[١١]
وحدة "الحدود والمقادير الجبرية"
مصاغة بالمواد اليدوية الملموسة لتدريسها للمعوقين بصريًا.

ماذا نتعلم من هذه الوحدة؟

* مفهوم الحد الجبرى والمقدار الجبرى.
* مفهوم درجة الحد الجبرى، والمقدار الجبرى.
* ترتيب حدود المقدار الجبرى حسب قوى أحد رموزه تنازليًا أو تصاعديًا.
* مفهوم الحدود المتشابهة.
* جمع وطرح الحدود المتشابهة.
* قاعدة ضرب الإشارات.
* ضرب حد جبرى فى حد جبرى آخر.
* ضرب حد جبرى فى مقدار جبرى.
* ضرب مقدار جبرى مكون من حدين فى مقدار جبرى آخر مكون من حدين بالطريقة الأفقية والرأسية.
* ضرب مقدار جبرى مكون من حدين فى مقدار جبرى آخر مكون من حدين بالطريقة المباشرة أو بمجرد النظر.
* فك مربع مقدار مكون من مجموع حدين.
* فك مربع مقدار مكون من الفرق بين حدين.
* ضرب مقدارين جبريين إحداهما أو كلاهما من حدين أو أكثر.
* قسمة حد جبرى على حد جبرى آخر.

* قسمة مقدار جبرى على حد جبرى آخر.

دروس الوحدة:

* الحد الجبرى والمقدار الجبرى.
* درجة الحد الجبرى والمقدار الجبرى.
* الحدود المتشابهة : (الجمع ـ الطرح).
* جمع وطرح المقادير الجبرية.
* ضر ب المقادير الجبرية.
* ضرب حد جبرى فى مقدار جبرى.
* ضرب المقادير الجبرية المكونة من حدين.
* ضرب المقادير الجبرية المكونة من أكثر من حدين.
* قسمة حد أو مقدار جبرى على حد جبرى آخر.

الدرس الأول : الحد الجبرى والمقدار الجبرى

ماذا نتعلم من الدرس؟

* مفهوم الحد الجبرى.
* مفهوم معامل الحد الجبرى.
* مفهوم عوامل الحد الجبرى.
* مفهوم المقدار الجبرى.

الحد الجبرى:

تستخدم الرموز فى الرياضيات للتعبير عن الأشياء والأعداد مثلما تستخدم للتعبير عن المجموعات .

وسوف نستخدم الحروف الأبجدية (مثل: أ، ب، ج، د، هـ، س، ص) للتعبير عن الأعداد، ونتعامل معها بنفس الطريقة التى كنا نتبعها مع الأعداد فى عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة.

فمثلاً: عند ضرب العدد ٥ فى الرمز الجبرى س

فإن حاصل الضرب = ٥ × س= ٥ س ويسمى حدًا جبريًا ويمكن تمثيل هذا الحد باستخدام بلاطات الجبر.

وكذلك عند ضرب العدد ٢ فى الرمز الجبرى $س^{٢}$

فإن حاصل الضرب = ٢ × $س^{٢}$ = ٢ $س^{٢}$ ويسمى حدًا جبريًا ويمكن تمثيله باستخدام بلاطات الجبر.

وكذلك عند ضرب العدد ـ ٣ فى $س^{٢}$

فإن حاصل الضرب = ـ ٣ × $س^{٢}$ = ـ ٣ $س^{٢}$ ويسمى حدًا جبريًا أيضًا ويمكن تمثيله باستخدام بلاطات الجبر.

وكذلك عند ضرب العدد ٥ × أ × ب

فإن حاصل الضرب = ٥ × أ × ب =٥ أب ويسمى حدًا جبريًا أيضًا ويمكن تمثيله باستخدام بلاطات الجبر.

من خلال العرض السابق نلاحظ أن كل الحدود السابقة تتكون من عدة عوامل. فالحد ٥ س مكون من عاملين:

العامل الأول= ٥ (وهو العامل العددى الذى يمثله عدد البلاطات).

العامل الثانى= $س^{٢}$ (وهو العامل الرمزى الذى تمثله مساحة البلاطة الواحدة).

والحد ٢ $س^{٢}$ مكون من عاملين:

العامل الأول= ٢ (وهو العامل العددى الذى يمثله عدد البلاطات).

العامل الثانى= $س^{٢}$ (وهو العامل الرمزى الذى تمثله مساحة البلاطة الواحدة).

والحد ٥ أ ب مكون من ثلاث عوامل:

العامل الأول = ٥ (وهو العامل العددى الذى يمثله عدد البلاطات).

العامل الثانى = أ (وهو أحد العوامل الرمزية للحد الجبرى).

العامل الثالث = ب (وهو أحد العوامل الرمزية للحد الجبرى).

مع ملاحظة أن حاصل ضرب العاملين الجبريين أ،ب = أب تمثله مساحة البلاطة الواحدة.

وعلى ذلك ... فإنه يمكن تعريف الحد الجبرى على أنه:

"ما تكون من حاصل ضرب عاملين أو أكثر"

تطبيق (١):

مثل الحدود الجبرية الآتية باستخدام بلاطات الجبر.

* ص^{٢}
* ـ ٢ أ ب
* ـ ٣ ل ك
* ـ أ^{٢}
* ـ ٥ س ع

المقدار الجبرى:

وإذا جمعنا الحدين: س^{٢}، ٣ س ص فإننا نكتب المجموع على الصورة س^{٢} + ٣ س ص ويمكن تمثيل هذا المجموع باستخدام بلاطات الجبر وذلك بتمثيل كل من الحدين باستخدام بلاطات الجبر (يحاول التلميذ تمثيل ذلك باستخدام بلاطات الجبر).

وإذا طرحنا من المجموع السابق الحد الجبرى ٣ ص^{٢} فإننا نكتب النتيجة على الصورة التالية: س^{٢} + ٣ س ص ـ ٣ ص^{٢} ويمكن تمثيل هذه النتيجة باستخدام بلاطات الجبر، وذلك بتمثيل الحدود س^{٢}، ٣ س ص ، ـ ٣ ص^{٢}.

وكل من هاتين النتيجتين يسمى مقدارًا جبريًا

أى أن: المقدار الجبرى هو ما ينتج عن جمع أو طرح حدين جبريين أو أكثر.

تطبيق (٢):

مثل كلاً من المقادير الجبرية الآتية باستخدام بلاطات الجبر :

* ٢ س^{٢} + ٤ س ص

* ـ س^{٢} ـ ٣ ص + ص^{٢}
* س^{٢} ـ ٣ س ص ـ ص^{٢}
* ـ ٢س^{٢} ـ ص + ص^{٢}
* ـ أ^{٢} + ٢ أ ب
* ٥ ك^{٢} ـ ٣ ك ل + ل^{٢}

تدريبات

(١) أكمل ما يأتى:

ـ الحد الجبرى هو ....

ـ العامل العددى للحد الجبرى ٣ س هو ...... والعامل الرمزى له هو ....

ـ المقدار الجبرى هو ......

(٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المتاحة:

أى من التعبيرات التالية يعبر عن حد جبرى؟

(أ) ١٥ ص^{٢} ـ س

(ب) ١٥ ص^{٢}

(ج) ١٥ + ص^{٢} س

(د) ١٥ ـ ص^{٢} س

(٣) أى من التعبيرات التالية يعبر عن مقدار جبرى؟

(أ) ـ ٧ س^{٢} ص

(ب) ـ ٧ س ص^{٢}

(ج) س^{٢} ص

(د) س^{٢} ص ـ ٧

الدرس الثانى : درجة الحد الجبرى والمقدار الجبرى

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

* درجة الحد الجبرى
* درجة المقدار الجبرى.

* ترتيب حدود المقدار الجبرى.

