الباب الثامن

الحركة الموجية

Wave Motion

مقدمـة

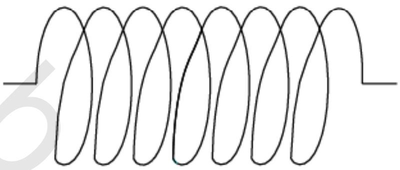
نفرض وسطاً مرناً مكوناً من عدد كبير من الجسيمات المتصلة ببعض. إذا أحدثنا اضطراباً في طرف الوسط فإنه يتولد قوة مرنة في المادة المجاورة للاضطراب ثم ينتقل إلى الجسيم المجاور ثم الذي يليه وهكذا، وعليه فإن الانتقال يتم بسرعة محددة. ولنأخذ الأشكال المرفقة لتوضيح ماسبق. فالشكـل (8.1a) وهو سلك حلزوني مشدود فإذا سحبت النهاية اليسرى في اتجاه عمودي عبر محور السلك فإننا نلاحظ أن الهزة قد انتقلت في السلك، ونقول إن لدينا اهتزازاً مستعرضاً Transverse وتبعاً لهذا نعرف الموجة المستعرضة:

" **بأنها الموجة التي تهتز فيها جزيئات الوسط في اتجاه عمودي على اتجاه سريان الاضطراب أو الموجة**". ومن أهم الأمثلة على هذا النوع الموجات الكهرومغناطيسية وهي لاتحتاج إلى وسط مادي لانتقالها ومن أمثلتها الموجات الضوئية. أما الشكل (8.1b) فيمثل وسطاً مائعاً أو غازياً محصوراً في أنبوبة مغلقة في نهايتها اليسرى مكبس يمكن تحريكه. إذا حرك المكبس حركة خفيفة فإن اضطراباً ينتقل في الوسط داخل الأنبوب. هذا الاضطراب يسمى اضطراباً طولياً Longitudinal وتبعاً له تعرف الموجة الطولية:

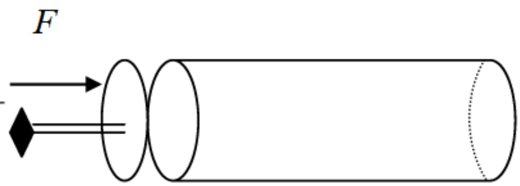
" **بأنها الموجة التي يتوازى فيها اتجاه حركة الجزيئات مع اتجاه الموجة**".

ومن أمثلتها الموجات الصوتية ولها سرعات منخفضة مقارنةً بسرعات بالموجات المستعرضة. وهناك أنواع أخرى من الاضطراب يتلازم فيه الاضطراب المستعرض مع الاضطراب الطولي، ويبين ذلك الشكل (8.1c) حيث يوجد مائع محصور في وسط وفي طرفه قطعة خشبية تولد بحركتها انتقالا للمائع وهو في نفس الوقت انتقال للموجة. وهناك نوع آخر هو الانتقال اللحظي ويوضحه الشكل (8.1d) إذ أنه بلف

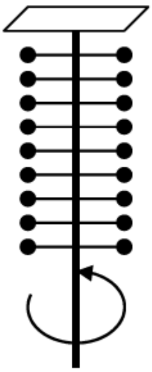
القضيب الوسطي في الشكل تهتز الكرات في الحوامل.



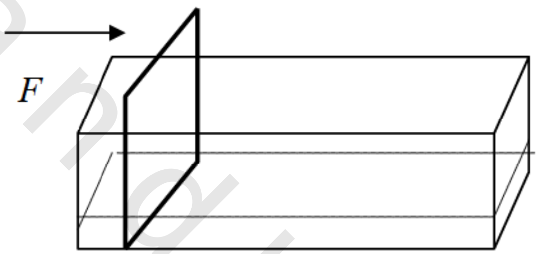
شكل (8.1a)



شكل (8.1b)



شكل (8.1d)



شكل (8.1c)

8.1 سرعة الموجة المستعرضة Speed of a Transverse Wave

تحسب سرعة الموجة المستعرضة v بدلالة كميتين فيزيائيتين هما الكتلة لكل وحدة طول للخيط والشد في الخيط على اعتبار أن الجسم المهتز هو خيط مشدود من طرفيه وأحدث به اضطراباً.

فإذا كان T يمثل الشد وL يمثل طول الخيط و m يمثل كتلته فإن الكتلة لكل وحدة طول هي $\mu = m/L$. عند الزمن $t = 0$ تطبق قوة مستعرضة على نهاية الخيط اليسرى.

فإذا أخذنا مقطعاً علوياً طوله Δs على شكل قوس حيث يتم السحب فإنه يتأثر بالشد T من الطرفين كما في الشكل (8.2) .

فإذا اعتبرنا القوس Δs هو جزء من دائرة نصف قطرها R فإن مركبة القوة على محور x تساوى صفراً إذ تلغي المركبتان بعضهما، أما القوة المركزية فهي $F_r = 2T\sin\theta$ ، لكننا نعلم أن المركبة الرأسية للقوة في الحركة الدائرية هي $F = ma$ حيث $a = \dfrac{v^2}{R}$ و m هي كتلة الجزء Δs.

أي أن

$$2T\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

لكن

$$\sin\theta \approx \frac{\Delta s}{2R}$$

إذن

$$2T\left(\frac{\Delta s}{2R}\right) = \frac{mv^2}{R}$$

أي أن

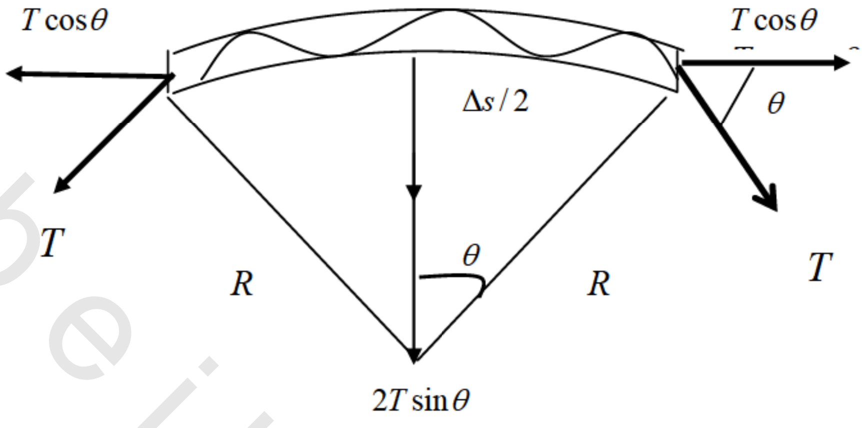
$$v^2 = T\frac{\Delta s}{m}$$

أو

$$v^2 = \frac{T}{\mu}$$

ونحل بالنسبة للسرعة v

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.1)$$



شكل (8.2) قوس متأثر بالشد T

مثال 8.1

خيط طوله $1.5m$ وكتلته $150.0g$ ربط أحد طرفيه بحائط والآخر تدلى منه جسم كتلته $4.0kg$. احسب سرعة نبضة تمر فيه والزمن الذي تستغرقه .

