتها الخطيّة (الانتقاليّة).

انتقال	دوران	العلاقة
x	θ	$x = r\theta$
v	ω	$v = r\omega$
a	α	$a = r\alpha$
m	I	$I = \Sigma mr^2$
F	τ	$\tau = rF\sin\theta$
$\text{KE} = \frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	
$p = mv$	$L = I\omega$	
$W = Fd$	$W = \tau\theta$	
$\Sigma F = ma$	$\Sigma\tau = I\alpha$	
$\Sigma F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$	$\Sigma\tau = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}$	

أسئلة

1. أودوميتر درّاجة (يقيس المسافة المقطوعة) مثبتٌ بجانب محور الدولاب ومُصَمَّمٌ لدواليب 27-inch. ماذا يحصل لو استعملته على درّاجة بدواليب 24-inch؟

2. افرض قرصًا يدور بسرعةٍ زاويةٍ ثابتة. هل تملك نقطة عند الحافّة تسارعًا نصف قطري و / أو مُماسيًا؟ إذا زادت السرعة الزاوية للقرص بصورةٍ منتظمة، فهل للنقطة تسارع نصف قطري و/أو مُماسي؟ لأيّ الحالات سوف يتغيّر مقدار أيٍّ من مركبتي التسارع الخطّي؟

3. هل يمكن وصف جسمٍ غير جاسئٍ بقيمةٍ واحدةٍ للسرعة الزاوية ω؟ علّل.

4. هل يمكن لقوّةٍ صغيرةٍ في أيّ حالٍ توليد عزمٍ دورانيٍّ أكبر من قوّةٍ كبيرة؟ فسّر.

.5 إذا أثّرت قوّة $\vec{\mathbf{F}}$ في جسمٍ بحيث إنّ ذراع العزم يساوي صفرًا، فهل لها على حركة الجسم أيّ أثر؟ فسّر.

.6 لماذا يكون أكثر صعوبةً أن تجلس منتصبًا ويداك خلف رأسك من أن تكون يداك ممدودتان بجانبك؟ إنّ رسمًا تخطيطيًّا قد يساعدك على الإجابة.

.7 دراجة ذات -21 سرعة لها سبع عجلاتٍ مسنّنةٍ على الدولاب الخلفي، وثلاثٌ على ذراع الدوّاسة. في أيّ؟ وضعٍ للحركة يكون الدوس أصعب: في مسنّناتٍ خلفيّةٍ صغيرةٍ أو كبيرة؟ لماذا؟ وفي أيّ وضعٍ للحركة يكون الدوس أصعب: في مسنّناتٍ أماميّةٍ صغيرةٍ أو كبيرة؟ لماذا؟

.8 الثدييات التي تعتمد على سرعتها في الجري تملك سيقانًا نحيلة في أسفلها، في حين يتركز اللحم والعضل عاليًا قريبًا من الجسم (الشكل 8-34). اعتمادًا على ديناميكا الحركة الدورانيّة، فسّر لماذا يكون توزيع الكتلة هذا مفيدًا أكثر؟

الشكل **8-34**: (السؤال 8)الغزال

الشكل **8-35**: (السؤال 9)

.9 الحبل المشدود (الشكل 8-35)، ذراعًا طويلًا ضيّقًا؟

.10 إذا كانت القوّة المحصّلة على جسم تساوي صفرًا، فهل يكون عزم الدوران أيضًا صفرًا؟ وهل تكون القوّة المحصّلة صفرًا إذا كان عزم الدوران المحصّل صفرًا أيضًا؟

.11 منحدران لهما الارتفاع نفسه، ولكن بزاويتين مختلفتين مع الأفق. دحرجت كرة الفولاذ نفسها على كلٍّ منهما. على أيٍّ من المنحدرين ستكون سرعتها أكبر عند النهاية؟ فسّر ذلك.

.12 كرتان مصمتتان بدأتا بالتدحرج في اللحظة نفسها (من السكون) على منحدر. إحدى الكرتين لها ضعفا الكتلة وضعفا نصف القطر التي للأخرى. أيّهما تصل إلى قاعدة المنحدر أولًا؟ أيّهما لها سرعةٌ أكبر هناك؟ وأيّهما لها طاقةٌ حركيّةٌ أكبر عند القاعدة؟

.13 كرةٌ وأسطوانةٌ لهما نصف القطر نفسه، والكتلة نفسها. بدأتا بالحركة من السكون أعلى منحدر. أيّهما تصل إلى القاعدة أولًا؟ أيّهما لها طاقةٌ حركيّةٌ أكبر عند القاعدة؟ أيّهما لها طاقةٌ حركيّةٌ دورانيّةٌ أكبر؟

.14 ندّعي أنّ الزخمين اللحظيّ والزاويّ محفوظان. والآن معظم الأجسام المتحرّكة أو التي تدور تبطئ أخيرًا ثُمَّ تتوقّف. فسّر ذلك.

.15 لو كانت هناك هجرةٌ للناس نحو خطّ الاستواء على الأرض، فكيف سيؤثّر ذلك في طول اليوم؟

.16 هل تستطيع الغطّاسة في (الشكل 8-29) أن تصل إلى هذه النتيجة من غير أن يكون لها أيّ حركةٍ دورانيّةٍ ابتدائيّةٍ عند مغادرتها المنصّة؟

.17 عزم القصور الذاتيّ لقرصٍ مصمتٍ يدور حول محورٍ خلال مركزٍ كتلته هو $\frac{1}{2}MR^2$ (الشكل 8-21ج). افرض أنّ المحور يمرّ بنقطةٍ عند حافّة القرص، فهل سيكون عزم القصور الذاتّي نفسه، أكبر أم أقل؟

.18 افرض أنّك تجلس على مقعدٍ وتمسك بكتلة 2-kg في كلٍّ من يديك الممدودتين. إذا اسقطت الكتلتين فجأة، فهل ستزيد سرعتك الزاوية، تقل أم تبقى ثابتة؟ فسّر ذلك.

.19 كرتان تبدوان متماثلتين ولهما الكتلة نفسها، ولكن إحداهما مجوّفةٌ والأخرى مصمتة. صف تجربةً لتحديد كلٍّ منهما.

***20.** في أيّ اتجاهٍ تكون السرعة الزاوية للأرض في أثناء دورانها يوميًّا حول محورها؟

***21.** السرعة الزاوية لدولاب يدور على محورٍ أفقيٍّ تشير إلى الغرب. في أيّ اتجاهٍ تكون السرعة الخطيّة لنقطةٍ على قمّة الدولاب؟ إذا أشار التسارع الزاوي نحو الشرق، فصف التسارع المماسيّ للنقطة المذكورة. هل تتزايد السرعة الزاوية أم تتناقص؟

***22.** افرض أنّك تقف عند حافّة منضدةٍ كبيرةٍ تدور بحرّية. ماذا يحدث إذا سرت نحو المركز؟

***23.** لاعب يمكن أن يقفز في الهواء للإمساك بكرة، ثم يقذفها بسرعة. عندما يرمي الكرة، يدور الجزء العلوي من جسمه. إذا نظرت بسرعة فسوف تلاحظ أنّ وركيه وساقيه تدور في الاتجاه المعاكس (الشكل 8-36). فسّر ذلك.

