يعدّ بندول الساعة مثالًا مناسبًا على الحركة الاهتزازيّة. وهناك الكثير من أنواع الحركة الاهتزازيّة تكون على هيئة دالة جيبية مع الزمن، أو أنّها تقريبًا كذلك، وتُدعى الحركة التوافقيّة البسيطة. إنّ الأنظمة الحقيقية، عامّةً، لا تخلو من بعض الاحتكاك، ممّا يجعل الحركة "مضمحلّة". فعندما تؤثّر قوّةٌ خارجيّةٌ جيبيّةٌ في نظامٍ ما قابل للاهتزاز، يحدث الرنين إذا كانت القوّة المحرّكة قريبةً من التردّد الطبيعيّ للاهتزاز أو عنده. إنّ الاهتزازات قد تؤدّي إلى موجات- كموجات الماء أو الموجات المتحرّكة في الوتر- تسير مبتعدة عن مصدرها.

الفصل 11

الاهتزازات والموجات

هناك الكثير من الاجسام تتأرجح أو تتذبذب، ومثال ذلك جسمٌ في نهاية زنبرك، شوكةٌ رنانةٌ، عجلة التوازن في ساعةٍ قديمة، البندول، مسطرةٌ بلاستيكيّةٌ مثبتة فوق حافة طاولة وتضرب برفق، خيوط القيثار أو البيانو، العناكب تكشف عن فريستها من اهتزازات أجنحتها، السيارة تتأرجح نحو الأعلى والأسفل عند المطبّات، وتهتزّ المباني والجسور عند مرور الشاحنات الثقيلة أو الرياح العاتية. وبسبب أنّ المواد الصلبة غالبًا ما تكون مرنه (انظر البند 9-5)، فإنّها تهتزّ عند إعطائها دفعًا. وفي المذياع والتلفزيون هناك موجاتٌ كهربائيّةٌ. وعلى المستوى الذرّيّ، تهتزّ الذرّات في الجزيئات، وكذلك تهتزُّ الذرّات في المواد الصلبة حول أماكن اتزانها. والحركة الاهتزازيّة مهمةٌ جدًّا لأنّها عامّة في الحياة اليوميّة وتحصل في كثيرٍ من مجالات الفيزياء. وأنّ الموجات الميكانيكية توصف بصورةٍ تامّةٍ على أساس ميكانيكا نيوتن.

إنّ الاهتزازات والحركة الموجية موضوعان متصلان؛ فالموجات- سواءً كانت موجاتٍ في المحيط ، أو موجاتٍ في وتر، أو موجات هزّاتٍ أرضيّة، أو موجاتٍ صوتيّةٍ في الهواء – كلّها لها مصدر هو الاهتزاز. وفي حالة الموجات الصوتية، فإنّ المصدر ليس فقط هو الذي يهتز؛ بل كذلك الكاشف- طبلة الأذن، أو غشاء الميكروفون. وبالفعل، عندما تسير موجةٌ في وسطٍ ما، فإنّ الوسط يهتزّ (مثل الهواء في حالة الموجات الصوتية). في الجزء الثاني من هذا الفصل، وبعد أن نناقش الاهتزازات، سنناقش الموجات البسيطة مثل موجات الماء أو الأوتار. وأما في (الفصل 12)، فسوف ندرس موجات الصوت، وسوف نعالج في فصولٍ لاحقةٍ أشكالًا أخرى من الحركة الموجية متضمّنةً الموجات الكهرومغناطيسيّة والضوء.

1-11 الحركة التوافقية البسيطة

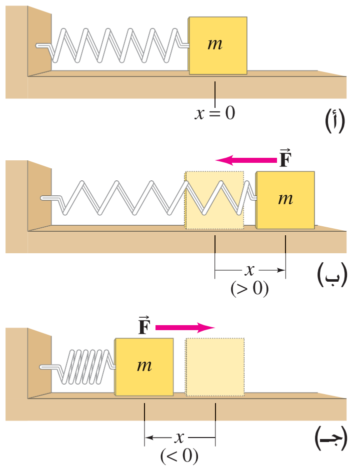
عندما يهتزّ جسمٌ أو يتأرجح نحو الأمام والخلف في المسار نفسه، فإنّ كلّ اهتزازةٍ تستغرق المقدار نفسه من الزمن، وبذلك تكون الحركة دوريّة.

إنّ أبسط شكلٍ من الحركات الدورية تُمَثَّلُ بجسمٍ يتأرجح في نهاية زنبركٍ منتظم. ولأنّ كثيرًا من الأنظمة المهتزّة تشبه هذا النظام، فسنعالجه بالتفصيل. ويمكن إهمال كتلة الزنبرك، وأنّه موضوعٌ أفقيًّا كما في (الشكل 11-1أ) بحيث ينزلق الجسم الذي كتلته m دون احتكاك على السطح الأفقي. لكلّ زنبركٍ طولٌ طبيعيٌّ بحيث لايؤثّر بأيّ قوّةٍ في الكتلة m عند هذا الطول. إذا حركت الكتلة نحو اليسار بحيث تضغط الزنبرك، أو نحو اليمين بحيث يستطيل الزنبرك، عندها سيؤثر الزنبرك بقوّةٍ في الكتلة باتّجاهٍ يعمل على إعادة الكتلة إلى **موضع الاتزان**. لذلك، تُسَمّى هذه "قوّة إعادة". وسنعتمد الوضع الشائع بحيث يمكن افتراض أنّ مقدار قوّة الإعادة F يتناسب طرديًّا مع الإزاحة x التي استطالها الزنبرك (الشكل 11-1ب) أو انضغط (الشكل 11-1جـ) عن موضع الاتزان :

موضع الاتزان

$$F = -kx \qquad \text{(قوّة ناجّة من الزنبرك)} \qquad (1\text{-}11)$$

لاحظ أنّنا اخترنا موضع الاتزان عند $x = 0$. (المعادلة 11-1) التي تُسَمّى قانون هوك (انظر البندين 4-6 و9-5)، يُعدّ دقيقًا مادام الزنبرك لم ينضغط أو يستطيل بحيث يتعدّى حدّ المرونة (انظر الشكل 9-19).



الشكل 11-1 كتلة تهتز عند نهاية زنبرك منتظم .

تشير إشارة السالب في (المعادلة 11-1) إلى أنّ قوّة الإعادة تكون دائمًا في الاتجاه المعاكس للإزاحة x. فمثلاً، إذا اخترنا الاتجاه الموجب نحو اليمين في (الشكل 11-1ب) ، فإنّ x تكون موجبةً عندما يستطيل الزنبرك. في حين يكون اتجاه قوّة الإعادة نحو اليسار (الاتجاه السالب). وإذا انضغط الزنبرك، فستكون x سالبة (إلى اليسار) ولكن القوّة ستؤثّر نحو اليمين (الشكل 11-1 جـ).

ثابت المرونة k في (المعادلة 11-1) يُسمّى ثابت الزنبرك أو معامل صلابة الزنبرك F. ولاستطالة الزنبرك مسافة x ؛ علينا أن نؤثّر بقوّة (خارجيّة) على النهاية الحرّة للزنبرك على الأقلّ بمقدار

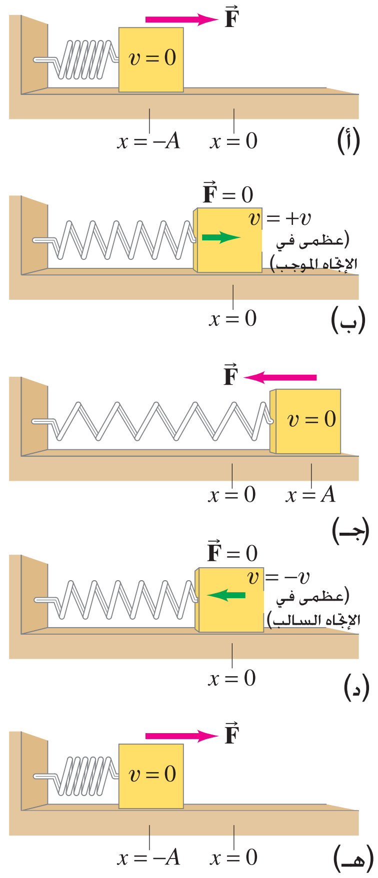
$$F = +kx \qquad \text{(قوّة خارجيّة على الزنبرك)}$$

وكلّما كانت قيمته k أكبر، زادت القوّة اللازمة لاستطالة الزنبرك مسافةً معيّنة ؛ أي أنّه كلّما كان الزنبرك أصلب، كان ثابت الزنبرك k أكبر.

لاحظ أنّ القوّة F في (المعادلة 11-1) ليست ثابتة، ولكنّها تتغيّر بتغيّر الموضع. لذا، فإنّ تسارع الكتلة m ليس ثابتًا. وعليه، لانستطيع استعمال معادلات الحركة بتسارعٍ ثابتٍ، كما في (الفصل 2).

تنويه:
القوة و التسارع ليسا ثابتين
المعادلات: 11-2 ليست مفيدة هنا .

دعنا نراقب ماذا يحصل عندما ينضغط زنبركنا المنتظم مسافة $x = -A$، كما هو مبيّن في (الشكل 2-11أ)، ثمّ يفلت. يؤثّر الزنبرك بقوّةٍ في الكتلة حيث تُعاد إلى موضع الاتزان. ولكن لأنّ الكتلة تسارعت بسبب القوّة، فإنّها تمرّ من موضع الاتزان بسرعةٍ معقولة. وفي الواقع، حال وصول الكتله إلى موضع الاتزان، فإنّ القوّة المؤثّرة فيها تنقص إلى الصفر، إلا أنّ سرعتها عند هذه النقطة تكون أكبر ما يمكن ، v_{max}، (الشكل 2-11 ب). وعندما تتحرّك الكتله أكثر نحو اليمين، فإنّ القوّة المؤثّرة فيها تحاول إبطاءها، وتتوقّف لحظيًّا عند $x = A$، (الشكل 2-11 جـ). ثم تبدأ بالحركة راجعةً في الاتجاه المعاكس، وتتسارع حتى تمرّ في نقطة الاتزان، (الشكل 2-11 د)، ثم تتباطأ حتى تصل إلى سرعةٍ تساوي صفرًا عند نقطة البداية الأصلية، $x = -A$، (الشكل 2-11 هـ). ثم تكرّر الحركة متحرّكةً نحو الخلف والأمام بصورةٍ متماثلة بين $x = A$ ، و $x = -A$.



الشكل 2-11 القوة على، والسرعة لكتلة في مواقع مختلفة من دورة الاهتزاز على سطح عديم الاحتكاك.

تمرين أ: يهتزُ جسمٌ للأمام والخلف. أيٌّ من هذه العبارات تكون صحيحةً عند زمنٍ معيّنٍ خلال الحركة: (أ) يكون للجسم سرعةٌ غير الصفر، وتسارعه في اللحظة نفسها لا يساوي صفرًا. (ب) قد يكون للجسم سرعةٌ، صفر، وكذلك تسارع صفر. (جـ) قد يكون تسارع الجسم صفرًا، ولكن سرعته ليست كذلك. (د) قد لاتكون سرعة الجسم وتسارعه صفرًا.

إذا رغبنا في مناقشة الحركة الاهتزازيّة، فاننّا بحاجةٍ إلى تعريفٍ يصف التعبيرات؛ فالإزاحة هي المسافةُ x التي تقطعهما m من موضع الاتزان عند أيّ لحظة.

إن أقصى **إزاحة** – أكبر مسافة عن موضع الاتزان- تُسَمَّى الاتساع، A. تعود الدورة إلى الحركة ذهابًا وإيابًا بصورةٍ كاملةٍ ابتداءً من نقطةٍ معيّنة، ومثال ذلك من $x = -A$ إلى $x = A$، ثم العودة إلى $x = -A$.

يُعرَّف الزمن الدوري، T، بأنّه الزمن اللازم لعمل دورةٍ كاملة. وأخيرًا، فإن التردّد، f ، هو عدد الدورات الكاملة في الثانية الواحدة. ووحدة التردّد عادة هي *Hertz* (Hz) حيث (s^{-1}) دورة/s $1\ \text{Hz} = 1$

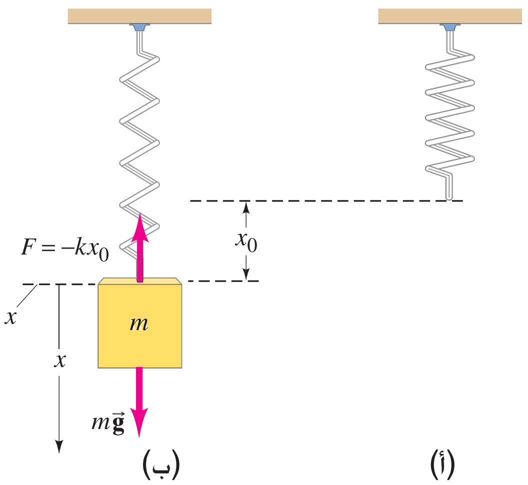
ويمكنا ملاحظة أنّ العلاقة بين التردد والزمن الدوريّ عكسيّة، كما لاحظنا سابقًا (المعادلتان 2-5 و 8-8):

$$f = \frac{1}{T},\ T = \frac{1}{f} \qquad (2\text{-}11)$$

فمثلًا، إذا كان التردّد 5 دوراتٍ في الثانية، فإنّ كلّ دورةٍ تستغرق $\frac{1}{5}$s. وفي الواقع، إنّ اهتزاز زنبركٍ معلّق عموديًّا هو نفسه الاهتزاز للزنبرك الأفقي. وبسبب الجاذبيّة، فإنّ الزنبرك العموديّ بوجود كتلة m عند نهايته سيكون أطول عند الاتزان ممّا لو كان الزنبرك أفقيًّا، كما هو مبيّن في (الشكل11-3). يكون الزنبرك متزنًا عندما $\Sigma F = 0 = mg - kx_0$. لذلك، يمتط الزنبرك بمقدار إضافي $x_0 = mg/k$ ليصبح في وضع الاتزان. وإذا قيست x من موضع الاتزان الجديد هذا، فيمكن عندئذٍ استخدام (المعادلة 11-1)مباشرة مع الثابت k نفسه.

تنويه:

للزنبرك العمودي، قس الإزاحة x أو y من موضع الاتزان الرأسي الجديد.



تقاس x من هذا الموضع.

الشكل 11-3
(أ)زنبرك حر معلق عموديًا.
(ب)الكتلة m مثبته بالزنبرك في موضع اتزان جديد. ويحصل عندما $\sum F = 0 = mg - kx_0$

المثال 11-1 زنبركات السيارة

عندما تركب عائلة مكوّنة من أربعة أشخاصٍ كتلتهم 200 kg سيارتها التي كتلتها 1200-kg، فإنّ زنبركات السيارة تنضغط 3.0 cm. (أ) ما ثابت الزنبرك لهذه السيارة (الشكل 11-4)، إذا فرضنا أنّها تتصرف كزنبرك واحد؟ (ب) إلى أيّ مدى سوف تنخفض السيارة إذا حملت بـ 300 kg بدلًا من 200 kg؟

النهج: نستعمل قانون هوك. القوّة الفائضة المساوية لوزن الأشخاص mg، تسبب إزاحة 3.0-cm.

الحل: (أ) القوّة المضافة مقدارها $(200\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) = 1960\,\text{N}$ تسبّبُ انضغاط الزنبركات 3.0×10^{-2} m. لذلك (المعادلة 11-1):

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1960\,\text{N}}{3.0 \times 10^{-2}\,\text{m}} = 6.5 \times 10^4\,\text{N/m}.$$

(ب) إذا حملت السيارة بـ 300 kg، فسيعطينا قانون هوك بأن:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{(300\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)}{(6.5 \times 10^4\,\text{N/m})} = 4.5 \times 10^{-2}\,\text{m},$$

أو 4.5 cm

ملحوظة: يمكننا الحصول على x دون إيجاد قيمة k؛ لأنّ x تتناسب مع F. وإذا كان 200 kg تضغط الزنبرك 3.0 cm، إذن، 1.5 مرّةٍ قدر القوّة سوف تضغط الزنبرك 1.5 مرّةٍ قدر 3.0 cm، أي 4.5 cm.

الشكل 11-4 صورة لزنبرك سيارة، (كذلك نرى ماصّ الصدمة، باللّون الأحمر، انظر البند 11-5).

SHM
SHO

إذا اهتزّ أيّ نظامٍ بحيث تتناسب قوّة الإعادة طرديًّا مع سالب الإزاحة (كما في المعادلة 11-1 ، $F = -kx$) فيُقال عندما إنّ النظام يظهر حركةً توافقيّةً بسيطة (SHM)*. ويُقال كذلك إنّ هذا النظام مهتزٌّ توافقيٌّ بسيط (SHO). وقد رأينا في (البند 9-5) أنّ معظم المواد الصلبة تمتدّ أو تنضغط تبعًا (للمعادلة 11-1) ما دامت الإزاحة ليست كبيرة. لذا، فإنّ كثيرًا من الاهتزازات الطبيعيّة تكون توافقيّةً بسيطةً، أو قريبةً جدًّا من ذلك، بحيث يمكن معالجتها تبعًا لنموذج SHM.

المثال المفاهيمي 11-2 هل الحركة توافقية بسيطة؟

أيٌّ ما يلي يمثّل مهتزًّا توافقيًّا بسيطًا (SHO):

(أ) $F = -0.5x^2$ (ب) $F = -2.3y$

(جـ) $F = 8.6x$ (د) $F = -4\theta$

الإجابة: كلّ من (ب) و (د) يمثّل مهتزًّا توافقيًّا بسيطًا لأنّهما يعطيان القوّة بصورة سالب مقدار ثابت مضروبًا في الإزاحة. إنّ الإزاحة ليست بالضرورة x، ولكنّ الإشارة السالبة مطلوبةٌ لإعادة النظام إلى الاتزان، ولهذا السبب أن (جـ) ليست (SHO).

11-2 الطاقة في المهتز التوافقي البسيط

يُعدُّ التعامل مع مبدأ الطاقة ملائمًا ومفيدًا مع القوى المتغيّرة كما في الحركة التوافقيّة البسيطة كما رأينا في الفصل 6. لضغط زنبرك أو استطالته؛ لابدّ من عمل شغلٍ. لذا، فإنّ طاقة الوضع تختزن في الزنبرك المضغوط والممتد. وفي الواقع، فقد رأينا سابقًا في البند 6-4 أن طاقة وضع المرونة تُعطى بـ

$$\text{PE} = \tfrac{1}{2}kx^2$$

والطاقة الميكانيكيّة الكليّة E لنظام الكتلة – الزنبرك تساوي مجموع الطاقتين الحركيّة والوضع.

الطاقة الكلية لـ SHO

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2, \qquad \text{(11-3)}$$

حيث v سرعة الكتلة m عندما تكون على بعد x من موضع الاتزان. وبما أنّه لايوجد هناك احتكاك، فإنّ الطاقة الميكانيكيّة الكلية E تبقى ثابتة.

* كلمة توافقي تعود إلى أنّ الحركة هي حركة "جيبيّة"، وهذا ماسنناقشه في البند 11-3. وتُعدّ "بسيطة" عندما تكون حركة جيبيّة بتردّد منفرد.

وعندما تتحرّك الكتلة إلى الأمام والخلف، فإنّ الطاقة تتغيّر من طاقة وضع إلى طاقة حركيةٍ، ومن ثمّ بالعكس. عند نقطتي النهاية $x = -A$ و $x = A$ (الشكل 11-5 أ، جـ) تختزن الطاقة كلّها في الزنبرك بصورة طاقة وضع (وتكون متساوية سواء أكان الزنبرك ممتدًّا أم منضغطًا إلى أقصى اتساع). وعند هاتين النهايتين، تتوقّف الكتلة لحظيًّا عند تغيير اتّجاه الحركة، حيث $v = 0$ و

$$E = \tfrac{1}{2}m(0)^2 + \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad \textbf{(4-11 أ)}$$

وبذلك تكون الطاقة الميكانيكيّة الكليّة للمهتزّ البسيط التوافقيّ متناسبةً مع مربّع الاتساع. وعند نقطة الاتزان $x = 0$ (الشكل 11-5ب) تكون الطاقة كلّها حركيّة:

$$E = \tfrac{1}{2}mv_{\max}^2 + \tfrac{1}{2}k(0)^2 = \tfrac{1}{2}mv_{\max}^2 \qquad \textbf{(4-11 ب)}$$

حيث تمثّل $v_{\max}$ السرعة القصوى خلال الحركة (التي تحدث عند $x = 0$). وأمّا عند النقاط المتوسطة (الشكل 11-5د) فإنّ الطاقة تكون حركيّة ووضعًا. ولأنّ الطاقة محفوظة (نستعمل المعادلتين 11-3 ، 11-4أ)، فسنجد:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2. \qquad \textbf{(4-11 جـ)}$$

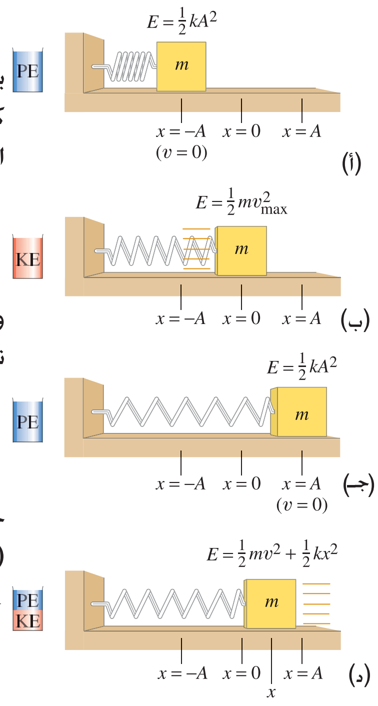
من صيغة الحفظ هذه، يمكن حساب السرعة كدالة في الموقع. ونحلّ لإيجاد v^2:

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) = \frac{k}{m}A^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right).$$

من (المعادلتين 11-4 أ و 11-4 ب)نحصل على $\tfrac{1}{2}mv_{\max}^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$ وعليه، فإنّ $v_{\max}^2 = (k/m)A^2$، ثم نعوض هذه في المعادلة أعلاه ونأخذ الجذر التربيعيّ للطرفين:

$$v = \pm\, v_{\max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \qquad \textbf{(5-11)}$$

وهذه تعطي سرعة الجسم عند أي موقع x. وبسبب تحرك الجسم إلى الأمام والخلف ، فإنّ سرعته تكون بالاتّجاه الموجب أو السالب، ولكنّ مقدارها يعتمد على مقدار x فقط.



الشكل 11-5 تتغير الطاقة من حركية إلى وضع، ثم العكس مع اهتزاز الزنبرك.

المثال المفاهيمي 11-3 مضاعفة الاتساع

افرض أنّ الزنبرك (الشكل 11-5) استطال إلى ضعف قيمته (أي $x=2A$). ماذا يحصل لـكلٍّ من: (أ) طاقة النظام؟ (ب) السرعة القصوى للكتلة المتأرجحة؟ (جـ) التسارع الأقصى للكتلة المتأرجحة؟

الحل: (أ) من (المعادلة 11-4 أ)، تتناسب الطاقة الكليّة مع مربع الاتساع A. لذا، فإنّ زيادة الاتساع إلى الضعف تزيد الطاقة إلى أربعة أمثال قيمتها الأولى ($2^2 = 4$). قد تعترض وتقول: "بذلت شغلًا لاستطالة الزنبرك من $x = 0$ إلى $x = A$، ألا أبذل شغلًا مساويًا عند الاستطالة من A إلى $2A$؟ كلا. لأنّ القوّة التي تؤثّر بها تتناسب مع x. إذن، بالنسبة إلى الاستطالة الثانية من $x = A$ إلى $x = 2A$ فإنّها تبذل شغلًا أكبر من الحالة الأولى من $x = 0$ إلى $x = A$.
(أ) من المعادلة 11-4 (ب) يمكننا رؤية أنّ الطاقة أصبحت أربعة أمثال الأولى. لذا، فإنّ السرعة تتضاعف

$$[v_{\max} \propto \sqrt{E} \propto A.]$$

(جـ) بما أنّ القوة ضعف الأولى، لذلك يكون التسارع أيضا ضعف الأول
$a \propto F \propto x.$

تمرين ب: افرض أنّ الزنبرك في (الشكل 11-5) انضغط إلى $x = -A$، ثم أُعطي دفعةً نحو اليمين لتكون سرعته الابتدائية v_0. ما أثر هذه الدفعة في (أ) طاقة النظام؟ (ب) السرعة القصوى؟ (جـ) التسارع الأقصى؟

المثال 11-4 حسابات الزنبرك

يمتد زنبرك 0.150 m عندما تتدلّى منه كتلة 0.300-kg برفق كما في (الشكل 11-3 ب) . وضع الزنبرك أفقيًّا بحيث تستند الكتلة 0.300-kg إلى طاولةٍ ملساء كما في (الشكل 11-5). سُحبت الكتلة 0.100 m من وضع الاتزان ثمّ أُفلتت من السكون. احسب: (أ) ثابت صلابة الزنبرك k. (ب) اتساع الاهتزازة الأفقيّة. (جـ) مقدار أكبر سرعة v_{max}. (د) مقدار السرعة عندما تكون الكتلة على بعد 0.050 m من الاتزان. (هـ) مقدار أكبر تسارع a_{max} للكتلة.