الحل:

الشد في الخيط يساوي وزن الجسم المدلى

$$T = mg = 4.0kg \times 9.8\ m/s^2 = 39.2\ N$$

كتلة وحدة الأطوال μ هي

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.15kg}{1.5m} = 0.1\ \ kg/m$$

وعليه فإن السرعة هي

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{39.2N}{0.1kg/m}} = 19.8m/s$$

الزمن الذي تستغرقه النبضة هو

$$t = \frac{x}{v} = \frac{1.5m}{19.8m/s} = 0.76 \sec$$

مثال 8.2

شُد سلك للربط الكهربي بين برجين المسافة بينهما $300.0m$ وكتلة السلك $60.0kg$، إذا وجد على أحد البرجين مراقب وقام بضرب السلك فإن موجة تنتقل إلى البرج الآخر ثم تعود إلى المراقب في زمن قدرة $10.0sec$.

احسب قوة الشد في السلك .

الحل:

المسافة التي قطعتها الموجة هي $600.0m$

سرعة الموجة

$$v = \frac{600.0m}{10.0s} = 60.0\ m/s$$

وحيث إن قوة الشد تعطى من العلاقة

$$F = \mu v^2$$

فإن

$$F = \frac{m}{L} v^2 = \left(\frac{60.0kg}{300.0m} \times 60.0^2 m^2/s^2 \right) = 720.0\ N$$

مثال 8.3

سلك معدني معامل يونج له $1.5 \times 10^{11} Pa$ وكثافة مادته $7.0 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$

ومعامل التمدد الحراري الطولي له $1.5\times10^{-5}/\ C^{o}$,ربط بين ثابتين وكان الشد به صفر عند درجة حرارة $30.0^{\circ}C$. عين قيمة سرعة موجة مستعرضة تمر به عندما تنخفض درجة الحرارة إلى $10.0^{\circ}C$.

الحل:

لدينا من المعادلة (4.7)

$$\frac{\Delta L}{L}=\alpha\Delta T=-1.5\times10^{-5}C^{-1}(10.0-30.0)C^{o}=3\times10^{-4}$$

وكذلك لدينا من معادلة الإجهاد الطولي (معادلة 3,10)

$$\frac{\Delta L}{L}=\frac{F}{YA}$$

ومنها فإن

$$\frac{F}{A}=\frac{\Delta L}{L}\times Y=3\times10^{-4}\times1.5\times10^{11}Pa=4.5\times10^{7}Pa$$

ولحساب سرعة الموجة فإن

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{F}{m/L}}=\sqrt{\frac{FL}{\rho V}}$$

$$=\sqrt{\frac{FL}{\rho AL}}=\sqrt{\frac{F}{A\rho}}=\sqrt{\frac{4.5\times10^{7}Pa}{7\times10^{3}kg/m^{3}}}=80.2m/s$$

Speed of a Longitudinal Wave سرعة الموجة الطولية 8.2.a

يمثل الشكل (8.3) أسطوانة أحد طرفيها ثابت والآخر به مكبس ويملأ الأسطوانة مائع (غاز أو سائل) كثافته ρ ويمثل الشكل الأول حالة المائع قبل تحريك المكبس أي عند $t=0$. نحرك المكبس إلى اليمين بسرعة u ، ويمثل الشكل الثاني الحالة بعد تحريك المكبس وإحداث ضغط إضافيّ قدره Δp . بعد زمن t نجد أن المكبس تحرك مسافة قدرها ut بينما تحركت الموجة مسافة قدرها vt حيث v هي سرعة الموجة.

كتلة المائع في منطقة حركة الموجة هي

$$m = \rho V = \rho x A = \rho v t A$$

كمية الحركة الطولية لهذه الكتلة هي

$$mu = \rho\, vtAu$$

نحسب بعدها الزيادة في الضغط، ΔP , نتيجة حركة المكبس. حيث إن الحجم الكلي للمائع هو Avt وحجم الجزء الناقص منه نتيجة حركة المكبس هو Aut *فإنه بالتعويض في* معادلة معامل المرونة الحجمي،

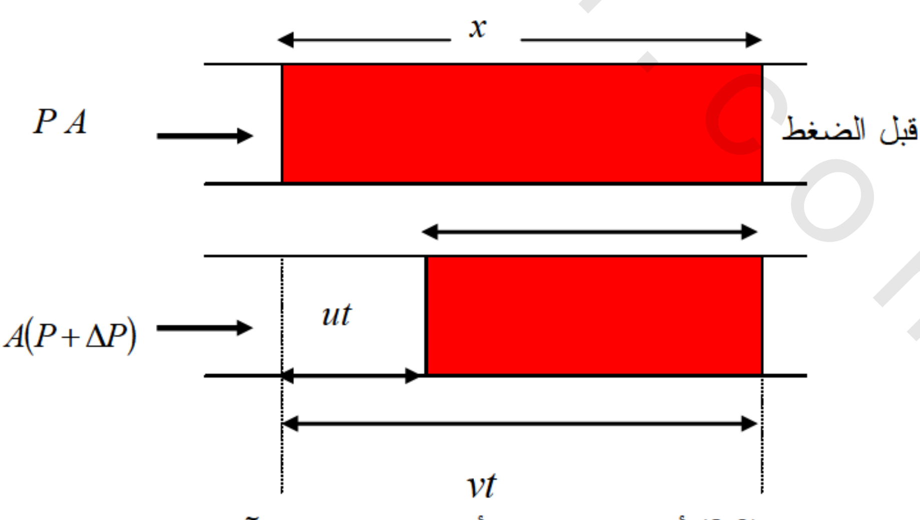
$$B = \frac{\text{التغير في الضغط}}{\text{التغير النسبي في الحجم}} = \frac{\Delta P}{Aut / Avt}$$

نجد أن

$$\Delta P = B\frac{u}{v}$$

صافي القوة المؤثرة على المائع هي ΔPA ويعطى الدفع الطولي بدلالتها كالآتي:

$$J = Ft = \Delta P A t = B\frac{u}{v}At$$



شكل (8.3) أسطوانة بها مائع أحد طرفيها ثابت والآخر به مكبس

وبتطبيق قاعدة تساوي الدفع مع كمية الحركة نجد أن

$$\rho A v t u = B\frac{u}{v}At$$

ومنه فإن

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad (8.2)$$

أي أن سرعة موجة طولية تتحرك داخل مائع يعتمد فقط على معامل المرونة للسائل وكثافته. أما حين تتحرك الموجة في وسط صلب فإن السرعة الطولية تُصبح على الشكل

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (8.3)$$

حيث Y هو معامل يونج الذي سبق تعريفه .

8.2.b سرعة الموجة الطولية في الغاز المعزول حراريًا

Speed of a longitudinal wave in adiabatic gas .