حسب أسس س التنازلية أو التصاعدية.

درجة الحد الجبرى:

كل حد جبرى له درجة، وتحدد هذه الدرجة بمجموع أسس العوامل الرمزية الموجودة فيه.

فمثلاً: الحد الجبرى (٥س) من الدرجة الأولى لأن أس الرمز س يساوى الواحد الصحيح.

والحد الجبرى ـ ٣ س ص من الدرجة الثانية لأن مجموع أسس الرمزين س ، ص يساوى ٢.

والحد الجبرى ٢ ص^{٢} من الدرجة الثانية لأن أس الرمز ص يساوى ٢.

لذا يمكن تعريف درجة الحد الجبرى على أنها "مجموع أسس الرموز الجبرية الداخلة فى تكوين هذا الحد". مع ملاحظة أن أى حد جبرى لا يتضمن عامل رمزى (جبرى) يسمى حد مطلق. أى أنه عبارة عن معامل عددى فقط، وبناءً عليه يكون هذا الحد من الدرجة (صفر).

تطبيق (١):

عين درجة الحدود الجبرية الآتية:

*س^{٣}	* م^{٣}ن	* ـ ٥ س^{٢} ص	* ص^{٣}	* ٧
* ص^{٢}	* ١/٣م ن	* ٣ م^{٢} ن^{٣}	*٢ م^{٢} ن	* ـ ١٥

تطبيق (٢):

عين الحد المطلق من بين حدود المقادير التالية:

* ٣ س^{٢} ـ ٥ س ـ ١٣.

* ٧ أ^{٢} ـ ٣ أ + ٥ + ٦ أ ب.

* ٥ ـ ٣ أ ص + أ^{٢} ص.

درجة المقدار الجبرى:

تعرف درجة المقدار الجبرى على أنها " أعلى درجات الحدود التى يتكون منها"

فمثلاً: المقدار ٥ س + ٣ ص + ١٧ من الدرجة الأولى.

لأن الحد ٥ س من الدرجة الأولى، الحد ٤ ص من الدرجة الأولى، الحد ٧ من الدرجة صفر. ونلاحظ أن أعلى درجة للحدود المكونة للمقدار هى الدرجة الأولى.

بينما المقدار س^{٢} ـ ٥ س +٢ من الدرجة الثانية، لأن أعلى درجة هى درجة الحد الجبرى س).

والمقدار ١/ ٢س^{٣} + ٣ س^{٢} ـ ٤ من الدرجة الثالثة، لأن أعلى درجة هى درجة الحد الجبرى ١/ ٢س^{٣}.

والمقدار ٢ س^{٢} ص^{٢} + ٧ س ص ـ ص^{٢} من الدرجة الرابعة، لأن أعلى درجة هى درجة الحد الجبرى ٢ س^{٢} ص^{٢}.

والمقدار ـ٤ س^{٤} ص + ٨ س^{٦} من الدرجة السادسة، لأن أعلى درجة هى درجة الحد الجبرى ٨ س^{٦}.

تطبيق (٣):

عين درجة كل مقدار من المقادير التالية:

* ٧ س^{٢} ـ ٣ س ـ ٥.
* ٨ س^{٢} ص ـ ٥س +ص^{٢}.
* ٧ س^{٤} + ٢ س^{٣} ـ ١٩.
* ٧ أ ـ ٥ ب + ٢٣.

ترتيب حدود المقدار الجبرى:

يمكن ترتيب حدود المقدار الجبرى بطريقتين، هما:

أ ـ طريقة الترتيب التصاعدى: وفيها يتم ترتيب حدود المقدار الجبرى حسب قوى أحد الرموز المتضمنة فى حدوده من القوى الصغرى إلى الكبرى.

فمثلاً: يمكن ترتيب حدود المقدار ٢ س + $س^٣$ ـ ٥ + ٤ $س^٢$ حسب قوى س التصاعدية كما يلى:

+ $س^٣$	+ ٤ س	+ ٢ س	ـ ٥
قوة س = ٣	قوة س = ٢	قوة س = ١	قوة س = صفر

ب ـ طريقة الترتيب التنازلى: وفيها يتم ترتيب حدود المقدار الجبرى حسب قوى أحد الرموز الجبرية المتضمنة فى حدود من القوى الكبرى إلى القوى الصغرى.

فمثلاً: يمكن ترتيب حدود المقدار ٢ س + $س^٢$ ـ ٥ + ٤ س حسب قوى س التنازلية كما يلى:

ـ ٥	+ ٢ س	٤ $س^٢$	+ $س^٣$
قوة س = صفر	قوة س = ١	قوة س = ٢	قوة س = ٣

تطبيق (٣):

* رتب حدود المقدار الجبرى ٢ $س^٣$ ـ ٤ $س^٤$ ـ ٣ $س^٢$ + ٥ حسب قوى س التنازلية.

* رتب حدود المقدار الجبرى ٣ أ ب + ٥ $أ^٢$ $ب^٣$ ـ ٤ أ + ٢ $أ^٣$ ب

- حسب قوى أ التصاعدية.

- حسب قوى أ التنازلية.

تدريبات

(١) أكمل:

أ ـ درجة الحد الجبرى هى ......

ب ـ درجة المقدار الجبرى هى ......

(٢) اذكر حدًا جبريًا من الدرجة الأولى، وآخر من الدرجة الثانية، وثالث من الدرجة الثالثة.

(٣) اكتب مقدارًا جبريا من الدرجة الأولى، وآخر من الدرجة الثانية، وثالث من الدرجة الثالثة.

(٤) عين الحد المطلق فى كل من المقادير الآتية (إن وجد):

* ٢ ص^{٢} ـ ٢ ص + ٣
* ٣ + ٤ س ص + س^{٢}
* ٣ س + ١ / ٣ + س^{٣}
* أ + ٢ أ^{٢} + ٣ أ^{٣}

(٥) رتب المقدار: ٥ س^{٢} ص ـ ٢ س^{٣} ص^{٢} حسب قوى س التصاعدية.

(٦) رتب المقدار: ٢ أ^{٢} ب^{٣} + ٢ أ ب + ٥ أ ب^{٢} حسب قوى ب التنازلية.

الدرس الثالث : الحدود المتشابهة: (الجمع ـ الطرح)

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

* الحدود المتشابهة.
* جمع وطرح الحدود المتشابهة.
* القيمة العددية للمقدار الجبرى.

نشاط (١) : مثل مجموعات الحدود التالية، باستخدام بلاطات الجبر.

* ٤ أ، ـ ٢ أ، ماذا تلاحظ؟
* ٣ س^{٢} ، ـ ٥ س^{٢} ، ماذا تلاحظ؟
* ٢ س ص، ـ ٢ س ص، ـ ٣ س ص، ماذا تلاحظ؟

يمكنك ملاحظة أنه فى حالة تمثيل مجموعة الحدود الأولى وهى ٤ (أ) ، (ـ ٢ أ). استخدمنا نفس نوع البلاطات، مع اختلاف الملمس فقط (المقصود بها إشارة الحد). وهذا يعنى أن الحدين (٤أ) ، (ـ٢أ) لهما نفس العامل الرمزى (أ).

وكذلك عند تمثيل مجموعة الحدود الثانية وهى (٣ س^٢)، (ـ ٥ س^٢). استخدمنا نفس نوع البلاطات، مع اختلاف الملمس فقط (المقصود بها إشارة الحد). وهذا يعنى أن الحدين (٣ س^٢)، (ـ ٥ س^٢) لهما نفس العامل الرمزى (س).

وكذلك عند تمثيل حدود المجموعة الثالثة وهى: (٢ س ص)، (ـ ٢ س ص)، (ـ ٣ س ص). استخدمنا نفس نوع البلاطات، مع اختلاف الملمس فقط (المقصود بها إشارة الحد). وهذا يعنى أن الحدود (٢ س ص)، (ـ ٢ س ص)، (ـ ٣ س ص) لهم نفس العامل الرمزى (س ص).