الشكل **8-36**: (السؤال 23) . لاعب في الهواء يرمي الكرة.

***24.** على أساس قانون حفظ الزخم الزاوي، ناقش لماذا يكون لطائرة الهيليكوبتر أكثر من مروحة. اشرح طريقةً أو أكثر لكيفيّة عمل المروحة الثابتة للمحافظة على المروحة مستقرّة.

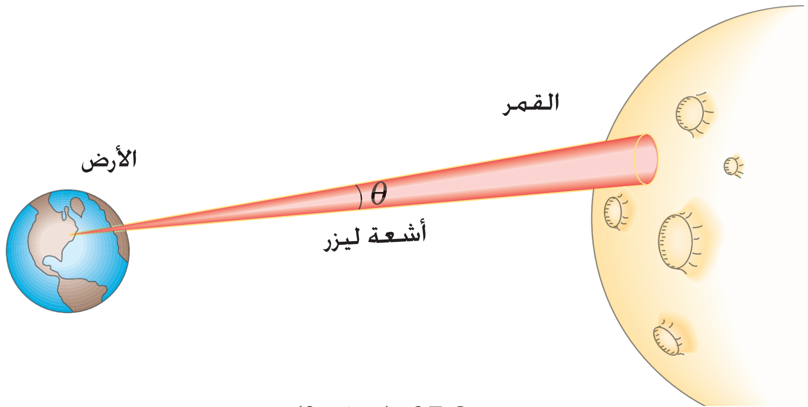
مسائل

8-1 الكميات الزاوية

.1 (I) عبّر عن الزوايا التالية بالراديان: (أ) 30° (ب) 57° (جـ) 90° (هـ) 360° (د) 420° اعطِ النتيجة عدديًّا، وكنسبةٍ من π.

.2 (I) يحدث الكسوف والخسوف على الأرض نتيجة تطابقٍ مدهش. احسب القطر الزاوي (بالراديان) للشمس والقمر كما تبدو من الأرض، مستعينًا بلمعلومات الموجودة على صفحة الغلاف الأمامية.

.3 (I) يوجه شعاع ليزر نحو القمر على بعد $380{,}000$ km من الأرض. ينحرف الشعاع بزاوية θ (الشكل 8-37) 1.4×10^{-5} rad . ما قطر البقعة التي يعملها على القمر؟



الشكل **8-37**: (المسألة 3) .

.4 (I) تدور شفرات جهاز المزج بمعدّل 6500 rpm. عند إيقاف المحرّك خلال العمل، تبطىء الشفرات لتتوقّف خلال 3.0 s. ما التسارع الزاوي لتباطؤ الشفرات؟

.5 (II) يدحرج طفلٌ كرةً على أرض الغرفة لطفلٍ آخر على بعد 3.5 m. إذا عملت الكرة 15.0 دورة، فما قطرها؟

.6 (II) درّاجة قطر عجلاتها 68 cm، سارت 8.0 km. كم عدد دورات عجلات الدراجة؟

.7 (II)(أ) دولاب شحذٍ قطره 0.35 m، يدور بسرعة 2500 rpm. احسب سرعته الزاوية بـ (rad/s.). ما السرعة الخطّية والتسارع لنقطةٍ على حافّة عجلة؟

.8 (II) دوّامة تدور لتكمل دورةً واحدةً في 4.0 s (الشكل 8-38). (أ) ما السرعة الخطيّة لطفلةٍ تجلس على بعد 1.2 m من المركز؟ (ب) ما تسارعها؟ (اعطِ مركبات).

الشكل **8-38**: (المسألة 8)

.9 (II) احسب السرعة الزاوية للأرض: (أ) في مسارها حول الشمس. (ب)حول محورها ذاتها.

.10 (II) ما السرعة الخطّيّة لنقطة: (أ) عند خط الاستواء. (ب) عند الدائرة القطبية الشمالية (خط عرض 66.5° N). (جـ) عند خط عرض 45° N، بسبب دوران الأرض.

.11 (II) بأيّ سرعة (بـ rpm) يجب على جهاز طردٍ مركزيٍّ أن يدور بحيث إنّ جُسيمًا على بعد 7.0 cm من محور الدوران يكون تسارعه $100{,}000\,g$'s؟

.12 (II) عجلة قطرها 70-cm يتسارع بانتظامٍ حول محوره من 130 rpm إلى 280 rpm في 4.0 s. حدّد: (أ) تسارعه الزاوي. (ب) المركبتين القطرية والماسية للتسارع الخطّيّ لنقطةٍ عند الحافّة على بعد 2.0 s من بداية التسارع.

.13 (II) طاولةٌ دوّارةٌ نصف قطرها R_1، تُدار بواسطة حزامٍ مطّاطيٍّ نصف قطره R_2 يتلامسان من حافتيهما الخارجيتين. ما النسبة بين سرعتيهما الزاويتين ω_1/ω_2 ؟

.14 (III) في السفر إلى القمر، يضع روّاد (أبولو) أنفسهم في دورانٍ بطيءٍ ليتعرّضوا لطاقة الشمس بالتساوي. في بداية رحلتهم يتسارعون من السكون إلى 1.0 دورة كلّ دقيقةٍ لمدّة 12-min. يمكن افتراض سفينة الفضاء أسطوانةً قطرها 8.5 m . حدد: (أ) التسارع الزاوي. (ب) المركبتين القطرية والماسية للتسارع الخطّيّ لنقطة على سطح المركبة على بعد 5.0 min من بداية التسارع.

8-2 و 8-3 تسارع زاوي ثابت؛ التدحرج

.15 (I) جهاز طردٍ مركزيٍّ يتسارع بانتظامٍ من السكون إلى $15{,}000$ rpm في 220 s. كم عدد الدورات التي داراها الجهاز خلال هذا الزمن؟

.16 (I) محرّك سيارةٍ يتباطأ من 4500 rpm إلى 1200 rpm في 2.5 s احسب: (أ) التسارع الزاويّ. (ب) عدد الدورات الكلّيّ التي يعملها المحرّك خلال ذلك.

.17 (I) يختبر الطيّارون التوتر الناتج من قيادة الطائرات النفاثة السريعة في جهاز طردٍ "مركزيٍّ للإنسان" الذي يستغرق 1.0 min لعمل 20 دورة قبل الوصول إلى سرعته النهائية. (أ) ماذا كان تسارعه الزاوي (بفرض أنّه ثابت)، و(ب)؟ (ب) ما السرعة الزاوية النهائية بـ (rpm) ؟

.18 (II) دولاب قطره 33 cm يتسارع بانتظام من 240 rpm إلى 360 rpm في 6.5 s. ما المسافة التي تقطعها نقطةٌ على حافّة الدولاب خلال هذا الزمن؟

.19 (II) أُطفئت مروحة تبريد عندما كانت تدور بسرعة 850 rev/min. دارت 1500 دورة قبل أن تتوقف. (أ) كم كان التسارع الزاوي بفرض أنّه كان ثابتًا؟ (ب) كم استغرقت المروحة حتى توقفت؟

.20 (II) دولابٌ مطاطيٌّ صغيرٌ يُستخدم لتشغيل دولابٍ أكبر لعمل الفخّار. ويوضعان بحيث تتلامس حافتاهما الدائريتان. نصف قطر الدولاب الصغير 2.0 cm، ويتسارع بمعدل $7.2\ \text{rad/s}^2$ ملامسًا دولاب الفخّار (نصف قطر 25.0 cm) من غير انزلاق. احسب: (أ) التسارع الزاوي لدولاب الفخّار. (ب) الزمن اللازم لدولاب الفخّار كي يصل إلى سرعته المطلوبة 65 rpm.