النّهج: عندما تعلّق الكتلة 0.300-kg ساكنة من الزنبرك كما في(الشكل 11-3 ب) ، يطبق قانون نيوتن الثاني للقوى العمودية. $\Sigma F = 0 = mg - kx_0$. لذا $k = mg/x_0$، أمّا بالنسبة إلى الاهتزازات الأفقيّة فالاتساع معلوم، وتُحسب السرعات باستخدام قانون حفظ الطاقة، والتسارع من $F = ma$.

الحلّ: (أ) يمتدّ الزنبرك 0.150 m بسبب الوزن 0.300-kg ،

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{mg}{x_0} = \frac{(0.300\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)}{0.150\ \text{m}} = 19.6\ \text{N/m}$$

(ب) الزنبرك الآن أفقي (على طاولة). امتدّ 0.100 m من وضع الاتزان، وأُعطي سرعة ابتدائيّة. إذن، $A = 0.100\ \text{m}$.

(جـ) السرعة القصوى v_{max} تصلها الكتلة عند مرورها بنقطة الاتزان حيث الطاقة كلّها حركيّة بمقارنة الطاقة الكليّة (المعادلة 11-3)، عند الاتزان بالطاقة عند أقصى ازاحة (امتداد)، نجد من حفظ الطاقة أنّ:

حيث $A = 0.100\ \text{m}$ أو قارن (المعادلتين 11-4 أ و ب). ثم حل المعادلة لايجاد قيمة v_{max} نجد أن:

$$\tfrac{1}{2}mv_{max}^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.100\ \text{m})\sqrt{\frac{19.6\ \text{N/m}}{0.300\ \text{kg}}} = 0.808\ \text{m/s}$$

(د) نستعمل حفظ الطاقة أو (المعادلة 11-5)المشتقّة منها لنجد

$$v = v_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} = (0.808\ \text{m/s})\sqrt{1 - \frac{(0.050\ \text{m})^2}{(0\ 100\ \text{m})^2}} = 0.70\ \text{m/s}$$

(هـ) من قانون نيوتن الثاني $F = ma$، يكون التسارع أكبر ما يمكن عندما تكون الإزاحة أكبر ما يمكن $x = A = 0.100\ \text{m}$

$$a_{max} = \frac{F_{max}}{m} = \frac{kA}{m} = \frac{(19.6\ \text{N/m})(0.100\ \text{m})}{0.300\ \text{kg}} = 6.53\ \text{m/s}^2$$

ملحوظة: لا نستطيع استعمال معادلات الحركة؛ (المعادلات 11-2)، لأنّ التسارع غير ثابت في الحركة التوافقية البسيطة SHM.

المثال 11-5 حسابات إضافية للزنبرك ــ الطاقة

فيما يتعلّق بالمهتزّ التوافقيّ البسيط في (المثال 11-4)، احسب: (أ) الطاقة الكليّة. (ب) طاقتي الحركة والوضع عند نصف الاتساع $(x = \pm A/2)$

النّهج: نستعمل حفظ الطاقة لنظام الكتلة –الزنبرك، المعادلتان 11-3، و 11-4.

الحلّ: (أ) مع $k = 19.6\ \text{N/m}$ و $A = 0.100\ \text{m}$ ، الطاقة الكلية E من (المعادلات 11-4أ) هي

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\ \text{N/m})(0.100\ \text{m})^2 = 9.80 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

(ب) عند $x = A/2 = 0.050\text{m}$

$$\text{PE} = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\ \text{N/m})(0.050\ \text{m})^2 = 2.5 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

ومن قانون حفظ الطاقة، يجب أن تكون الطاقة الحركيّة

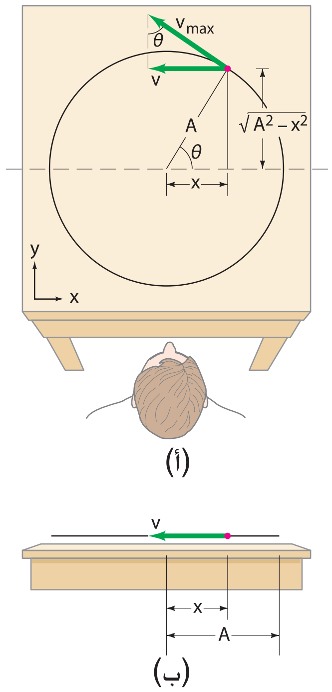
$$\text{KE} = E - \text{PE} = 7.3 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

3-11 الزمن الدوري والطبيعة الجيبية لـ SHM

يعتمد الزمن الدوريّ للمهتزّ التوافقيّ على كلّ من صلابة الزنبرك والكتلة المتأرجحة "m". ولكن – كما يبدو غريبًا – فإنّ الزمن الدوريّ لا يعتمد على الاتساع. ويمكنك إثبات ذلك باستعمال ساعة من خلال إيجاد الوقت اللازم لعمل 10 أو 20 دورةً لزنبركٍ مهتزٍّ؛ لاتساعٍ صغيرٍ أولا، ومن ثمّ لاتساعٍ كبير.

يمكننا اشتقاق الزمن الدوريّ للحركة التوافقيّة البسيطة (SHM) بمقارنة SHM بجسمٍ يدور في دائرة. ومن هذه الدائرة المرجعيّة، يمكننا الحصول على نتيجةٍ ثانيةٍ مهمّةٍ وهي صيغةٌ لموقع الكتلة المتأرجحة كدالّةٍ في الزمن.

في الواقع، لا يوجد شيءٌ يدور في دائرة عندما يهتزّ الزنبرك خطيًّا، لكن التشابه الرياضيّ الذي نحصل عليه سيكون مفيدًا.



الشكل 11-6 (أ) حركة دائرية لجسم (أحمر) صغير. (ب) منظر جانبي لحركة دائرية (مركبة x) هي حركة توافقية بسيطة.

الزمن الدوري والتردد

افترض جسمًا صغيرًا كتلته m يدور باتّجاه عكس اتّجاه عقارب الساعة في دائرة نصف قطرها A بسرعةٍ ثابتة v_{max}، على سطح طاولةٍ كما هو مبين في (الشكل 11-6). عند النظر إليه من الأعلى، تكون الحركة دائريّةً في المستوى xy. إلّا أنّ الشخص الذي ينظر إلى الحركة من حافة الطاولة، سيرى حركةً اهتزازيّةً نحو الخلف والأمام، وهذه الحركة الخطيّة تنسجم تمامًا مع الحركة التوافقيّة البسيطة كما سنشاهد الآن.

ماذا يرى الشخص؟ وما المهمّ بالنسبة لنا؟ إنّه مسقط الحركة الدائريّة على محور السينات (الشكل 11-6 ب). لذا، فهذه الحركة السينيّة تناظر SHM. دعنا نحسب مقدار المركبة السينيّة للسرعة v_{max} التي تدعى v في (الشكل 11-6). المثلثان المحتويان على θ في (الشكل 11-6 أ) متشابهان، لذلك

$$\frac{v}{v_{max}} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}$$

أو

$$v = v_{max}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$

وهذه بالضبط معادلة السرعة لكتلة تهتزّ بحركةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ كما رأينا في (المعادلة 11-5). وهكذا المسقط على المحور x لجسمٍ يدور في دائرةٍ له الحركة نفسها مثل كتلة في نهاية زنبرك.

والآن، يمكننا تحديد الزمن الدوري لـ SHM لأنّه يساوي زمن الجسم الدائر عندما يعمل دورةً كاملةً. نلاحظ أولًا أنّ السرعة v_{max} تساوي محيط الدائرة (مسافة) مقسومًا على الزمن الدوري T

$$v_{max} = \frac{2\pi A}{T} = 2\pi A f \qquad \textbf{(6-11)}$$

ونحل لإيجاد الزمن الدوري T

$$T = \frac{2\pi A}{v_{max}}.$$

لحفظ الطاقة، من المعادلتين 11-4 أ و11-4 ب لدينا $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ لذلك $A/v_{max} = \sqrt{m/k}$ وهكذا

الزمن الدوري لـ SHO

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad \textbf{(7-11 أ)}$$

الزمن الدوري والتردد لـ SHM لا يعتمدان على الاتساع.

وهذه هي العلاقة التي نبحث عنها. تعتمد الفترة (الزمن الدوري) على الكتلة وصلابة الزنبرك k، ولكنّها لا تعتمد على الاتساع A. ونرى من (المعادلة 11-7 أ) أنّه كلّما كانت الكتلة أكبر، كان الزمن الدوريّ أكبر. وكلّما كان الزنبرك أصلب (k أكبر)، كان الزمن الدوريّ أقصر. وهذا منطقيٌّ؛ لأنّه كلّما زادت الكتلة زاد القصور، أي أنّ الاستجابة أبطأ (تسارع أصغر). وكلّما كبرت k زادت القوّة، وبالتالي فالاستجابة أسرع (تسارع أكبر). لاحظ أنّ (المعادلة 11-7 أ) ليست تناسبًا مباشرًا؛ يتغيّر الزمن الدوريّ مع الجذر التربيعيّ لـ m/k. فمثلاً، يجب أن يكون قدر الكتلة أربعة أضعاف لمضاعفة الزمن الدوري.

تتفق (المعادلة 11-7أ) تمامًا مع التجربة، وتنطبق، ليس فقط على الزنبرك، بل على أنواع الحركة التوافقية البسيطة كلّها؛ أي للحركة التي تخضع لقوة إعادة تتناسب مع الإزاحة، (المعادلة 11-1).
يمكننا كتابة التردّد باستعمال $f = 1/T$ (المعادلة 11-2):

تردد (f) لـ SHM

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{(11-7ب)}$$

التمرين جـ: متى يكون ارتداد السيارة أسرع على زنبركاتها، عندما تكون فارغةً أم مليئةً تمامًا؟

المثال 11-6 | قدّر | **شبكة العنكبوت**

الشكل 11-7 العنكبوت ينتظر فريسته (المثال 11-6).

ينتظر عنكبوت كتلته $0.30\,\text{g}$ في شبكته ذات الكتلة المهملة (الشكل 11-7). تسبّب حركةٌ خفيفةٌ اهتزاز الشبكة بتردّدٍ يقارب $15\,\text{Hz}$: (أ) احسب، بالتقريب، قيمة ثابت الصلابة لشبكة العنكبوت. (ب) بأيّ تردّد تتوقع أن تهتزّ الشبكة لو وقعت عليها حشرة كتلتها $0.10\,\text{g}$ بالإضافة إلى العنكبوت؟

النّهج: يمكننا عمل تقريبٍ أوليٍّ لأنّ شبكة العنكبوت معقّدةٌ إلى حدٍّ ما ويمكن أن تهتزّ بعدَّة تردّدات. وسنستعمل SHM كنموذج تقريبي.

الحل: (أ) تردّد SHM يعطَى (بالعلاقة 11-7 ب)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ومنها k تساوي

$$k = (2\pi f)^2 m$$
$$= (6.28 \times 15\,\text{s}^{-1})^2(3.0 \times 10^{-4}\,\text{kg}) = 2.7\,\text{N/m}.$$

(ب) الكتلة الكليّة الآن هي $0.10\,\text{g} + 0.30\,\text{g} = 4.0 \times 10^{-4}\,\text{kg}$. يمكننا تعويض الكتلة $m = 4.0 \times 10^{-4}\,\text{kg}$ في (المعادلة 11-7 ب)، ولكن بدلًا من ذلك، فإنّ التردّد يقلّ مع مقلوب الجذر التربيعيّ للكتلة. وبما أنّ نسبة الكتلة الجديدة إلى القديمة كنسبة $4/3$ مضروبةً في الكتلة الأولى، فإنّ التردّد يتغيّر بمعامل $1/\sqrt{4/3} = \sqrt{3/4}$ وهكذا $f = (15\,\text{Hz})(\sqrt{3/4}) = 13\,\text{Hz}$

ملحوظة: اختبر هذه النتيجة بالتعويض المباشر لقيمة k التي وجدناها في الفرع (أ) والكتلة الجديدة في (المعادلة 11-7ب).

الموقع كدالة في الزمن

نستعمل الآن الدائرة المرجعيّة لإيجاد موقع الكتلة التي تتحرّك حركةً توافقيّةً بسيطةً كدالّةٍ في الزمن. من (الشكل 11-6)، نرى أنّ $\cos\theta = x/A$. لذا، فإنّ مسقط موقع الجسم على محور x هو

$$x = A\cos\theta$$

لأنّ الكتلة تدور بسرعة زاوية ω، ويمكننا كتابة $\theta = \omega t$ حيث θ بالراديان (بند 8-1). وهكذا

الموقع

$$x = A\cos\omega t \qquad \textbf{(11-8أ)}$$

وعلاوة على ذلك، بما أنّ السرعة الزاوية ω (تعطى بالراديان / ثانية) فيمكن كتابتها على الصورة $\omega = 2\pi f$، حيث f هو التردد (المعادلة 8-7)، ثم نكتب

كدالة في زمن (SHM)

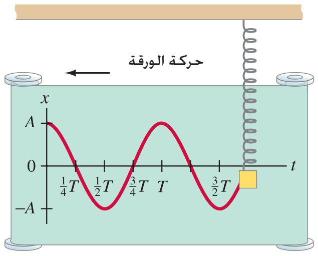
$$x = A\cos(2\pi f t) \qquad \textbf{(11-8ب)}$$

أو بدلالة الزمن الدوري T

$$x = A\cos(2\pi t/T) \qquad \textbf{(11-8جـ)}$$

لاحظ في (المعادلة 11-8جـ)أنه عندما $t = T$ (أي بعد زمن يساوي زمنًا دوريًّا) يكون عندنا cosine 2π وهي نفسها cosine صفر. وهذا معقول لأنّ الحركة تعيد نفسها كلّ زمن $t = T$.

تنويه:
t زمن متغير، أمّا T فثابت لوضع معين.



الشكل 11-8 الموقع دالة في الزمن $x = A\cos(2\pi t/T)$

كما رأينا، المركبة x لحركة جسمٍ يدور بانتظام تنسجم بدقّةٍ مع حركة مهتزٍّ توافقيٍّ بسيط. وهكذا، فإنّ (المعادلة 11-8) تعطي موقع الجسم الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة. وبما أنّ دالة cosine (جيب التمام) تتغير بين 1 و 1−، فإنّ x تتغير بين A و $-A$، كما يجب أن تكون. إذا ثُبّت قلمٌ بكتلةٍ مهتزّةٍ عندما تتحرّك ورقة تحتها (الشكل 11-8)، فإنّ المنحنى الذي سيُرسم يتفق تمامًا مع (المعادلة 11-6) .

المثال 11-7 نبدأ بـ $x = A\cos\omega t$.

تُوصف إزاحة جسمٍ بالمعادلة التالية؛ حيث x بالأمتار، وt بالثواني:

$$x = (0.30\,\text{m})\cos(8.0\,t)$$

للجسم المهتز، احسب كلًّا من: (أ) الاتساع. (ب) التردد. (جـ) الزمن الدوريّ. (د) أكبر سرعة. (هـ) أكبر تسارع.

النّهج: نبدأ بمقارنة المعادلة المعطاة بالمعادلة 11-8 ب، $x = A\cos(2\pi f t)$

الحلّ: من $x = A\cos(2\pi f t)$ نرى بالتمعّن أنّ: (أ) الاتساع $A = 0.30\,\text{m}$ (ب) $2\pi f = 8.0\,\text{s}^{-1}$ وهكذا $f = (8.0\,\text{s}^{-1}/2\pi) = 1.27\,\text{Hz}$. (جـ) ثم $T = 1/f = 0.79\,\text{s}$ (د) أكبر سرعة (انظر المعادلة 11-8)

$$v_{max} = 2\pi A f = (2\pi)(0.30\,\text{m})(1.27\,\text{s}^{-1}) = 2.4\,\text{m/s}$$

(هـ) التسارع الأكبر، من قانون نيوتن الثاني

$$a_{max} = F_{max}/m = kAm$$ من (المعادلة 11-7ب)

نرى أنّ $k/m = (2\pi f)^2$ ، وبالتالي

$$a_{max} = \frac{k}{m}A = (2\pi f)^2 A = (2\pi)^2(1.27\,\text{s}^{-1})^2(0.30\,\text{m}) = 19\,\text{m/s}^2$$

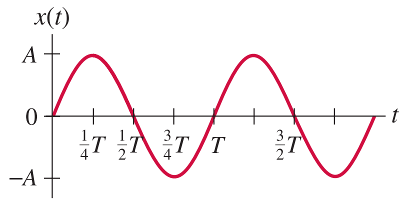
الحركة الجيبية

من (المعادلة 11-8) ، $(x = A)\cos wt$، افرض أنّ الجسم المهتز يبدأ من السكون $(v = 0)$ عند أقصى إزاحةٍ له $(x = A)$ عند $t = 0$. هناك معادلاتٌ أخرى للحركة التوافقيّة البسيطة ممكنةٌ أيضًا، اعتمادًا على الظروف الابتدائية (عندما تختار t كي تكون صفرًا). فمثلًا، عند $t = 0$، إذا كان الجسم في موقع الاتزان، وبدأت الاهتزازات بإعطاء الجسم دفعة إلى اليمين $(+x)$ ، فإنّ المعادلة تصبح

$$x = A\sin\omega t = A\sin(2\pi t/T)$$

هذا المنحنى (الشكل 11-9) له شكل منحنى cosine نفسه المبين في (الشكل 11-8) ، ماعدا أنّه مُزاحٌ إلى اليمين بربع دورةٍ. لذلك، عندما $t = 0$ تبدأ x عند 0 بدلًا من عند $x = A$.

يُدعى كلّ من المنحنيين sine و cosine بأنّه جيبي (شكل دالة الجيب). وهكذا، فالحركة التوافقيّة البسيطة* يُقال لها جيبيّة لأنّ الموقع يتغيّر كدالة جيبيّة مع الزمن.



الشكل 11-9 الطبيعة الجيبية لـ SHM مع الزمن، في هذه الحالة تكون $t = 0$ لأنه عندما $x = A\sin(2\pi t/T)$ ولكنها تمتلك أيضا. $x = 0$ الكتلة في الموقع وهذا يحملها إلى $t = 0$ سرعة ابتدائية $t = \frac{1}{4}T$ عندما $x = A$

SHM حركة جيبية.

* يمكن تعريف الحركة التوافقيّة البسيطة بأنّها الحركة الجيبيّة. وهذا التعريف يتفق تمامًا مع تعريفنا الأول في (البند 11-1) .

*السرعة والتسارع كدالة في الزمن

يبيّن (الشكلان 11-10 أو 11-8) رسمًا للإزاحة x مع الزمن t، كما يُعطى (بالمعادلة 11-8) . ويمكننا أيضًا إيجاد السرعة v دالة في الزمن من (الشكل11-6أ) . للموقع المبين (الأحمر المنقط في الشكل 11-8أ) نرى أنّ مقدار v هو $v_{max}\sin\theta$، ولكن v تشير إلى اليسار. لذلك $v = -v_{max}\sin\theta$. مرة أخرى نضع $\theta = \omega t = 2\pi f t = 2\pi t/T$ نجد أنّ

$$v = -v_{max}\sin\omega t = -v_{max}\sin(2\pi f t) = -v_{max}\sin(2\pi t/T) \qquad \textbf{(9-11)}$$

بعد $t = 0$ مباشرةً، تكون السرعة سالبةً (تشير نحو اليسار وتبقى كذلك حتى $t = \frac{1}{2}T$ (وهذا يقابل $\theta = 180° = \pi$ rad) وبعد $t = \frac{1}{2}T$ ، حتى $t = T$ حيث تكون السرعة موجبة. السرعة كدالة في الزمن (المعادلة 11-9) مرسومة في (الشكل 11-10ب). من (المعادلتين 11-6 و 11-7ب)

$$v_{max} = 2\pi A f = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

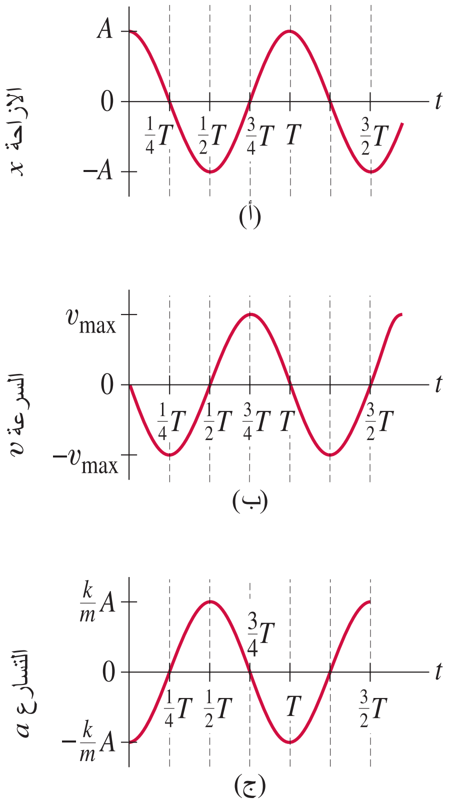
لنظام زنبرك - كتلةٌ، تكون السرعة القصوى v_{max} أعلى، إذا كان الاتساع أكبر. وهذا يحصل دائمًا عند مرور الكتلة بمركز الاتزان.

يمكن إيجاد التسارع مع الزمن من قانون نيوتن الثاني:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} = -\left(\frac{kA}{m}\right)\cos\omega t = -a_{max}\cos(2\pi t/T) \qquad \textbf{(10-11)}$$

حيث التسارع الأقصى $a_{max} = kA/m$

(المعادلة 11-10) مرسومةٌ في (الشكل 11-10جـ). ولأنّ التسارع لـ SHO ليس ثابتًا، فإنّ معادلات الحركة بتسارع منتظم لاتنطبق على الحركة التوافقية البسيطة (SHM).



الشكل 11-10 تبين الرسومات

(أ) الإزاحة x كدالة في الزمن

t: $x = A\cos(2\pi t/T)$

(ب) السرعة مع الزمن

$v = -v_{max}\sin(2\pi t/T)$

(جـ) التسارع كدالة في الزمن

$a = -(kA/m)\cos(2\pi t/T)$

المثال 11-8 السماعة (مكبر الصوت)

يهتز مخروط السماعة بحركةٍ توافقيّةٍ بسيطةٍ تردّدها 262 Hz ("متوسط "C"). والاتساع عند مركز المخروط هو $A = 1.5 \times 10^{-4}$ m عند $x = A$ ، $t = 0$ (أ) ما المعادلة التي تصف حركة مركز المخروط؟ (ب) ما السرعة والتسارع كدالة في الزمن؟ (جـ) ما موقع المخروط عندما $t = 1.00$ ms $(= 1.00 \times 10^{-3}$ s$)$؟

النّهج: تبدأ الحركة عندما $(t = 0)$، ويكون المخروط في أقصى إزاحته $(x = A \text{ at } t = 0)$. لذا، نستعمل دالة الـ cosine (جيب التمام)، $x = A\cos\omega t$، لوصف الحركة التوافقية البسيطة SHM.