في حالة الغاز المثالي المعزول حرارياً ، $\Delta Q = 0$ ، adiabatic . يمكن استنتاج سرعة موجة طولية تتحرك داخل وسط مثالي بدلالة وزنه الجزيئي ودرجة الحرارة والثوابت γ و R .

في حالة الغاز المعزول حرارياً أثبتنا في باب سابق (مثال 6.9) إن:

$$P V^{\gamma} = \text{ثابت} \qquad (8.4)$$

حيث

$$\gamma = \frac{\text{الحرارة النوعية مع ثبات الضغط}}{\text{الحرارة النوعية مع ثبات الحجم}} = \frac{C_P}{C_V}$$

لكن

$$B = -V\frac{dP}{dV} \tag{8.5}$$

وبتفاضل المعادلة (8.4) نصل إلى

$$V\frac{dP}{dV} = -\gamma P \tag{8.6}$$

وبمقارنة المعادلتين (8.5) و (8.6) نجد أن

$$B_{ad} = \gamma P \tag{8.7}$$

B_{ad} هو المعامل الحجمي للسائل المعزول حرارياً.

لكن السرعة هنا تعطى بالعلاقة

$$v = \sqrt{\frac{B_{ad}}{\rho}}$$

أي أن

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \mathrm{P}}{\rho}} \tag{8.8}$$

لكن لدينا القانون العام للغاز المثالي

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT$$

أو

$$P\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M}RT$$

ومنها يكون

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

وبالتعويض عن P/ρ في المعادلة (8.8) نحصل على

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{8.9}$$

وهذه سرعة موجة طولية تمر في غاز مثالي معزول حرارياً.

مثال 8.4

تتحرك موجة طولية في قضيب من الألمونيوم. احسب سرعتها .

الحل:

حيث إن

$$\rho_{Al} = 2.7\times10.0^3 \frac{kg}{m^3} \quad \text{و} \quad Y_{Al} = 7\times10.0^{10}\,Pa$$

فإنه باستخدام المعادلة (8.3) نجد أن

$$v_{Al} = \sqrt{\frac{7.0\times10.0^{10}\,Pa}{2.7\times10.0^3\,kg/m^3}} = 5100.0\text{m/s}$$

وهي سرعة مثالية في المواد الصلبة وبمقارنتها بالسرعات في الموائع نجدها أكبر منها بكثير.

مثال 8.5

احسب سرعة موجة طولية تتحرك في الماء حيث معامل المرونة الحجمي للماء حوالي $2.04\ \times10.0^9 N/m^2$ وكثافة الماء $10.0^3\ kg/m^3$

الحل:

$$v_{water} = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.04\times10.0^9\,Pa}{10.0^3\ kg/m^3}} = 1428.6\,\text{m/s}$$

وهي سرعة صغيرة مقارنة بسرعة الموجة الطولية المارة في قضيب الألومنيوم أما

سرعة الموجة الطولية في الهواء فإن سرعتها تقارب ربع سرعتها في الماء.

مثال 8.6

احسب سرعة الصوت في الهواء عند درجة حرارة $30.0^{\circ}C$ حيث $\gamma = 1.4$ و $M = 28.8\times10^{-3}\,kg/mol$ و $R = 8.314\ J/mol.K$.

الحل:

لحساب سرعة الصوت في الهواء نستخدم المعادلة (8.9)

$$v = \sqrt{\frac{1.4\times(8.314\ \mathrm{J/mol.k})(303.0k)}{28.8\times10^{-3}kg.mol^{-1}}} = 350.0m/s$$

مثال 8.7

سلك نحاس مساحة مقطعه $1.0cm^2$ مشدود بقوة F . حدد قيمة هذه القوة بحيث إذا مر بالسلك موجة طولية وموجة مستعرضة فإن لهما نفس السرعة. هل يمكن حصول هذه الظاهرة ؟

الحل :

في هذا المثال تتساوى سرعتا الموجتين المستعرضة والطولية, أي أن

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

وبتربيع الجذرين وإعادة الترتيب فإن القوة:

$$F = \frac{\mu Y}{\rho} = \frac{(m/L)Y}{m/V} = AY = 1\times10^{-4}m^2\times9.1\times10^{11}Pa = 9.1\times10^{7}N$$

لكننا نعلم أن $Y = \dfrac{F/A}{\Delta L/L}$ وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة أعلاه فإن هذا يعني أن $\dfrac{\Delta L}{L} = 1$ أي أن الاستطالة تساوي الطول الأصلي وهذا غير ممكن إذ أن السلك

ينكسر قبل استطالته هذه . وعليه فإنه لا يمكن سير الموجتين بسرعة واحدة دون كسر السلك والصحيح أن الموجة الطولية دائما تسير بسرعة أعلى من سرعة الموجة المستعرضة في السلك المشدود .

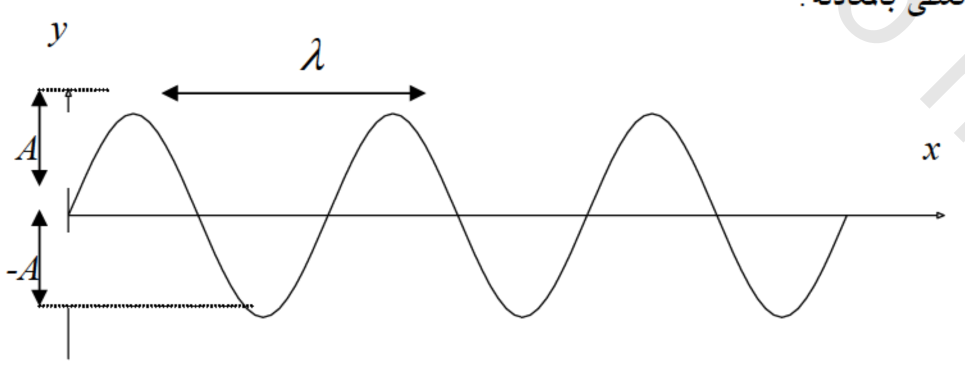
8.3 الموجات التوافقية Harmonic Waves

في هذا الفصل نتعرف على شكل موجي مهم والمعروف بالموجات التوافقية وهي الموجات ذات الشكل الجيبي Sinusoidal Shape كما هي في الشكل (8.4) الذي يمثل لقطة من الموجة عند بداية القياس $t = 0$ ويمكن تمثيل الإزاحة عند الزمن $t = 0$ بالمعادلة :

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{8.10}$$

حيث A هو السعة Amplitude ويمثل أكبر قيمة للإزاحة y . و يسمى الثابت λ بطول الموجة Wavelength ويساوي المسافة بين أي قمتين متتاليتين أو بين أي نقطتين متتاليتين لهما نفس الطور، (انظر باب الحركة التوافقية البسيطة).