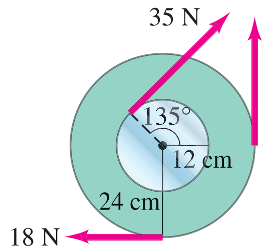
.21 (II) دواليب سيّارةٍ تعمل 65 دورةً عندما تخفض السيّارة سرعتها بانتظام من 95 km/h إلى 45 km/h . قطر الدولاب 0.80 m. (أ) كم كان التسارع الزاويّ للدولاب؟ (ب) إذا استمرت السيّارة بالتباطؤ بالمعدّل نفسه، فما الزمن الإضافيّ الذي يلزمها للتوقّف!

4-8 عزم الدوران

.22 (I) راكبة درّاجةٍ كتلتها 55-kg تضع وزنها كلّه على كلّ دوّاسةٍ عند صعودها تلّة. تدور الدوّاسات في دائرةٍ نصف قطرها 17 cm. (أ) ما أكبر عزمٍ دوراني تنتجه؟ (ب) كيف يمكنها الحصول على عزمٍ أكبر؟

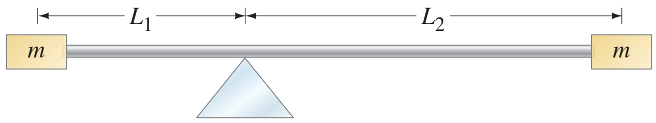
.23 (I) يؤثّر شخصٌ بقوّة 55 N في طرف باب عرضه 74 cm. ما مقدار عزم الدوران: (أ) إذا أثرت القوة عموديًّا في الباب؟ (ب) إذا أثّرت القوّة بزاوية $45°$ مع وجه الباب؟

.24 (II) احسب العزم المحصّل حول محور الدولاب المبيّن في (الشكل 8-39). افرض أنّ عزم احتكاكٍ مقداره 0.40 m.N يعاكس الحركة.



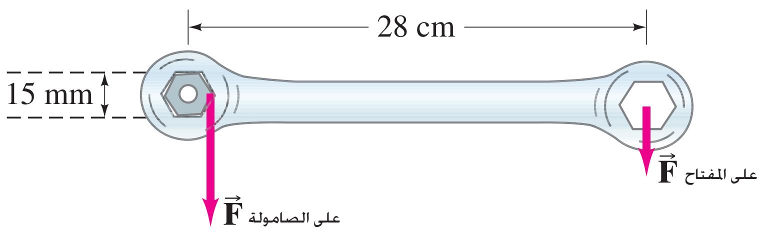
الشكل 8-39: (المسألة 24)

.25 (II) كتلتان مقدار كلٍّ منهما m مثبتتان عند نهايتي قضيبٍ مهمل الكتلة ومركّزٍ كما يبدو في (الشكل 8-40) . أولاً ثبّت القضيب في وضعٍ أفقي، ثم أفلت. احسب مقدار العزم المحصّل على هذا النظام واتّجاهه.



الشكل 8-40:(المسألة 25).

.26 (II) تحتاج الصامولات على الرأس الأسطوانيّ لمحرّك إلى عزم $88\,\mathrm{m \cdot N}$ لتثبيتها. إذا كان طول مفتاح الربط 28 cm، فما القوّة العموديّة على المفتاح التي يجب على الميكانيكي التأثير بها عند نهاية المفتاح؟ إذا كانت الصامولة السداسيّة قطرها 15 mm، فقدّر القوّة المؤثّرة عند كلّ نقطةٍ من النقاط الستة بواسطة المفتاح، (الشكل 8-41).



الشكل 8-41: (المسألة 26)

5-8 و6-8 ديناميكا الحركة الدورانية

.27 (I) حدّد عزم القصور الذاتيّ لكرةٍ كتلتها 10.8-kg ونصف قطرها 0.648 m إذا كان محور الدوران خلال مركزها.

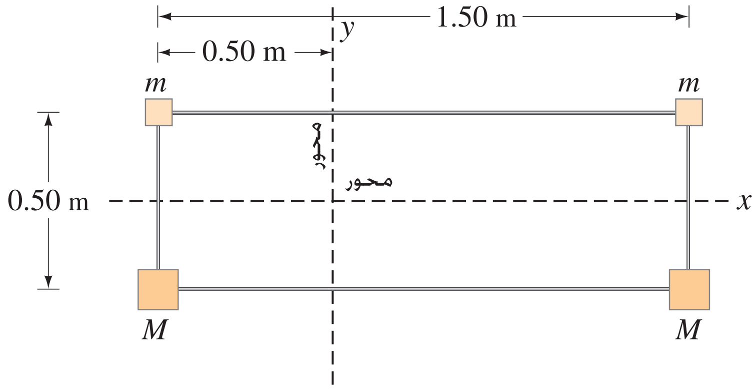
.28 (*I*) احسب عزم القصور الذاتيّ لدولاب درّاجة قطره 66.7 cm وكتلته 1.25 kg. كتلة المحور يمكن إهمالها (لماذا)؟

.29 (II) كرةٌ صغيرةٌ كتلتها 650-g في نهاية قضيب خفيف، أديرت في دائرةٍ أفقيةٍ نصف قطرها 1.2 m. احسب: (أ) عزم القصور الذاتيّ للكرة حول مركز الدائرة. (ب) العزم اللازم للمحافظة على دوران الكرة بسرعةٍ زاويةٍ ثابتة إذا كانت مقاومة الهواء تؤثّر بقوّة 0.020 N في الكرة؟ أهمل عزم القصور للقضيب، وكذلك مقاومة الهواء.

.30 (II) صانعة فخّارٍ تشكل قدراً (زبدية) على عجلة الفخّار التي تدور بسرعةٍ زاوية ثابتة (الشكل 8-42). قوّة الاحتكاك بين يديها والطين تساوي 1.5 N بصورةٍ كلية. (أ) ما مقدار عزمها على الدولاب إذا كان قطر القدر 12 cm؟ (ب) ما الوقت الذي يلزم للدولاب للتوقّف إذا كان العزم الوحيد المؤثّر ناتج من يديها؟ السرعة الزاوية الابتدائيّة للدولاب 1.6 rev/s وعزم القصور الذاتيّ للدولاب والقالب $0.11\,\mathrm{kg \cdot m^2}$.

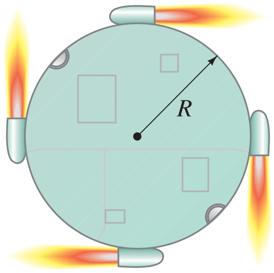
الشكل 8-42: المسألة 30.