الحل: (أ) هنا

$$\omega = 2\pi f = (6.28 \text{ rad})(262 \text{ s}^{-1}) = 1650 \text{ rad/s}$$

توصف الحركة بـ

$$x = A\cos(2\pi f t) = (1.5 \times 10^{-4} \text{ m})\cos(1650t)$$

(ب) أكبر سرعة من (المعادلة 11-6)هي $v_{max} = 2\pi A f$

$$2\pi(1.5 \times 10^{-4} \text{ m})(262 \text{ s}^{-1}) = 0.25 \text{ m/s}$$

في حين تعطينا (المعادلة 11-9)

$$v = -(0.25 \text{ m/s})\sin(1650t)$$

ومن (المعادلتين 11-10 و 11-7 ب) فإنّ التسارع الأكبر هو

$$(2\pi f)^2 A = 4\pi^2(262 \text{ s}^{-1})^2(1.5 \times 10^{-4} \text{ m}) = 410 \text{ m/s}^2$$

وهذا أكبر من 40g، حيث تشير g إلى تسارع الجاذبية الأرضيّة .

أي

$$a = -(410 \text{ m/s}^2)\cos(1650t)$$

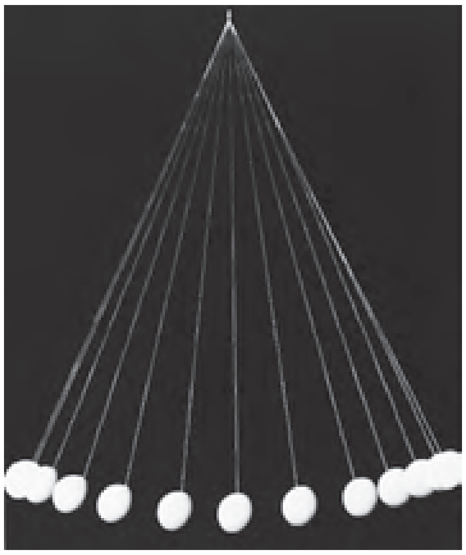
(جـ)عندما $t = 1.00 \times 10^{-3}$ s، (المعادلة 11-8 أ) تعطينا

$$x = A\cos\omega t = (1.5 \times 10^{-4} \text{ m})\cos[(1650 \text{ rad/s})(1.00 \times 10^{-3} \text{ s})]$$
$$= (1.5 \times 10^{-4} \text{ m})\cos(1.65 \text{ rad}) = -1.2 \times 10^{-5} \text{ m}.$$

ملحوظة: تأكد أنّ حاسبتك موضوعة في RAD وليس في DEG لحساب الـ $\cos\omega t$.

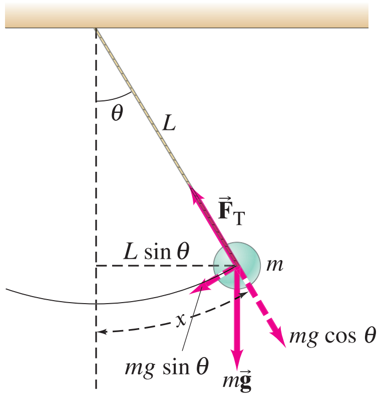
تنويه:

تأكد دائما أنّ الحاسبة تعمل في النمط الصحيح للزاوية.



الشكل 11-11 صورة ومضية لبندول بسيط يتأرجح.

4-11 البندول البسيط



الشكل 12-11 البندول البسيط ومخطط الجسم الحرّ.

يتكوّن **البندول البسيط** من جسمٍ صغيرٍ (كرة البندول) معلّق من طرف خيطٍ خفيف، (الشكل 11-11). سنفترض عدم امتداد الخيط (عدم تغيّر طوله)، وأنّ كتلته يمكن إهمالها بالمقارنة مع كتلة الكرة. تشبه حركةُ البندول البسيط الذي يتأرجح إلى الخلف والأمام مع احتكاكٍ مهملٍ الحركةَ التوافقيّة البسيطة: تتأرجح كرة البندول على طول قوسي من دائرة باتساعين متساويين على جانبي موضع الاتزان، وعند مرورها بنقطة الاتزان (حيث ستكون معلقة رأسيًّا) تكون سرعتها أكبر ما يمكن. ولكن، هل تتحرّك حركةً توافقيّةً بسيطة SHM؟ أي، هل تتناسب قوّة الإعادة مع الإزاحة؟ دعنا نجد ذلك.

تُعطى إزاحة البندول على طول القوس بـ $x=L\theta$ ، حيث θ الزاوية التي يميل بها الخيط عن العمودي، وL هو طول الخيط (الشكل 12-11). إذا كانت القوّة المعيدة تتناسب مع x أو θ ، فستكون الحركة توافقيّةً بسيطة. قوّة الإعادة هي القوّة المحصلة على الكرة، وتساوي مركبة الوزن mg المماسية للقوس:

$$F = -mg\sin\theta$$

حيث تشير g إلى تسارع الجاذبيّة الأرضيّة. وتعني الإشارة السالبة هنا، كما في (المعادلة 1-11)، أنّ القوّة في اتجاهٍ مضادٍّ للإزاحة ممثلةً بالزاوية θ. ولأنّ القوّة تتناسب مع جيب الزاوية θ وليس مع θ نفسها، فالحركة ليست SHM. وعلى أيّ حال، إذا كانت الزاوية θ صغيرة، فإنّ $\sin\theta$ تقريبًا يساوي θ عندما تكتب الأخيرة بالراديان. ويمكن رؤية ذلك بملاحظة أنّ طول القوس x $(= L\theta)$ في (الشكل 12-11) يساوي طول الخيط $(= L\sin\theta)$ نفسه تقريبًا. وهو المشار إليه بخطٍّ أفقيٍّ متقطعٍ إذا كانت θ صغيرة.

الزاويا أقلّ من $15°$، والفرق بين θ(راديان) و$\sin\theta$ أقلّ من 1%، انظر (الجدول 1-11) . وهكذا، وبتقريبٍ جيّدٍ للزاويا الصغيرة، فإنّ $F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$

بتعويض $\theta = x/L$ أو $x = L\theta$، نحصل على

$$F \approx -\frac{mg}{L}x$$

وهكذا للإزاحات الصغيرة، فإنّ الحركة بصورةٍ جوهريّةٍ هي حركةٌ توافقيّةٌ بسيطة. وبما أنّ هذه المعادلة تطابق قانون هوك

$F = -kx$، فإنّ ثابت القوة k يساوي $k = mg/L$.

الجدول 1-11
$\sin\theta$ عند زوايا صغيرة

θ درجة	θ راديان	$\sin\theta$	% النسّبة المئوية للفرق
0	0	0	0
1°	0.01745	0.01745	0.005%
5°	0.08727	0.08716	0.1%
10°	0.17453	0.17365	0.5%
15°	0.26180	0.25882	1.1%
20°	0.34907	0.34202	2.0%
30°	0.52360	0.50000	4.7%

إذا عوّضنا $k = mg/L$ في (المعادلة 11-7أ)، نحصل على الزمن الدوريّ للبندول البسيط .

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

أو

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad [\text{عندما تكون } \theta \text{ صغيرة}] \qquad \textbf{(11-11أ)}$$

الزمن الدوري، البندول البسيط

التردد $f = 1/T$ ، لذلك

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}. \qquad [\text{عندما تكون } \theta \text{ صغيرة}] \qquad \textbf{(11-11ب)}$$

تردد البندول البسيط.

كتلة كرة البندول m لم تظهر في هذه الصيغ لـ T و f. وبذلك يكون لدينا نتيجةٌ مدهشةٌ وهي أنّ الزمن الدوريّ والتردّد للبندول البسيط لايعتمدان على كتلة كرة البندول. وقد تكون لاحظت هذا عندما تدفع طفلًا صغيرًا أو كبيرًا على الأرجوحة.

تطبيق الفيزياء
ساعة البندول.

كذلك نرى من (المعادلة 11-11أ) أنّ الزمن الدوريّ للبندول لايعتمد على الاتساع (مثل الـ SHM، البند 11-3)، مادام الاتساع θ صغيرا. يقال إنّ جاليليو لاحظ ذلك أولًا عندما كان يراقب تأرجح مصباح كنيسة (الشكل 11-13). وقد أدّت هذه الحقيقة إلى اكتشاف ساعة البندول التي تعدّ أول أداة توقيتٍ دقيقة، وما زالت معتمدةً منذ قرونٍ خلت.

المثال 11-9 قياس g

يستعمل جيولوجي بندولًا بسيطًا طول خيطه 37.10 cm وتردّده 0.8190 Hz في مكانٍ محدّدٍ على الأرض. ما قيمة تسارع الجاذبيّة الأرضيّة في هذا المكان؟

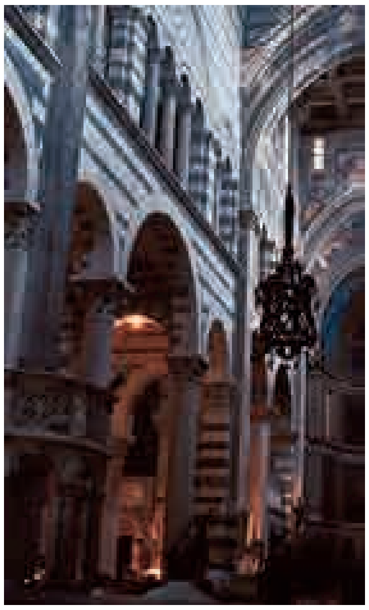
النّهج: يمكننا استعمال الطول L، والتردّد f في (المعادلة 11-11ب)، والتي تحتوي المجهول g.

الحل: نحلّ (المعادلة 11-11ب) لإيجاد g لنحصل على

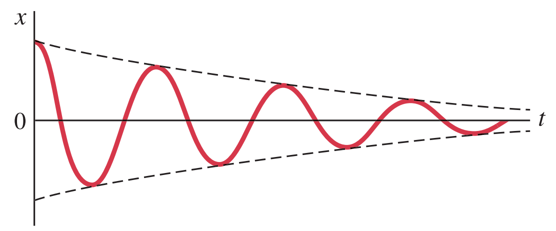
$$g = (2\pi f)^2 L = (6.283 \times 0.8190\ \text{s}^{-1})^2(0.3710\ \text{m}) = 9.824\ \text{m/s}^2$$

التمرين د: (أ) احسب، بالتقريب، طول البندول في ساعة الجدّ التي تدقّ مرّةً في الثانية. (ب) كم سيكون الزمن الدوريّ لساعة طول بندولها 1.0 m؟

تنطبق (المعادلتان 11-11) على بندولٍ بسيط، كتلة مركزه عند نهاية خيط مهمل الثقل، ولكن ليس على تأرجحِ مضرب البيسبول المعلّق من نهايته.



الشكل 11-13 تأرجح هذا المصباح المعلق من حبلٍ طويلٍ في سقف كنيسة. يُقال إنّ هذا ما لاحظه جاليليو، وهو الذي قاده إلى استنتاج أنّ الزمن الدوريّ للبندول لايعتمد على الاتساع.



الشكل 11-14 الحركة التوافقية المضمحلة.

11-5 الحركة التوافقية المضمحلة

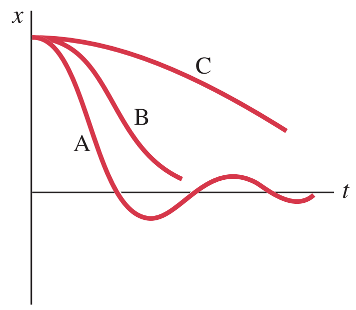
إنّ اتساع أيّ زنبركٍ مهتزٍّ حقيقيٍّ أو بندولٍ متأرجح سوف يتناقص ببطءٍ مع الزمن إلى أن تتوقّف هذه الاهتزازات. يعرض (الشكل 11-14) رسمًا نموذجيًّا للإزاحة كدالةٍ في الزمن، وهذا ما يُطلق عليه الحركة التوافقيّة المضمحلّة. يُعزى الاضمحلال* بشكلٍ عامٍّ إلى مقاومة الهواء والاحتكاك الداخلي للنظام المهتز. وأنّ الطاقة الضائعة والمتحولة إلى طاقةٍ حراريةٍ تؤدّي إلى تناقص الاتساع لهذه الاهتزازات.

وبما أنّ الأنظمة المهتزّة الطبيعيّة تتضمحلُّ بشكلٍ عام، فلماذا إذن نتكلّم عن الحركة التوافقيّة غير المضمحلّة؟ والحلُّ هو أنّ التعامل مع الحركة التوافقيّة البسيطة أسهل بكثيرٍ من الناحية الرياضية. وإذا كان الاضمحلال ليس كبيرًا، فيمكن التفكير بالاهتزازات لحركةٍ توافقيّةٍ بسيطة، ويُضاف إليها أثر الاضمحلال. يمثل نقصُ الاتساع الذي تبيّنه الخطوط المتقطّعة في (الشكل 11-14) الاضمحلالَ. وعلى الرغم من أنّ الاضمحلال الناجم عن الاحتكاك يؤدّي إلى تغيّر تردّد الاهتزاز؛ فإنّ الأثر يكون صغيرًا عادةً، إلا إذا كان الاضمحلال كبيرًا. وهكذا يمكن تطبيق (المعادلات 11-7) في معظم الحالات.

يكون الاضمحلال أحيانًا كبيرًا، إلى درجة أنّ الحركة لا تحاكي الحركة التوافقية البسيطة. وهناك ثلاث حالات عامّة في أنظمة الاضمحلال الكبير مبيّنة في (الشكل 11-15) . يمثّل المنحنى A وضع تحت الاضمحلال، وفيه يعمل النظام عدة اهتزازات قبل وصوله إلى السكون المنحنى. أما المنحنى C فيمثّل وضع فوق الاضمحلال الذي يكون فيه الاضمحلال كبيرًا لدرجة أنه يستغرق وقتًا كبيرًا للوصول إلى الاتزان. في حين يمثّل المنحنى B وضع الاضمحلال الحرج، وهنا يصل النظام إلى الاتزان في أقصر وقت. وهذه التعبيرات مشتقة من استعمال الأنظمة المضمحلة العملية مثل آلية غلق الأبواب، وواقيات الصدمات في السيارة (الشكل 11-16)، حيث تصمم هذه الأدوات عادة لإعطاء اضمحلال؛ يغلق الباب بعنف، وتهتز السيارة عدة مرّات نحو الأعلى والأسفل في كلّ مرة تجتاز (عائقا) مطبّا.

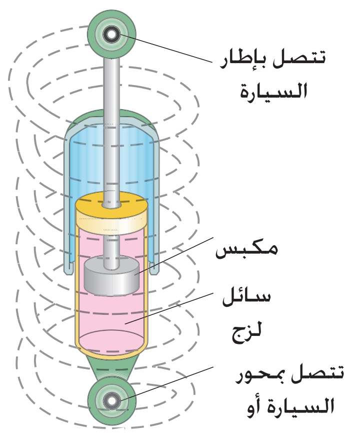
في معظم الأنظمة، ما يهمنا هو الحركة الاهتزازية كما في الساعات، حيث نعمل على تقليل الاضمحلال. وفي أنظمة أخرى تعدّ الاهتزازات مشكلة، مثل زنبركات السيارات. لذلك، فالمطلوب هو قدرٌ مناسب من الاضمحلال (أي الحرج). والاضمحلال المصمّم بصورة جيدة مطلوب في تطبيقات كثيرة. فالبنايات العالية خاصة في كاليفورنيا تبنى الآن مع مخامدات ضخمة لتقليل أثر دمار الهزات الأرضيّة. (الشكل 11-17).

* يضمحل تعني يتضاءل، يذوي، يثّبط، مثل يخمد أنفاس شخص ما.



الشكل 11-15 المنحنيات تمثل A تحت اضمحلال. B حرج الاضمحلال. C فوق الاضمحلال.

تطبيق الفيزياء
ماصات الصدمة.



الشكل 11-16 زنبرك السيارة وواقي الصدمة تساعدان في خمود السيارة بحيث لا تهتزّ إلى الأعلى والأسفل كثيرا.

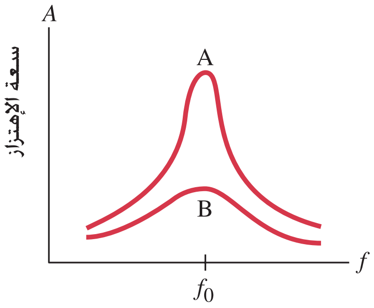
الشكل 11-17 توضع هذه المخامدات الضخمة في البناية، وتشبه كثيرا عمل واقي الصدمة في السيارة، كما تخدم غرضا مشابها لتقليل الاتساع وتردد الاهتزازات عند حدوث الهزات الأرضيّة.

6-11 الاهتزازات القسرية؛ الرنين

عندما يبدأ نظام مهتز بالحركة، فإنّه يهتزّ بتردده الطبيعي (المعادلتان 11-7(ب) و11-11(ب). ولكن قد تؤثر قوة خارجية في النظام، ويكون لها تردد خاص بها عندما يكون لدينا اهتزاز قسري. فمثلاً، يمكن سحب الكتلة على الزنبرك في (الشكل 11-1) إلى الأمام والخلف بتردد خارجي f. عندها، تهتز الكتله بالتردد f للقوة الخارجية، حتى لو كان هذا التردد مختلفا عن **التردد الطبيعي** للزنبرك الذي يرمز إليه بـ f_0 حيث (انظر المعادلة 11-7 ب)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

في الاهتزاز القسري، وجد أنّ تسارع الاهتزاز يعتمد على الفرق بين f و f_0، ويصبح أكبر ما يمكن عندما يكون تردد القوة الخارجية f مساويا للتردد الطبيعي للنظام f_0؛ أي عندما $f = f_0$. يرسم الاتساع في (الشكل 11-18) كدالة في تردد القوة الخارجية f. يمثل المنحنى اضمحلالاً خفيفا، في حين يمثل المنحنى B اضمحلالاً ثقيلا. وقد يصبح الاتساع كبيرا عندما يقترب التردد الخارجي المؤثر f من التردد الطبيعي للنظام $f \approx f_0$، مادام ازدياد الاتساع كبيرا عند $f = f_0$، وما دام الاضمحلال ليس كبيرا. عندما يكون الاضمحلال قليلا، فإنّ ازدياد الاتساع يكون كبيرًا جدًّا عند $f = f_0$ (وعادة مفاجئا). ويُسمّى هذا الأثر **"رنينا"**. أمّا التردد الطبيعي للنظام f فيُسمّى **تردّدَ الرنين**.



الشكل 11-18 (أ) الرنين في نظام اضمحلاله قليل.(ب) الرنين في نظام اضمحلاله كبير.

تطبيق الفيزياء
التأرجح

توضيح بسيط للرنين يتمثل في دفع طفل على أرجوحة. فالأرجوحة، كأيّ بندول، لها تردد طبيعي للاهتزاز. إذا دفعت الأرجوحة بأيّ تردد، فإنّها تتحرك جيئة وذهابا دون أن تصل إلى اتساع كبير. ولكن إذا دفعتها بتردد يساوي ترددها الطبيعي، فإنّ الاتساع يزداد بصورة كبيرة. لذا، فإنك عند الرنين بحاجة إلى الدفع بسهولة للوصول إلى إزاحة كبيرة.

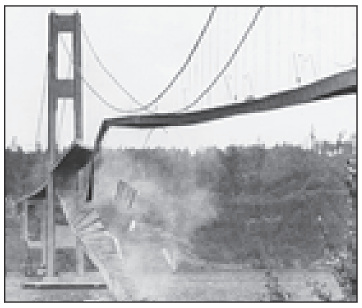
تطبيق الفيزياء
تحطم الزجاج من خلال الرنين

يقال إنّ المغني العظيم أنريكو كاروزو كان قادرا على تحطيم قدح بلوري عندما يغني بتردد يساوي تردد القدح وبصوت عال. هذا مثال على الرنين، حيث تعمل موجات صوت المغني كاهتزاز قسري على الزجاج. وعند الرنين، يكون الاهتزاز الناجْ للقدح كبير الاتساع لدرجة أنّ الزجاج يتجاوز حدود المرونة فينكسر.

تطبيق الفيزياء
انهيارات بسبب الرنين.

يعدّ الرنين ظاهرة مهمة في كثير من المواقف؛ لأنّ الأجسام المادية مرنة بشكل عام. وبشكلٍ خاص، فهذه الظاهرة مهمة في البناء، رغم أنّ أثر ذلك لايتنبأ به عادة. مثلا، هناك تقرير ورد حول انهيار جسر سكّة حديد لأنّ إحدى العجلات في قطار يعبر الجسر سبّبت اهتزاز رنين في الجسر. كما أنّ طابور الجنود الذين يجتازون جسرًا ما، يطلب إليهم السير بصورة عشوائية وليست المشية العسكرية المنتظمة لتجنب إحداث اهتزاز رنين في الجسر. ويُعزى سبب انهيار جسر مضايق تاكوما (الشكل 11-19 أ) عام 1940 إلى هبوب رياح عاصفة اتفق ترددها مع تردد رنين الجسر مما أدّى إلى تأرجحه باتساع كبير. لذا، تصمم الجسور والمباني العالية حاليا باضمحلال كبير منذ إنشائها. ومن الأمثلة على ذلك أيضا انهيار طريق أوكلاند عام 1989 نتيجة زلزال كاليفورنيا (الشكل 11-19 ب) بسبب تأرجح رنين لجزء منه بُني على الطين.

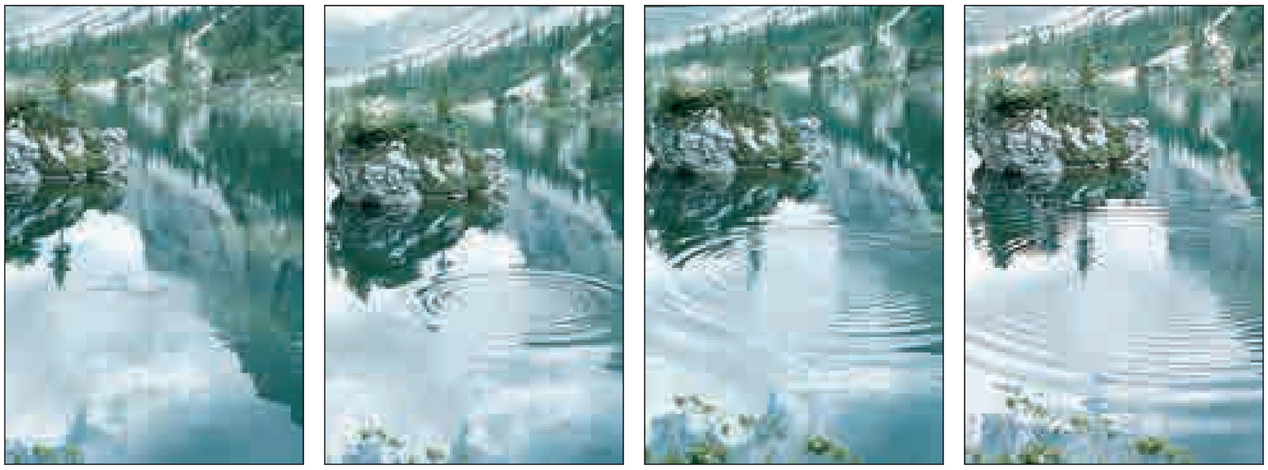
ولكن الرنين مفيد جدّا أحيانا أخرى، وسنرى أمثلة كثيرة لاحقا، كما في في الآلات الموسيقية، وتوليف الراديو. وسنرى أنّ الأجسام المهتزة ليس لها تردد رنين واحد؛ بل الكثير.



(أ)

(ب)

الشكل 11-19 (أ) اهتزازات واسعة الاتساع لجسر مضايق تاكوما بسبب رياح عاصفة أدت لانهياره (1940) (ب) انهيار طريق في كاليفورنيا بسبب زلزال 1989 حيث كان للرنين دور مهم في ذلك.