والمعادلة (8.10) هي صيغة أخرى للمعادلة (7.21) حيث أستخدم y مكان x و $\frac{x}{v}$ مكان t ومن الشكل نلاحظ أن الإزاحة الرأسية تكرر نفسها عندما يزيد x بقيم مضاعفة لطول الموجة. إذا تحركت الموجة بسرعة v فإن الدالة الموجية عند زمن t تعطى بالمعادلة :



شكل (8.4): شكل الموجة عند الزمن $t = 0$

$$y = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad (8.11)$$

حيث أعيد كتابة المعادلة (8.10) عند نقطة تسبق x بإزاحة قدرها vt لاحظ أن هذه هي دالة موجية بالشكل $f(x - vt)$ وتتحرك نحو اليمين أما الدالة $f(x + vt)$ فإنها تمثل حركة الموجة إلى اليسار. ونعلم مما سبق أن

$$\lambda = v\tau \qquad (8.12)$$

حيث τ هو الزمن الدوري، وبالتعويض عن السرعة نعيد كتابة المعادلة (8.12) على الصورة

$$y = A\sin[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau})] \qquad (8.13)$$

وهذه معادلة دورية أي أن y تكرر نفسها عند الزمن $t + 2\tau , t + \tau , t$ أو عند الإزاحة $x + 2\lambda , x + \lambda , x$ ...، وهكذا.

ويمكن كتابة الدالة التوافقية بشكل أفضل وذلك باستخدام العدد الموجي k Wave number أو ما يعرف بثابت الانتشار Propagation Constant والتردد الزاوي ω حيث

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (8.14)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \qquad (8.15)$$

لتكون

$$y = A\sin(kx - \omega t) \qquad (8.16)$$

من المعادلات (8.12) ، (8.14) و (8.15) يتضح أن

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{8.17}$$

و

$$v = \lambda f \tag{8.18}$$

حيث f هو التردد.

تبين المعادلة (8.16) أنه عند $x = 0.0$ و $t = 0.0$ تكون الإزاحة $y = 0.0$ وهذه ليست دائماً صحيحة إذ أنه يمكن وجود إزاحة ابتدائية y_0 وللحصول عليها نكتب المعادلة بصيغة عامة هي

$$y = A\sin(kx - \omega t - \phi) \tag{8.19}$$

حيث ϕ يسمى ثابت الطور Phase Constant وتكتب في حالة الحركة إلى اليسار على الصورة

$$y = A\sin(kx + \omega t + \phi) \tag{8.20}$$

ولمعرفة سرعة الجسيم المهتز وتسارعه، سرعة اضطراب الوسط وتسارعه ، فإننا نجري التفاضل الجزئي على المعادلة (8.16)

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(k\,x - \omega\,\mathrm{t})$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t) \tag{8.21}$$
$$= -\omega^2 y$$

وبالتفاضل الجزئي بالنسبة لـ x نحصل على ميل المنحنى عند أي نقطة وإذا فاضلنا ثانية نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (-k^2)A\sin(kx - \omega t) \tag{8.22}$$

ويتبع من المعادلتين (8.21) و (8.22) أن

$$\frac{\partial^2 y/\partial t^2}{\partial^2 y/\partial x^2}=\frac{\omega^2}{k^2}=v^2 \qquad (8.23)$$

والمعادلة الجزئية

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (8.24)$$

من أهم معادلات الفيزياء وتسمى معادلة الموجة Wave Equation وحيث ما تحققت فإنها تعني أن y تتقدم كدالة مسافرة عبر محور x وبسرعة موجية v.

مثال 8.8

حبل مشدود بقوة قدرها $50.0N$ وكتلة وحدة الطول له $0.2kg/m$ سارت به نبضة توافقية نحو اليمين وبسعة $15.0cm$ وتردد $10.0Hz$ ، عند الزمن $t=0.0$ والإزاحة التوافقية الأفقية $x=0.0$ كان لها إزاحة رأسية $15.0cm$.

1 - احسب السرعة، طول الموجة، العدد الموجي لها .

2 - اكتب الدالة الموجية لها .

3 - احسب الدالة الموجبة عند الزمن $0.2s$ والإزاحة الأفقية $5.0cm$.

4 - احسب السرعة المستعرضة للموجة .

5 - احسب ميل الخيط عند 0.2 s و 0.5 m .

الحل:

1- من المعادلة $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ نحسب سرعة الموجة حيث T هو الشد في الخيط.

$$v=\sqrt{\frac{50.0N}{0.2kg/m}}=15.8m/s$$

طول الموجة

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{15.8m.s^{-1}}{10.0s^{-1}}=1.58m$$

العدد الموجي

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=3.97m^{-1}$$

2- الدالة الموجبة

$$y=0.15m\sin(3.97x-62.8t-\phi)$$

ولحساب ϕ بالريديان عند $t=0.0$ و $x=0.0$ فإن

$$15.0 = 15.0\sin(-\phi)$$

$$-\phi=\sin^{-1}(1.0)=90.0^{o}=\frac{\pi}{2}$$

أي أن

$$y = 0.15\sin[3.97x - 62.8t + \frac{\pi}{2}]$$

$$= 0.15\cos[3.97x - 62.8t]$$

حيث إن زاوية الطور هنا 90.0^{o} ومعلوم أن فرق الطـور بين $\cos\theta$ و θ sin هو $\frac{\pi}{2}$

3- نعوض عن $t=0.2$ s و $x=0.05$m

y = 0.15 cos[3.97 × 0.05 – 62.8 × 0.2]

= 0.15 cos(-10.575 rad) = 0.15 cos(-606°)

= 0.15 × (-0.41) = -6.1 cm

4– السرعة المستعرضة عند أي زمن وفي أي مكان هي

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t - \phi)$$

$$= -\omega A \sin(kx - \omega t)$$

في هذه المسألة

u = -62.8 × 0.15 sin (3.97 × 0.5 – 62.8 × 0.2)

= -8.6 m/s

5- حساب الميل

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak\cos(kx - \omega t - \phi)$$

في هذه المسألة

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -Ak\sin(kx - \omega t)$$

= 0.15 × 3.97 sin (3.97 × 0.5 – 62.8 × 0.2)

= 0.54

ولموجة تسير إلى اليسار فإن السرعة المستعرضة سوف تكون موجبة بينما الميل سالباً.

مثال 8.9

مصدران المسافة بينهما 14.0m يهتزان حسب المعادلتين

$y_2 = 0.02\sin\pi\, t$ و $y_1 = 0.06\sin\pi\, t$

ويرسلان موجات بسرعة $v = 1.5\ m/s$. ما معادلة الموجة المحصلة عند نقطة بينهما تبعد $8.0m$ يمين المصدر الأول وتبعد $6.0m$ يسار المصدر الثاني .