.31 (II) احسب عزم القصور الدورانيّ لمجموعة الأجسام النقطيّة في (الشكل 8-43) حول (*أ*) المحور العامودي. (ب) المحور الأفقي. مفترض أن $m = 1.8$ kg و $M = 3.1$ kg، وقد وصلت الأجسام معًا بأسلاك معدنيّة خفيفة. والإطار مستطيلٌ ويُقسم في المنتصف بواسطة المحور الأفقي. (جـ) حول أيّ محورٍ ستكون مسارعة هذا النظام أصعب؟



32. (II) جزيء أكسجين، يتكوّن من ذرّتي أكسجين كتلتهما الكليّة $5.3 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$ وعزم قصورهما الذاتيّ حول محورٍ عموديٍّ على الخطّ الواصل بين الذرّتين وفي منتصف المسافة بينهما يساوي $1.9 \times 10^{-46}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. من هذه البيانات، قدر البعد بين الذرّتين.

33. (II) للحصول على قمرٍ صناعيٍّ أسطوانيٍّ منتظمٍ يدور بالمعدّل المطلوب، يطلق المهندسون أربعة صواريخ مماسة كما يبين (الشكل 8-44) إذا كانت كتلة القمر الصناعي 3600 kg، ونصف قطره 4.0 m، فما القوّة الثابتة لكلّ صاروخٍ إذا كان على القمر الصناعيّ الوصول إلى 32 rpm في 5.0 min؟



الشكل 8-44: (المسألة 33)

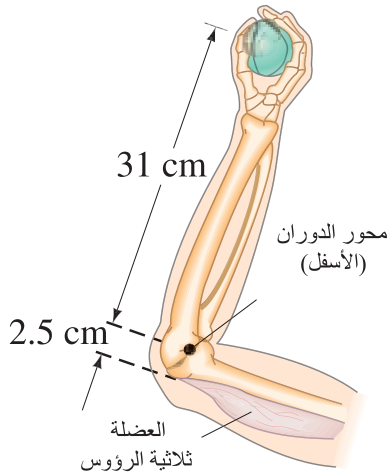
34. (II) دولاب شحذٍ من أسطوانةٍ منتظمةٍ نصف قطرها 8.50 cm وكتلتها 0.580 kg. احسب: (أ) عزم قصورها الذاتيّ حول مركزها. (ب) العزم الدورانيّ المؤثّر اللازم للتسارع من السكون إلى 1500 rpm في 5.00 s إذا كان من المعروف أنّه يتباطأ من 1500 rpm إلى السكون في 55.0 s.

35. (II) لاعب كرةٍ ليّنةٍ يلوّح المضرب مسارعًا إيّاه من السكون إلى 3.0 rev/s في زمن 0.20 s. قرّب المضرب إلى قضيبٍ منتظمٍ كتلته 2.2-kg وطوله 0.95 m. احسب العزم الذي يؤثّر فيه اللاعب في نهاية المضرب.

36. يدفع شابٌّ ماسيًا دوّامةً تعمل يدويًّا ويسارعها من السكون إلى 15 rpm في 10.0 s. افرض أنّ الدوّامة هي قرصٌ منتظمٌ نصف قطره 2.5 m وكتلته 760 kg وهناك طفلان (كتلة كل منهما 25 kg) يجلسان متقابلين عند حافتها. احسب عزم الدوران اللازم للحصول على هذا التسارع مع إهمال الاحتكاك. ما القوّة اللازمة عند الحافة؟

37. (II) جهاز طردٍ مركزيٍّ يدور بـ 10,300 دورة / دقيقة يفصل عن التيّار الكهربائيّ وبانتظامٍ يصل إلى السكون بواسطة عزم قوّة احتكاك $1.20\,\mathrm{m \cdot N}$. إذا كانت كتلة الدوّار 4.80 kg ويمكن تقريبه كأسطوانة مصمتة بنصف قطر 0.0170 m، كم دورةٍ يلفّ الدوّار قبيل أن يتوقّف، وكم من الوقت سوف يستغرق؟

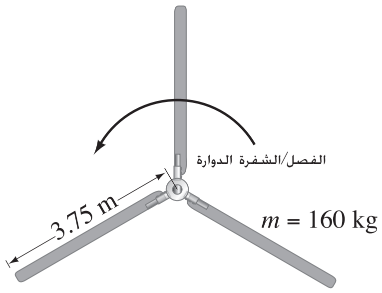
38. (II) يسارع الساعد في (الشكل 8-45)كرةً كتلتها 3.6-kg بمعدّل $7.0\,\mathrm{m/s^2}$ بواسطة العضلة ثلاثية الرؤوس، كما هو مبين. احسب: (أ) عزم الدوران اللازم. (ب) القوّة التي على العضلة توليدها. اهمل كتلة الساعد.



الشكل 8-45: (المسائل 38 و 39).

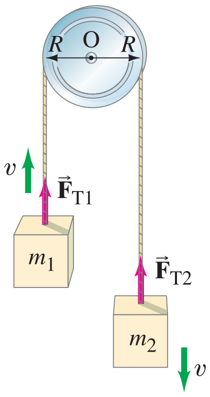
39. (II) افرض أنّ كرةً كتلتها 1.00-kg قذفت بتأثير مقدّمة اليد التي تدور حول مفصل الكوع بواسطة العضلة ذات الرؤوس الثلاثيّة (الشكل 8-45). تتسارع الكرة بانتظامٍ من السكون حتى 10.0 m/s في 0.350 s، حيث تُقذف عندها. احسب: (أ) التسارع الزاويّ للذراع. (ب) القوّة اللازمة من العضلة ثلاثيّة الرؤوس. افرض أنّ كتلةً مقدّمة الذراع 3.70 kg وتدور كقضيب منتظم حول محور عند نهايته .

40. (II) يمكن اعتبار نَصْل مروحة هيليوكوبتر قضيبًا طويلًا رقيقًا، كما في (الشكل 8-46). (أ) إذا كان طول كلّ نصْلٍ من الثلاثة في الطائرة 3.75 m وكتلته 160 kg، فاحسب عزم القصور الذاتيّ للنصول الثلاثة حول محور الدوران . (ب) كم العزم الذي على المحرّك بذله لجعل النصول تصل السرعة 5.0 rev/s في 8.0 s؟



الشكل 8-46: (مسألة 40)

41. (III) تتكوّن آلة أتوود من كتلتين m_1 و m_2 متصلتين بحبلٍ غير مرنٍ مهمل الكتلة ويمرّ حول بكرة، (الشكل 8-47). إذا كان نصف قطر البكرة R وعزم قصورها I حول محورها، حدّد تسارع الكتلتين m_1 و m_2 وقارن مع الوضع عند إهمال عزم القصور الذاتي للبكرة. [تنويه: الشدان F_{T1} , F_{T2} ليسا متساويين. سبق مناقشة هذا الوضع في مثال 4-13، بفرض $I = 0$ للبكرة].



الشكل 8-47: (المسائل 41 و 49).

42. (III) رامي مطرقة يسارع المطرقة (كتلتها 7.30 kg) من السكون خلال أربع دوراتٍ كاملةٍ ويفلتها بسرعة 28.0 m/s. بفرض أنّ معدّل الزيادة ثابت في السرعة الزاوية، ونصف قطر المسار الدائريّ الأفقيّ 1.20 m، احسب: (أ) التسارع الزاوي. (ب) التسارع (الخطي) المماسي. (ج) التسارع المركزيّ قبيل الإفلات. (د) القوّة المحصّلة المؤثّرة من اللاعب في المطرقة قبيل الإفلات. (هـ) زاوية هذه القوة بالنسبة إلى نصف قطر الحركة الدائرية.