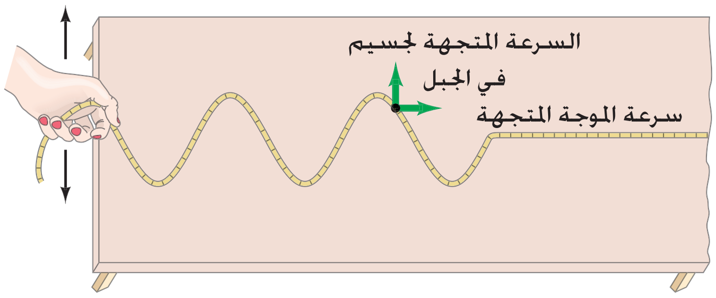


الشكل 11-20 موجات الماء تنتشر بعيدا عن المصدر.

11-7 الحركة الموجية

عندما تلقي حجرًا في بحيرة أو بركة من الماء، تتشكل موجات دائرية تتحرّك نحو الخارج، (الشكل 11-20) . وكذلك تتحرك الموجات في حبل مشدود على طاولة إذا هُزّت إحدى نهايتيه إلى الخلف كما هو مبين في (الشكل 11-21). تعدّ موجات الماء والموجات في حبل مثالين شائعين على الحركة الموجية. وسنناقش أنواعًا أخرى من الموجات لاحقًا، ولكن سنركز الآن على **الموجات الميكانيكية** هذه.

هل راقبت في يوم من الأيام موجات البحر المتحركة نحو الشاطىء قبل أن تتكسر*، قد تعجب فيما لو حملت هذه الموجات الماء من أقصى البحر إلى الشاطىء. كلا إنها لا تحضر الماء من بعيد. إنّ موجات الماء تسير بسرعة واضحة. ولكن كلّ جسم (أو جزيء) من الماء يهتز حول نقطة اتزان فقط. وهذا واضح من حركة أوراق الأشجار عندما تعبر الموجات. إلا أنّ الأوراق (أو الفلين) لا تُحمل مع الموجات، بل تهتزّ حول نقطة اتزان لأنّ هذه هي حركة الماء نفسها.



الشكل 11-21 موجة تسير عبر حبل، تتحرك الموجة نحو اليمين على طول الحبل. جسيمات الحبل تهتز جيئة وذهابا على سطح الطاولة.

المثال المفاهيمي 11-10 سرعة الموجة مقابل سرعة الجسيم

هل سرعة الموجة التي تتحرك على طول وترٍ هي نفسها سرعة جُسيمٍ من الوتر؟ انظر (الشكل 21-11) .

الحل: لا، السرعتان مختلفتان في المقدار والاتجاه؛ فالموجة في الحبل (الشكل 11-21) تتحرك نحو اليمين، ولكن كلّ جزءٍ من الحبل يهتزُّ جيئةً وذهابًا. (بوضوح الحبل لا يتحرك باتجاه الموجات فيه).

تستطيع الموجات الحركة إلى مسافات بعيدة، إلا أنّ حركة الوسط (الماء أو الحبل) نفسه محدودة، فهو يهتز حول نقطة اتزان كما في الحركة التوافقية البسيطة. وهكذا، وعلى الرغم من أنّ الموجة ليست مادة، إلّا أنّها تستطيع الانتقال فيها. وتتكون الموجة من اهتزازات تتحرك دون أن تحمل المادة معها.

* لئلا تختلط عليك الأمور بشأن "تكسير" موجات البحر، والذي يحدث عندما تتفاعل الموجة مع الأرض في المياه الضحلة، وتصبح بالتالي موجة غير بسيطة.

الموجات هي إنتقال الإهتزازات وليس إنتقال المادة

تنقل الموجات الطاقة من مكان إلى آخر. وتحصل موجة الماء على الطاقة، فمثلًا، تنتقل الطاقة بواسطة الموجات إلى الشاطىء عن طريق إلقاء حجر في الماء، أو بواسطة رياح بعيدة في البحر. اليد المتأرجحة في (الشكل 11-21) تنقل الطاقة إلى الحبل، ومن ثم تنتقل هذه الطاقة عبر الحبل، وقد تنتقل إلى جسم عند طرفه الآخر. إنّ أنواع الموجات المتحركة جميعها تنقل الطاقة.

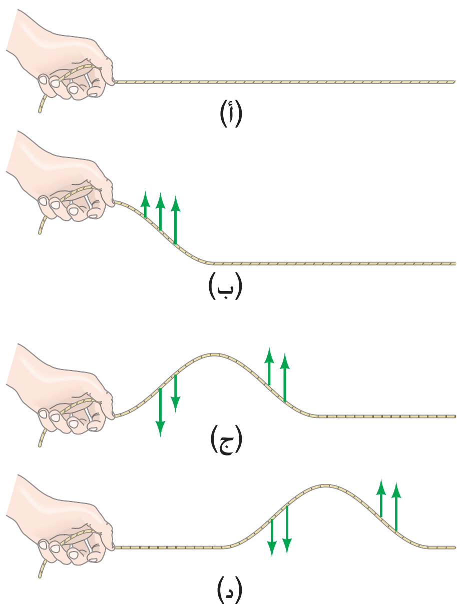
نبضة موجية.

دعنا ننظر عن كثب كيفية تشكل الموجة وانتقالها. ننظر أولًا إلى نبضة منفردة. يمكن إنتاج نبضة منفردة في حبل بحركة سريعة نحو الأعلى والأسفل من اليد، (الشكل 11-22) ؛ تدفع اليد طرف الحبل إلى الأعلى، ولأنّ نهاية الحبل مربوطة بأجزاء أخرى مجاورة، فهذه الأخيرة تشعر بقوة إلى الأعلى، وبالتالي تبدأ بالحركة نحو الأعلى. وبسبب أنّ كلّ جزء مجاور من الحبل يتحرك نحو الأعلى، فإنّ قمة الموجة تتحرك خارجًا على امتداد الحبل، ويكون طرف الحبل في أثناء ذلك قد عاد إلى الوضع الأصلي بواسطة اليد. وكلّ جزء لاحق يصل إلى حدّه الأعلى، ثم يعود بفعل الجزء المجاور إلى الحبل. وهكذا هو مصدر الموجة المنتقلة، هو اضطراب. وتتسبب قوى التماسك بين الأجزاء المتجاورة من الحبل في تحريك النبضة بعيدًا. كما أنّ الموجات في أوساط أخرى تنتج وتنتقل نحو الخارج بطريقة مشابهة.

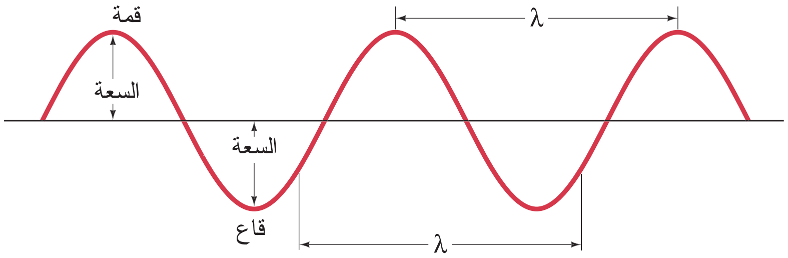
موجة دورية

إنّ مصدر **موجة مستمرة** أو **دورية** كالمبينة في (الشكل 11-21) هو اضطراب مستمر ومهتز؛ أي أنّ المصدر هو اهتزاز أو تأرجح. في (الشكل 11-21)، تؤرجح اليد أحد طرفي الحبل. ويمكن أن تنتج موجات الماء من أيّ قسم مهتز عند السطح، مثل يدك، أو أنّ الماء نفسه يبدأ بالاهتزاز عندما تهب ريح عبره، أو إذا أُلقي حجرٌ فيه. تنتج الشوكة الرنّانة المهتزة أو غشاء الطبل موجات صوتية في الهواء. وسنرى لاحقًا أنّ اهتزاز الشحنات الكهربائية ينتج موجات ضوئية. وبالفعل، كلّ جسمٍ مهتزٍّ يصدر موجاتٍ تقريبًا.

إذن، فمصدر أيّ موجة هو الاهتزاز، وهو الذي ينتقل نحو الخارج وبالتالي يشكّل الموجة. إذا اهتزّ المصدر بصورة جيبية في SHM، ثم الموجة نفسها – إذا كان الوسط تام المرونة – فسيكون لها شكل دالة جيبية في المكان والزمان. (1) في المكان: إذا أخذت صورة للموجة في المكان في لحظة زمنية محددة، فسيكون للموجة شكل الدالة الجيبية أو الجيب تمامية (sine or cosine) كدالة بالموقع. (2) في الزمن: إذا نظرت إلى حركة الوسط في مكان محدد خلال فترة زمنية طويلة – مثلًا لو نظرت بين عمودين قريبين إلى حركة الماء إلى الأعلى والأسفل- ستجد أنها حركة توافقية بسيطة. فالماء يتحرك نحو الأعلى والأسفل بصورة جيبية مع الزمن.



الشكل 11-22 حركة نبضة موجبة نحو اليمين. تشير الأسهم إلى سرعة جزيئات الحبل.



الشكل 11-22 الصفات المميزة لنبضة موجية.

بعض الكميات المهمة التي تستعمل لوصف موجة جيبية دورية مبينة في (الشكل 11-23) . تُسمَّى النقاطُ العليا في الموجة القممَ (جمع قمة)، أمّا النقاط السفلية فتُدعى قيعانًا "جمع قاع"؛ فالاتساع A هو أعلى ارتفاع للقمة أو عمق القاع بالنسبة إلى المستوى الطبيعي (الاتزان). والمسافة المباشرة من القمة إلى القاع تساوي ضعف الاتساع. في حين تُسمَّى المسافةُ بين قمتين متتاليتين **طولَ الموجة** λ (الرمز اليوناني لامدا). كما أنّ طول الموجة يساوي المسافة بين أيّ نقطتين متماثلتين متتاليتين على الموجة. ويشير **التردد** f إلى عدد القمم – أو الدورات الكاملة – التي تعبر نقطة معينة لكلّ وحدة زمن. أمّا الزمن الدوري T، فيساوي $1/f$ الذي ينقضي بين قمتين متتاليتين تمران بالنقطة نفسها.

السعة A

طول الموجة λ

التردد f

الزمن الدوري T

وتدلّ **سرعة الموجة** v على سرعة مرور قمة الموجة، أو أيّ نقطة عليها. ويجب تمييز سرعة الموجة من سرعة الجسم في الوسط كما رأينا في المثال 11-10.

سرعة الموجة، v

تقطع قمة الموجة مسافةً تساوي طول الموجة λ في زمنٍ يساوي الزمن الدوري T. وهكذا، فإنّ سرعة الموجة هي: $v = \lambda/T$. ولكن، لأنّ $f = 1/T$، فإنّ

$$v = \lambda f \qquad \textbf{(12-11)}$$

$v = f\lambda$ (موجات جيبية)

مثلاً، افرض أنّ موجةً طولها 5 m، وترددها 3 Hz، بما أن ثلاث قمم سوف تعبر نقطةً معيّنة في الثانية، والبعد بين القمم هو 5 m، فإن أول قمة (أو أي جزء من الموجة) سوف ينتقل مسافة 15 m خلال ثانية واحدة. إذن فسرعتها 15 m/s.

تعتمد سرعة الموجة على خصائص الوسط الذي تنتقل فيه.

إنّ سرعة الموجة في وتر أو حبل مشدود- مثلاً- تعتمد على قوة الشد في الحبل F_T، وكذلك على كتلة وحدة الطول للحبل m/L . إنّ العلاقة للموجات ذات الاتساع الصغير هي

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{m/L}} \qquad \textbf{(13-11)}$$

سرعة الموجة في وتر

وهذه النتيجة تبدو معقولة اعتمادًا على ميكانيكا نيوتن. ونتوقّع أنّ الشدّ يكون في البسط والكتلة في المقام، لماذا؟ لأنّه عندما يكون الشدّ كبيرًا تكون السرعة أكبر، لأنّ أجزاء الوتر تكون على اتصال محكم بجيرانها، وكلما كانت الكتلة لكلّ وحدة طول أكبر كان القصور أكبر. وهكذا نتوقع سير الموجة ببطء أكبر.

المثال 11-11 **موجة في سلك**

تنتقل موجة طولها 0.30 m في سلك طوله 300 m، وكتلته الكلية 15 kg. فإذا كان السلك تحت تأثير شد 1000 N، فما سرعة هذه الموجة وترددها؟

النّهج: نفرض أنّ سرعة هذه الموجة في سلك تعطى (بالعلاقة 11-13). لذا، نحصل على التردد من (المعادلة 11-12)، $f = v/\lambda$.

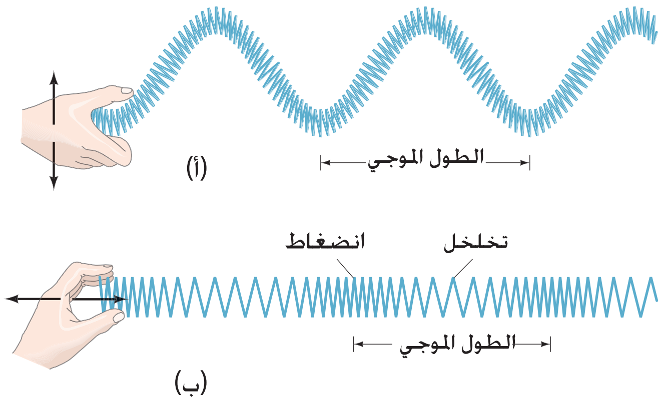
الحلّ: من (المعادلة 11-13)، السرعة هي

$$v = \sqrt{\frac{1000\text{ N}}{(15\text{ kg})/(300\text{ m})}} = \sqrt{\frac{1000\text{ N}}{(0.050\text{ kg/m})}} = 140\text{ m/s}.$$

والتردد هو

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{140\text{ m/s}}{0.30\text{ m}} = 470\text{ Hz}.$$

ملحوظة: الشدّ الأكبر سوف يزيد كلًّا من السرعة والتردّد f، أما السلك الأسمك والأكثر كثافةً فسوف يقلّل v وكذلك f.



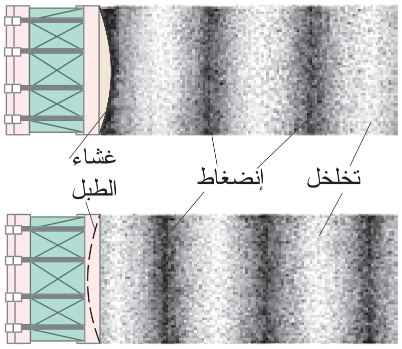
الشكل 11-24
(أ)موجة مستعرضة.
(ب)موجة طولية.

11-8 أنواع الموجات؛ مستعرضة وطولية

عندما تنتقل موجة في حبل- من اليسار إلى اليمين كما في (الشكل 11-21) – تهتز جُسيمات الحبل نحو الأعلى والأسفل باتّجاه مستعرض (عمودي) على حركة الموجة نفسها. مثل هذه الموجة تُدعى "موجة مستعرضة"، (الشكل 11-24أ). وهناك نوع آخر من الموجات يعرف بالموجة الطولية، والتي يكون فيها اهتزاز الجُسيمات في الوسط على امتداد اتّجاه انتقال الموجة. ويتم تشكيل موجات طولية في زنبرك مشدود بواسطة ضغط الزنبرك وتمدده بالتتابع، وهذا مبين في (الشكل 11-24 ب) ، ويمكن مقارنتها بالموجة المستعرضة في (الشكل 11-24 أ)، التي هي سلسلة من الانضغاطات والتخلخلات التي تنتقل على امتداد الزنبرك؛ فالتضاغطات هي المناطق التي تكون فيها الحلقات متقاربة لحظيًّا، أمّا التخلخلات فهي المناطق التي تكون فيها الحلقات متباعدة لحظيًّا. والتضاغطات والتخلخلات تقابل القمم والقيعان في الموجة المستعرضة.

الموجات المستعرضة والطولية.

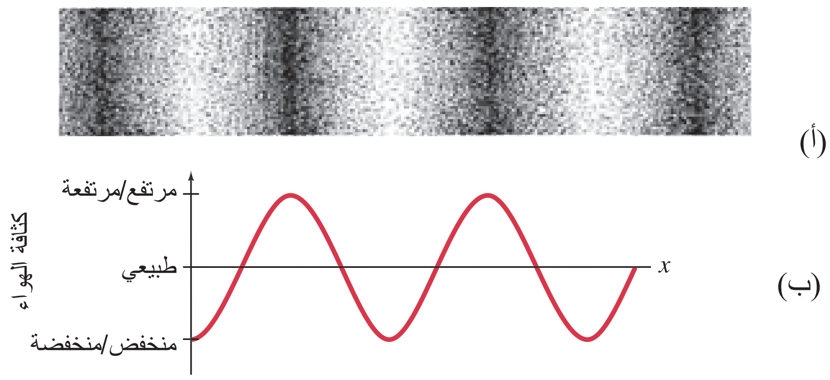
وهناك مثالٌ مهمٌّ على الموجات الطولية، هو موجات الصوت في الهواء. فغشاء الطبل المهتز- مثلًا- يضغط ثم يخلخل بالتبادل طبقة الهواء الملامسة له، منتجًا موجةً طوليَّةً تنتقل بعيدًا في الهواء كما هو مبين في (الشكل 11-25) .



الشكل 11-25 إنتاج موجة صوتية- وهي طولية- مبينة في لحظتين خلال زمن بينهما حوالي نصف الزمن الدوري $(\frac{1}{2}T)$.

وكما في الموجات المستعرضة، فإنّ كلّ جزء من الوسط تنتقل فيه الموجة الطولية يتأرجح إلى مسافة قصيرة، إلّا أنّ الموجة ذاتها يمكن أن تنتقل إلى مسافات طويلة. إنّ طول الموجة، وترددها، وسرعتها كلها لها معانٍ في الموجات الطولية؛ فطول الموجة هو المسافة بين تضاغطين متتابعين (أو بين تخلخلين متتابعين)، في حين يشير التردد إلى عدد التضاغطات التي تعبر نقطة معينة في الثانية، أمّا سرعة الموجة فهي السرعة التي يبدو كلّ تضاغط متحركًا بها، وتساوي حاصل ضرب طول الموجة في التردد، $v = f\lambda$ (المعادلة 11-12).

يمكن تمثيل الموجة الطولية بالرسم عن طريق رسم كثافة جزيئات الهواء (أو حلقات الزنبرك) كدالة بالمكان عند لحظة معينة، كما هو مبين في (الشكل 11-26) . وهذا التمثيل بالرسم يسهل عرض ما يحدث. لاحظ أنّ الرسم يشبه الموجة المستعرضة.



الشكل 11-26
(أ)موجة طولية مع
(ب) تمثيلها بالرسم عند لحظة معينة.

سرعة الموجات الطولية

إنّ شكل سرعة الموجات الطولية يشبه شكل الموجات المستعرضة في الوتر (المعادلة 11-13).

$$v = \sqrt{\frac{\text{معامل المرونة}}{\text{معامل القصور}}}$$

وبشكلٍ خاص، للموجات الطولية التي تنتقل في قضيبٍ صلبٍ طويل

سرعة الموجة الطولية في قضيب صلب طويل.

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \textbf{(11-14أ)}$$

حيث E معامل المرونة (البند 9-5) للمادة، و كثافتها. وللموجة الطولية المنتقلة في سائل أو غاز

سرعة الموجة الطولية في مائع.

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \textbf{(11-14ب)}$$

حيث B المعامل الجرمي (البند 9-5) و ρ هي الكثافة.

تطبيق الفيزياء
إدراك الحيوانات الحسي بالمكان باستخدام موجات الصوت.

المثال 11-12 موقع الصدى

يُعدّ تحديد موقع الصدى شكلًا من إدراك الجسّات، يستخدم من قِبَل بعض الحيوانات كالوطواط، وأسماك القرش ذات الأسنان، والدلافين. يطلق الحيوان نبضةً صوتيّةً (موجة طولية) تنعكس عن الاجسام، فيكشفها الحيوان. إنّ موجات تحديد الموقع بالصدى التي يطلقها سمك القرش (الشكل 11-27) لها تردّدات تقارب 200.000 Hz. (أ) ما طول موجة تحديد الموقع بالصدى للموجات التي يطلقها القرش؟ (ب) إذا كان هناك حاجز على بعد 100 m من القرش، فكم من الوقت يمضي بعد أن يطلق القرش الموجات، ومن ثم يكشف القرش عن انعكاسها؟

النّهج: نحسب أولًا سرعة الموجات الطوليّة (صوتية) في ماء البحر باستعمال (المعادلة 11-14ب)، (والجدولين 9-1 و 10-1) . طول الموجة $\lambda = v/f$.

الحلّ: (أ) سرعة الموجات الطوليّة في ماء البحر الأكثف قليلًا من الماء النقي هو

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^9\,\text{N/m}^2}{1.025 \times 10^3\,\text{kg/m}^3}} = 1.40 \times 10^3\,\text{m/s}.$$

ثم باستعمال (المعادلة 11-12) ، نجد أنّ

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{(1.40 \times 10^3\,\text{m/s})}{(2.0 \times 10^5\,\text{Hz})} = 7.0\,\text{mm}.$$

(ب) الزمن اللازم للرحلة ذهابًا وإيابًا بين القرش والجسم هو

$$t = \frac{\text{المسافة}}{\text{السّرعة}} = \frac{2(100\,\text{m})}{1.40 \times 10^3\,\text{m/s}} = 0.14\,\text{s}.$$

ملحوظة: سوف نرى لاحقًا أنّ الموجات تستطيع "التمييز" (أو الكشف) بين الأجسام فقط إذا كان طول الموجة مقاربًا لحجم الجسم أو أقلّ. وهكذا يستطيع القرش الكشف عن أجسام بحدود سنتيمتر أو أكبر.

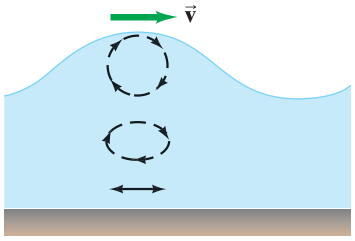
الشكل 11-27 قرش له اسنان (المثال 11-12).

موجات أخرى

تطبيق الفيزياء
موجات الهزات الأرضيّة.

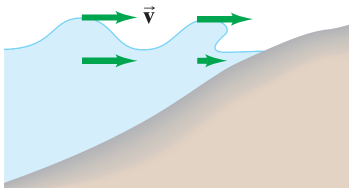
ينتج كلٌّ من الموجات المستعرضة والطولية عند حدوث الهزات الأرضيّة. وتُسمّى الموجاتُ المستعرضة التي تنتقل عبر الأرض موجات S (S تدل على مستعرض shear)، أمّا الموجات الطولية فتُدعى موجات P (P تدلّ على الضغط pressure)، أو موجات تضاغط. وتستطيع الموجات المستعرضة والطولية الانتقال عبر المواد الصلبة لأنّ الذرات والجزيئات يمكن أن تهتز حول مواضع اتزانها في أيّ اتجاه. ولكن في الموائع فقط، يمكن للموجات الطولية الانتقال؛ لأنّ أيّ حركة مستعرضة لا تؤثر بقوة إعادة بسبب أنّ المائع قابل لتغيير شكله. لقد استعملت هذه الحقيقة من قِبَل الجيوفيزيائيين لإثبات أنّ جزءًا من باطن الأرض يجب أن يكون سائلًا؛ يتمّ الكشف عن موجاتٍ طولية على امتداد قطر الأرض بعد الهزة الأرضيّة، ولكن لايتم الكشف عن موجاتٍ مستعرضة.