نستنتج مما سبق أن الحدين (٤ أ)، (ـ ٢ أ) لهم نفس العامل الرمزى (أ)، والحدين (٣ س^٢)، (ـ ٥ س^٢) لهما نفس العامل الرمزى (س^٢)، والحدود (٢ س ص)، (ـ ٢ س ص)، (ـ ٣ س ص) لهم نفس العامل الرمزى (س ص).

نلاحظ أن الحالات الثلاثة السابقة تشترك فى خاصية واحدة وهى تشابه العامل الرمزى بين كل مجموعة حدود، وهو ما يطلق عليه "تشابه الحدود" ويعرف كالآتى:

"تتشابه الحدود الجبرية إذا كان لها نفس العامل الرمزى " بغض النظر عن الاختلاف فى المعاملات العددية.

فالحدود (س^٢ ص)، (٣ س^٢ ص)، (ـ ٥ س^٢ ص) حدود جبرية متشابهة؛ وذلك لأن لها نفس العامل الرمزى وهو (س ^{٢}ص)، وذلك على الرغم من اختلاف المعاملات العددية لها.

نشاط (٢): مثل الحد ود الجبرية التالية باستخدام بلاطات الجبر.

(٣ س) ، (٣ س^٢)، (٣ ص^٢)، ماذا تلاحظ؟

يمكنك ملاحظة أنه فى حالة استخدام بلاطات الجبر لتمثيل الحدود (٣ س)، (٣ س^٢)، (٣ ص^٢) أننا استخدمنا بلاطات مختلفة المساحة (النوع) لتمثيل كل حد وهذا يعنى اختلاف هذه الحدود فى العوامل الرمزية لها، مما يجعلها حدود جبرية غير متشابهة.

تطبيق (١):

استخدم بلاطات الجبر في تصنيف كل مجموعة حدود متشابهه من بين الحدود التالية:

(٢ أ^{٢})، (ـ ٣ أ ب)، (أ ب)، (٣ أ)، (٥ أ^{٢})، (ـ أ).

تطبيق (٢):

أ ـ اذكر ثلاثة حدود جبرية من الدرجة الثالثة تكون متشابهه.

ب ـ هل (٣ س^{٣} ص)، (٥ س^{٢} ص^{٢})، (ـ ٧ س ص^{٣}) حدود جبرية متشابهة؟ ولماذا؟

جمع وطرح الحدود الجبرية المتشابهة:

نشاط (٣): بين باستخدام بلاطات الجبر كيف يمكن جمع الحدود الجبرية الآتية:

(٧ س)، (ـ ٣ س)، (ـ س)، (٥ س) ماذا تستنتج؟

من خلال النشاط السابق يمكنك استنتاج ما يلى:

١ ـ أن عملية جمع الحدود فى النشاط السابق تتم على أساس أنها حدود جبرية متشابهة إذ لا يمكن جمع الحدود الجبرية غير المتشابهه. (وضح السبب فى ذلك باستخدام بلاطات الجبر).

٢ ـ أن عملية جمع الحدود الجبرية المتشابهه تتم على أساس الجمع الجبرى لمعاملات تلك الحدود، بينما تظل العوامل الجبرية كما هى، وذلك لأن عملية الجمع والطرح تشابه جمع وطرح مجموعة أشياء لها نفس الوحدة.

تطبيق (٣):

بين باستخدام بلاطات الجبر كيف يمكن جمع الحدود الجبرية الآتية:

* (٢ أ^{٢})، (أ^{٢})، (ـ ٣ أ^{٢}).
* (٥ ص^{٢})، (ـ ٣ ص^{٢})، (ص^{٢}).
* (ـ ص)، (٢ ص)، (ـ ٣ ص).

نشاط (٤): بين باستخدام بلاطات الجبر طريقة طرح (٢ س ص) من (٥ س ص).

يمكن مساعدة التلميذ بطريقتين:

الطريقة الأولى:

باعتبار عملية الطرح عملية حذف، نمثل الحد الجبرى (٥ س ص) باستخدام بلاطات الجبر ونحذف منه ما يمثل (٢ س ص)، وعلى ذلك فإنه يمكن استنتاج أن:

٥ س ص ـ ٢ س ص = ...

الطريقة الثانية:

باعتبار عملية الطرح هى "عملية جمع المعكوس الجمعى للمطروح منه "فيكون ٥ س ص ـ ٢ س ص = ٥ س ص + (ـ ٢ س ص).

وعلى ذلك نمثل كلاً من الحدين (٥ س ص)، (ـ ٢ س ص) باستخدام بلاطات الجبر ثم نجمعهم جمعًا جبريًا فيكون ناتج عملية الطرح: ٥ س ص ـ ٢ س ص = ...

تطبيق (٤):

اختصر كلاً من المقادير التالية لأبسط صورة باستخدام بلاطا ت الجبر:

* ـ ٥ س^{٢} + ٦ س + ٣ س^{٢} ـ ٢ س.

* ٢ أ^{٢} ـ ٣ أ ب ـ ٣ أ^{٢}.

* ـ ٧ س^{٢} ـ ٣ س ص + ٢ ص + ص^{٢} ـ س^{٢} + ٢ ص^{٢}.

* ٤ س + ٢ + (ـ ١١ س ص) + ٣ س^{٢} ـ ص^{٢} + س ص.

مثال (٣): اختصر المقدار الجبرى الآتى إلى أبسط صورة.

٣ أ ـ ٢ ب + ٤ أ ـ ٢ أ ـ ٧ ب + ب

الحل: المقدار يحتوى على مجموعتين من الحدود المتشابهة لذلك نستخدم خاصيتى الإبدال والدمج فى فصلهما عن بعضها؛ لأن الحدود الغير متشابهة لا تجمع.

إذن المقدار = (٣ أ + ٤ أ ـ ٢ أ) + (٢ ب ـ ٧ ب + ب)

= (٣ + ٤ ـ ٢) أ + (٢ ـ ٧ +١) ب

= ٥ أ + (ـ ٤ ب)

= ٥ أ ـ ٤ ب

وهذه أبسط صورة للمقدار؛ لأن الحدين (٥أ)، (ـ ٤ ب) غير متشابهين.

مثال (٤): اختصر المقدار الآتي:

٣ (٥ س + ٢ ص) ـ ٢ (س ـ ٣ ص) + ٤ (٢ س ـ ص)

ثم أوجد القيمة العددية عندما: س = ٢ ، ص = ـ ٦.

الحل: بتطبيق خاصية التوزيع نجد أن

المقدار = ١٥ س + ٦ ص ـ ٢ س + ٦ص + ٨ س ـ ٤ ص.

= (١٥ ـ ٢ +٨) س + (٦ + ٦ ـ٤)ص

= ٢١ س + ٨ ص

القيمة العددية للمقدار = ٢١ (٢) + ٨ (ـ٦)

= ٤٢ ـ ٤٨ = ـ ٦

تطبيق (٥):

اختصر المقدار الآتي:

٥ أ ـ ٢ (٣ أ ـ ٢ ب) ـ ٥ (أ ـ ٣ ب).

ثم احسب قيمته العددية عندما: أ = ـ ٢، ب =٢.