8-7 الطاقة الحركية الدورانية

43. (I) دوّار جهاز طرد مركزي عزم قصوره الذاتي $3.75 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. كم الطاقة اللازمة لنقله من السكون إلى 8250 rpm؟

44. (II) محرك سيارة يولد عزم دوران $280\,\mathrm{m \cdot N}$ عند 3800 rpm. احسب القدرة بالواط وبالحصان.

45. (II) كرة (بولينج) كتلتها 7.3 kg ونصف قطرها 9.0 cm تتدحرج من غير انزلاق بسرعة 3.3 m/s. احسب طاقتها الحركيّة الكليّة.

.46 (II) قدّر الطاقة الحركيّة للأرض بالنسبة إلى الشمس كمجموع لحدّين، (أ) ذلك الذي يعود إلى الدوران اليومي حول محورها، (ب) ذلك الذي يعود إلى دورانها السنويّ حول الشمس. [افرض أنّ الأرض كرةٌ منتظمةٌ كتلتها 6.0×10^{24} kg ونصف قطرها 6.4×10^{6} m وبعدها عن الشمس 1.5×10^{8} km]

.47 (II) دوّامة كتلتها 1640 kg ونصف قطرها 7.50 m. كم الشغل الصافي اللازم لتسارعها من السكون لمعدّل 1.00 دورة كلّ 8.00 s؟ افرض أنّها أسطوانيّة مصمتة.

.48 (II) كرةٌ نصف قطرها 20.0 cm وكتلتها 1.80 kg تبدأ من السكون وتتدحرج من غير انزلاق على منحدرٍ طوله 10.0 m، وبميل بزاوية 30.0°. (أ) احسب سرعتها الانتقاليّة والدورانيّة عند وصولها إلى قاعدة المنحدر (ب) ما النسبة بين الطاقة الحركيّة الانتقاليّة إلى الدورانية عند القاعدة؟ تجنّب وضع أرقامٍ حتى تصل إلى النهاية ثم تستطيع إجابة: (جـ) هل إجاباتك في (أ) و (ب) تعتمد على نصف قطر الكرة أم كتلتها؟

.49 (II) كتلتان $m_1 = 18.0\,\text{kg}$ و $m_2 = 26.5\,\text{kg}$ متصلتان بحبلٍ يمرّ حول بكرةٍ كما في (الشكل 8-47). البكرة هي أسطوانةٌ نصف قطرها 0.260 m وكتلتها 7.50 kg. ابتداء m_1 على الأرض، و m_2 ساكنة على ارتفاع 3.00 m فوق سطح الأرض. حدّد سرعة m_2 قبيل اصطدامها بالأرض إذا أفلتنا هذا النظام، مستعملًا قانون حفظ الطاقة. ومفترضًا أنّ البكرة عديمة الاحتكاك.

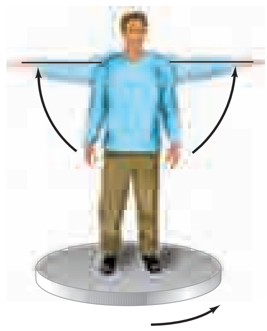
.50 (III) عمود (سارية) طوله 2.30-m متّزنٌ عموديًّا على رأسه. بدأ بالسقوط ونهايته السفليّة لا تنزلق. ماذا ستكون سرعة نهايته العلويّة قبيل اصطدامه بالأرض؟[تنويه: استخدم حفظ الطاقة]

8-8 الزخم الزاوي

.51 (I) ما قيمة الزخم الزاوي لكرةٍ كتلتها 0.210-kg تدور في نهاية خيطٍ رفيع في دائرة نصف قطرها 1.10 m بسرعة زاوية 10.4 rad/s؟

.52 (I) (أ) ما الزخم الزاوي لدولاب شحذٍ أسطواني كتلته 2.8 kg ونصف قطره 18 cm يدور بـ 1500 rpm؟ (ب) ما عزم الدوران اللازم لإيقافه في 6.0 s؟

.53 (II) شخص يقف على منصّة دوّارة واضعًا يديه على جانبيه، تدور المنصة بسرعة 1.30 rev/s. إذا رفع يديه إلى وضع أفقي، (الشكل 8-48)، تقل سرعة دورانه إلى 0.80 rev/s (أ) لماذا؟ (ب) ما نسبة تغيّر عزم قصوره الذاتي؟



الشكل **8-48**: (المسألة 53)

.54 (II) غوّاصة (كالمبين في الشكل 8-29) تستطيع تغيير عزم قصورها الذاتي بمعامل قدره 3.5 عندما تتغيّر من وضع الاستقامة إلى وضع القرفصاء. إذا عملت 2.0 دورة في 1.5 s في وضع القرفصاء، فما سرعتها الزاوية (rev/s) في وضع الاستقامة؟

.55 (II) متزلّجة على الجليد تستطيع زيادة سرعتها المغزلية من سرعة ابتدائية قدرها 1.0 دورة كل 2.0 s إلى معدل نهائي قدره 3.0 rev/s، إذا كان عزم قصورها الذاتي الابتدائي $4.6\ \text{kg.m}^2$، فما عزم قصورها النهائي؟ كيف يمكنها فيزيائيًّا عمل هذا التغيير؟

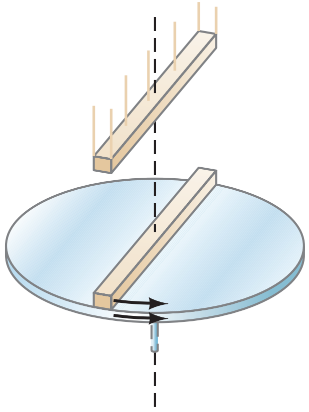
.56 (II) دولاب فخاري يدور حول محور رأسي عبر منتصفه بتردّد 1.5 rev/s. يمكن اعتبار الدولاب قرصًا منتظمًا كتلته 5.0 kg وقطره 0.40 m. بعد ذلك يرمي الدولاب الفخاري قطعة من الطين كتلتها 3.1-kg شكلها كقرصٍ منبسط نصف قطره 8.0 cm عند منتصف الدولاب الدوّار. فما تردّد الدولاب بعد التصاق قطعة الطين به؟

.57 (II) (أ) ما الزخم الزاوي لمتزلّجة على الجليد تدور بسرعة 3.5 rev/s ويداها قريبتان من جسمها، ولو فرضنا أنّها أسطوانة منتظمة بارتفاع 1.5 m ونصف قطر 15 cm وكتلة 55 kg؟ (ب) ما عزم الدوران اللازم لإبطائها حتى تتوقف في 5.0 s بفرض أنّها لم تحرّك ذراعيها؟

.58 (II) احسب الزخم الزاوي للأرض: (أ) حول محور دورانها بفرض أنّها كرويّة (ب) في مسارها حول الشمس (افترض أن الأرض جسيمٌ يدور حول الشمس). كتلة الأرض 6.0×10^{24} kg ونصف قطرها 6.4×10^{6} m وعلى بعد 1.5×10^{8} من الشمس.