وإلى جانب هذين النوعين من الموجات، هناك موجات سطحيّة يمكنها الانتقال على الحد الفاصل بين مادتين؛ فالموجات على الماء هي في الواقع موجات سطحيّة تنتقل على الحد الفاصل بين الماء والهواء. وحركة كلّ جسيم من الماء عند السطح هي حركة دائرية أو إهليلجية (الشكل 11-28). لذلك، فهي تركيب من حركتين؛ الأولى مستعرضة والأخرى طولية. وهناك حركة موجية مستعرضة وطوليّة تحت السطح كذلك كما هو مبيّن. في القعر، تكون الحركة طولية فقط. وعندما تقترب الموجة من الشاطىء، يعاق الماء عند القعر ويبطىء، أما السطح فيتحرك متقدما بسرعة أكبر (الشكل 11-29) وينسكب فوق الحافة.



الشكل 11-28 موجة الماء هي مثال على موجة السطح، وهي عبارة عن تركيب من حركتين مستعرضة وطولية.

الشكل 11-29 كيف تتكسر الموجة؟ الأسهم الخضراء تمثل السرعة المكانية لجزيئات الماء.



تحدث الموجات السطحية كذلك على الأرض عندما يحدث زلزال أو هزّة أرضيّة. والموجات التي تنتقل على السطح هي المسؤولة عن الدمار الذي تسببه الزلازل غالبا.

إنّ الموجات التي تتحرك على خطّ كما في الوتر المشدود ذات بعد واحد، أما الموجات السطحية كموجات الماء، (الشكل 11-20) ، فهي ذات بعدين. ولكن الموجات التي تنتشر من المصدر في اتجاهات الوسط جميعها كموجات الصوت الصادرة عن سماعة، أو موجات الزلازل خلال الأرض، موجات ثلاثية الأبعاد.

11-9 الطاقة المنقولة بواسطة الموجات

تنقل الموجات الطاقة من مكان إلى آخر. وعند انتقال الموجات خلال الوسط، فإنّ الطاقة تنتقل بصورة طاقةٍ اهتزازيّةٍ من جُسيم إلى آخر من جُسيمات الوسط. وفي حالة موجة جيبية ذات تردّد f، تتحرك الجسيمات في SHM عند مرور الموجة. لذا، فكلُّ جُسيم يملك طاقة $E = \frac{1}{2}kA^2$، حيث A هو اتساع حركته، سواء مستعرضة أو طولية (انظر المعادلة 11-4 أ).

طاقة الموجة α (الاتساع)^2

وهكذا لدينا أهم نتيجة وهي أنّ: الطاقة المنقولة بواسطة الموجة تتناسب طرديًّا مع مربع الاتساع.

تعريف الشدة

تعرف شدة الموجة I بأنها القدرة (الطاقة لكلّ وحدة زمن) المنقولة عبر وحدة المساحات العمودية على اتجاه انتقال الطاقة.

$$I = \frac{\text{الطاقة / الزمن}}{\text{المساحة}} = \frac{\text{القدرة}}{\text{المساحة}}$$

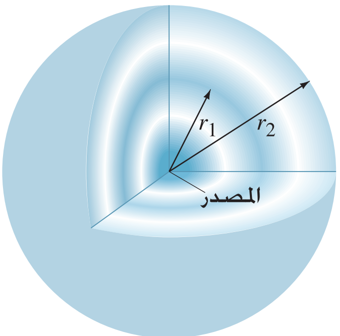
الوحدة الدولية (SI) للشدة هي (W/m^2)، وبما أنّ الطاقة تتناسب مع مربع الاتساع، كذلك تكون الشدة I:

الشدة α (الاتساع)^2

$$I \propto A^2. \qquad \textbf{(11-15)}$$

إذا انتشرت الموجة من المصدر في الاتجاهات جميعها، فهي موجةٌ ثلاثيّةُ الأبعاد. ومثال ذلك: الصوت الذي ينتشر في الهواء المفتوح، وموجات الزلازل، وموجات الضوء. وإذا كان الوسط متماثل الخصائص (نفسه في الاتجاهات كلّها) فالموجة كروية (الشكل 11-30). وعندما تنتقل الموجة إلى الخارج، فإنّ طاقتها تتوزع على مساحات أكبر وأكبر؛ لأنّ مساحة سطح الكرة تساوي $4\pi r^2$ (r نصف القطر)

الشكل 11-30 موجة تنتشر في ثلاثة أبعاد من المصدر تكون كروية. القمم(التضاغطات) مبينة بنصفي قطرين هما: r_1 و r_2.



ولهذا، فإنّ شدة الموجة الكروية تساوي

$$I = \frac{\text{القدرة}}{\text{المساحة}} = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad [\text{موجة كروية}] \qquad \textbf{(11-16أ)}$$

إذا كانت القدرة الناتجة من المصدر ثابتة، فإنّ الشدة تقلّ بما يتناسب مع مقلوب مربع البعد عن المصدر :

$$I \propto \frac{1}{r^2}. \qquad \textbf{(11-16ب)}$$

$I \propto \frac{1}{r^2}$

الأصوات تكون أهدأ بعيدا عن المصدر.

إذا افترضنا نقطتين على بعد r_2 ، و r_1 من المصدر (الشكل 11-30) عندئذٍ $I_1 = P/4\pi r_1^2$ و $I_2 = P/4\pi r_2^2$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \textbf{(11-16جـ)}$$

لذلك، إذا تضاعفت المسافة بحيث أن $(r_2/r_1 = 2)$ فإنّ الشدة تقلّ إلى الربع $I_2/I_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

يتناقص اتساع الموجة كذلك مع المسافة؛ لأنّ الشدّة تتناسب مع مربع الاتساع (المعادلة 11-15)، فالاتساع A يجب أن يقلّ مع $1/r$ بحيث $I \propto A^2$ سوف تتناسب مع $1/r^2$ (كما في المعادلة 11-16ب).

وهكذا $A \propto \frac{1}{r}$

فإذا افترضنا مسافتين r_1 ، r_2 عن المصدر فإنّ $\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2}$.

فإذا كانت الموجة على بعد يساوي مثلي بعدها الحالي عن المصدر، فإنّ الاتساع يكون نصف الاتساع الحالي، وهكذا (مع إهمال التضاؤل الناتج من الاحتكاك).

المثال 11-13 شدة الزلزال الأرضي

تساوي شدّة موجة الزلزال الأرضي P التي تنتقل عبر الأرض وتقاس على بعد 100 km من المصدر $1\times10^6\ \mathrm{W/m^2}$. ما شدة هذه الموجة إذا قيست على بعد 400 km من المصدر؟

النّهج: نفرض أنّ الموجة كرويّة. لذا، فإنّ الشدّة تقلّ مع مربع البعد عن المصدر.

الحلّ: عند 400 km، تكون المسافة أربعة أمثال المسافة 100 km. وعليه، فستكون الشدّة $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{16}\right)$ من قيمتها عند 100 km، أو $(1.0\times10^6\ \mathrm{W/m^2})/16 = 6.3\times10^4\ \mathrm{W/m^2}$.

ملحوظة: باستعمال (المعادلة 11-16 جـ)مباشرة

$$I_2 = I_1 r_1^2/r_2^2 = (1.0\times10^6\ \mathrm{W/m^2})(100\ \mathrm{km})^2/(400\ \mathrm{km})^2 = 6.3\times10^4\ \mathrm{W/m^2}$$

يختلف الوضع في حالة الموجة ذات البعد الواحد، مثل موجة مستعرضة في وتر، أو موجة طولية تنتقل في قضيبٍ فلزيٍّ رفيع. بما أنّ المساحة تبقى ثابته، فإنّ الاتساع يبقى ثابتا أيضا (مع إهمال الاحتكاك). وبهذا، لا ينقص الاتساع والشدة مع المسافة.

في الواقع، الاضمحلال موجود بسبب الاحتكاك بشكل عام، وبعض الطاقة تتحول إلى طاقة حرارية. وبالتالي يقلّ اتساع الموجة وشدتها في بعد واحد مع البعد عن المصدر. وفي الموجة ذات الأبعاد الثلاثة، يكون النقص أكبر على الرّغم من أنّ الأثر يكون صغيرا عادة.

* 11-10 الشدة وعلاقتها مع السعة والتردد

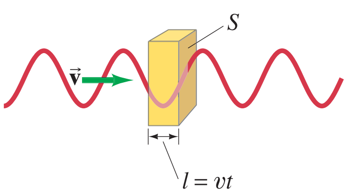
يمكن الحصول على علاقةٍ واضحةٍ بين الطاقة المحمولة في الموجة، أو شدّة الموجة I، واتساع الموجة وتردّدها. في الموجة الجيبة ذات التردد f، تتحرك الجسيمات في SHM عند مرور الموجة. لذا، فإنّ لكلّ جسيم طاقة حيث A الاتساع لحركته، سواء كانت الموجة مستعرضة أو طولية. وباستعمال (المعادلة 11-7 ب)، يمكن كتابة k بدلالة التردد $k = 4\pi^2 m f^2$، حيث m كتلة الجسيم (أو حجم صغير) من الوسط. وهكذا:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = 2\pi^2 m f^2 A^2.$$

الكتلة $m = \rho V$، حيث ρ كثافة الوسط، و V حجم شريحة صغيرة من الوسط كما هو مبين في (الشكل 11-31). الحجم $V = Sl$ حيث S مساحة المقطع التي تنتقل الموجة خلالها. (استعملنا S بدلا من A للمساحة لأننا نستعمل A للاتساع). ويمكننا كتابة l المسافة التي تقطعها الموجة في زمن t بالصورة $l = vt$ ، حيث v سرعة الموجة. وهكذا $m = \rho V = \rho Sl = \rho Svt$

$$E = 2\pi^2 \rho S v t f^2 A^2. \qquad (11\text{-}17\text{أ})$$

من هذه المعادلة، نرى أيضا النتيجة المهمة، وهي أنّ الطاقة المنقولة بالموجة تتناسب طرديًّا مع مربع الاتساع.



الشكل 11-31 حساب الطاقة التي تحملها الموجة المنتقلة بسرعة v.

والقدرة المنقولة $P = E/t$ هي

$$P = \frac{E}{t} = 2\pi^2 \rho S v f^2 A^2 \tag{11-17ب}$$

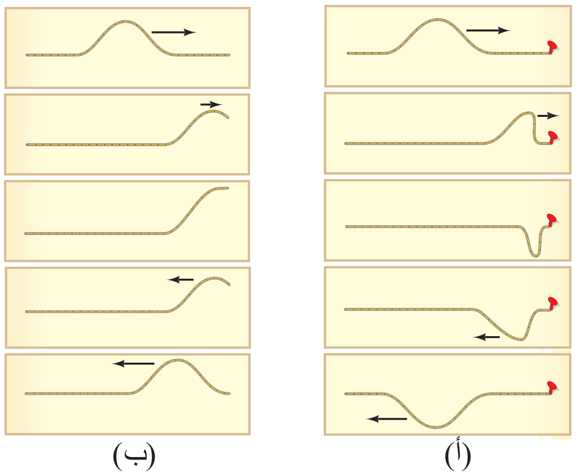
واخيرًا، فإنّ شدّة الموجة I هي القدرة المنقولة عبر وحدة مساحة عموديّة على اتجاه انتقال الطاقة.

$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 v \rho f^2 A^2 \tag{11-18}$$

وتبيّن هذه العلاقة بوضوح أنّ شدة الموجة تتناسب مع كلّ من مربع اتساع الموجة A عند أيّ نقطة ومربع التردد f.

11-11 انعكاس الموجات ونقلها

عندما تصطدم الموجة بحاجز، أو تصل إلى نهاية الوسط الذي تنتقل خلاله، فإنّ جزءًا منها سينعكس على الأقل. من الممكن أنّك شاهدت يومًا ما موجات الماء تنعكس عن صخرة أو جدار بركة سباحة. ومن الممكن كذلك أنّك سمعت صيحة انعكست من جرفٍ بعيد – وهذا ماندعوه "الصدى".

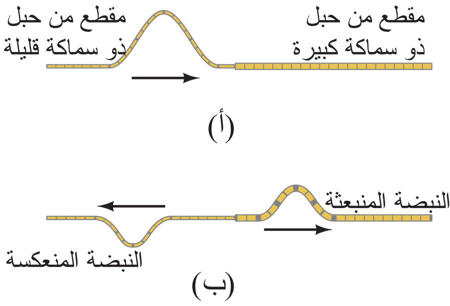


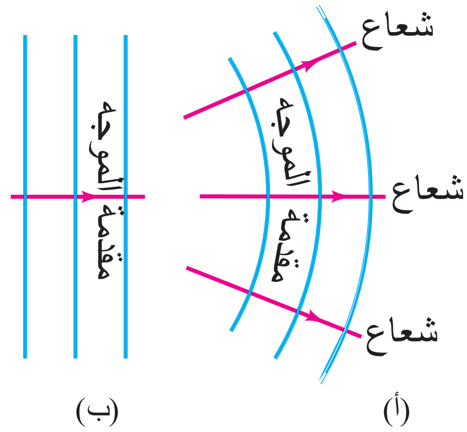
الشكل 11-32 انعكاس نبضة موجية في حبل ممدود على سطح طاولة. (أ) نهاية الحبل مثبته في وتد. (ب) نهاية الحبل حرة الحركة.

تنتقل نبضة موجية خلال حبل وتنعكس كما هو مبين في (الشكل 11-32) تنعكس النبضة مقلوبةً كما في (الشكل 11-32 أ)إذا كانت نهاية الحبل مثبتة، وتنعكس بالكيفية نفسها التي وصلت بها إذا كانت نهاية الحبل حرة الحركة كما في (الشكل 11-32 ب) . وعندما تكون النهاية مثبته، (الشكل 11-32 أ) ، فإنّ النبضة التي تصل النهاية المثبتة تؤثر بقوة (نحو الأعلى) في الدعامة. وتؤثر الدعامة بقوة مساوية ولكنها معاكسة نحو الأسفل على الحبل (قانون نيوتن الثالث). إنّ هذه القوة المعكوسة على الحبل هي التي "تولد" النبضة المنعكسة المقلوبة.

افترض نبضة تنتقل عبر حبل يتكوّن من جزءٍ خفيف، وجزءٍ آخر سميك كما في (الشكل 11-33). عند وصول النبضة إلى الحد الفاصل بين الجزأين، ينعكس جزء من النبضة ويرسل الجزء الثاني، كما هو مبين، فكلّما كان الجزء الثاني أثقل، كانت الطاقة المرسلة أقلّ. وعندما يكون الجزء الثاني جدارا أو دعامة صلبة، يرسل مقدارًا قليلًا جدًّا من الطاقة، في حين ينعكس معظمه كما في (الشكل 11-32 أ) . وفي حالة الموجة الدورية، فإنّ تردد الجزء المرسل (النافذ) من الموجة لا يتغير عند عبورها إلى الحدّ الفاصل؛ لأنّ نقطة الحدّ الفاصل تهتز بالتردد نفسه. وعليه، إذا كانت سرعة الموجة النافذه أقلّ، فهذا يعني أنّ طول الموجة أيضا أقصر $\lambda = v/f$.

الشكل 11-33 عندما تنتقل نبضة موجية نحو اليمين خلال حبل رفيع (أ) تصل إلى نقطة عدم اتصال حيث الحبل أكثر ثخانة وأثقل، عندها ينعكس جزء من الموجة ويرسل جزء آخر(ب).

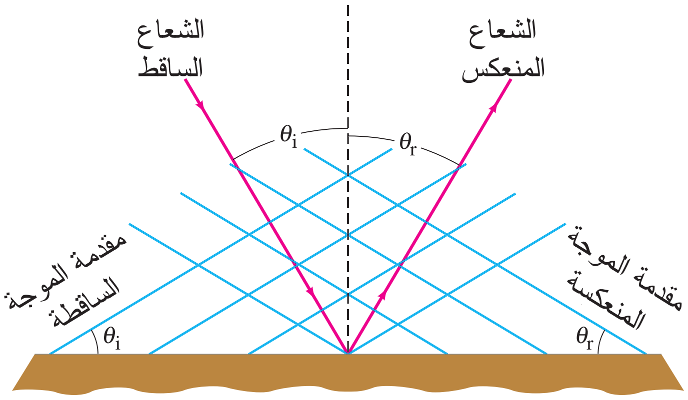




الشكل 11-34 تبين الأشعة اتجاه انتقال الموجات، وتكون دائما عمودية على مقدمات الموجات.
(أ)موجات دائرية أو كروية قريبة من المصدر.
(ب)تكون مقدمات الموجات مسطحة بعيدا عن المصدر، وتسمى موجات مستوية.

بالنسبة إلى موجةٍ ذات بعدين أو ثلاثة، مثل موجات الماء، فإنّنا معنيون بمقدمة الموجة، وهذا يعني النقاط كلّها على الموجة التي تشكل قمتها (تُدعى عادةً "موجة" على شاطىء البحر). إنّ الخطّ الموسوم باتجاه انتقال الموجة عموديًّا على مقدّمة الموجة يُسَمّى عادةً "شعاعًا" كما هو مبيّن في (الشكل 34-11). ومقدمات الموجات البعيدة عن المصدر تكون قد فقدت انحناءها كلّه تقريبًا. (الشكل 11-34 ب) وتكون مستقيمة تقريبا كذلك، كموجات المحيطات التي تسمى عندها موجات مستوية.

ولانعكاس موجاتٍ مستويةٍ ذات بعدين أو ثلاثة، كما في (الشكل 11-35) ، فإنّ الزاوية التي تصنعها الموجات القادمة أو الساقطة مع السطح العاكس تساوي الزاوية التي تصنعها الموجة المنعكسة. وهذا هو قانون الانعكاس الذي ينصّ على أنّ زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس. وتعرف زاوية السقوط على أنها الزاوية التي يصنعها الشعاع الساقط مع العمود على سطح الانعكاس (أو مقدمة الموجة مع المماس للسطح). أمّا زاوية الانعكاس فهي الزاوية المحصورة بين الشعاع المنعكس والعمود المقام على السطح العاكس.



الشكل 11-35
قانون الأنعكاس

11-12 التداخل ؛ مبدأ التراكب

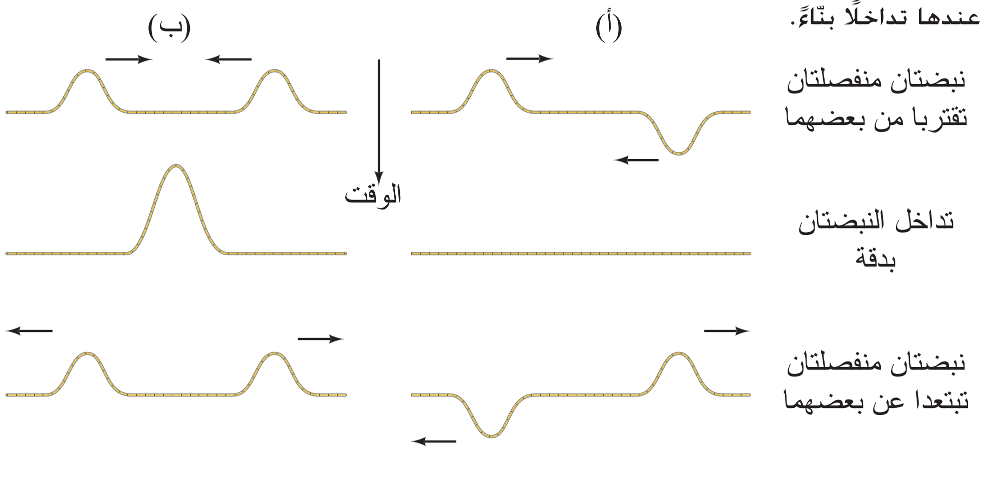
يُعزى التداخل إلى ما يحصل عندما تعبر موجتان منطقةً من الحيّز نفسه في الوقت ذاته. خذ مثلا انتقال النبضتين الموجيتين في خيط نحو بعضهما بعضًا في (الشكل 11-36) . وفي (الشكل 11-36 أ) ، نلاحظ أنّ اتساع النبضتين متساوٍ، إلا أنّ إحداهما قمّة، أما الأخرى فقاع؛ ولكن في (الشكل 11-36 ب) نجد أنّهما قمّتان. وفي كلتا الحالتين، تعبر الموجتان بجانب بعضهما بعد التقابل. وعلى أيّ حال، فإنّ الإزاحة المحصلة في المنطقة التي تتطابقان فيها تساوي المجموع الجبري لازاحتيهما منفصلتين. (تعدّ القمة موجبةً في حين يعدّ القاع سالبا). وهذا ما يطلق عليه "مبدأ التراكب".

مبدأ التراكب

في (الشكل11-36 أ) هناك إزاحتان متعاكستان للموجتين عند مرورهما أمام بعضهما، وتكون محصلتهما صفرًا، وتُعرف هذه النتيجة بالتداخل الهدّام. أما في (الشكل 11-36 ب)، وعند لحظة تطابق الموجتين، فإنهما تنتجان إزاحة محصلة أكبر من إزاحة كلّ منهما على حدة، وتسمى النتيجة عندها تداخلًا بنّاءً.

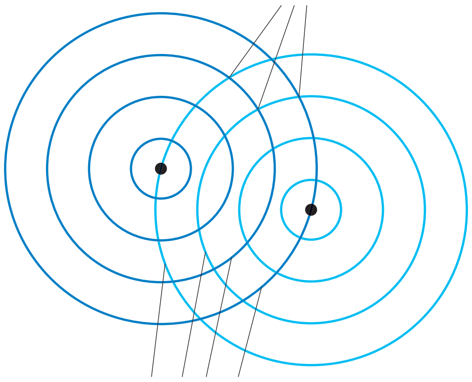
تداخل هدّام

تداخل بنّاء



الشكل 11-36 نبضتان موجيتان تعبران المنطقة نفسها. تتطابق الموجتان ويحدث التداخل: (أ) تداخل هدّام (ب) تداخل بنّاء.

(أ)



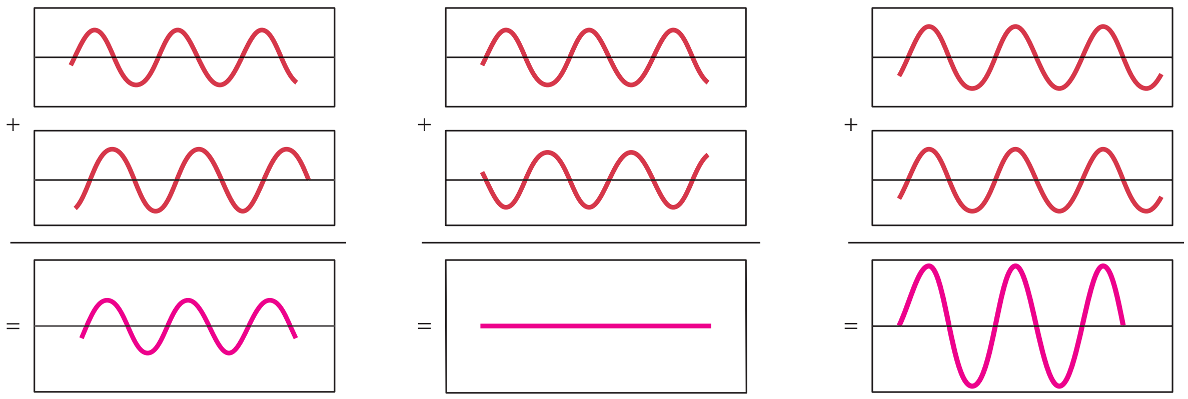
(ب)

الشكل 11-37 تداخل موجات الماء

عند إلقاء حجرين في بركة في آنٍ معًا، تتداخل مجموعتان من الموجات الدائريّة كما في (الشكل-37-11أ) . في بعض مناطق التطابق، تتقابل قمم الموجة الأولى مع قمم الموجة الثانية(وتلتقي القيعان ببعضها): انظر (الشكل 11-37 ب) . يحصل التداخل البنّاء عند هذه النقاط. ويهتز الماء نحو الأعلى والأسفل باتساع أكبر من اتساع الموجات منفصلة. وفي مناطق أخرى، يحصل تداخل هدّام حيث لا يتحرك الماء لا إلى الأعلى ولا إلى الأسفل ابدًا، حيث تتقابل قمّة موجةٍ مع قاع موجة أخرى، والعكس صحيح أيضا. يبين (الشكل 11-38 أ) إزاحة موجتين بالرسم كدالة بالزمن، وكذلك مجموعهما في حالة التداخل البنّاء. ولأيّ موجتين من هذا النوع، نستخدم تعبير "الطور" لوصف الوضعين النسبيين لقمتيهما، عندما تصطف القمم والقيعان كما هو مبين في (الشكل 11-38 أ) ، وللتداخل البناء، يقال إنّ الموجتين في الطور نفسه. وأما عند النقاط التي يحصل فيها تداخل هدام- انظر (الشكل 11-38 ب) – فتتقابل القمم من مجموعة موجات مع سلسلة من القيعان من الموجة الثانية، ويُقال عندئذٍ إنّ الموجتين خارج الطور بصورةٍ كاملة، وبصورةٍ أدق، إنّهما خارج الطور بمقدار نصف طول موجة؛ أي أنّ قمم مجموعة تتأخر بمقدار نصف موجة من قمم الموجة الثانية. ويأتي الطور النسبي لموجتي الماء في (الشكل 11-37) في وسط الحالتين السابقتين، وينتج بذلك تداخل هدّام جزئيًا كما في (الشكل 11-38جـ) . وإذا كان اتساع كلّ من الموجتين المتداخلتين غير متساوٍ، فلا يحدث تداخل هدّام تام (كما في الشكل11-38ب).