الحل:

لمعرفة المحصلة عند النقطة المحددة نكتب المعادلتين الموجيتين في صورتيهما العامة

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t - kx_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + kx_2)$$

ونعيد كتابتهما اعتماداً على التردد والسرعة

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi f_1 (t - \frac{x_1}{v}) \qquad (1)$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi f_2 (t + \frac{x_2}{v}) \qquad (2)$$

حيث x_1 و x_2 هما المسافتان بين النقطة والمصدر الأول والثاني على التوالي أي أن

$x_1 = 8.0\ m$ و $x_2 = -6.0\ m$ وبمقارنة المعادلتين (1) و (2) بما ورد في السؤال نجد أن

$2\pi f_1 = \pi$ و $2\pi f_2 = \pi$ أي أن $f_1 = f_2 = \frac{1}{2}$ Hz

ومنه فإن

$$y_1 = 0.06 \sin \pi (t - \frac{8}{1.5}) = 0.06 \sin \pi (t - \frac{16}{3})$$

$$y_2 = 0.02 \sin \pi (t - \frac{6}{1.5}) = 0.02 \sin \pi (t - 4)$$

ومن العلاقة

$$\sin (a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

فإن

$$y_1 = -0.03\sin\pi t + 0.052\cos\pi t$$

و

$$y_2 = -0.02\sin\pi t$$

ومحصلتهما هي

$$y = y_1 + y_2 = -0.01\sin\pi t + 0.052\cos\pi t$$

ولمعرفة سعة الموجة المحصلة وكذلك لمعرفة زاوية الطور فإننا نكتب المحصلة على الصورة العامة :

$$y = A\sin(\pi t + \phi) = A\sin\pi t\cos\phi + A\cos\pi t\sin\phi \qquad (4)$$

وبمقارنة المعادلتين (4) و (3) فإن

$$A\cos\phi = -0.01 \qquad (5)$$

و

$$A\sin\phi = 0.052 \qquad (6)$$

وبقسمة المعادلة (6) على المعادلة (5) نجد أن

$\tan\phi = -5.2$ ومنها فإن $\phi = -79.1^\circ$

وبتربيع المعادلتين ثم جمعهما نجد أن

$A^2 = 2.804\times10^{-3}m^2$ ومنها فإن $A = 5.3cm$

وبالتعويض عن ϕ و A في المعادلة (4) تكون معادلة الموجة المحصلة هي

$$y = 0.053\sin(\pi t - 1.38rad)$$

8.4 القدرة في الموجات المستعرضة

Power In Transverse Waves

نعلم أن الوسط المهتز ينتج موجات مستعرضة أو موجات طولية كما أشرنا سابقاً. هذه الموجات تحمل طاقة يمكن استنتاج صيغتها الرياضية معتمدين على سرعة و طول الموجة و تردد المصدر. وسوف نبدأ بالموجات المستعرضة. افرض أنه عند زمن t وعلى بعد x من طرف حبل مشدود تم سحب الحبل بقوة مائلة F كما بالشكل (8.5) ، المركبة المستعرضة للشد في الخيط نحو اليسار تعرف بالمعادلة:

$$F_{trans} = -F\frac{dy}{dx}$$

حيث $\frac{dy}{dx}$ يمثل ظل الزاوية التي صنعتها قوة الشد إلى أعلى مع محور x .

القدرة (الطاقة المارة بالنقطة x في وحدة الزمن) هي:

$$P = F_{trans}U = \left(-F\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dt}$$

حيث $\frac{dy}{dt}$ هي السرعة المستعرضة للموجة.

نفرض أن الموجة المارة بالخيط هي موجة جيبية بالصورة

$$y = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

وبالتفاضل فإن قيمة الميل عند نقطة الشد هي

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k\, y_0 \cos(kx - \omega t)$$

والقوة المستعرضة هي

$$F_{trans} = -F\frac{\partial y}{\partial x} = -F\, k\, y_0 \cos(kx - \omega t)$$

أما السرعة المستعرضة للموجة فهي

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega\, y_0 \cos(kx - \omega\, t)$$

وبالتعويض عن الميل والسرعة المستعرضة فإن القدرة عند النقطة x نتيجة الشد المستعرض هي

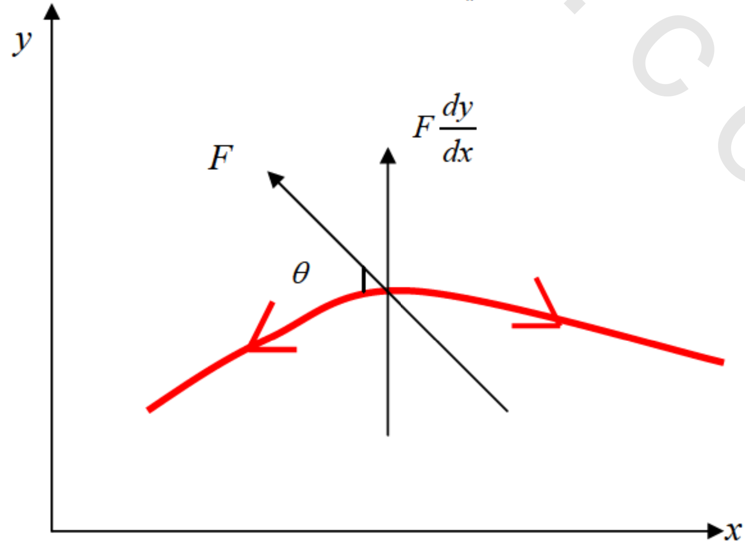
$$P = \omega k\, y_0^2\, F \cos^2 (kx - \omega)$$

وحيث إن متوسط مربع جيب الزاوية وكذلك متوسط مربع جيب تمام الزاوية يساوي نصف ، فإن متوسط القدرة هو:

$$P_{av} = \frac{\omega k\, y_0^2\, F}{2}$$

$$= 2\pi^2 f^2 y_0^2 \frac{F}{v} = 2\pi^2 f^2 y_0^2 \mu v \qquad (8.25)$$

وهي معادلة لا تعتمد على x و t ، وقد استخدمنا الصيغة $v = \sqrt{F/\mu}$ للخيط، وبدراسة المعادلة (8.25) نلاحظ أن معدل انتقال الطاقة يعتمد على مربع التردد وكذلك على مربع السعة وهي حقيقة لكل أنواع الموجات.



شكل (8.5) المركبة المستعرضة لقوة الشد في الخيط عند أي نقطة x

8.5 الموجات الموقوفة Standing Waves

تتكون الموجات الموقوفة عندما تتداخل موجتان تتحركان في اتجاهين متضادين. ويمكن مشاهدة الموجات الموقوفة بسهولة فمثلاَ إذا ربط حبل من أحد طرفيه ثم هز الطرف الآخر باليد وبتغيير التردد نجد أننا نصل إلى وضع تتكون فيه هذه الموجات وعادة ما نجري التجربة باستخدام شوكة رنانة يثبت في أحد طرفيها خيط خفيف يمر على بكرة يعلق بطرفه وزن وبتغيير بعد الشوكة عن مكان التعليق نحصل على البطون والعقد المطلوبة وتسمى بتجربة ميلد Meld's Experiment ولإيجاد الدالة الموجية لموجة موقوفة فإننا نمثل الموجة الساقطة والموجة المنعكسة بدالتين يتماثلان في السعة والتردد وطول الموجة. الموجة الساقطة y_1 هي موجة مسافرة إلى اليمين وتعطى بالمعادلة