.59 (II) قرصٌ أسطوانيٌّ ساكنٌ، عزم قصوره الذاتي I، أُسقط فوق قرصٍ مماثلٍ يدور بسرعة زاوية ω.افرض عدم وجود عزومٍ خارجيّة، ما السرعة الزاوية النهائية للمجموعة من القرصين؟

.60 (II) قرصٌ منتظمٌ يدور بسرعة 2.4 rev/s حول محورٍ عديم الاحتكاك. قضيب غير دوّار، كتلته تساوي كتلة القرص وطوله يساوي قطر القرص، أُسقط فوق القرص الدائر، (الشكل 8-49). فأخذا بالدوران معًا حول المحور نفسه ومركزاهما متطابقان. فما التردّد الزاوي بـ rev/s للمجموعة؟



الشكل **8-49**:
(المسألة 60).

.61 (II) يقف شخصٌ كتلته 75 kg عند منتصف منصّةٍ دوامة نصف قطرها 3.0 m وعزم قصورها الذاتي $920\ \text{kg. m}^2$. تدور المنصّة من غير احتكاكٍ بسرعةٍ زاوية 2.0 rad/s. بدأ الشخص بالسير نحو حافة المنصّة. احسب: (أ) السرعة الزاوية عند وصول الشخص إلى الحافّة. (ب) الطاقة الحركيّة الدورانيّة للمنصّة والشخص قبل وبعد أن يسير.

.62 (II) منصّة دوّامة قطرها 4.2-m تدور من غير احتكاك بسرعةٍ زاوية 0.8 rad/s عزم قصورها الذاتي $1760\ \text{kg. m}^2$. يقف أربعة أشخاص كتلة كلٍّ منهم 65 kg على الأرض، وفجأةً يقفزون إلى حافّة المنصّة. ما السرعة الزاوية للمنصّة الآن؟ ماذا لو كان الأشخاص أصلًا على المنصّة، ثم قفزوا عنها قطريًّا بالنسبة إليها؟

63. (II) افرض أنَّ شمسنا انهارت إلى قزمٍ أبيض، ففقدت في هذه العمليّة نصف كتلتها، وأصبحت تلتفّ بنصف قطرٍ يعادل 1.0% من نصف قطرها الحالي. بفرض أنّ الكتلة الضائعة لم تحمل معها زخمًا زاويًا، ما معدّل الدوران الجديد للشمس؟ (خذ الزمن الدوري لتيار الشمس حوالي 30 يومًا). ماذا ستكون طاقتها الحركيّة النهائيّة بدلالة طاقتها الحركية الحالية؟

64. (II) قد تتضمّن الأعاصير رياحًا بسرعة 120 km/h عند حافّتها الخارجيّة. اعمل تقديرًا لـكلٍّ من: (أ) الطاقة. (ب) الزخم الزاوي لهذا الإعصار بفرض أن الإعصار تقريبًا أسطوانة منتظمة مصمتة من الهواء (كثافة $1.3\ kg/m^3$) نصف قطرها 100 km وارتفاعها 4.0 km.

65. (III) كُويكبٌ كتلته $1.0 \times 10^5\ kg$ يسير بسرعة 30 km/s بالنسبة إلى الأرض، يصطدم بالأرض مماسيًا عند خط الاستواء وباتجاه دوران الأرض. استخدم الزخم الزاوي لتقدير نسبة التغيّر في السرعة الزاوية للأرض نتيجة التصادم.

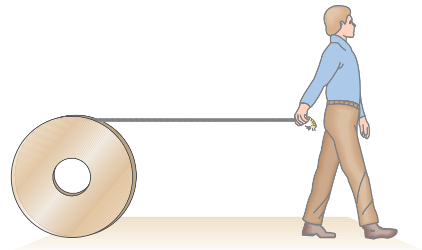
* 9-8 الكميات الزاوية كميات متجهة

** **66.** (II) يقف شخصٌ على منصّةٍ دوّارة ساكنة، ابتداءً يمكنها أن تدور من غير احتكاك. وعزم القصور للشخص والمنصة I_P. يحمل شخصٌ دولاب درّاجة يدور على محورٍ أفقي. الدولاب له عزم قصور ذاتي I_W وسرعة زاوية ω_W. ماذا ستكون السرعة الزاوية للمنصّة ω_P إذا حرّك الشخص محور الدولاب بحيث أصبح يشير: (أ) عموديًّا نحو الأعلى؟ (ب) بزاوية °60 مع العمودي؟ (جـ) عموديًّا نحو الأسفل؟

* **67.** (III) افرض أنّ شخصًا كتلته 55-kg يقف عند حافّةٍ دوّامةٍ قطرها 6.5-m محمولةً على بليّاتٍ عديمة الاحتكاك وعزم قصورها الذاتي $1700\ kg \cdot m^2$. ساكنة في البداية. ولكن عندما يبدأ الشخص بالركض بسرعة 3.8 m/s (بالنسبة إلى المنصة) على طول الحافّة، فإنّ المنصّة تبدأ بالدوران بالاتجاه المعاكس. احسب السرعة الزاوية للمنصة.

مسائل عامة

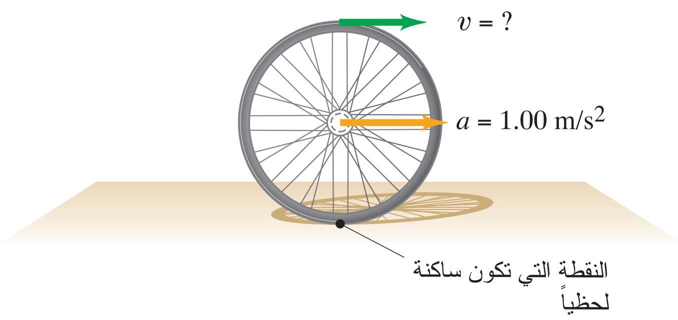
68. ملفٌّ كبيرٌ من الحبل يتدحرج على الأرض، بحيث إن نهاية الحبل في الجزء العلوي من الملفّ والنهاية الأخرى في يد شخصٍ يسير مسافة L ممسكًا بها، (الشكل 8-50). يتدحرج الملفّ خلف الشخص من غير انزلاق. كم طول الحبل الذي ينحلُّ من الخلف؟ ما المسافة التي يتحرّكها مركز الكتلة الملف؟



الشكل **8-50**
(المسألة 68)

69. يدور القمر حول الأرض بحيث يواجه الجانب نفسه من الأرض. حدّد نسبة الزخم الزاوي لبرم القمر (حول محوره) إلى الزخم الزاوي المداري له (افترض في هذا الجزء أنّ القمر جُسيمٌ يدور حول الأرض).

70. دولاب دراجةٍ يتسارع من السكون بمعدّل $1.00\ m/s^2$. ما سرعة حركة نقطةٍ عند قمّة الدولاب (قطره = 68 cm) بعد 3.0 s؟ [تنويه: عند أيّ لحظةٍ تلامس النقطة السفلية من الدولاب الأرض وتكون ساكنة- انظر الشكل 8-51].