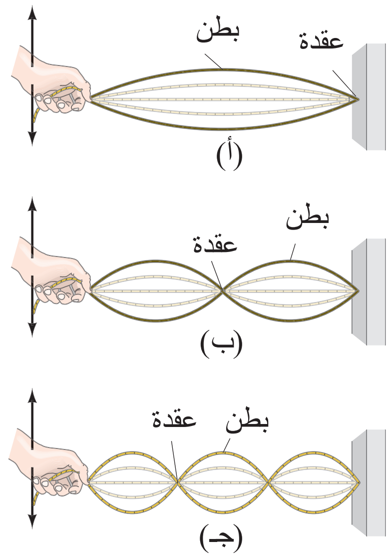
الطور

الشكل 11-38 تبين الرسومات موجتين ومجموعهما كدالة بالزمن عند ثلاثة مواقع، حيث تتداخل الموجتان تداخلا: (أ) بنّاءً. (ب) هدّاما. (جـ) هدّاما جزئيًا.



(أ) (ب) (جـ)

13-11 الموجات الموقوفة؛ الرنين



الشكل 11-39 الموجات الموقوفة تعود لثلاثة ترددات رنين.

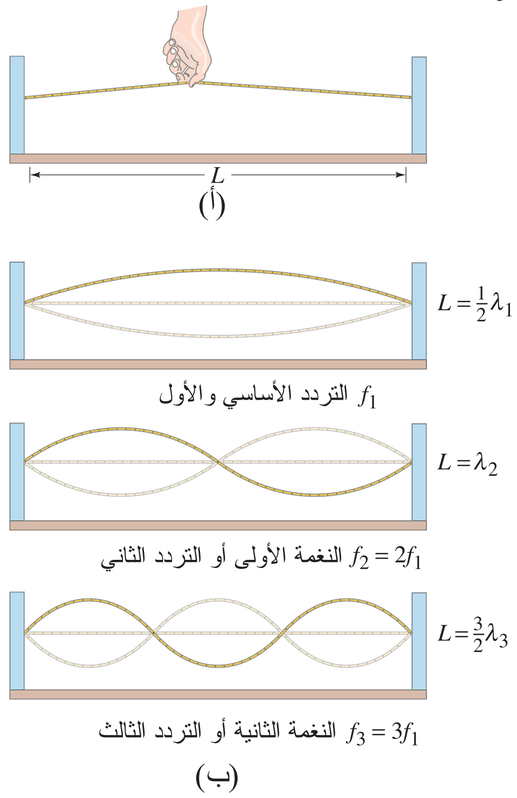
إذا هززت إحدى نهايتي وترٍ مع بقاء النهاية الأخرى ثابتةً، فإنّ موجةً متصلةً ستنتقل إلى النهاية الثابتة ثم تنعكس إلى الخلف، مقلوبةً كما رأينا في (الشكل 11-32 أ) . وعند تحريك الوتر بصورةٍ مستمرّةٍ، فستتحرك الموجات في كلا الاتجاهين، وسوف تتداخل الموجة المنتقلة في الوتر بعيدا عن يدك مع الموجة المنعكسة للخلف. وعادةً ما سيكون هناك مزيج. ولكن إذا هززت الوتر بالتردد المناسب، فإنّ الموجتين المنتقلتين ستتداخلان بطريقة تنتج موجة موقوفة ذات اتساع كبير، (الشكل 11-39) . وتسمى موجة "موقوفة" لأنّها تظهر وكأنّها لا تتحرك. يبدو في الوتر أجزاء تهتز إلى الأعلى والأسفل بنمط ثابت. وتُسَمّى نقاط التداخل الهدّام حيث يبقى الوتر ساكنًا في الأوقات جميعها "عقدًا". أمّا نقاط التداخل البناء حيث يهتز الوتر باقصى اتساع، فتسمى "بطونا". وتبقى العقد والبطون في أمكنة ثابته لتردد معين.

تحدث الموجات الموقوفة لأكثر من تردد. إنّ أقلّ تردد للحركة ينتج موجة موقوفة يعطي النمط المبين في (الشكل 11-39 أ) . والموجات الموقوفة المبينة في (الشكلين 11-39 ب و 11-39 ج) تنتج عند ضعف وثلاثة أضعاف التردد الأصغر، بفرض أنّ الشد في الوتر يبقى ثابتا. كما يمكن للوتر أن يهتز عند أربعة أمثال التردد الأصغر، وهكذا.

رنين الترددات

إنّ الترددات التي تنتج عندها الموجات الموقوفة هي الترددات الطبيعية، أو **ترددات الرنين** للوتر، وأنماط الموجات الموقوفة المبينة في (الشكل 11-39) هي أنماط اهتزازات رنين مختلفة. كما أنّ الموجة الموقوفة في الوتر هي نتيجة تداخل موجتين تسيران في اتجاهين متعاكسين. إضافةً إلى أنّ الموجة الموقوفة هي جسم يهتزّ في حالة رنين. تمثّل الموجات الموقوفة الظاهرة نفسها في رنين الزنبرك المهتزّ أو البندول، التي ناقشناها في (البند 11-6) . ولكن الفرق الوحيد هو أنّ للزنبرك أو البندول تردّد رنين واحدًا. أمّا الوتر، فله عددٌ لانهائي من ترددات الرنين، كلّ واحد منها عدد صحيح مضروبا في أصغر تردد رنين.

افترض خيطًا مشدودًا بين دعامتين حيث يضرب مثل خيط القيثارة أو الكمان، (الشكل 11-40 أ). سوف تنتقل موجات بترددات كثيرة متفاوتة بالاتجاهين على امتداد الخيط، ومن ثمّ تنعكس عند النهايتين، ثمّ تنطلق في الاتجاه المعاكس.



الشكل 11-40 (أ) خيط يُنقر (ب) الموجات الموقوفة التي تعود لترددات رنين مختلفة فقط هي التي ستدوم طويلا.

إنّ معظم هذه الموجات تتداخل معًا وتتلاشى. وعلى أيّ حال، فإنّ الموجات التي تنسجم مع ترددات رنين الخيط سوف تبقى. وستكون نهايتا الخيط عقدًا لأنّهما مثبتتان. كما سيكون هناك عُقَدًا أخرى أيضًا. بعض الموجات الموقوفة (أنماط اهتزازات الرنين) مبيّنة في (الشكل 11-40 ب) . وبشكل عام، فإنّ الحركة ستكون تركيبًا لموجات الرنين هذه، ولكن الترددات التي تنسجم مع ترددات الرنين سوف تبقى.

ولتحديد ترددات الرنين؛ نلاحظ أولًا أنّ طول الموجات يرتبط بعلاقة بسيطة مع طول الخيط L. وينسجم أصغر تردد، "التردد الأساسي" مع بطن واحد (أو عروة). ويمكن مشاهدته في (الشكل 11-40 ب)، حيث يساوي طول الخيط كله نصف طول موجة. وهكذا $L = \frac{1}{2}\lambda_1$، حيث، 1λ طول الموجة ذات التردد الأساسي. وتُسَمّى الترددات الأخرى الطبيعية الحلات، وهي لوترٍ مهتزٍّ أعدادٌ صحيحةٌ مضروبةٌ في التردد الأساسي، وهي تُدعى توافقيات أيضًا. ويُسَمَّى التردد الأساسي النغمة الأولى*. الاهتزازة التالية بعد الأساسية لها عروتان وتُسَمّى النغمة الثانية (الحل الأول)، (الشكل 11-40 ب). إنّ طول الخيط L في النغمة الثانية يساوي طول موجة كاملة: $L = \lambda_2$. وللنغمتين الثالثة والرابعة $L = \frac{3}{2}\lambda_3$ و $L = 2\lambda_4$ على الترتيب، وهكذا. وبشكل عام يمكن أن نكتب

التردد الأساسي

الحلات والتوافقيات

$$L = \frac{n\lambda_n}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

يشير العدد الصحيح n إلى عدد التوافقيات: $n = 1$ للأساسي، $n = 2$ للثاني، $n = 3$ للثالث وهكذا. ونحلّ العلاقة لإيجاد λ_n

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad \text{(19-11أ)}$$

ولحساب تردد كلّ نغمة f؛ نستعمل (المعادلة 11-12) ، $f = v/\lambda$ لرؤية أنّ

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} = nf_1, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad \text{(19-11ب)}$$

حيث $f_1 = v/\lambda = v/2L$ هو التردد الأساسي. ونلاحظ أنّ كلّ تردد رنين هو عدد صحيح مضروبا في التردد الأساسي.

ولأنّ الموجة الموقوفة تكافىء موجتين تسيران باتجاهين متعاكسين، فإنّ مبدأ سرعة الموجة لا يزال مقبولا، ويعطى (بالعلاقة 11-13) بدلالة الشد F_T في الخيط، وكتلة وحدة الأطوال للخيط (m/L)؛ أي أنّ $v = \sqrt{F_T/(m/L)}$ للموجات المتحركة في كلا الاتجاهين.

المثال 11-14 أوتار البيانو

وتر بيانو طوله $1.10\ \text{m}$، وكتلته $9.00\ \text{g}$: (أ) ما مقدار الشد الذي يخضع له بحيث يهتزّ بنغمةٍ أساسية ترددها $131\ \text{Hz}$؟ (ب) ما ترددات التوافقيات الأربع الأولى؟

النّهج: لحساب الشد؛ نحتاج إلى حساب سرعة الموجة باستعمال (المعادلة 11-12) $(v = \lambda f)$، ثم استعمال (المعادلة 11-13) لإيجاد F_T .

الحلّ: (أ) طول موجة التردد الأساسي $\lambda = 2L = 2.20\ \text{m}$ (المعادلة 11-19 أ حيث $n = 1$). سرعة الموجة في الوتر هي

$$v = f\lambda = (2.20\ \text{m})(131\ s^{-1}) = 288\ \text{m/s}$$ ، ثم من (المعادلة 11-13)

$$F_T = \frac{m}{L}v^2 = \left(\frac{9.00\times10^{-3}\ \text{kg}}{1.10\ \text{m}}\right)(288\ \text{m/s})^2 = 679\ \text{N}.$$

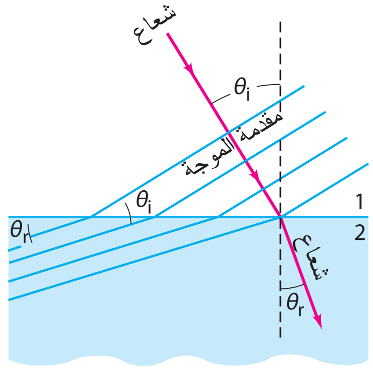
(ب) الترددات؛ الثاني، والثالث، والرابع هي: اثنان، وثلاثة، وأربعة مضروبة في التردد الطبيعي 262،393, 524 Hz

ملحوظة: سرعة الموجة في الوتر ليست نفسها سرعة موجة الصوت الناتجة من الوتر في الهواء (كما سنرى في الفصل 12).

* التعبير "توافقي" جاء من الموسيقى، لأنّ هذه المضاعفات الصحيحة للتردّدات "تتناغم".

يمكن الحصول على موجاتٍ موقوفةٍ في كلِّ جسمٍ يُضرب وليس في الأوتار فقط، مثل غشاء الطبل، أو جسمٍ مصنوعٍ من الفلزات، أو الخشب. تعتمد ترددات الرنين على أبعاد الجسم؛ ففي الوتر تعتمد على طوله. أما الاجسام الكبيرة، فلها تردداتٌ طبيعيّةٌ صغيرةٌ مقارنةً بالأجسام الصغيرة. في حين تعتمد الأدوات الموسيقية جميعها بدءًا بالآلات الوترية وانتهاءً بآلات النفخ الهوائية (يهتزُّ عمود الهواء فيها كموجةٍ موقوفة) والطبول، وآلات النقر على الموجات الموقوفة للحصول على أصواتها الموسيقيّة كما سنرى في (الفصل 12).

14-11 الانكسار*



الشكل 41-11 انكسار الموجات التي تجتاز حدّا فاصلا.

عندما تصدم أيَّ موجةٍ حاجزًا، فإنّ بعضًا من الطاقة سينعكس وبعضها الآخر ينفذ أو يُمتص. وعندما تعبر موجة ثنائية أو ثلاثية الأبعاد إلى وسط حيث سرعتها مختلفة، فإنّ الموجة النافذه قد تتحرك باتّجاه مختلف عن اتّجاه الموجة الساقطة كما هو مبين في (الشكل 11-41) . وتسمى هذه الظاهرة "الانكسار". ومثال ذلك موجة الماء، حيث تقل سرعتها في الماء الضحل وتتكسر كما في (الشكل 11-42)، أسفل. [عندما تتغير سرعة الموجة تدريجيًّا، كما في (الشكل 11-42) دون فاصل حاد، فإنّ الموجات تغيّر اتّجاهها تدريجيا. (تنكسر)].

في (الشكل 11-41) ، سرعة الموجة في الوسط 2 أقلّ من سرعتها في الوسط 1. في هذه الحالة، تنثني مقدمة الموجة فتسير أكثر قربًا من الحدّ الفاصل؛ أي أنّ زاوية الانكسار θ_r أقل من زاوية السقوط θ_i . لمعرفة هذا، ولإيجاد علاقة كمية بين θ_r و θ_i؛ دعنا نفكر في مقدمة موجة كصف من الجنود. فعند تقدمهم من أرض صلبة (الوسط 1) إلى أرض موحلة (الوسط2)، يتباطؤون عند الحد الفاصل، والجنود الذين يصلون إلى الوحل أولا يتباطؤون أولا، وينثني الصف كما في (الشكل 11-43 أ) .

دعنا نفترض مقدمة الموجة (أو صف الجنود) A في (الشكل 11-43 ب) . في الوقت نفسه t الذي تتحرك فيه A مسافة $l_1=v_1t$ ، نرى أنّ A_2 تتحرك مسافة $l_2=v_2t$. المثلثان قائما الزاوية في (الشكل 11-43ب) ، والمظللان باللونين الأخضر والأصفر لهما الضلع المشترك a. وهكذا

$$\sin\theta_1=\frac{l_1}{a}=\frac{v_1t}{a}$$

بما أنّ a هو الوتر، وأنّ

$$\sin\theta_2=\frac{l_2}{a}=\frac{v_2t}{a}$$

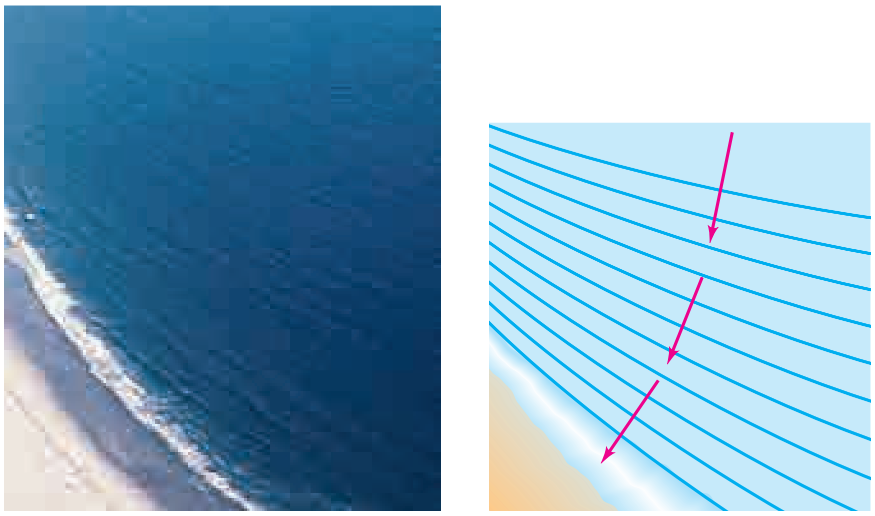
وبقسمة المعادلتين على بعضهما، فإننا نحصل على قانون الانكسار الآتي:

قانون الانكسار

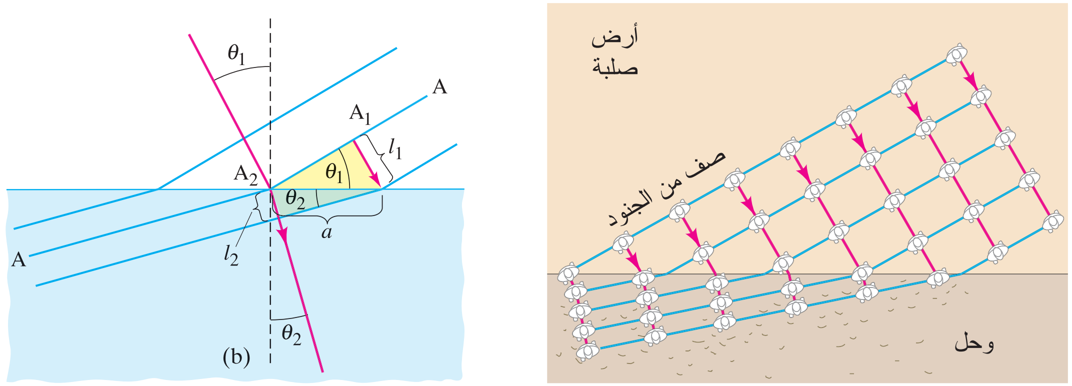
$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1} \qquad \textbf{(20-11)}$$

وبما أنّ θ_1 زاوية السقوط (θ_i) و θ_2 زاوية الانكسار (θ_r)، فإنّ (المعادلة 11-20) تعطي العلاقة الكمية بين الزاويتين.

* هذا البند والذي يليه يتم تغطيتهما بالتفصيل في (الفصلين 23 و25) في الضوء.



الشكل 11-42 تنكسر موجات الماء تدريجيا عند اقترابها من الشاطىء، عندما تقل سرعتها. ليس هناك حد فاصل محدد كما في (الشكل 11-41) لأنّ سرعة الموجات تتغير تدريجيا.



(ب) (أ)

الشكل 11-43 (أ) اشتقاق تناظر مع حركة الجنود. (ب) قانون انكسار الموجات.

لو كانت الموجة تسير في الاتجاه المعاكس، لا تتغيّر هندسة الشكل، ولكن θ_1 و θ_2 تتبادلان الأدوار فقط. وسوف تصبح θ_1 زاوية الانكسار، وθ_2 زاوية السقوط. من الواضح عندها، إذا كانت الموجة تسير في وسط معين بشكل أسرع، فسوف تنثني بالاتجاه الآخر $\theta_r > \theta_i$. ونرى من (المعادلة 11-20) أنه إذا زادت السرعة تزداد الزاوية. والعكس صحيح.

تطبيق الفيزياء
انكسار الموجات الزلزالية.

تنكسر الموجات الزلزاليّة داخل الأرض عندما تنتقل في طبقات من الصخر ذات كثافاتٍ مختلفة (وبالتالي تختلف السرعة) تمامًا كما تفعل موجات الماء. وتنكسر موجات الضوء أيضًا. وعندما نناقش الضوء سوف نجد (المعادلة 11-20) مفيدة جدا.

المثال 11-15 انكسار موجة زلزالية

تمرُّ موجةٌ زلزاليّة P عبر حدٍّ فاصلٍ في الصخر، وتزداد سرعتها من 6.5 km/s إلى 8.0 km/s. إذا اصطدمت بهذا الفاصل بزاوية 30°، فما زاوية الانكسار؟

النهج: نطبق قانون الانكسار، (المعادلة 11-20).

الحل: بما أنّ $\sin 30° = 0.50$، (المعادلة 11-20) تعطينا

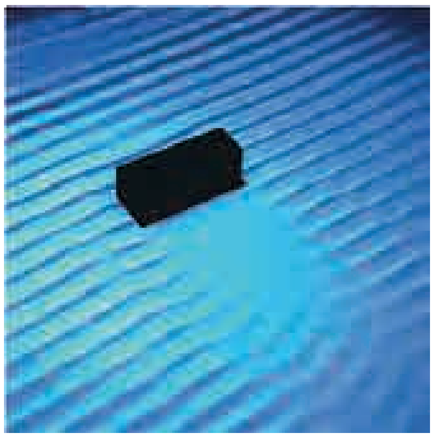
$$\sin\theta_2 = \frac{(8.0\ \text{m/s})}{(6.5\ \text{m/s})}(0.50) = 0.62.$$

وهكذا $\theta_2 = \sin^{-1}(0.62) = 38°$

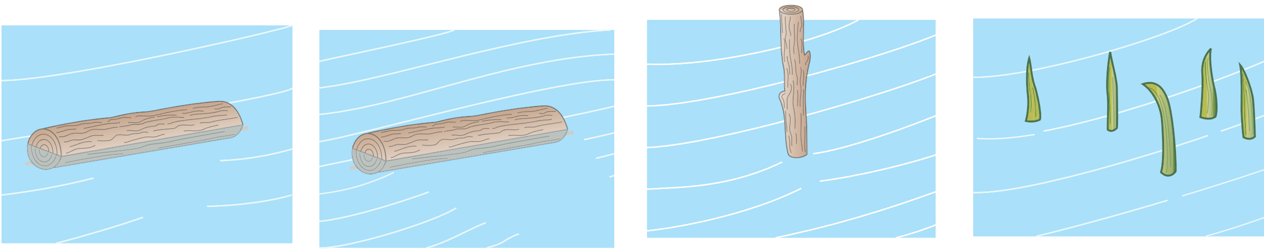
ملاحظة كن حذرًا مع زوايا السقوط والانكسار. كما ناقشنا في (البند 11-11، الشكل 11-35)، هاتان الزاويتان بين مقدمة الموجة والحدّ الفاصل، أو – بصورةٍ مكافئة – بين الشعاع (اتجاه حركة الموجة) والخط العمودي على الحدود. امعن النظر في (الشكل 11-43 ب).

11-15 الحيود

تنتشر الموجات في أثناء انتقالها. وعندما تصادف حاجزًا تنثني حوله قليلًا وتمرّ إلى المنطقة خلفه كما يبين (الشكل 11-44) لموجات الماء. هذه الظاهرة تُدعى "الحيود".



الشكل 11-44 حيود الموجات. الموجات تأتي من أعلى اليسار. لاحظ كيف تلتف الموجات – عند مرورها بحاجز – حوله إلى منطقة "الظل" خلفه.



(أ) موجات الماء تعبر خلال نصل أوراق الأعشاب

(ب) عصا في الماء

(جـ)موجات ذات أطوال موجية قصيرة تعبر خلال جذع الشجرة

(د) موجات ذات أطوال موجية طويلة تعبر خلال جذع الشجرة

الشكل 45-11 تعبر موجات الماء أجسامًا بأحجامٍ مختلفة. لاحظ أنّه كلّما كان طول الموجة أكبر مقارنةً بحجم الجسم كان الحيود أكبر إلى داخل "منطقة الظل".