تدريبات

١ ـ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

* **الحدان الجبريان (س^{٣} ص)، (ـ٣ س ص) حدان جبريان ....**

(متشابهان ـ غير متشابهان)

* **الحدود الجبرية ٢ س^{٢} ص ، ـ ٣ س^{٢} ص ـ٧ س^{٢} ص ...**

(متشابهة ـ غير متشابهة)

* **استخرج الحدود المتشابهة من بين الحدود التالية:**

(٥ س)، (ـ٣$أ^{٢}$)، (٦ $س^{٢}$ ص)، (ص $س^{٢}$)

٢ ـ اختصر كلاً من المقادير الآتية:

* ٣ س + ٢ س

* ٥ س ـ ٢ س

* ٢ ل ـ ٧ ل ـ ٤ ل ـ ل

* جـ ـ ٢جـ + ٣ جـ + ٤ جـ ـ ٥ جـ ـ ٦ جـ.

٣ . اختصر المقدار الآتى:

٢ (٣ أ ـ ٢ ب) ـ ٥ (أ ـ ٣ ب)

ثم احسب قيمته العددية عندما: أ = ٢، ب=٢

٤ . احسب:

ا ـ زيادة (٣ $س^{٢}$ ص) عن (٥ $س^{٢}$ ص)

ب ـ نقص (ـ ٣ $س^{٢}$ ص) عن (ـ ٧ $س^{٢}$ ص)

الدرس الرابع : جمع وطرح المقادير الجبرية

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

* جمع المقادير الجبرية.

* طرح المقادير الجبرية.

إن القاعدة فى جمع وطرح المقادير الجبرية لا تختلف كثيرًا عن جمع وطرح الحدود الجبرية، حيث تجمع الحدود المتشابهة فى المقادير كل على حدة فى حالة الجمع، أو تطرح الحدود المتشابهة فى المقادير، كل على حدة فى حالة الطرح.

نشاط (١) : باستخدام بلاطات الجبر، بين كيف يمكنك إيجاد حاصل جمع المقادير الآتية:

* (س^{٢} + ٢ س ص + ٣ ص^{٢})، (٢ س^{٢} + س ص ـ ص^{٢})

* (٣ س^{٢} ـ ٥ س + ٤)، (٢ س ـ ٦)

* (أ^{٢} ـ ٣ ب^{٢}) ، (٢ أ ب + ب^{٢}) ، (ب^{٢} ـ أ ب ـ ٢ أ^{٢})

وعملية الجمع يمكن إجراؤها جبريًا بطريقتين:

أفقيًا: وذلك بوضع المقادير فى صف أفقى واحد.

رأسيًا: مع مراعاة ترتيب المقادير ترتيبًا تنازليًا أو تصاعديًا، ووضع الحدود المتشابهه تحت بعضها. والمثال الآتى يوضح ذلك.

مثال (١): اجمع المقادير الآتية:

(٢ أ ـ ٣ ب + ٥ جـ)، (٣ أ ـ ٢ جـ + ب، (٢ ب ـ ٤ أ ـ جـ)

الحل:

أولاً: الطريقة الأفقية:

وفيها يتم الجمع فى صف أفقى (بوضع كل مقدارين فى قوسين) ويمكن إجراؤها باتباع الخطوات التالية:

١ ـ تطبيق خاصيتى الإبدال والدمج لفصل الحدود المتشابهة.

٢ ـ تطبيق خاصية التوزيع لفصل معاملات الحدود الجبرية المتشابهة ويتم ذلك كما يلى:

مجموع المقادير = (٢ أ ـ ٣ ب + ٥ جـ) + (٣ أ ـ ٢ جـ + ب) + (٢ ب ـ ٤ أ ـ جـ).

= ٢ أ ـ ٣ ب + ٥ جـ + ٣ أ ـ ٢ جـ + ب + ٢ ب ـ ٤ أ ـ جـ.

= (٢ أ + ٣ أ ـ ٤ أ) + (ـ ٣ ب + ب + ٢ ب) + (٥ جـ ـ ٢ جـ ـ جـ)

خاصية الإبدال والدمج

= (٢ + ٣ ـ ٤) أ + (ـ ٣ + ١ + ٢) ب + (٥ ـ ٢ ـ ١) جـ

= أ + ٢ جـ

ثانيًا: الطريقة الرأسية:

وفيها يتم وضع المقادير تحت بعضها رأسيًا: ويمكن إجراؤها باتباع الخطوات التالية:

١ ـ ترتب المقادير كلها بشكل واحد تصاعديًا أو تنازليًا تبعًا لأسس أحد الرموز الجبرية فيها.

٢ ـ نضع الحدود المتشابهة فى المقادير تحت بعضها. ويتم ذلك كما يلى:

٢ أ ـ ٣ ب + ٥ جـ

٣ أ + ب ـ ٢ جـ

ـ ٤ أ + ٢ ب ـ جـ

المجموع: أ + ٢ جـ

تطبيق (١):

استخدم بلاطات الجبر فى إيجاد مجموع المقادير الجبرية الآتية:

(٣ $أ^{٢}$ + ٢ $ب^{٢}$)، (٥ أ ب ـ $ب^{٢}$)، (٣ $ب^{٢}$ + ٢ أ ب + $أ^{٢}$)

ثم تأكد من صحة إجابتك باستخدام الطريقة الأفقية أو الرأسية لجمع المقادير الجبرية.

نشاط (٢):

باستخدام بلاطات الجبر، بين كيف يمكنك إيجاد باقى طرح المقادير الجبرية التالية:

أ ـ (٣ $س^{٢}$ + ٥ س ـ ٨) ـ ($س^{٢}$ ـ ٢ س +٣)

ب ـ (٤ $أ^{٢}$ ـ ٣ $ب^{٢}$) ـ ($ب^{٢}$ ـ أ ب ـ ٢ $أ^{٢}$)

يمكن إجراء عملية الطرح جبريًا بطريقتين:

أفقيًا: وذلك بوضع المقادير فى صف أفقى واحد.

رأسيًا: مع مراعاة ترتيب المقادير ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا، ووضع الحدود المتشابهة تحت بعضها. والمثال الآتى يوضح ذلك.

مثال (٢): اطرح (٣ $س^{٢}$ + ٣ س ص ـ $ص^{٢}$) من (٣ $س^{٢}$ + ٢ $ص^{٢}$)

الحل:

أولاً: الطريقة الأفقية:

ويمكن إجراؤها باتباع الخطوات التالية:

١ ـ نوجد المعكوس الجمعى للمقدار المطروح.

٢ ـ نجمع المقدار المطروح منه على المعكوس الجمعى للمقدار المطروح.

٣ ـ نطبق خاصيتى الإبدال والدمج لفصل الحدود الجبرية المتشابهة.

٤ ـ نطبق خاصية التوزيع لفصل معاملات الحدود الجبرية المتشابهة.

ولإيجاد باقى الطرح فى المثال السابق، نتبع ما يلى:

المعكوس الجمعى للمقدار (٣ س^{٢} + ٣ س ص ـ ص) هو (ـ ٣ س^{٢} ـ ٣ س ص + ص^{٢}).

إذن باقى الطرح = ٣ س^{٢} + ٢ ص^{٢} ـ ٣ س^{٢} ـ ٣ س ص + ص^{٢}

= (٣ س^{٢} ـ ٣ س^{٢}) + (٢ ص^{٢} + ص^{٢}) ـ ٣ س ص

خاصتى الدمج والإبدال

= (٣ ـ ٣) س^{٢} + (٢ + ١) ص^{٢} ـ ٣ س ص

خاصية التوزيع

= ٣ ص^{٢} ـ ٣ س ص

ثانيا: الطريقة الرأسية:

ويمكن إجراؤها باتباع الخطوات الآتية:

١ ـ نوجد المعكوس الجمعى للمقدار المطروح.

٢ ـ نكتب المقدار المطروح منه فى الصف الأول، ونكتب أسفله المعكوس الجمعى للمطروح، مع ترتيب حدود كل منهما تصاعديًا أو تنازليًا، بحيث تكون الحدود المتشابهة أسفل بعضها.

٣ـ نجرى عملية جمع الحدود كما سبق فى الجمع.