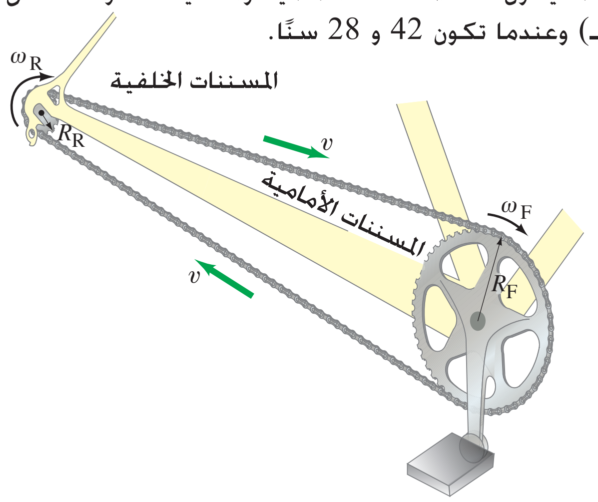


الشكل **8-51**
(المسألة 70)

71. حجر شحذ 1.4-kg بشكل أسطوانة منتظمة نصف قطرها 0.20 m تدور بمعدّل 1800 rev/s من السكون خلال 6.0-s وبتسارع زاوي ثابت. احسب عزم الدوران الذي يولده المحرك.

72. (أ) تُصنع لعبة الأطفال yo-yo من قرصين أسطوانيين مصمتين كتلة كلٍّ منهما 0.050 kg وقطره 0.075 m وتربطهما أسطوانةٌ كتلتها 0.0050 kg وقطرها 0.010 m. استعمل قانون حفظ الطاقة لحساب سرعة اللعبة الخطية عندما تصل إلى نهاية الخيط 1.0-m، إذا أُفلتت من السكون. (ب) ما نسبة الجزء الدورانيّ من طاقتها الحركية؟

73. (أ) بالنسبة إلى الدرّاجة الهوائيّة، ما علاقة السرعة الزاوية للدولاب الخلفي (ω_R) مع السرعة الزاوية للبدّالات والمسنّنات الأماميّة (ω_F)، (الشكل 8-52)؟ أي اشتق صيغة لـ ω_R/ω_F. افرض أنّ N_F و N_R عدد أسنان المسنّنات الأماميّة والخلفيّة على الترتيب. وقد تباعدت الأسنان على مسافات متساويه على المسننات جميعها حتى تتمكّن السلسلة من التوافق معها بسلاسة. (ب) احسب النسبة ω_R/ω_F عندما يكون عدد المسنّنات الأماميّة والخلفيّة 52 و 13 على الترتيب (جـ) وعندما تكون 42 و 28 سنًّا.

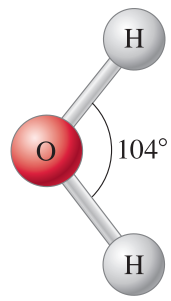


الشكل **8-52** (المسألة 73).

74. افرض أنّ نجمًا بحجم شمسنا، ولكن بكتلةٍ قدر شمسنا بـ 8.0 مرّات، يدور بسرعة 1.0 rev كل 12 يوميًا. إذا انهار هذا النجم تحت الجاذبيّة ليكون نجمًا نيوترونيًّا نصف قطره 11 km بحيث يفقد ثلاثة أرباع كتلته في هذه العمليّة، فماذا ستكون سرعته الدورانيّة؟ افرض أنّ النجم عبارةٌ عن كرةٍ منتظمةٍ دائمًا، وأنّ الكتلة الضائعة لم تحمل معها أيّ زخمٍ زاوي.

75. أحد احتمالات سيّارةٍ قليلة التلويث هو استعمال الطاقة المخزّنة بالحذّافة (دولاب الموازنة) الدوّارة. افرض أنّ مثل هذه السيارة كتلتها الكلية 1400 kg تستخدم حذّافة أسطوانة منتظمة قطرها 1.50 m وكتلتها 240 kg ويمكنها أن تسير 350 km دون الحاجة إلى إعادة تدوير الحذافة. (أ) اعمل فرضيّاتٍ معقولةً (قوّة احتكاك 450 N، عشرون مدّة تسارع من السكون إلى سرعة 95 km/h متساويةً في الصعود والهبوط، وأنّ الطّاقة يُعاد تخزينها في الحذّافة في أثناء الهبوط) وبيّن أنّ الطّاقة الكليّة اللازم تخزينها في الحذّافة هي 1.7×10^8 J (ب) ما السرعة الزاوية للحذّافة عندما تكون مشحونةً تمامًا بالطّاقة؟ (ج) كم يستغرق محرّكٌ قدرته 150-hp لتزويد الحذافة بشحنة طاقةٍ كاملةٍ قبل بداية الرحلة؟

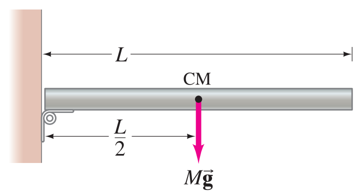
76. يبين (الشكل 8-53)جزيء ماء H_2O طول روابط O-H هو 0.96 nm، H-O-H يعمل زاوية 104°. احسب عزم القصور الذاتي لجزيء H_2O حول محورٍ يمرّ بمركز ذرة الأكسجين (أ) عموديًّا على مستوى الجزيء. (ب) في مستوى الجزيء لينصف الروابط H-O-H.



الشكل **8-53**
(المسألة 76)

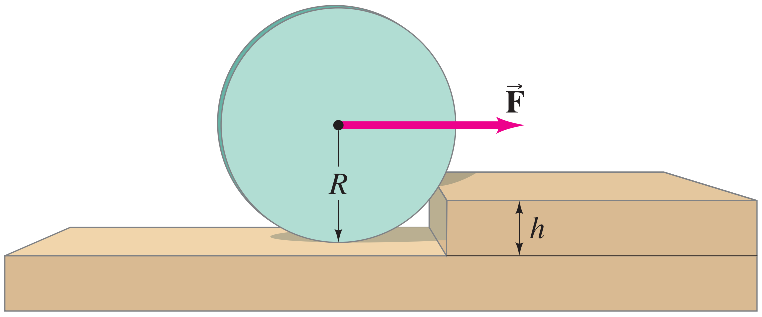
77. أسطوانةٌ جوفاء (طوق) تتدحرج على سطحٍ أفقيٍّ بسرعة $v = 3.3$ m/s عند وصولها إلى منحدرٍ يميل بزاوية 15°. (أ) ما المسافة التي ستسيّرها أعلى المنحدر؟ (ب) كم ستبقى على المنحدر قبل أن تعود إلى القاعدة؟

78. قضيبٌ منتظمٌ كتلته M، وطوله L، يمكن أن يدور بحريّة (اهمل الاحتكاك) حول مفصلٍ مثبتٍ بجدار، (الشكل 8-54). يمسك القضيب أفقيًّا ثمّ يفلتّ. عند لحظة الإفلات، احسب: (أ) التسارع الزاوي للقضيب. (ب) التسارع الخطّيّ لقمّة القضيب. افرض أنّ قوّة الجاذبيّة تؤثّر عند مركز كتلة القضيب، كما هو مبين [*تنويه:* انظر الشكل8-21 ي].