يعتمد مقدار الحيود على كلٍّ من طول الموجة وحجم الجسم (الحاجز) ، كما يبين (الشكل 45-11) . إذا كان طول الموجة أكبر بكثيرٍ من الجسم، كما في نصل أوراق الأعشاب، (الشكل 45-11 أ)، فإنّ الموجات تنحني خلالها كما لو لم تكن موجودة. وبالنسبة إلى الأجسام الأكبر، الفرعان (ب) و(جـ) هناك منطقة "ظل" أكبر خلف الحاجز، حيث قد لا نتوقع أن تخترقها الموجات– ولكنها تخترقها ولو قليلا. ثم لاحظ في الفرع (د) حيث لاحاجز كما في الفرع (جـ) لكن طول الموجة أكبر؛ أي أنّ هناك حيودًا أكبر إلى منطقة "الظل". وكقاعدة: فقط، إذا كان طول الموجة أصغر من حجم الجسم (الحاجز) فستكون هناك منطقة "ظل" مهمّة. هذه القاعدة تنطبق على الانعكاس من حاجز أيضًا. وقليل من الموجة سوف ينعكس، إلا إذا كان طول الموجة أصغر من حجم الحاجز.

وكدليل على الحيود؛ نستعمل الدليل التقريبي

$$\theta(\text{radians}) \approx \frac{\lambda}{L},$$

حيث θ زاوية انتشار الموجات بعد مرورها من فتحة عرضها L أو حول حاجز عرضه L.

تستطيع الموجات الالتفاف حول الحواجز، وبالتالي تنتقل الطاقة إلى مساحات خلف هذه الحواجز، وهذا يختلف كثيرًا عن الطاقة التي تحملها الجسيمات المادية. ومثال هذا: إذا كنت واقفًا خلف زاوية بناية، فلا يمكن أن تصيبك كرة بيسبول تُرمى من الجانب الآخر، ولكنّك تستطيع سماع صوت آخر؛ لأنّ موجات الصوت تحيد حول الزاويا.

المثال المفاهيمي 16-11 **الهواتف المحمولة**

تعمل الهواتف المحمولة بموجات الراديو بترددات تقارب 1 أو 2 جيجاهيرتز ($1G\text{ Hz} = 10^9\text{ Hz}$). إنّ هذه الموجات لا تخترق أجسامًا موصلةً للكهرباء، كجذوع الأشجار أو الصفائح الفلزيّة. وأفضل اتصالٍ يتمّ إذا كان هوائي الإرسال مرئيًّا من جهاز الاستقبال. على الرغم من أنّه يمكن إجراء محادثة هاتفية حتى لو كان البرج محجوبا بالأشجار، أو لو كان جهاز الاستقبال داخل سيارة، لماذا؟

الإجابة: إذا كان تردد موجات الراديو حوالي 2 GHz، وكانت سرعة الانتقال هي سرعة الضوء 3×10^8 m/s (البند 1-5)، عندها يكون طول الموجة

$$\lambda = v/f = (3\times10^8\text{ m/s})/(2\times10^9\text{Hz}) = 0.15\text{ m}$$

تستطيع الموجات أن تحيد عن حواجز قطرها 15 cm أو أقلّ.

16-11 التمثيل الرياضي لموجة متحركة

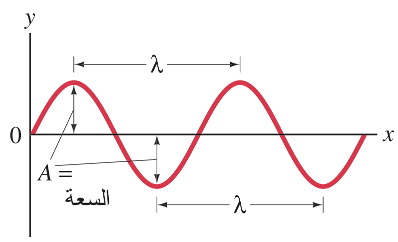
إنّ موجةً بسيطةً بترددٍ منفرد، كما في (الشكل 46-11) هي موجة جيبيّة. وللتعبير عن هذه الموجة رياضيًّا؛ نفرض أنّ لها طول موجة λ وترددا f. وعند اللحظة التي تكون فيها $t = 0$، فإنّ شكل الموجة المبينة يكون

$$y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x \qquad \textbf{(21-11)}$$

حيث y الإزاحة (سواء كانت طوليّةً أو مستعرضة) عند الموقع x، أمّا A فهو اتساع الموجة، وλ طول الموجة.

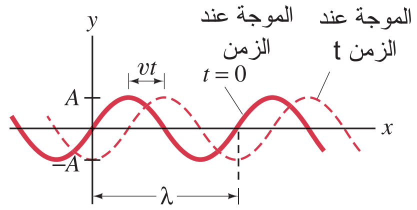
[المعادلة 21-11 تنطبق لأنّها تكرّر نفسها كلّ طول موجة. عندما: $x = \lambda$، فإنّ $y = \sin 2\pi = \sin 0$].

الشكل 46-11 خصائص الموجة ذات التردد الواحد عندما t=0 (تمامًا كما في الشكل 23-11).



افرض أنّ الموجة تتحرّك نحو اليمين بسرعة v . بعد زمن t، يتحرّك كلّ جزءٍ في الموجة (في الواقع كلّ "شكل" الموجة) نحو اليمين مسافة tv. يبين (الشكل 11-47) الموجة عند $t = 0$ كمنحنًى متصل، وبعد زمن t كمنحنًى متقطع. افرض أيّ نقطة على الموجة عند $t = 0$: وافرض أيضًا قمّةً عند الموقع x. بعد زمن t، تكون هذه القمة قد تحرّكت مسافة tv. لذا، فإنّ موقعها الجديد يبعد عن موقعها الأصلي مسافة tv. ولوصف النقطة نفسها على منحنى الموجة؛ فإنّ الحدّ بعد "sin" يجب أن يكون له القيمة العددية نفسها، لذلك نعوض بدلًا من x في (المعادلة 11-21)الحدّ $(x - vt)$:

$$y = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \tag{11-22}$$



الشكل 11-47 موجة منتقلة. خلال الزمن t، تتحرك الموجة مسافة tv.

1-D موجة تتحرك باتجاه +x.

أو بطريقةٍ أخرى، إذا كنت عند قمّة، فإنّه عند زيادة t يجب أن تزيد x بالمعدل نفسه بحيث يبقى $(x - vt)$ ثابتا.

أما الموجة المنتقلة على محور x نحواليسار، نحو تناقص قيم x, v تصبح $-v$، لذلك

1-D موجة تتحرك باتجاه –x (إلى اليسار)

$$y = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right]$$

ملخص

يعمل الجسم المهتزُّ حركةً توافقيّةً بسيطة SHM إذا كانت القوّة المعيدة تتناسب مع الإزاحة

$$F = -kx \tag{11-1}$$

وتُسَمّى أقصى إزاحة اتساعًا

أمّا الزمن الدوري T فهو الزمن اللازم لعمل دورةٍ كاملة (إلى الأمام والخلف)، في حين يشيرالتردد f إلى عدد الدورات في الثانية. والعلاقة بينهما هي

$$f = \frac{1}{T} \tag{11-2}$$

ويُعطى زمن الاهتزاز لكتلة m مربوطة في نهاية زنبرك بـ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{11-7أ}$$

SHM هي حركة جيبية، وهذا يعني أن الإزاحة كدالة في الزمن تتبع منحنى جيب أو جيب تمام.

خلال SHM، الطاقة الكلية

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{11-3}$$

تتغيّر باستمرار من طاقة وضع إلى طاقة حركة، ومن طاقة حركة إلى طاقة وضع.

البندول البسيط بطول L يقترب من SHM. للاتساعات الصغيرة، يعطى الزمن الدوري بـ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{11-11أ}$$

حيث g تسارع الجاذبية.

وعندما يكون الاحتكاك موجودًا (للزنبركات والبندولات الحقيقية جميعها) فالحركة مضمحلة . إنّ أقصى إزاحةٍ تتناقص مع الزمن، وبالتالي تتحول الطاقة أخيرًا إلى طاقة حرارية.

إذا أثرت قوة متأرجحة في نظام قادر على الاهتزاز ، فقد يكون اتساع الاهتزاز كبيرًا جدًّا إذا اتفق تردّد القوّة المؤثّرة مع التردّد الطبيعي (تردد الرنين) للمهتز، ويطلق على هذا الأثر الرنينُ.

تتصرف الأجسام المهتزّة كمصادر للموجات، وهي تنتشر بعيدًا عن المصدر. ومن أمثلة ذلك، الموجات في الماء وفي الخيط. قد تكون الموجة نبضة(قمة واحدة) أو متصلة (قمم وقيعان كثيرة). إنّ طول الموجة لموجة جيبية متصلة هو المسافة بين قمتين.

أمّا التردد، فهو عدد الأطوال الموجية التي تعبر نقطة معينة في وحدة الزمن.

إنّ اتساع الموجة هو أقصى ارتفاع للقمة، أو أعمق قاع نسبة إلى مستوى الاتزان.

سرعة الموجة (سرعة حركة القمة) تساوي حاصل ضرب طول الموجة في التردد.

$$v = \lambda f \tag{11-12}$$

في الموجة المستعرضة، تكون الاهتزازات عمودية على الاتجاه الذي تنتقل فيه الموجة. ومثال ذلك موجة في خيط.

ولكن في الموجة الطولية، تكون الاهتزازات باتجاه انتقال الموجة؛ والصوت مثال على ذلك.

أمّا شدة الموجة، فهي الطاقة لكلّ وحدة زمن تحمل عبر وحدة مساحة (Watts/m^2). وللموجات ثلاثية الأبعاد التي تنتقل في الفضاء المفتوح، تقل شدة الموجة عكسيًا مع مربع البعد عن المصدر

$$I \propto \frac{1}{r^2}. \tag{11-16ب}$$

[*تتناسب شدة الموجة طرديًا مع مربع كلّ من الاتساع والتردد.]

تنعكس الموجات عن الأشياء التي تعترض طريقها. وعندما تصطدم مقدمة الموجة (لموجة ثنائية أوثلاثية الأبعاد)، فإنّ زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس. وعندما تصطدم الموجة بحد فاصل بين مادتين، فسينعكس جزء من الموجة، أمّا الجزء الآخر فينفذ

عندما تعبر موجتان الحيز نفسه وفي الوقت ذاته، فإنهما تتداخلان. الإزاحة المحصلة عند أيّ نقطة وفي اللحظة نفسها هي مجموع إزاحتي الموجتين منفصلتين؛ إنّ هذا قد ينتج تداخلا بنّاء، أو تداخلًا هدّامًا، أو شيئًا بينهما اعتمادا على الاتساعين وطوري الموجتين.

تتداخل الموجات المنتقلة في وترٍ طوله ثابتٌ مع الموجات التي انعكست عند نهايتي الوتر وتسيران في الاتجاه المعاكس. وعند ترددات معيّنه، يمكن إنتاج موجات موقوفة تبدو فيها الموجات ساكنة لا تتحرك. الوتر [أو أي وسط] يهتز بصورة كاملة. وهذه هي ظاهرة الرنين، والترددات التي تحدث عندها الموجات الموقوفة تُسَمَّى تردداتِ الرنين.

أمّا نقاط التداخل الهدّام (لا اهتزاز) فتُسَمّى عُقَدًا. في حين تُسَمَّى نقاطُ التداخل البناء (أقصى اتساع للاهتزاز) بطونًا. [*الموجات تغيّر الاتجاه، أو تنكسر عند انتقالها من وسطٍ إلى آخر، حيث تختلف سرعة الموجة فيهما. وتنتشر الموجات أيضًا أو تحيد عندما يعترض طريقها حواجز في أثناء انتقالها. هناك مؤشّرٌ تقريبي لمقدار الحيود هو $\theta \approx \lambda/L$، حيث λ طول موجة الضوء، وL عرض الفتحة أو الحاجز. وهناك منطقةٌ ملموسةٌ "منطقة الظل" فقط إذا كان طول الموجة λ أصغر من حجم الحاجز] [* يمكن التعبير عن الموجة المنتقلة بصورة رياضية بـ $[y = A\sin\{(2\pi/\lambda)(x - vt)\}]$

أسئلة

1. اذكر بعض الأمثلة من الحياة اليومية على أجسام تهتزُّ. أيُّها يتحرّك SHM، على الأقلّ بالتقريب؟
2. هل يمكن لتسارع جسمٍ يهتزُّ حركةً توافقيّةً بسيطةً أن يساوي صفرًا؟ إذا كان كذلك، فأين؟
3. فسّر لماذا تكون حركةُ المكبس في محرّك السيّارة توافقيّةً بسيطةً تقريبًا؟
4. الزنبركات الحقيقيّة لها كتلة. هل سيكون الزمنُ الدوريُّ والتردُّدُ الحقيقيّان أكبر أم أصغر من الكميّات المُعطاة بالمعادلات للنظام المثالي عديمِ الكتلة؟ فسّر.
5. كيف تستطيع مضاعفة السرعة القصوى لمهتزٍّ توافقيٍّ بسيط (SHO)؟
6. سمكة سلمون كتلتها 5.0 kg عُلّقت بطرف ميزان زنبركي عمودي، ثم أُفلتت. صف قراءة الميزان كدالة في الزمن.
7. إذا كانت ساعة بندول دقيقة عند مستوى سطح البحر، هل ستكسب زمنا عند أخذها إلى مكان مرتفع أم تفقده؟ لماذا؟
8. أرجوحةٌ مصنوعةٌ من دولاب معلّق في فرع شجرة ليصل إلى الأرض تقريبًا. (الشكل 11-48). كيف تستطيع أن تقيس بالتقريب ارتفاع فرع الشجرة باستعمال ساعة وقف فقط.

الشكل 11-48 (السؤال 8)

9. لماذا تستطيع أن تجعل الماء يتدفق جيئةً وذهابًا في صينيّة إذا هززت الصينيّة بتردّدٍ معيَّن؟
10. هاتِ عدّة أمثلةٍ على الرنين من الحياة اليوميّة.
11. هل تعدّ القعقعة في السيارة دائمًا ظاهرة رنين؟ فسّر.
12. هل تردّد موجةٍ دوريّةٍ بسيطةٍ يساوي تردُّدَ مصدرها؟ ماالسبب في حال كان الحلّ بالنفي أو الإيجاب؟
13. فسّر الفرق بين سرعة موجةٍ مستعرضةٍ تنتقل في وترٍ وسرعة قطعةٍ صغيرةٍ من الوتر.
14. لماذا تلف أسلاك حول الخيوط ذات التردّد المنخفض في البيانو عادة؟
15. ما نوع الموجات التي سوف تنتقل مع طول قضيبٍ فلزيٍّ أفقي، إذا ضربت عند نهايته (أ) عموديا من الأعلى؟ (ب) أفقيًّا موازيًا للطول؟
16. بما أنّ كثافة الهواء تقل مع زيادة درجة الحرارة، ولكن معامل المرونة الجرمي B تقريبا لا يعتمد على درجة الحرارة، فكيف نتوقع تغير سرعة الموجات الصوتية مع درجة الحرارة؟
17. اذكر سببين لتضاؤل اتساع موجات الماء الدائرية عندما تنتقل بعيدًا عن المصدر.

*18. موجتان خطيتان لهما الاتساع والسرعة نفساهما، وتتشابهان فيما عدا ذلك، غير أنّ إحداهما لها طول موجة نصف طول موجة الأخرى. أيهما تنقل طاقة أكثر؟ وبأيّ نسبة؟

19. لا يتغير التردد عندما تجتاز موجة جيبية الحد بين جزأين من حبل كما في (الشكل 11-33)، (أما السرعة وطول الموجة فيتغيران). فسر السبب.
20. إذا اهتزَّ وترٌ بثلاثة أجزاء، فهل هناك أيّ أمكنة يمكنك لمسها بحد السكين دون إزعاج الحركة؟
21. عندما تتكون موجة موقوفة في خيط، فإنّ اهتزازات الموجات الساقطة والمنعكسة تلغي بعضها بعضا عند العقد. هل يعني هذا أنّ الطاقة دمرت؟ فسر.

*22. إذا عرفنا أنّ الطاقة تنتقل من مكان إلى آخر، فكيف لنا أن نحدد الذي يحمل الطاقة؛ الجسيمات أم الموجات؟

مسائل

1-11 إلى 3-11 حركة توافقية بسيطة

.1 (I) إذا تحرّك جسمٌ حركةً توافقيّةً بسيطةً اتساعها 0.18 m، فما المسافة الكليّة التي يتحركها الجسم في زمنٍ دوري واحد؟

.2 (I) وتر مرن طوله 65 cm عندما تعلق به وزنا مقداره 75 N، ويصبح طوله 85 cm عندما تعلق به وزنا مقداره 180 N. ما ثابت "الزنبرك" k لهذا الوتر؟

.3 (I) تنضغط زنبركات سيارة كتلتها 1500 kg بـ 5.0 mm عندما يجلس سائقها (كتلته 68 kg) في مقعده. إذا مشت السيارة فوق (عائق) مطب، فماذا سيكون تردد الاهتزازات؟

.4 (II) ميزان صياد سمك يمتد 3.6 cm عندما تعلق به سمكة كتلتها 2.7 kg: (أ) ما قيمة ثابت مرونة الزنبرك؟ (ب) ماذا سيكون اتساع الاهتزازة وترددها إذا سحبت السمكة نحو الأسفل 2.5 cm أخرى، ثم أفلتت لتهتز إلى الأعلى والأسفل؟

.5 (II) وتر مرن يهتز بتردد 3.0 Hz عندما تعلق به كتلة 0.60 kg. ماذا سيكون تردده إذا علقت به كتلة 0.38 kg فقط؟

.6 (II) صمّم جدولا تبين فيه الموقع x للكتلة في (الشكل 11-2)عند اللحظات الزمنية

$$t = 0, \tfrac{1}{4}T, \tfrac{1}{2}T, \tfrac{3}{4}T, T, \tfrac{5}{4}T$$

حيث T هو الزمن الدوري للاهتزازات. بيّن هذه النقاط الست على رسم بياني بين x و t. والآن، صل هذه النقاط بمنحنى أملس. اعتمادًا على هذه المعطيات البسيطة، هل يماثل المنحنى موجةً جيبية أو جيبا تمامية (الشكلان 11-8 أو 11-9)؟

.7 (II) ذبابة كتلتها 0.25g، وقعت في شباك عنكبوت. يهتزُّ الشبك بتردد 4.0 Hz بصورة سائدة: (أ) ما قيمة ثابت صلابة الزنبرك k للشبكة؟ (ب) عند أيّ تردد تتوقع اهتزاز الشبكة إذا وقعت عليها حشرة كتلتها 0.50g.

.8 (II) كتلة m عند نهاية زنبرك تهتزُّ بتردّد 0.88 Hz. إذا أضيفت كتلة 680g إلى m فإنّ التردد يصبح 0.60 Hz. فما قيمة الكتلة m؟

.9 (II) كتلة 0.60 kg في نهاية زنبرك تهتزُّ 3.0 مرات في الثانية باتساع 0.13 m. احسب: (أ) السرعة عند مرورها بنقطة الاتزان. (ب) السرعة عندما تكون على بعد 0.10 m من الاتزان. (جـ) الطاقة الكلية للنظام. (د) المعادلة التي تصف حركة الكتلة، بفرض أنّ x كانت أكبر ما يمكن عندما t=0.

.10 (II) عند أيّ إزاحة من الاتزان تكون سرعة SHO نصف أقصى قيمة؟

.11 (II) كتلة مثبتة بطرف زنبرك امتدت مسافة x_0 من الاتزان ثم أفلتت. عند أيّ مسافة من الاتزان يكون تسارعها نصف أكبر قيمة له؟

.12 (II) كتلة 2.62 kg تؤدي إلى استطالة زنبرك معلّق رأسيًّا 0.315 m. إذا امتدَّ الزنبرك 0.130 m مسافةً إضافيّةً ثمّ أُفلت. ما الزمن اللازم للوصول إلى موقع الاتزان (الجديد) مرة ثانية؟

.13 (II) جسم كتلته 3.0 kg مثبت في نهاية زنبرك (ثابت مرونته k= 280 N/m) ويعمل حركة توافقية بسيطة. عندما يكون الجسم على بعد 0.020 m من موقع الاتزان، فإنّ سرعته تكون 0.55 m/s احسب: (أ) اتساع الحركة. (ب) أقصى سرعة يصل إليها الجسم. [مساعدة: استعمل قانون حفظ الطاقة].

.14 (II) يلزم قوّة 80.0 N لضغط زنبرك لعبة بندقية 0.200 m لوضع كرة 0.180 kg. بأيّ سرعة سوف تغادر الكرةُ البندقيةَ؟

.15 (II) كتلة موضوعة على سطحٍ أفقيٍّ أملس وموصولة بإحدى نهايتي زنبرك، ولكن النهاية الثانية مثبتة بجدار. يلزم 3.0 J من الشغل لضغط الزنبرك مسافة 0.12 m. إذا أفلتت الكتلة من السكون والزنبرك مضغوط، فإنّ الكتلة تكسب أكبر تسارع مقداره 15 m/s^2. جد قيمة: (أ) ثابت مرونة الزنبرك. (ب) الكتلة.

.16 (II) كتلة 0.60 kg تهتز تبعا للمعادلة $x = 0.45 \cos 6.40t$، حيث x بالمتر و t بالثانية. احسب (أ) الاتساع. (ب) التردد. (جـ) الطاقة الكليّة. (د) الطاقتان؛ الحركيّة والوضع عند x=0.30 m.

.17 (II) عند أيّ إزاحة من موضع الاتزان تكون طاقة SHO نصفها KE والنصف الآخر PE؟

.18 (II) إذا كانت طاقة إحدى الاهتزازات تعادل 7.0 أمثال طاقة الاهتزازة الأخرى، مع تساوي تردد كلّ منهما وكتلتيهما كذلك، فما النسبة بين اتساعيهما؟

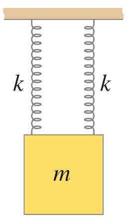
.19 (II) تهتز يقطينة كتلتها 2.00 kg معلقة بزنبرك خفيف عموديًّا مرّة كلّ 0.65 s: (أ) اكتب معادلة تبين موقع اليقطينة y (+ نحو الأعلى) كدالة مع الزمن t، على فرض أنها بدأت عندما كان الزنبرك مضغوطا 18 cm من موضع السكون ($y = 0$) وأفلتت.(ب) كم الزمن اللازم حتى تصل إلى موضع الاتزان لأول مرة؟

(جـ) كم ستكون سرعة اليقطينة القصوى؟

(د) كم سيكون أكبر تسارع لليقطينة؟ وأين ستصل اليقطينة لأول مرة؟

.20 (II) قطعة كتلتها m معلقة بزنبركين متماثلين معلّقين رأسيًّا، كلّ زنبرك له ثابت مرونة k (الشكل11-49).

ماذا سيكون تردد الاهتزاز؟



الشكل 11-49

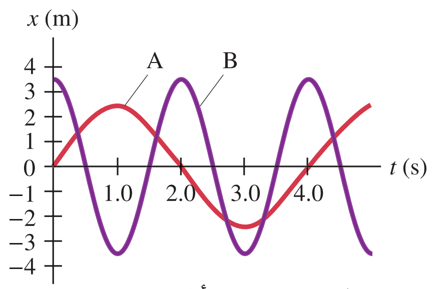
(المسألة 20)

.21 (II) تهتز كتلة 300g تبعا للمعادلة

$$x = 0.38 \sin 6.50\, t$$

حيث x بالمتر، t بالثانية. جد: (أ) الاتساع. (ب) التردد. (ج) الزمن الدوري. (د) الطاقة الكلية. (هـ) طاقتي الحركة والوضع عند x = 9.0 cm . وارسم رسما دقيقا لـ x , t مبينا الاتساع الصحيح والزمن الدوري.

.22 (II) يبين (الشكل 11-50) مثالين على SHM، موسومين بـــ A، و B. لكل منهما. ما هو: (أ) الاتساع. (ب) التردد. (ج) الزمن الدوري. واكتب المعادلتين لكلّ من A، وB في نمطٍ جيبيٍّ أو جيب تمامي.