وفى المثال السابق يمكن إجراء عملية الطرح بالطريقة الرأسية كما يلى:

١ ـ المعكوس الجمعى للمقدار المطروح (٣ س^{٢} + ٣ س ص ـ ص^{٢}) هو

(ـ ٣ س^{٢} ـ ٣ س ص + ص^{٢}).

٢ ـ المطروح منه	٣ س^{٢}	+٢ ص^{٢}
المعكوس الجمعى للمطروح	ـ٣ س^{٢} ـ ٣ س ص	+ ص^{٢}

إذن باقى الطرح = ـ ٣ س ص + ٣ ص^{٢}

تطبيق (٢):

استخدم بلاطات الجبر فى إيجاد باقى طرح:

٢ س^{٢} ـ ٢س + ١ من ـ ٣ س ـ س^{٢} +٢

ثم تحقق من صحة إجابتك باستخدام الطريقة الأفقية والرأسية لطرح المقادير الجبرية.

تدريبات

١ ـ اجمع:

(٣ س ص + ٢ س^{٢} ـ ص^{٢})، (٣ ص^{٢} + ٢ س^{٢})، (س^{٢} ـ ٢ س ص)، ثم أوجد القيمة العددية لحاصل الجمع عندما: س = ـ ١ ، ص = ٢

٢ ـ اطرح:

(٢ أ ـ ٣ ب + ٣ جـ) من (٧ أ ـ ٣ ب + ١١ جـ)

٣ ـ أوجد زيادة المقدار (٤ س^{٢} ـ ص) عن المقدار (٣ص ـ س^{٢}).

٤ ـ ما المقدار الذى يجب إضافته إلى (٢ س^{٢} + ٣ س ـ ٥) ليكون الناتج مساويًا. (٧ + ٣ س^{٢} ـ ٥ س).

الدرس الخامس: ضرب الحدود الجبرية

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

* قاعدة الإشارات.

* ضرب حد جبرى فى حد جبرى آخر.

نشاط (١): أوجد ناتج ما يلى:

(+٥) × (+٣) =   ،   (ـ٥) × (ـ٣) =

(+٥) × (ـ٣) =   ،   (ـ٥) × (+٣) =

ثم أكمل: عند ضرب الأعداد الصحيحة ، إذا كانت إشارتا الحدين متشابهتين فإن حاصل الضرب يكون .....، وإذا كانت الإشارتان مختلفتين فإن حاصل الضرب يكون .....

نشاط (٢): أوجد ناتج ما يلى:

* $أ^{٣} \times أ^{٢} = أ^{....}$

* $٣^{٤} \times ٣ = ٣^{....}$

* $س\ ص^{٢} \times س^{٣}\ ص^{٣} = س^{....} \times ص^{....}$

ثم أكمل: فى حالة ضرب الأعداد ذات الأساسات المتشابهة فإننا ..... الأسس.

نشاط (٣) : استخدم بلاطات الجبر فى إيجاد ضرب ما يلى:

* ٣ س × س.

* ـ ٣ ص × ٢ ص.

* ص × ـ ٢ س.

* ٢ س × ٣.

نستنتج مما سبق أنه عند ضرب حد جبرى فى حد جبرى آخر، فإننا نضرب المعاملات، ثم نضرب الرموز مع مراعاة قاعدة الإشارات، وجمع الأسس للأساسات المتشابهة.

تطبيق (١):

أوجد ناتج ما يلى:

* ٤ س × ـ ٢ ص =

* ـ ٥ س^{٢} ص × ـ ٤ س ص^{٢} =

* ـ ٢ س × ٣ س =

* ٢ أ^{٢} ب^{٢} جـ × ـ ٣ ب^{٢} جـ =

* ـ ٥ س^{٤} ص × ص =

مثال (١) : ما مساحة المربع الذى طول ضلعه ٣ س من الأمتار؟

الحل : مساحة سطح المربع = طول الضلع × نفسه.

= ٣ س × ٣ س = ٩ س^{٢} مترًا مربعًا

وضح كيف يمكنك استخدام بلاطات الجبر فى التحقق من صحة إجابتك؟

مثال (٢): ما مساحة المستطيل الذى عرضه س من السنتيمترات وطوله ٣ أضعاف عرضه.

الحل: بما أن طول المستطيل = ٣ أضعاف عرضه.

وبفرض أن عرض المستطيل = س

إذن طول المستطيل = ٣ × س = ٣ س

مساحة المستطيل = طول المستطيل × عرضه

= ٣ س × س = ٣ س^{٢}

وضح كيف يمكن استخدام بلاطات الجبر فى التحقق من صحة إجابتك؟

تدريبات

١ ـ أكمل ما يلى:

أ . عند ضرب الحدود الجبرية، إذا كانت إشارتا الحدين متشابهتين، فإن حاصل الضرب ..، وإذا كانت الإشارتان مختلفين فإن حاصل الضرب ....

ب. فى حالة ضرب الرموز أو الأعداد ذات الأساسات المتشابهة فإننا ... الأسس.

٢ ـ أوجد ناتج عمليات الضرب الآتية:

* ٣ س × ٥ س^{٣}

* ٢ ل^{٣} × ٧ ل^{٢}

* ١٣ س^{٢} ص × س ص^{٢}

* (ـ ٥ ل^{٣} ب) × ٢ ل^{٣}

* (ـ ٣ س^{٢}) × (ـ ٢ س^{٥}) × ٧ س.

٣ـ مكعب طول حرفه ٣ س سنتيمتر أوجد حجمه؟

٤ ـ أوجد مساحة المستطيل الذى طوله ٨ أ سم، وعرضه ٥ أ سم؟

الدرس السادس : ضرب حد جبرى فى مقدار جبرى

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

* ضرب حد جبرى فى مقدار جبرى.

نشاط (١) : استخدم مجموعة بلاطات الجبر المعطاة، فى إيجاد حاصل ضرب ما يلى:

* س (س + ٢ ص)

* ٢ س (س + ٥ ص)

يجب أن يضع التلميذ فى الاعتبار أن استخدام بلاطات الجبر فى ضرب الحدود والمقادير الجبرية يعتمد أساسًا على مفهوم المساحة التى تتكون من حاصل الضرب، كما بينا فى الدرس السابق.

تطبيق (١):

أوجد ناتج ما يلى، مستخدمًا بلاطات الجبر.

* س (٤ س +١)
* ٢ س (٣س ـ ٣)
* س (س ـ ٣)

وعملية ضرب حد جبرى فى مقدار جبرى يمكن أن تتم جبريًا بطريقتين، إما أفقيًا أو رأسيًا والمثال الآتى يوضح ذلك..

مثال (١): اضرب (٣ س) فى (٢ س + ص)

أولاً: الطريقة الأفقية:

فى الضرب الأفقى نضع المقدار بين قوسين ونجرى الضرب كما يلى:

حاصل الضرب = ٣ س × (٢ س + ص) وباستخدام خاصية التوزيع

= ٦ س^{٢} + ٣ س ص.

ثانيًا: الطريقة الرأسية:

فى الضرب الرأسى نجرى عملية الضرب كما يلى:

٢ س +ص

٣ س نوزع الحد على حدود المضروب فيه

حاصل الضرب = ٦ س^{٢} + ٣ س ص

تطبيق (٢):

أجر عمليات الضرب الآتية:

١ ـ ٣ س فى (٧ ص ـ ٤ ع).

٢ ـ م^{٢} ن فى (٢ م ـ ٧ ن).

٣ ـ ٣ أ فى (٢ أ + ٤ ب ـ ٥ جـ)

٤ ـ ـ س^{٢} ص^{٢} فى (٣ س^{٢} ـ ٥ س ص + ٢ ص^{٢}).