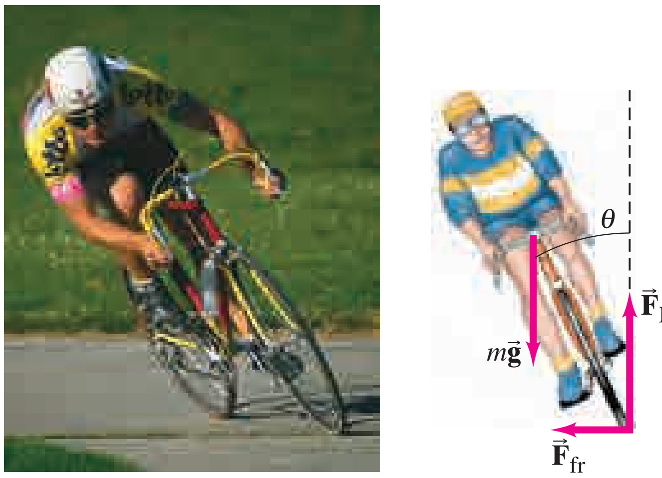
الشكل **8-54**
المسألة 78

79. دولابٌ كتلته M ونصف قطره R. يقف الدولاب على الأرض ونريد أن تؤثّر بقوة F على محوره بحيث يتسلّق درجةً يستند إليها (الشكل 8-55). ارتفاع العتبة h، حيث $h < R$. ما القوّة الدنيا F اللازمة لذلك؟



الشكل **8-55** (المسألة 79)

80. سائق درّاجة هوائيّة يسير بسرعة $v = 4.2$ m/s على طريقٍ مستوية، يدور منعطفًا نصف قطره $r = 6.4$ m. القوى التي تؤثّر في سائق الدرّاجة والدراجة هي القوّة العموديّة $(\vec{F}_N)$ وقوّة الاحتكاك $(\vec{F}_{fr})$ المتولّدة من الطريق على العجلات. وقوّة الوزن، الوزن الكلّي للدرّاجة والسائق (انظر الشكل 8-56).(أ) فسّر بدقةٍ لماذا يجب أن تُعطى الزاوية θ التي تعملها الدراجة مع العمودي بـ $\theta = F_{fr}/F_N$ إذا حافظ السائق على التوازن. (ب) احسب θ للقيم المعطاة. (جـ) إذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين العجلات والطريق يساوي $\mu_s = 0.70$ فما أقل نصف قطر للالتفاف؟

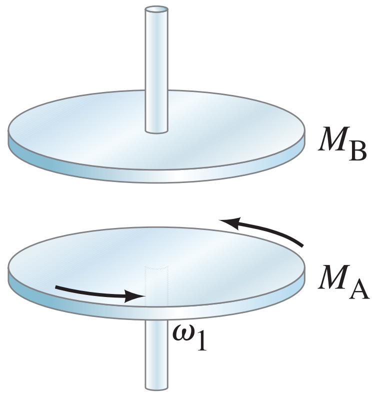


الشكل **8-56** (المسألة 80)

81. افرض أنّ داود وضع حجرًا كتلته 0.50-kg في المقلاع الذي طوله 1.5 m وبدأ بإدارتها في دائرة أفقيّة تقريبًا فوق رأسه، تسارعها من السكون إلى معدل 120 rpm خلال 5.0 s. ما العزم الدورانيُّ اللازم لتحقيق هذه الخطوة؟ ومن أين يأتي هذا العزم؟

82. ضع نموذجًا ما لمتزلّجة على الجليد، مفترضًا أنّ جسمها أسطوانةٌ مصمتةٌ وذراعيها كقضيبان بتقدير الأبعاد المعقولة. احسب نسبة سرعتها الزاوية بذراعين ممدودتين و بذراعين مضمومتين إلى الجذع.

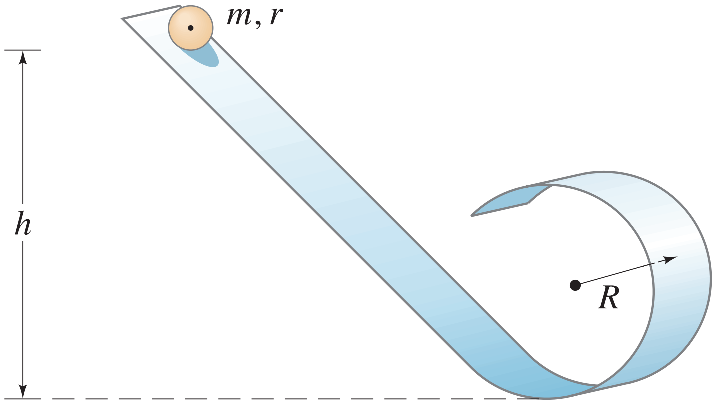
83. نصمّم القابض (جهاز تعشيق التروس)، الذي يتكوّن من صفيحتين أسطوانيتين كتلتاهما $M_A = 6.0\ \text{kg}$ و $M_B = 9.0\ \text{kg}$ وبأنصاف أقطارٍ متساوية $R = 0.60\ \text{m}$ تكون الصفيحتان ابتدءًا مفصولتين (الشكل 8-57) تتسارع الصفيحة M_A من السكون إلى سرعةٍ زاوية $\omega_1 = 7.2\ \text{rad/s}$ في زمن $\Delta t = 2.0\ \text{s}$. احسب: (أ) الزخم الزاوي لـــ M_A. (ب) العزم اللازم لتسارع M_A من السكون إلى ω_1. (ج) الصفيحة M_B في البداية ساكنةٌ وقابلةٌ للدوران من غير احتكاك، سُمح لها لتسقط عموديًّا (أو دُفعت بواسطة زنبرك) لتصبح ملتصقةً تمامًا بالكتلة M_A (سطحا تلامسهما عاليا الاحتكاك). قبل التماس، كانت M_A تدور بسرعةٍ ثابتة ω_1. وبعد التماس، بأيّ سرعة ω_2 تدور الصفيحتان معا؟



الشكل 8-57
(المسألة 83)

84. كرةٌ كتلتها m ونصف قطرها r، تتدحرج على السكّة الخشنة المبيّنة في (الشكل 8-58) . ما أقل ارتفاع h يجب أن تسقط منه الكرة إذا كان عليها الوصول إلى أعلى نقطةٍ في اللفة دون أن تغادر السكّة؟ افرض $r \ll R$، واهمل الضياع بسبب الاحتكاك.

85. أعد (المسألة 84) ، ولكن لا تفرض أن $r \ll R$.



الشكل 8-58 (المسائل 84 و 85 و 86).

86. لكي تكمل عجلات سيّارة 85 دورة عندما تخفض السيارة بانتظام سرعتها من 90.0 km/h إلى 60.0 km/h . قطر العجلات 00.90 m. (أ) ماذا كان التسارع الزاوي لكلّ عجلة؟ (ب) لو استمرّت السيّارة بالتباطؤ بالمعدّل نفسه، فكم تحتاج إلى وقت إضافي كي تتوقف؟

إجابات التمارين

أ: $f = 0.076\ \text{Hz}; T = 13\ \text{s}$

ب: $\vec{\mathbf{F}}_A$

جـ: نعم، تعمل شغلا لدفع ذراعيها.

د: الشغل يبذل في سحب الخيط وتقليل نصف قطر الدائرة.