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

والموجة المنعكسة y_2 هي موجة مسافرة إلى اليسار وتعطى بالمعادلة

$$y_2 = A\sin(kx + \omega t)$$

وتكون محصلة الإزاحة لنقطة ما هي حاصل جمعهما وبالاستفادة من الصيغة

$$\sin(a \mp b) = \sin a \cos b \mp \sin b \cos a$$

نحصل على

$$y = y_1 + y_2 = [2A\sin kx]\cos\omega t \tag{8.26}$$

هذه الصيغة تمثل الموجة الموقوفة. ومن هذه النتيجة نلاحظ أن الموجة الموقوفة لها تردد زاوي ω وتحدد سعتها بالكمية بين القوسين $(2A\sin kx)$ وهذا يعني أن كل جزيء في الخيط المهتز له حركة توافقية بسيطة وبنفس التردد . أما سعة الهزة للجزيء فإنها تعتمد على قيمة x . وبالمقارنة بحركة الموجة الواحدة نلاحظ

الفرق إذ أن الموجة الواحدة لها تردد زاوي واحد ولها سعة ثابتة.

وحيث إن سعة الموجة الموقوفة تعتمد على x فإن أكبر قيمة للسعة هي $2A$ وهذه تحصل عند تحقق الشرط $\sin kx = \pm 1$ أو عندما

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, ...$$

وحيث إن $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ فإن مواقع البطون antinodes تحدد بالقيم الآتية :

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ... = \frac{n\lambda}{4} \qquad (8.27)$$

حيث $n = 1,3,5,.....$ ونلاحظ أن البطنين المتجاورين يفصل بينهما المسافة $\frac{\lambda}{2}$ وبالمثل فإن الموجات الموقوفة لها سعة صفرية عندما تحقق x الشرط $\sin kx = 0.0$ أو عندما

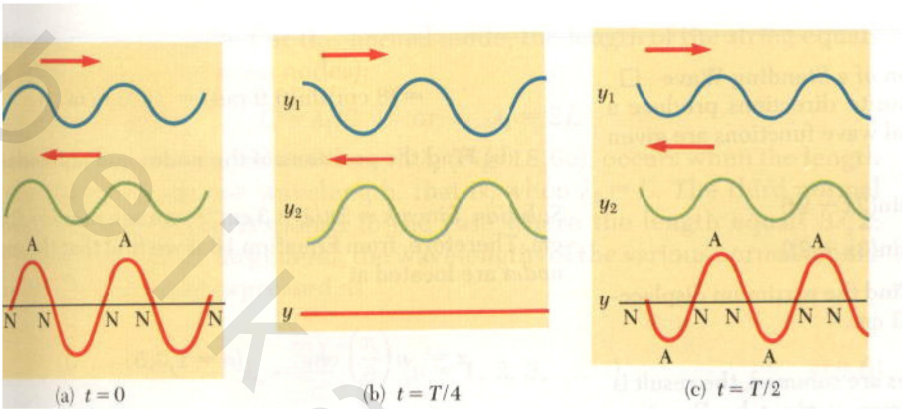
$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, ...$$

والتي تعطي

$$x = \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, ... = \frac{n\lambda}{2} \qquad (8.28)$$

حيث $n = 0,1,2,3,.....$ وهذه النقاط تدعى العُقد nodes والتي كذلك يفصل بين كل عقدتين متتاليتين نصف طول موجة $\frac{\lambda}{2}$، أما المسافة بين عقدة وبطن مجاور لها فإنها ربع الموجة $\frac{\lambda}{4}$، ويظهر لنا الشكل (8.6) رسماً لموجتين متعاكستين ولقيم زمنية مختلفة، وفيه نلاحظ أنه عند الزمن $t = 0.0$ كانت للسعة أكبر قيمة، $2A$ انظر الشكل (8.6a). وعند الزمن $t = \frac{\tau}{4}$ فإن $\cos \omega t = 0.0$ أي أن المحصلة تساوي الصفر، وهذا يعني أن للموجتين إزاحتين متساويتين ومتعاكستين لكل قيم x وهنا لدينا ما يعرف بالهدم destructive . أما عند الزمن

$t=\frac{\tau}{2}$ فيلاحظ تماثل الموجتين وتطابق البطون لهما مما يقوي المحصلة وهو ما حدث عند الزمن $t=0.0$, أي أن لدينا ما يعرف بالبناء constructive.



شكل (8.6)

8.6 الموجات الموقوفة في خيط ثبت من طرفيه

Standing Waves in a string fixed at both ends

والآن نأخذ خيطاً طوله L ثُبت من نهايتيه وسارت به موجة والتي تنعكس عند نقطتي التثبيت, شكل (8.7) . ان استمرار الموجات الواردة والموجات المنعكسة يشكل موجات موقوفة تحوي مجموعة من العقد والبطون، وأقل عدد للعقد هو عقدتان تتشكلان عند الطرفين المثبتين ويتشكل بينهما بطن واحد. وفي هذا الحال فإن طول الخيط يعادل $\frac{\lambda}{2}$: $\lambda_1=2L$ أو $L=\frac{\lambda_1}{2}$

أما الشكل المتوقع بعد ذلك فهو الحصول على عقدة في منتصف الخيط وفي هذا الحال فإن طول الخيط يعادل طول الموجة, $\lambda_2=L$. وبالحصول على عقدتين فإن طول الخيط يعادل $\frac{3\lambda}{2}$ أو $\lambda_3=\frac{2L}{3}$. وعلى العموم فإن العلاقة بين طول الموجة وطول الخيط لعدد n من البطون هو

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \qquad (n=1,2,3,4,\ldots..) \quad (8.29)$$

ونحصل على التردد المرافق لِتشكُل هذه البطون من العلاقة $f_n = \frac{v}{\lambda_n}$ حيث سرعة الموجة v هي قيمة ثابتة لكل الترددات. وبالتعويض عن طول الموجة نحصل على صيغةٍ عامةٍ للترددات تعتمد على عدد البطون.