مثال (٢): اختصر المقدار الآتى لأبسط صورة، ثم أوجد قيمته العددية عندما:

س = ص = ٣:

س^{٢} (س ـ ٢ ص) + ٢ س ص (س ـ ص) + ص^{٢} (٢ س + ص)

الحل: المقدار= س^{٢} (س ـ ٢ ص) + ٢ س ص (س ـ ص) + ص^{٢} (٢ س + ص)

= س^{٣} ـ ٢ س^{٢} ص + ٢ س^{٢} ص ـ ٢ س ص^{٢} + ٢ص^{٢} س + ص^{٣}

(خاصية التوزيع)

= س^{٣} + (٢ س^{٢} ص ـ ٢ س^{٢} ص) + (٢ ص^{٢} س ـ ٢ ص^{٢} س) + ص^{٣}

(خاصتى الإبدال والدمج)

= س^{٣} + ص^{٣}

القيمة العددية = (٣)^{٣} + (٣)^{٣} = ٢٧ + ٢٧ = ٥٤

تدريبات

١ ـ أجر عمليات الضرب الآتية:

* ٣ س فى (٧ ص ـ ٤ ع).
* ـ س ص فى (٢ س ـ ٧ ص).
* ـ س ص فى (٣ س ـ ٥ س ص + ٢ ص).
* ـ ٣ أ فى (٢ أ + ٤ ب ـ ٥ جـ).

٢ ـ اختصر المقدار الآتى لأبسط صورة:

٣ أ (٤ أ ـ ١) + ٢ أ (أ + ٣) ـ ٥ أ (٢ أ ـ١)

٣ ـ اختصر المقدار الآتى:

٣ س (١ ـ ٢ س) ـ (س^{٢} ـ ٥ س +٢) + ٢ س (س +٣)

ثم أوجد القيمة العددية عندما س = ـ٢

الدرس السابع: ضرب المقادير الجبرية المكونة من حدين

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

* ضرب مقدار جبرى مكون من حدين فى مقدار جبرى آخر مكون من حدين، وذلك بالطريقة الأفقية.

* ضرب مقدار جبرى مكون من حدين فى مقدار جبرى آخر مكون من حدين وذلك بالطريقة الرأسية.

* ضر ب مقدار جبرى مكون من حدين فى مقدار جبرى آخر مكون من حدين، وذلك بالطريقة المباشرة (بمجرد النظر).

* فك مربع مقدار مكون من مجموع حدين.

* فك مربع مقدار مكون من الفرق بين حدين.

نشاط (١): باستخدام مجموعة بلاطات الجبر المعطاة، كيف يمكن تمثيل حاصل ضرب ما يلى:

١ ـ (س + ٣) (س +٢)

٢ ـ (٢ س ـ ص) (س + ص)

٣ ـ (س ـ ١) (س ـ ٢)

ومن خلال التمثيل السابق، يمكن استنتاج خوارزميات ضرب المقادير الجبرية المكونة من حدين. ويمكن أيضًا الاستفادة من التمثيل السابق عند ضرب المقادير الجبرية المكونة من حدين جبريًا أفقيًا أو رأسيا، والمثال التالى يوضح ذلك:

مثال (١): اضرب (٢ س + ٣) فى (س ـ ٣)

يمكننا إجراء عملية الضرب السابقة أفقيا أو رأسيًا كما يلى:

أولاً: الطريقة الأفقية:

حاصل الضرب = (٢ س + ٣) × (س ـ ٣) وتكتب.

= (٢ س + ٣) (س ـ ٣) وباستخدام قاعدة التوزيع.

= ٢ س (س ـ ٣) + ٣ (س ـ ٣) ثم بالتوزيع أيضًا.

= ٢ س^{٢} ـ ٦ س + ٣ س ـ ٩

= ٢ س^{٢} ـ ٣ س ـ ٩

ملحوظة: يمكن استخدام بلاطات الجبر فى إيجاد حاصل الضرب كما فى النشاط السابق، كما يمكن الاستعانة ببلاطات الجبر أيضًا فى الخطوات الفرعية لإيجاد حاصل الضرب وذلك فى إيجاد حواصل الضرب لكل من : ٢ س (س ـ ٣) ، ٣ (س ـ ٣) وكذا فى إيجاد مجموع المقادير الناتجة للحصول على حاصل الضرب المطلوب.

ثانياً: الطريقة الرأسية:

فى الضرب الرأسى نضع المقدارين كما يلى:

٢ س + ٣

س ـ ٣

نضرب س فى (٢ س + ٣) فينتج ٢ س^{٢} + ٣ س

نضرب ـ ٣ فى (٢ س + ٣) فينتج ـ ٦ س ـ ٩

نجمع فينتج ٢ س^{٢} ـ ٣ س ـ ٩

وهى نفس النتيجة فى الضرب الأفقى.

ملحوظة : يمكن الاستعانة ببلاطات الجبر فى إجراء الخطوات الفرعية للضرب بالطريقة الرأسية، ففى المثال السابق يمكن استخدام بلاطات الجبر فى إيجاد حواصل الضرب لكل من : س (٢ س + ٣) ، ـ ٣ (٢ س + ٣) وكذلك مجموع المقادير الناتجة وذلك لإيجاد حاصل الضرب المطلوب.

تطبيق (١):

استخدم بلاطات الجبر فى إيجاد حاصل الضرب (٣ س ـ ٢) فى (س + ٢)

ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام الطريقة الأفقية أو الرأسية.

ويمكن استنتاج طريقة سريعة لضرب المقدارين أفقيًا كما يلى:

عندما تمثيل حاصل ضرب (٢ س + ٣) فى (س ـ ٢) باستخدام بلاطات الجبر، يكون الناتج ٢ س^{٢} ـ س ـ ٦ (مثل ذلك باستخدام بلاطات الجبر المعطاة). ويمكن الحصول على هذه النتيجة بمجرد النظر كما يلى:

الحد الأول فى حاصل الضرب = الحد الأول من المضروب× الحد الأول من المضرب فيه

= ٢ س × س = ٢ س^{٢}.

الحد الأخير فى حاصل الضرب = الحد الثانى من المضروب× الحد الثانى من المضروب

= ٣ × ـ ٢ = ـ ٦

الحد الأوسط فى حاصل الضرب = مجموع (حاصل ضرب الحد الأول من المضروب فى الحد الثانى من المضروب فيه، والحد الثانى من المضروب فى الحد الأول من المضروب فيه).

= (٢ س × ـ ٢) + (٣ × س)

= ـ ٤ س + ٣ س

= ـ س

ملحوظة: العمليات المذكورة فى المثال السابق تتم شفهيًا، وعندما يتدرب التلميذ عليها يمكنه إجرائها بسهولة، وتسمى عملية الضرب المباشر أو (الضرب بمجرد النظر).

نشاط (٢): مثل ضرب (٣ س + ٢) (س +٢) باستخدام بلاطات الجبر ثم أكمل ما يلى:

الحد الأول فى حاصل الضرب = الأول × ... = ... × ... =

الحد الأخير فى حاصل الضرب = الثانى × ... = ... × ... =...

الحد الأوسط فى حاصل الضرب = الأول × ... + الثانى× ...

=... × ... + ... × ...

= ...

ويكون حاصل الضرب = ... + ... +...

تطبيق (٢):

اجرى عمليات الضرب الآتية بالطريقة المباشرة:

* (س ـ ٣) (س ـ ٥)

* (س ـ ٤) (س + ٥)

* (٢ س + ٣ ص) (س + ٥ ص) ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام بلاطات الجبر.

نشاط (٣) : مثل حاصل ضرب المقادير الآتية باستخدام بلاطات الجبر:

* (س + ص) (س + ص).

* (س + ٣) (س + ٣).

* (٣ س + ٤) (٣ س +٤).

ثم أكمل ما يلى:

* (س + ص) (س + ص) = (س + ص)^{٢} = ... + ... + ...