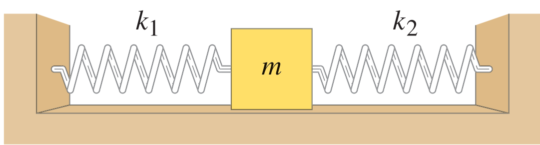
الشكل 11-50 (المسألة 22)

23. (II) عند $t = 0$، كتلة 755 g ساكنة عند نهاية زنبرك أفقي ($k = 124$ N/m) ضربت بمطرقة فأعطيت سرعة ابتدائية 2.96 m/s. حدد قيمة: (أ) تردد الحركة وزمنها الدوري. (ب) الاتساع. (جـ) أكبر تسارع. (د) الموقع كدالة بالزمن. (هـ) الطاقة الكلية.

24. (II) زنبرك عمودي ثابت مرونته 305 N/m يهتز باتساع 28.0 cm عند تعليق 0.260 kg به. تمر الكتلة خلال موقع الاتزان ($y = 0$) بسرعة موجبة عند $t = 0$. (أ) ما المعادلة التي تصف هذه الحركة مع الزمن؟ (ب) عند أيّ لحظات زمنية سوف يكون الزنبرك في حالة أقصى وأدنى امتداد؟

25. (II) كتلة m موصولة بزنبركين ثابت مرونتهما k_1 و k_2، كما هو مبين في (الشكل 11-51) . أهمل الاحتكاك . بين أنّ الزمن الدوري يعطى بـ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$



الشكل 11-51 (المسألة 25)

26. (III) طلقة كتلتها 25.0 g تضرب قطعة كتلتها 0.600 kg مثبتة بزنبرك أفقي ثابت مرونته 7.70×10^3 N/m، بدأت القطعة بالاهتزاز باتساع 21.5 cm.كم كانت سرعة الطلقة قبيل اصطدامها بالقطعة إذا تحركت الطلقة والقطعة معا بعد التصادم؟

27. (III) يقفز شخص كتلته 65.0 kg من على جسر مرتفع. وعند وصوله إلى أدنى نقطة، فإنّه يهتز إلى الأعلى والأسفل ملامسًا نقطةً منخفضة 8 مرّات في 38.0 s. وأخيرًا يصل إلى السكون على عمق 25.0 m من مستوى الجسر. احسب معامل مرونة الزنبرك وطوله غير الممتد.

11-4 البندول البسيط

28. (I) يهتز بندول 36 اهتزازة في 60 s بالضبط. ما قيمة: (أ) الزمن الدوري؟ (ب) التردد؟

29. (I) ماذا يجب أن يكون طول بندول بسيط كي يعمل اهتزازة واحدة كلّ ثانيتين؟

30. (I) بندول الزمن الدوري له 0.80 s على سطح الأرض، ماذا سيكون زمنه الدوري على المريخ حيث تسارع الجاذبية نحو 0.37 من قيمته على الأرض؟

31. (II) ما قيمة الزمن الدوري لبندول بسيط طوله 80 cm (أ) على الأرض؟ (ب) عندما يكون في مصعد يسقط سقوطاً حراً؟

32. (II) طول بندول بسيط 0.760 m، كتلة كرة البندول 365 gram وأفلت عند زاوية 12.0^{o} مع العمودي. (أ) ما تردد اهتزازه؟ (ب) كم سرعة كرة البندول عندما تكون في أسفل مسارها؟ (جـ) ما الطاقة الكلية المختزنة في الاهتزازة، بفرض عدم وجود فقد للطاقة؟

33. (II) طول بندول ساعة جدك 0.9930 m. إذا كانت هذه الساعة تفقد نصف دقيقة في اليوم، فكيف تعدل طول بندولها لضبط الوقت الصحيح؟

34. (II) اشتقّ علاقة للسرعة القصوى v_{max} لكرة بندول بسيط بدلالة g، والطول L، وزاوية الأرجحة θ_0.

35. (III) بندول ساعة حائط يهتز بتردد 2.5 Hz. وعند $t = 0$ أفلت من حالة السكون ليبدأ عند زاوية 15^{o} مع العمودي. بإهمال الاحتكاك، ماذا سيكون موقع (الزاوية) البندول عند: (أ) $t = 0.25$ s؟ (ب) t = 1.6 s؟ (ج) $t = 500$ s؟ [مساعدة: لا تخلط بين زاوية البندول والزاوية التي تظهر أمام cosine].

11-7، 11-8 الموجات

36. (I) لاحظ صيّاد سمكٍ أنّ قمّة الموجات تعبر قوس المرساة كلّ 3.0 s. ثمّ قاس المسافة بين قمتين فوجدها 6.5 m. فكم سرعة حركة الموجات؟

37. (I) موجة صوتية في الهواء ترددها 262 Hz وسرعتها 343 m/s. كم البعد بين قمم الموجات؟

38. (I) (أ) تتراوح ترددات موجات راديو بين 550 kHz و 1600k Hz، وتنتقل بسرعة 3.00×10^{8} m/s. احسب طول الموجة لكلّ من هذين الترددين (ب) في راديو FM، تتراوح ترددات الموجات بين 88.0M Hz، و 108M Hz (ميجاهيرتز) وتسير بالسرعة نفسها، ما أطوالها الموجية؟

*39. (I) احسب سرعة الموجات الطولية في: (أ) الماء. (ب) الغرانيت. (ج) الفولاذ.

*40. (II) قضيبان من مواد صلبة لهما معامل المرونة نفسه، إلا أنّ كثافة أحدهما ضعف كثافة الآخر. في أيٍّ منهما ستكون سرعة الموجات الطولية أكبر؟ وبأيّ نسبة؟

41. (II) وتر كتلته 0.65 kg ممدود بين دعامتين البعد بينهما 28 cm. إذا كان الشد في الوتر 150 N، فكم يلزم لنبضة لتسير من الدعامة الأولى إلى الأخرى؟

42. (II) قارب غندولا للتزلج موصول مع قمة جبل بواسطة كيبل (مجموعة أسلاك) فولاذي طوله 620 m وقطره 1.5 cm عندما يصل القارب إلى نهاية رحلته، يصدر نبضة موجية عبر الكيبل، لوحظ أنّ النبضة تحتاج إلى 16 s لترتد.(أ) ما سرعة النبضة الموجية؟ (ب) ما الشد في الكيبل؟

*43. (II) صدم بحّارٌ جانبَ قاربه عند نقطة تحت سطح الماء مباشرة. فسمع صدى الموجة المنعكس من قعر المحيط بعد 3.0 s. ما عمق المحيط عند هذه النقطة؟

44. (II). تسير الموجات الزلزاليّة P و S بسرعتين مختلفتين، وهذا الفرق يساعد في تحديد مركز الزلزال. (أ) بفرض سرعتين نموذجيتين 5.5 km/s و 8.5 km/s لموجتين P و S على الترتيب، على أيّ بعد حصل الزلزال إذا رصدت محطة لرصد الزلازل وصول الموجتين بفرق زمني 2.0 min؟

(ب) هل تكفي محطة واحدة لرصد الزلزال لتحديد مركز الزلزال؟ فسر.

45. (III) موجة سطحية ناجّة من زلزال أرضي يمكن تقريبها لموجة جيبية مستعرضة. بفرض تردد 0.50 Hz، ما الاتساع اللازم بحيث تبدأ الأجسام بفقد اتصالها بالأرض؟

(مساعدة: افرض أنّ التسارع a أكبر من g).

11-9 طاقة الموجة

46. (II) مانسبة الشدّة والاتساع لموجة زلزاليّة P تمرّ خلال الأرض، وتمّ الكشف عنها عند نقطتين على بعد 10 km و20 km من المصدر؟

47. (II) قيست شدّة موجةٍ زلزاليّةٍ تمرّ خلال الأرض فوجدت $2.0 \times 10^6\ J/m^2$ على بعد 48 km من المصدر. (أ) كم كانت شدّتها عندما مرّت بنقطةٍ على بعد 1.0 km فقط من المصدر؟ (ب) مامعدل مرور الطاقة في مساحة $5.0\ m^2$ وعلى بعد 1.0 km ؟

*11-10 الشدة وعلاقتها مع A، و f .

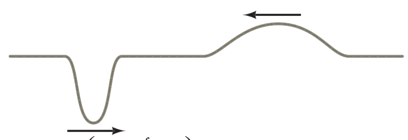
*48. (I) موجتان زلزاليتان لهما التردّد نفسه، تمرّان خلال الجزء ذاته من الأرض، ولكن إحداهما تحمل ضعف الطاقة التي تحملها الأخرى. ما النسبة بين كلّ من اتساع الموجتين؟

*49. (I) موجتان تنتقلان عبر خيط مشدود ولهما التردّد نفسه، إلا أنّ إحداهما تنقل قدرةً أكبر بثلاث مرات قدرة الأخرى. ما النسبة بين كلّ من اتساع الموجتين؟

*50. (II) لوحظ أنّ حشرةً صغيرةً على سطح بركةٍ تتحرّك نحو الأعلى والأسفل مسافة كلية 6.0 cm من أدنى نقطة إلى أعلى نقطة عند مرور موجة في سطح البركة. إذا نقصت الموجات إلى 4.5 cm، فبأيّ نسبةٍ تتغيّر الطاقة الحركيّة للحشرة؟

11-12 التداخل

51. (I) النبضتان في (الشكل 11-52) تتحركان نحو بعضهما. (أ) ارسم شكل الخيط عندما تتقابلان مباشرة.(ب) ارسم شكل الخيط بعد لحظات من ذلك (جـ) في (الشكل 11-36 (أ) ، بعد مرور النبضتين عن بعضهما، يكون الخيط مستقيما. ماذا حدث للطاقة في هذه الحالة؟



الشكل 11-52 (المسألة 51)

11-13 الموجات الموقوفة؛الرنين

52. (I) يهتز وتر بتردده الطبيعي 440 Hz، فما ترددات التوافقيات الأربع الأولى؟

53. (I) وتر كمان (آلة موسيقية) يهتز بتردد 294 Hz دون وضع الأصبع عليه. ماذا يكون تردد اهتزازه إذا أثر فيه الأصبع عند ثلث طوله؟ (ثلثا طوله فقط سوف يهتز كموجة موقوفة).

54. (I) يهتزّ وترٌ ما بأربع حلقات بتردد 280 Hz . اذكر ثلاثة ترددات على الأقل يعمل الوتر عندها رنينًا.

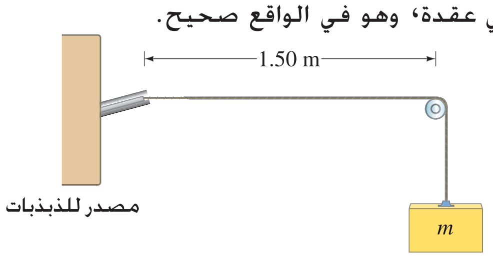
55. (II) سرعة موجات في وتر 92 m/s، إذا كان تردد الموجات الواقفة 475 Hz، فما البعد بين عقدتين متجاورتين؟

56. (II) إذا كان تردد نغمتين متتابعتين لوتر مهتز 280 Hz، و350 Hz، فما التردد الطبيعي للوتر؟

57. (II) وتر قيثارة طوله 90 cm وكتلته 3.6 g. المسافة من الجسر إلى الدعامة L=62 cm والشد في الوتر 520 N. فما التردد للنغمة الطبيعية وأول حلين؟

58. (II) وتر قيثارة يتوقع أن يهتز بتردد 200 Hz. ولكن بعد قياسه وجد أنه 205 Hz. فما النسبة المئوية للتغيّر في شدّ الوتر لتصحيح التردد؟

59. (II) إحدى نهايتي خيطٍ أفقيٍّ مثبتة إلى مصدر ذبذبات ميكانيكي يعطي 60 Hz، كتلة وحدة الأطوال للوتر تساوي 3.9×10^{-4} kg/m، يمر الخيط حول بكرة على بعد L=1.50 m وقد علقت أوزان في هذه النهاية، (الشكل 11-53). ما مقدار الكتلة m التي يجب تعليقها في هذه النهاية للحصول على: (أ) لفة واحدة؟ (ب) لفتين؟ (جـ) خمس لفات من الموجات الموقوفة؟ افرض أنّ نقطة اتصال الخيط بالمهتز هي عقدة، وهو في الواقع صحيح.



الشكل 11-53 (المسألتان 59 و 60)

60. (II) في (المسألة 59) ، يمكن تغيير طول الخيط بتحريك البكرة، إذا ثبتت الكتلة m عند 0.080 kg، فكم عدد أنماط الموجات الموقوفة التي يمكن الوصول إليها بتغيير L بين 10 cm، و 1.5 m؟

61. (II) عندما تخض الماء إلى الأمام والخلف في أنبوب بتردد صحيح، فإنّ الماء يرتفع وينخفض في كلّ من نهايتي الأنبوب ويبقى هادئا نسبيا في الوسط. افرض أنّ التردد للحصول على مثل هذه الموجة الموقوفة في أنبوب طوله 65 cm هو 0.85 Hz. فكم سرعة موجة الماء؟

*11-14 الانكسار

*62. (I) تنتقل موجة زلزاليّة P بسرعة 8.0 km/s وتصطدم بحاجز داخل الأرض بين نوعين من المادة. إذا اقتربت من الحدّ الفاصل بزاوية سقوط 47° وبزاوية انكسار 35°، فكم سرعتها في الوسط الثاني؟

*63. (I) تقترب موجات ماء من حاجز تحت الماء فتتغير سرعتها من 2.8 m/s إلى 2.1 m/s. إذا كانت قمة الموجة تعمل زاوية 34° مع الحاجز، فما مقدار زاوية الانكسار؟

*64. (II) تسير موجة صوتية في هواء دافيء تصطدم بطبقة هواء بارد وكثيف. إذا صدمت موجة الصوت الحدّ الفاصل البارد بزاوية 25°، فما مقدار زاوية الانكسار؟ افرض أنّ درجة حرارة الهواء البارد -10°C ودرجة حرارة الهواء الدافيء +10°C. ويمكن تقريب سرعة الصوت مع درجة الحرارة بـ $v = (331+60\ T)$ m/s، حيث T بالدرجات المئوية.

*65. (III) موجة زلزالية طولية تصدم حدّا فاصلًا بين نوعين من الصخور بزاوية 38°. وبعد أن تجتاز الموجة الحدّ الفاصل، يتغير الوزن النوعي للصخور من 3.6 إلى 2.8. احسب زاوية الانكسار على افتراض أنّ معامل المرونة للنوعين من الصخور ثابت.

*11-15 الحيود

*66. (II) صحن لاقط للأقمار الصناعية قطره 0.5 m. وحسب تعليمات التشغيل، يجب توجيه الصحن نحو القمر الصناعي، ولكن خطأً بمقدار 2° ممكن، ولا يؤثر في الاستقبال. احسب، بالتقريب، طول الموجة الكهرومغناطيسية التي يستقبلها اللاقط.

مسائل عامة

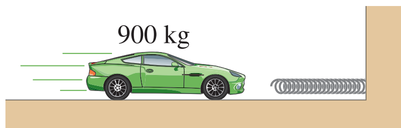
67. طول موجة تسوماني 250 km وسرعتها 750 km/h عبرت المحيط الهادي. وعندما اقتربت من هاواي، لاحظ الناس هبوطا غير عادي في مستوى البحر في الخلجان. ما الزمن التقريبي اللازم لنجاتهم ؟

68. ثابت المرونة لجهاز واقي الصدمات في سيارة هو 550 kN/m. جد أكبر انضغاط للزنبرك إذا اصطدمت سيارة كتلتها 1500 kg بجدار بسرعة 2.2 m/s. [مساعدة: استعمل قانون حفظ الطاقة].

69. قفز شخص كتلته 65 kg من شباك إلى شبكة نجاة من النار على ارتفاع 18 m منه، وتمتد الشبكة 1.1 m. افرض أنّ الشبكة تتصرف كزنبرك توافقي بسيط: (أ) احسب مقدار تمددها لو كان الشخص نفسه ممدداً فيها. (ب) كم التمدد المتوقع لها لو قفز الشخص من ارتفاع 35 m؟

70. علقت كتلة m برفق بطرف زنبرك معلق رأسيًّا. تسقط الكتلة بعد ذلك مسافة 33 cm قبل أن تتوقف لحظيّا، ثم تبدأ بالارتفاع. ما تردد الاهتزاز؟

71. سيارة كتلتها 950 kg تصدم زنبركا ضخما بسرعة 22 m/s (الشكل 11-54) وتضغط الزنبرك 5.0 m: (أ) ما ثابت مرونة الزنبرك؟ (ب) ما الزمن الذي تستغرقه السيارة في حالة تماس مع الزنبرك قبل أن ترتد إلى الخلف؟



الشكل 11-54 (المسألة 71)

72. عندما تسير وأنت تحمل فنجان قهوة (قطره 8 cm) بسرعة السير نفسها؛ أي خطوة لكلّ ثانية. تتأرجح القهوة أكثر وأكثر، واخيرا تنسكب فوق الحافة (الشكل 11-55). احسب، بالتقريب، سرعة الموجات في القهوة.


الشكل 11-55 (المسألة 72).

73. الموجات في أخدود على بعد 10.8 cm من مركز قرص تسجيل فونوغراف يدور بمعدل 33-rpm طولها 1.70 mm. ماذا سيكون تردد الصوت المنبعث؟

74. كتلة 2.00 kg تهتّز تبعًا للمعادلة $x=0.650\cos 7.40\,t$ ، حيث x بالأمتار، و t بالثواني. احسب ما يلي: (أ) الاتساع. (ب) التردد. (ج) الطاقة الكلية. (د) طاقتي الحركة والوضع عند $x=0.260$ m.

75. يهتز بندول بسيط بتردد f. ماذا سيكون تردده لو تسارع بـ 0.50 g (أ) نحو الأعلى؟ (ب) نحو الأسفل؟

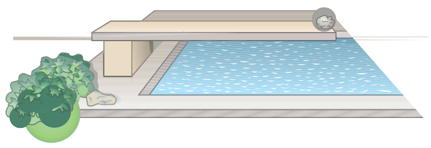
76. قارب خشبي كتلته 220 kg يطفو في بحيرة. عندما يقف عليه رجل كتلته 75 kg فإنه يغطس 4.0 cm أعمق في الماء. وعندما يترجَّل، يهتز القارب قليلاً. (أ) ما هو تردد الاهتزاز؟ (ب) ما الطاقة الكلية للاهتزاز؟ (أهمل التضاؤل).

77. وتران في آلة موسيقية مهيئان للعزف بـ 392 Hz و 440 Hz (أ) ما تردد أول حلين لهذين الوترين؟ (ب) إذا كان للوترين الطول والشدّ نفساهما، فما النسبة بين كتلتهما؟ (جـ) إذا كانت كتلة وحدة الأطوال للوترين متساوية ولهما الشد نفسه، فما النسبة بين طوليهما؟ (د) إذا تساوى كلّ من الكتلة والطول لهما، فما النسبة التي يجب أن تكون بين شديهما؟

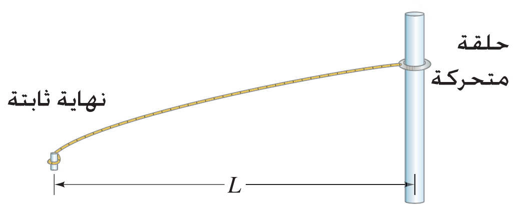
78. افترض موجة جيبية تنتقل عبر الوتر المشدود والمكون من جزأين (الشكل 11-33). احسب صيغة رياضية للنسبة بين: (أ) سرعة الموجة في الجزء الثقيل إلى الجزء الخفيف v_H/v_L، (ب) طول الموجتين في الجزأين (لماذا التردد في الجزأين هو نفسه؟). (جـ) في أيّ جزء من الوتر يكون طول الموجة أكبر؛ الثقيل أم الخفيف؟

79. شوكة رنّانة تهتزّ بتردّد 264 Hz وقمّة كلّ فرع تتحرك 1.8 mm إلى جانبي مركزها. احسب ما يلي: (أ) السرعة القصوى. (ب) أقصى تسارع لقمة الفرع.

80. لوحة غوص تهتز حركة توافقية بسيطة بتردد 1.5 دورة في الثانية. ما أقصى اتساع يمكن أن تهتز به نهاية اللوحة بحيث إنّ كومة حصى (الشكل 11-56) موضوعة عند النهاية لا تفقد اتصالها بها خلال الاهتزاز؟


الشكل 11-56
(المسألة 80)

81. يمكن أن تكون نهاية خيط "حرة" إذا ربطت هذه النهاية بحلقة يمكنها الانزلاق دون احتكاك على عمود (الشكل 11-57). حدّد الأطوال الموجية لاهتزازات الرنين لمثل هذا الخيط بحيث تكون إحدى نهايتيه حرة والأخرى ثابتة.



الشكل 11-57 (المسألة 81).

82. بندول "الثواني" له زمنٌ دوريٌّ على 2.000 s بالضبط، يستغرق كلّ تأرجح باتجاه واحد 1.000 s تماما. (أ) ما طول مثل هذا البندول في أوستن، تكساس حيث $g = 9.793\ \text{m/s}^2$؟ (ب) إذا نقل هذا البندول إلى باريس حيث $g = 9.809\ \text{m/s}^2$ ، فكم ملم يجب أن نزيد طول البندول؟ (جـ) ماذا يجب أن يكون طول هذا البندول على القمر، حيث $g=1.62\ \text{m/s}^2$؟

83. كتلة معلقة بزنبرك يمكنها أن تهتزّ بالاتجاه الرأسي، أو أن تتأرجح كالبندول البسيط باتساعات صغيرة، ولكن لا يحدثان في الوقت نفسه. أيهما أطول؛ الزمن الدوري للاهتزازات العمودية أم الاهتزازات الأفقية، وبأيّ مقدار؟ [مساعدة: افرض أنّ l_0 هو طول الزنبرك غير الممتد، وL طوله عندما تكون الكتلة معلقه به في حالة سكون].

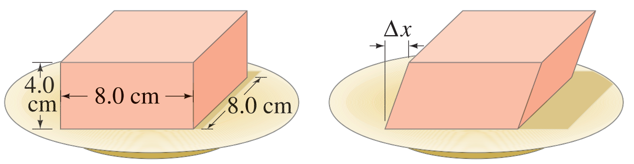
84. جسم كتلته M=5.0 kg يستند إلى طاولة ملساء ومثبت بزنبرك أفقي (k =130 N/m) بجدار بجسم آخر كتلته m=1.25 kg موضوع فوق M. معامل الاحتكاك السكوني بين الكتلتين يساوي 0.30. ما أكبر اتساع للاهتزاز بحيث لا تنزلق m عن M؟

85. سلك طوله 10.0 m، وكتلته 123 g، استطال تحت تأثير شدّ يساوي 255 N. تكوّنت نبضة عند إحدى نهايتيه، وبعد 20.0 ms تكوّنت نبضة ثانية عند نهايته الأخرى. أين ستتقابل النبضتان؟

86. جسم كتلته M معلق من سقف بزنبرك مرونته k. وضعت قطعة نقود كتلتها m فوق M. ما أكبر اتساع للاهتزاز بحيث تبقى m فوق M؟ (افرض أنّ $m \ll M$).

87. رفعت سيارة كتلتها 1200 kg في ساحة الخردة. طول الكيبل الفولاذي للرافعة 22 m وقطره 6.4 mm. هبت رياح أدّت إلى تأرجح السيارة في نهاية الكيبل. ما الزمن الدوري للأرجحة؟ (مساعدة: ارجع إلى الجدول 9-1).

88. قطعة (جيلو) موضوعة في صحن كما في (الشكل 11-58) الذي يعطي أبعاد قطعة الجيلو أيضا). تدفع جانبا كما هو مبين ثم تترك. ترتد قطعة الجيلو ثم تبدأ بالاهتزاز بصورة مشابهة لنظام الكتلة والزنبرك. احسب، بالتقريب، تردد هذا الاهتزاز علما أنّ معامل القصّ (البند 9-5) للجيلو هو $520\ \text{N/m}^2$ وكثافته $1300\ \text{kg/m}^3$.



الشكل 11-58 (المسألة 88).

إجابات التمارين

أ: (أ)، (جـ)، (د)

ب: (أ) يزداد (ب) يزداد (جـ) يزداد.

جـ: فارغ

د: (أ) 25 cm ؛ (ب) 2.0 s.