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}, \qquad (8.30)$$

وحيث إن $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, و T هي قوة الشد في الخيط و μ كتلة وحدة الطول, فأنه يمكن كتابة التردد للخيط المسحوب بالآتي:

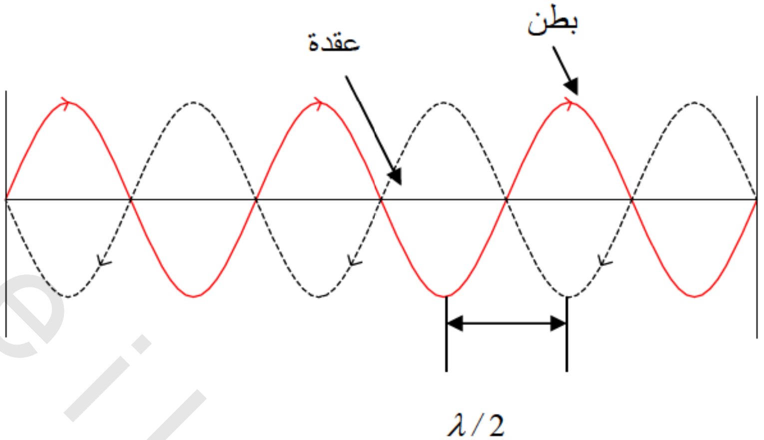
$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.31)$$

ويـــسمى أقـــل تـــردد المـــصاحب لطـــول الموجـــة λ_1 بـــالتردد الأساســـي Fundamental Frequency $f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L}$, أي أن:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (8.32)$$

ومن الواضح أن الترددات الأخرى والتي تسمى أحياناً **بالنغمات Tones** أو **التوافقيات Harmonics** هي المضروب العددي للتردد الأساسي، أي أن

$f_2=2f_1$, $f_3=3f_1$,...... وهذه المجموعة مع f_1 تسمى سلسلة التوافق أو التناغم وفي هذه السلسلة تسمى f_2 النغمة الأولى و f_3 النغمة الثانية وهكذا.



شكل (8.7) الموجة الموقوفة

ويمكن الحصول على النتيجة في المعادلة (8.29) بمساواة الإزاحة y في المعادلة (8.26) بالصفر وهذا يحصل عند جميع العقد ومنها العقدة عند x = L .

أي عند $\sin kL = 0$ وهذا يتحقق عند $kL = n\pi$ أو عند $l\dfrac{2\pi}{\lambda} = n\pi$

أي أن

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

مثال 8.10

لدينا موجة موقوفة تنتج بتداخل الموجتين التاليتين :

$$y_1 = 0.5 \sin(3\pi t - 5x)$$

$$y_2 = 0.5 \sin(3\pi t + 5x)$$

عين الموجة المحصلة و قيمة السعة لهذه الموجة عند إزاحة $x = 4.0\ m$.

الحل:

نلاحظ أن الموجتين لهما الصورة

$$y = A \sin\left(\omega t \pm kx\right)$$

أي أنه يمكن كتابة المحصلة بالصورة

$$y = A\left[\sin\left(\alpha + \beta\right) + \sin\left(\alpha - \beta\right)\right]$$

$$= 2A \sin\alpha \cos\beta = 2.0 \times 0.5 \sin 3\pi t \cos 5x$$

$$= 1.0 \sin 3\pi t \cos 5x = 1.0 \sin 3\pi t \cos(5 \times 4 \times \frac{360^\circ}{2\pi})$$

$$= 0.41 \sin 3\pi t$$

وهذه موجة جيبية سعتها عند إزاحة قدرها 4.0m أقل من سعة كلٍ من الموجتين المتداخلتين.

8.7 الموجات الطولية في الأنابيب Vibrations of Organ Pipes

عند دراسة الموجات الطولية داخل الأنابيب فإنه يلزم معرفة حال الأنابيب عند الأطراف والتي لا تخرج عن ثلاث حالات ، فإما أن تكون مفتوحة الطرفين وفي هذه الحالة يتشكل بطنان على الطرفين أو مغلقة الطرفين وفي هذه الحالة يتشكل عقدتان عليهما. أما الحالة الثالثة فهي حال أنبوب أحد طرفيه مغلق والآخر مفتوح وهنا يتشكل على أحدهما بطن وعلى الآخر عقدة. والآن نفصل الحالات الثلاث كالآتي:

الحالة الأولى :

يكون الأنبوب مفتوح الطرفين وبدراسة مجموع الأشكال في (8.8a) نرى أن

العلاقة بين طول الموجة وطول الأنبوب يعطى بالصيغة :

$$\lambda_m = \frac{2L}{m}, \qquad m = 1,2,3,... \qquad (8.33)$$

وكذلك نرى أن العلاقة بين التردد وطول الأنبوب يعطى بالصيغة :

$$f_m = \frac{mv}{2L} \qquad (8.34)$$

والرسم يبين أماكن تشكل العقد والبطون لقيم مختلفة لكل من f و λ لقيم m

الحالة الثانية: أن يكون أحد الطرفين مغلقاً حيث تكون عقدة والطرف الآخر مفتوح ليتشكل بطن وبدراسة مجموع الأشكال في (8.8b) نرى أن العلاقة بين طول الموجة وطول الأنبوب يعطى بالصيغة :

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m-1} \qquad (8.35)$$

وكذلك

$$f_m = \frac{2m-1}{4L}v \qquad , m = 1, 2, 3, ... \qquad (8.36)$$

الحالة الثالثة:

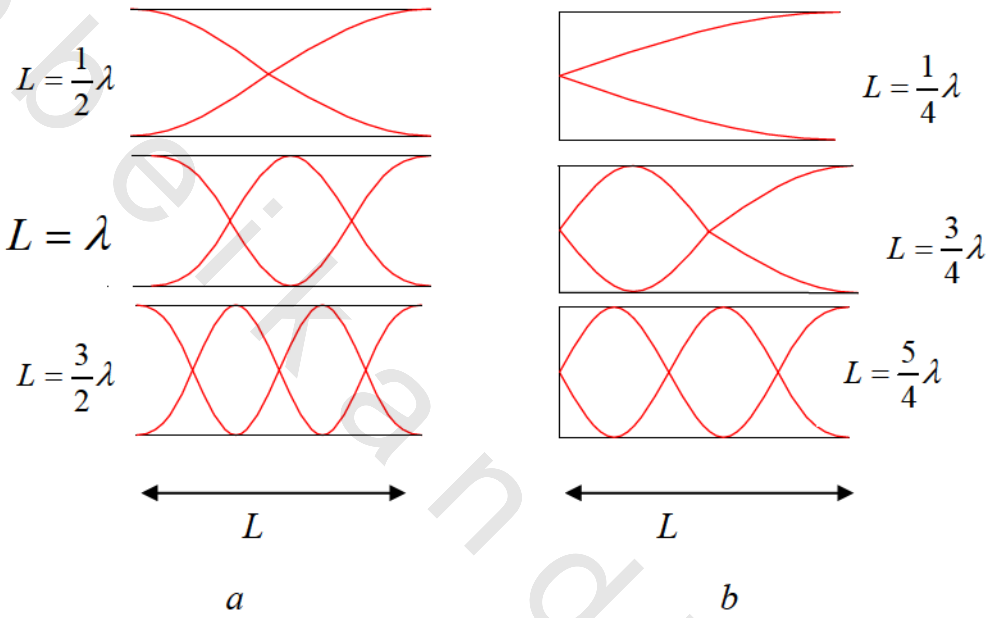
أن يكون الطرفان مغلقين وفي هذه الحالة يكون على الطرفين عقداً بدلاً من البطون المتشكلة في حالة الأنابيب مفتوحة الطرفين. وهذه حالة ينطبق عليها صيغ الحالة الأولى تماماً المعادلتين (8.31) و (8.30) والفرق أن البطون والعقد تبادلت المواقع وهنا m تمثل عدد البطون.