* (س + ٣) (س +٣) = (س+ ٣)^{٢} = ... + ... + ...

* (٣ س + ٤) (٣ س + ٤) = (٣ س + ٤)^{٢} = ... + ... + ...

من الأمثلة السابقة يمكن ملاحظة ما يلى:

الحد الأول فى حاصل الضرب = مربع الحد الأول فى المقدار.

الحد الثالث فى حاصل الضرب = مربع الحد الثانى فى المقدار.

الحد الأوسط = ضعف حاصل ضرب الحدين الأول والثانى.

ويسمى المقدار (س + ص) (س + ص)= (س + ص)^{٢} مربع مقدار مكون من مجموع حدين ويفك هذا المقدار إلى ثلاثة حدود بالقاعدة الآتية:

مربع مقدار مكون من مجموع حدين = مربع الأول + (٢ × الأول × الثانى) + مربع الثانى.

تطبيق (٣):

أوجد مفكوك المقادير التالية وتحقق من صحة إجابتك باستخدام بلاطات الجبر:

* (٢ س + ٣)^{٢}

※ (س + ٢)٢

※ (٣ س + ٢ ص)٢

نشاط (٤): مثل حاصل ضرب المقادير التالية باستخدام **بلاطات الجبر**:

※ (س ـ ص) (س ـ ص).

※ (ص ـ ٣) (ص ـ ٣).

※ (٢ س ـ ٥) (٢ س ـ ٥)

ثم أكمل ما يلي:

※ (س ـ ص) (س ـ ص) = (س ـ ص)٢ = ... + ... + ...

※ (ص ـ ٣) (ص ـ ٣) = (ص ـ ٣)٢ = ... + ... + ...

※ (٢ س ـ ٥) (٢ س ـ ٥) = (٢ س ـ ٥)٢ = ... + ... + ...

ومن الأمثلة السابقة يمكن ملاحظة ما يلي:

※ الحد الأول فى حاصل الضرب = ...

※ الحد الثالث فى حاصل الضرب = ...

※ الحد الأوسط = ـ (ضعف حاصل ضرب الحدين الأول فى الثانى).

ويسمى المقدار (س ـ ص) (س ـ ص) = (س ـ ص)٢ **مربع مقدار مكون من الفرق** بين حدين ويفك هذا المقدار إلى ثلاثة حدود بالقاعدة الآتية:

مربع مقدار مكون من الفرق بين حدين = **مربع الأول ـ (٢ × الأول × الثانى) +** مربع الثانى.

تطبيق (٤):

أوجد مفكوك المقادير الآتية، ثم تحقق من صحة إجابتك **باستخدام بلاطات الجبر**.

※ (٢ س ـ ٣)٢.

※ (س ـ ٢)٢.

※ (٢ س ـ ٣ ص)٢.

مثال: إذا كانت أ = ٣ س + ص، ب= س ـ ٣ ص

فأوجد بدلالة س ، ص المقدار: أ٢ ـ ٢ أ ب + ٣ ب٢.

الحل:

المقدار: أ٢ ـ ٢ أ ب + ٣ ب٢.

= (٣ س + ص)٢ ـ ٢ (٣ س + ص) (س – ٣ص) + ٣ (س ـ ٣ ص)٢

= ٩ س٢ + ٦ س ص + ص٢ ـ ٢ (٣س٢ ـ ٨ س ص ـ ٣ ص٣) + ٣ (س٢ ـ ٦ س ص - ٩ ص٢).

= ٩ س٢ + ٦ س ص + ص٢ - ٦ س٢ + ١٦ س ص + ٦ ص٢ + ٣ س٢ ـ ١٨ س ص + ٢٧ ص٢

= (٩ ـ ٦ + ٣) س٢ + (٦ + ١٦ – ١٨) س ص + (١ + ٦ + ٢٧) ص٢

= ٦ س٢ + ٤ س ص + ٣٤ ص٢.

تدريبات

١)أو جد حاصل ضرب المقادير الجبرية الآتية:

* (س ـ ص) (٢ س + ص)
* (٢ ـ ٣ ص) (٥ س + ٢ ص)
* (أ + ٥ ب) (٢ أ+ ٣ ب)
* (٧ أ + ١١ب) (٣ أ ـ ٥ ب)
* (س٢ + ص٢) (س٢ ـ ص٢)

٢) أوجد مفكوك كل مما يأتى بالطريقة المباشرة:

* (أ + ٢ ب)٢
* (٢ أ ـ ب)٢
* (س + ٥ ص)٢
* ٥ (س ـ ١)٢

٣) اختصر كلاً من المقادير الآتية إلى أبسط صورة:

* ٣ س (٥ س +١) ـ (٢ + ٣)٢

* ٢ (٢س ـ ١)^{٢} + (٣ س + ٤) (س ـ ٥)
* (ـ ٧)^{٢} ـ (٢ س ـ ٣)^{٢} + (س + ٢) (٣ س ـ ٥)

٤) اختصر لأبسط صورة:

(٢ ـ ص)^{٢} ـ (س + ص)^{٢} ـ س (٣ س ـ ٥ ص)

ثم أوجد القيمة العددية للناتج عندما س = ـ ١ ، ص = ـ٢

الدرس الثامن : ضرب المقادير الجبرية المكونة من أكثر من حدين

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

ضرب مقدارين جبريين أحدهما أو كلاهما من حدين أو أكثر.

يمكننا إجراء عملية ضرب المقادير الجبرية المكونة من أكثر من حدين بالطريقة الرأسية أو الأفقية، والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال (١) : أوجد حاصل ضرب: (٣ س^{٢} ـ ٢ س +٧) فى (٢ س +٣)

الحل:

أولاً: الطريقة الرأسية:

٣ س^{٢} ـ ٢ س + ٧

٢ س + ٣

نضرب ٢ س فى المضروب ٦ س^{٣} ـ ٤ س^{٢} + ١٤س

نضرب ٣ فى المضروب ٩ س^{٢} ـ ٦ س + ٢١

الحدود المتشابهة تحت بعضها

حاصل الضرب = ٦ س^{٣} + ٥ س^{٢} + ٨ س + ٢١

ثانيًا: الطريقة الأفقية:

(٢ س + ٣) (٣ س^{٢} ـ ٢ س +٧)

$= ٢\text{س}(٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٧) + ٣(٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٧)$

$= ٦\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + ١٤\text{س} + ٩\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٢١$

$= ٦\text{س}^٣ + (-٤ + ٩)\text{س}^٢ + (١٤ - ٦)\text{س} + ٢١$

$= ٦\text{س}^٣ + ٥\text{س}^٢ + ٨\text{س} + ٢١$

ويلاحظ أن الطريقة الرأسية أسهل فى الحل.

ملحوظة:

لا يمكن استخدام بلاطات الجبر فى إيجاد حاصل ضرب المقادير المكونة من أكثر من حدين، حيث يعد ذلك من محددات استخدام هذا النوع من المواد اليدوية الملموسة، بيد أنه يمكن استخدام بلاطات الجبر فى الخطوات الفرعية لإيجاد حاصل الضرب، كإيجاد حاصل ضرب

$٣\text{س}(٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٧)$ فى المثال السابق مثلاً.

مثال (٢) : أوجد حاصل ضرب $(\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{س ص})$ فى $(\text{س} - \text{ص})$

الحل: يتم ترتيب المضروب والمضروب فيه تنازليًا أو تصاعديًا حسب أسس أحد الرمزين س أو ص ولذلك يجب أن نبدأ الحل بخطوة الترتيب.

$\text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢$

$\text{س} - \text{ص}$

نضرب س فى المضروب $\text{س}^٣ + \text{س}^٢\text{ص} + \text{س ص}^٢$

ثم نضرب ص فى المضروب $-\text{س}^٢\text{ص} - \text{س ص}^٢ - \text{ص}^٣$

حاصل الضرب $= \text{س}^٣ \qquad - \text{ص}^٣$

إذن $(\text{س}^٢ + \text{س ص} + \text{ص}^٢)(\text{س} - \text{ص}) = \text{س}^٣ - \text{ص}^٣$

مثال (٣) : أوجد مفكوك $(\text{أ} + \text{ب} + \text{ج})^٢$

الحل: (أ + ب + ج)^{٢} =

أ + ب + ج

أ + ب + ج

أ^{٢} + أ ب + أ ج

أ ب + ب^{٢} + ب ج

أ ج + ب ج + ج^{٢}

حاصل الضرب = أ^{٢} + ٢ أ ب + ٢ أ ج + ب^{٢} + ٢ ب ج + ج^{٢}

مع ملاحظة أن الحدود المتشابهة تكون أسفل بعضها البعض.

تدريبات

١) أوجد حاصل ضرب كلاً مما يأتى:

* (٢ س^{٢} ـ ٧ س +٣) (٣ س + ٣) (٣ س + ٥)

* (س^{٢} + س ص + ص) (س ـ ص)

* (س^{٢} + ٢ ص ـ ٧ س ص) (٢ س + ٥ ص)

٢) أوجد مفكوك كل مما يأتى:

* (س ـ ص ـ ع)^{٢}

* (٢ س + ص ـ ٣ع)^{٢}

الدرس التاسع : قسمة حد جبرى على حد جبرى آخر

ماذا نتعلم من هذا الدرس؟

* قاعدة الإشارات عند القسمة.

* قسمة حد جبرى على حد جبرى آخر.

* قسمة مقدار جبرى على حد جبرى.

نشاط (١): أوجد ناتج ما يلى:

٢١ ÷ ٣ = ...   ،   (ـ٢١) ÷ (ـ٣) = ...

٢١ ÷ (ـ٣)=...   ،   (ـ ٢١) ÷ ٣= ...

ثم أكمل:

خارج قسمة حدين موجبين معًا أو سالبين معًا يكون ...،وخارج قسمة حدين أحدهما موجب والآخر سالب يكون ...

وتسمى القاعدة السابقة (قاعدة قسمة الإشارات).

نشاط (٢): أوجد ناتج ما يلى:

$$\frac{س^{٥}}{س^{٢}} = ...$$

$$\frac{س^{٢}\,ص^{٣}}{س\,ص} = ...$$

$$\frac{٢٨\,م^{٤}\,ن^{٥}\,ل^{٦}}{ـ٧\,م^{٤}\,ن^{٤}\,ل^{٤}} = ...$$

$$\frac{س^{٤}}{س^{٤}} = ...$$

ثم أكمل:

فى حالة قسمة الأعداد أو الرموز ذات الأساسات المتشابهة فإننا ... الأسس.

قسمة حد جبرى على حد جبرى آخر:

يمكن استخدام بلاطات الجبر فى إيجاد خارج قسمة حد جبرى على حد جبرى آخر، وذلك بتمثيل الحد الجبرى المقسوم باستخدام بلاطات الجبر، ثم نكون مستطيل من

البلاطات التى تمثل المقسوم، بحيث يكون أحد أبعاد هذا المستطيل هو المقسوم عليه، وحيث أن المقسوم تمثله مساحة المستطيل والمقسوم عليه يمثل بعد من أبعاد هذا المستطيل، فإن البعد الثانى للمستطيل يكون هو خارج القسمة، وذلك مع ملاحظة قاعدة الإشارات عند القسمة.

نشاط (٣): استخدم بلاطات الجبر فى إيجاد خارج القسمة فى كل من الحالات الآتية:

* ٣ س^{٢} ÷ س
* - ٦ ص^{٢} ÷ ٢ ص
* -٢ س ص ÷ ص
* ٦ س ÷ ٣

مما سبق يمكن استنتاج أنه عند قسمة حد جبرى على حد جبرى آخر فإننا نقسم المعاملات العددية، ثم نقسم الرموز مع مراعاة قاعدة الإشارات عند القسمة ونطرح الأسس للأساسات المتشابهة.

تطبيق (٢):

أوجد خارج القسمة فى الحالات الآتية:

* ١٢ س^{٣} ص^{٢} على ٣ س ص
* -١٥ س^{٤} ص^{٤} على -٣ س ص
* ١٨ أ ب ج^{٤} على -٦ ب ج
* -٦ س^{٢} ص^{٣} ع^{٤} ÷ ٣ س^{٢} ص ع^{٢}

قسمة مقدار جبرى على حد جبرى:

بالمثل يمكن استخدام بلاطات الجبر فى إيجاد خارج قسمة مقدار جبرى على جبرى آخر، وذلك بتمثيل المقدار الجبرى المقسوم باستخدام بلاطات الجبر، ثم نكون مستطيل من البلاطات التى تمثل المقسوم بحيث يكون أحد أبعاده هو المقسوم عليه، وحيث أن المقسوم تمثله مساحة المستطيل، فإن البعد الثانى للمستطيل هو خارج القسمة.

نشاط (٤): استخدم بلاطات الجبر فى إيجاد خارج قسمة ما يلى:

* (٣ س^{٢} +٩ س) ÷ ٣ س
* (٤ س^{٢} -٨س) ÷ (-٤س)
* (٥ س^{٢} - ١٠ س ص) ÷ (- ٥س)

من النشاط السابق يمكن استنتاج ما يلى:

خارج قسمة مقدار جبرى على حد جبرى هو مقدار جبرى حدوده هى خارج قسمة كل حد من حدود المقدار الجبرى المقسوم على الحد المقسوم عليه. مع مراعاة قاعدة الإشارات وطرح الأسس للأساسات المتشابهة.

وتتم عملية القسمة على ثلاث خطوات كما هو موضح فى مثال (١):

مثال (١): اقسم ٨ س^{٣} ص^{٣} ـ ١٢ س^{٢} ص^{٢} + ٦ س ص^{٣} ÷ ـ ٢ س ص^{٢}

الحل: خارج القسمة =
$$\frac{\text{٨ س}^{٣}\,\text{ص}^{٣} - \text{١٢ س}^{٢}\,\text{ص}^{٢} + \text{٦ س ص}^{٣}}{-\ \text{٢ س ص}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٨ س}^{٣}\,\text{ص}^{٣}}{-\ \text{٢ س ص}} \;\Big|\; \frac{-\ \text{١٢س ص}}{-\text{٢ س ص}^{٢}} \;\Big|\; \frac{\text{٦ س ص}^{٣}}{-\ \text{٢ س ص}^{٢}}$$

= ـ ٤ س ص + ٦ س ـ ٣ ص

تدريبات

١) أكمل ما يأتى:

* إشارة خارج قسمة حدين موجبين معًا أو سالبين معًا هى ...
* إشارة خارج قسمة حدين أحدهما موجب والآخر سالب هى ...

٢) أوجد خارج قسمة:

* ٢٤ س^{٢} ص^{٧} ÷ ٣ س^{٢} ص^{٦}
* ٣٥ م ن^{٦} ÷ (ـ٧ن^{٣})
* ـ ٨١ أ^{٢} ب^{٢} ÷ ٢٧ أ ب^{٣}
* ٥٦ م^{٤} ن ÷ (ـ ٨م^{٣} ن)

٣) أوجد خارج قسمة:

* (٢٧ س^{٢} ص^{٩} + ١٨ س^{٣} ص^{٥} ـ ٦٣ س^{٥} ص^{٣}) ÷ (ـ٩ ص^{٣} س^{٢})
* (س^{٣} ـ ٣ س^{٢} ص + ٣ س ص^{٢}) ÷ ـ س