مثال 8.11

خيط مشدود بقوة قدرها 50.0 N وكتلة وحدة الطول له 0.2 kg/m.

أ- احسب التردد الأساسي والنغمتين التاليتين لموجة مستعرضة تمر به .

ب- احسب كذلك أطوال الموجات علماً بأن طول الخيط 1.5 m .



شكل (8.8) يبين أماكن تشكل العقد والبطون في أنبوب

الحل:

ا- نعلم أن

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

وحيث إنه للنغمة الأساسية لدينا $n = 1$ فإن

$$f_1 = \frac{1}{2.0\times1.5m}\sqrt{\frac{50.0N}{0.2kg/m}} = 5.27Hz$$

أما النغمتين التاليتين فإن لهما $n = 2$ و $n = 3$ وقيمتيهما الآتي

$$f_2 = 2f_1 = 10.54 \text{ Hz} \qquad f_3 = 3f_1 = 15.81 \text{ Hz}$$

ب- ولمعرفة أطوال الموجات نعوض في المعادلة (8.30)

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1.0} = 2\times1.5m = 3.0m, \lambda_2 = \frac{2L}{2.0} = \frac{2\times1.5m}{2} = 1.5m, \lambda_3 = \frac{2L}{3.0} = \frac{2\times1.5m}{3.0} = 1.0m$$

مثال 8.12

احسب التردد الأساسي والثلاث نغمات التالية لموجة صوتية سرعتها $350.0m/s$ تمر في أنبوب طوله $1.5m$. وذلك في حال أنبوب,

1 – مفتوح الطرفين . 2 – مفتوح من طرف واحد .

الحل:

1- في حالة الأنبوب مفتوح الطرفين يكون

$$f_m = \frac{m\nu}{2L}$$

$$f_1 = \frac{\nu}{2L} = \frac{350m/s}{2\times1.5m} = 116.7Hz$$

$$f_2 = 2f_1 = 233.33 \text{ Hz}$$

$$f_3=3f_1= 350 \text{ Hz}$$

2- في حالة أنبوب مفتوح من طرف واحد فإن

$$f_m = \frac{2m-1}{4L}v$$

$$f_1 = \frac{1\times350m/s}{4\times1.5m} = 58.33Hz$$

$$f_2 = \frac{3}{4}\frac{\nu}{L} = 175Hz$$

$$f_3 = \frac{5}{4}\frac{v}{L} = 291.7\text{Hz}$$

أو

$$f_2 = 3f_1 = 3 \times 58.33\text{Hz} = 175\text{ Hz}$$

$$f_3 = 5f_1 = 5 \times 58.33\text{ Hz} = 291.7\text{ Hz}$$

* * *

مســائل

1– إذا وصفت موجة متحركة بالمعادلة

$$y = 0.3\cos\frac{\pi}{3}(x - 16.0t)$$

فاحسب مقيساً المسافة بالسم والزمن بالثانية

أ – سعة الموجة ، العدد الموجي ، سرعة انتشار الموجة ، التردد ، الزمن الدورى ، والتردد الزاوي .

ب– احسب الإزاحة الراسية و سرعة اضطراب الوسط عند x = 0.2 cm و t =0.1s

2– إذا كان تردد مصدر موجي $3.0Hz$ وطول الموجة له 0.5 m فاحسب سرعة الموجة وعددها الموجي .

3– حبل طوله $2.0m$ وكتلته $50.0g$ شد من طرفيه بقوة 200.0N ، عند هز أحد طرفيه مربه موجة جيبية ترددها الزاوي 12.5 rad/sec وسعتها 0.05 m .

أ– احسب طول الموجة وعددها الموجي .

ب – احسب الإزاحة للموجة وسرعة الوسط عند مسافة 0.2 m وزمن 0.01 sec

4– إذا كانت سرعة الصوت في الماء حوالى 1500.0 m/s، عين تردد موجة صوتية بحيث يكون طولها في الماء يساوى طول موجة صوتية في الهواء ترددها 1200.0 Hz وسرعتها 350.0m/s .

5- خيط طوله 1.0m وكتلته 2.0g ، مثبت من أحد طرفيه في شوكة رنانة ترددها 200.0Hz . احسب الشد في الخيط اللازم لتكوين موجة موقوفة بها أربع عقد .

6- قياساً على المعادلة (8.2) استنتج المعادلة (8.3) .

7- سلك مرن طوله $80.0cm$ وكتلته $0.4g$. ثُبت أُفقياً بين نقطة تثبيت وبكرة وبمسافة $50.0cm$. إذا عُلق من طرفه المدلى جسمٌ وزنه $500.0N$ فاحسب الترددات التي يهتز بها الجسم .

8- إذا كانت سرعة الصوت عند درجة حرارة $20.0^{\circ}C$ هي 344.0m/s فاحسب سرعته عند درجة حرارة $38.0^{\circ}C$.

9- غاز مثالي معزول حراريا كثافته $1.29g/cm^3$ ووزنه الجزيئى 27.0g/mole وجد تحت درجة حرارة $20.0^{\circ}C$ والنسبة بين حرارته النوعية تحت ضغط ثابت وحجم ثابت هي 1.3 ، احسب معامل المرونة الحجمى له .

10- ما الفرق بين سرعتي موجتين طوليتين في الهواء عند $-5.0^{\circ}C$ و $60.0^{\circ}C$؟

11- احسب الإجهاد في سلك معامل يونج له Y والذي يجعل سرعة الموجة الطولية في السلك تساوى ضعف سرعة الموجة المستعرضة .

12- سلك من الفولاذ طوله 0.5m وكتلته 5.0g سحب بقوة 400.0 N

أ- احسب التردد الأساسي للاهتزاز .

ب- احسب عدد النغمات التى يمكن أن يسمعها شخص يستطيع تحمل ترددات تصل إلى 20,000 Hz .

13– سلك نحاس طوله $1.0m$ وكثافته $8.9g/cm^3$ شد بقوة بين ثابتين . اهتز بتردد أساسي قدره 500.0Hz .

أ– احسب سرعة الموجة المستعرضة به .

ب– احسب الإجهاد الطولى له (F/A) .

ج– إذا كان أكبر تسارع خطى عند منتصف السلك هو $500.0m/s^2$ فاحسب سعة الاهتزاز عند هذه النقطة .

14– علق جسم مادته من النحاس بسلك من الفولاذ فكان التردد الأساسي لموجة مستعرضة موقوفة في السلك هو 400.0Hz ، أنزل الجسم في وعاء به ماء ليغمر ثلث حجمه . احسب التردد الأساسي في هذه الحالة .

15– احسب التردد الأساسي والنغمات الثلاث التالية في أنبوب طوله 30.0cm

أ– إذا كان الأنبوب مفتوح الطرفين .

ب– إذا كان الأنبوب مفتوحاً من جهة واحدة فقط .

ج– كم عدد النغمات التى يستطيع سماعها شخص سمعه عادي لكل حالة ؟

سرعة الصوت هنا $344.0m/s$.

* * *