الباب الثاني

حركة السوائل

Fluid Dynamics

2.1 مقدمــة

في الباب السابق اقتصرنا على دراسة السوائل الساكنة والتي سنجد لاحقاً أن دراستها هي حالة خاصة من دراسة السوائل المتحركة . والآن سنبدأ دراسة حركة السوائل ، وهنا لن ندرس حركة الجسيم الواحد كدالة في الزمن بل سندرس خصائص السائل عند كل نقطة كدالة في الزمن . وحيث إن حركة السوائل معقدة جداً فإنه يلزم وضع بعض القواعد المُبسِطة لهذه الدراسة ليكون لدينا ما يُعرف بالسائل المثالي والذي من دراسته نحصل على فهم مناسب للسائل الفعلي .

أما القواعد الخاصة بالسائل المثالي فهي :

1- السائل غير اللزج Nonviscous Fluid: وفيه نُهمل الاحتكاك الداخلي للجسيمات . أي جسم يتحرك داخل سائل أهملنا تأثير لزوجة السائل . فلا تقابله أي قوة لزوجة.

2-التدفق الهادي Steady Flow : وفيه نعتبر سرعة تدفق السائل ثابتة بالنسبة للزمن عند أي نقطة.

3- الكثافة الثابتة Constant Density : ويقصد بها أن الكثافة ثابتة بالنسبة للزمن .

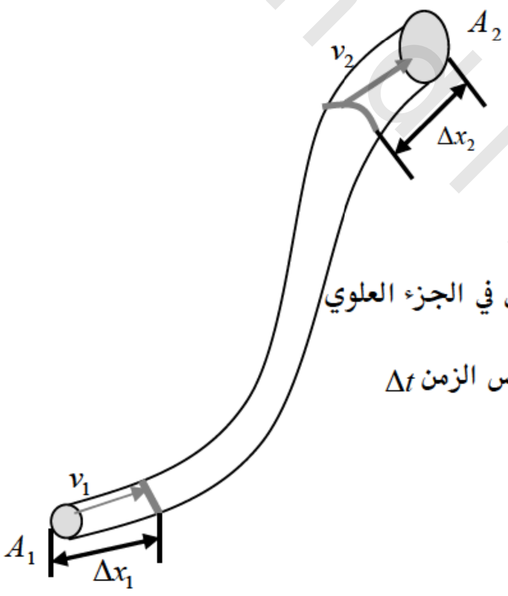
4- تدفق غير دوراني Nonturbulent Flow : يكون التدفق غير دوراني إذا لم يكن للسائل كمية حركة زاوية حول أي نقطة فيه، وهذا يتضح من وضع عجلة داخل السائل فإذا تحركت دون دوران كان التدفق غير دوراني .

2.2 طريق الانسياب ومعادلة الاستمرار

Streamlines and the continuity equation

يعرف طريق الانسياب لسائل مثالي بأنه المسار الذي ظله عند أي نقطة يوازي متجه سرعة التيار وهي سرعة ثابتة لكامل الجزيئات والتي لها طريق انسياب واحد، أما إذا تقاطع أكثر من مسار فإن التدفق لا يكون مثالياً ولاستنتاج معادلة المسار نأخذ سائلاً يتدفق في أنبوب غير منتظم كما بالشكل (2.1) ، وتنطبق عليه الشروط الأربعة أعلاه خلال زمن قصير Δt نلاحظ أن السائل قطع مسافة $\Delta x_1 = v_1 \, \Delta t$ فإذا كانت مساحة المقطع في هذه المنطقة هي A_1 فإن كتلة السائل عند A_1 هي:

$$\Delta m_1 = V_1 \, \rho_1 = \Delta x_1 \, A_1 \, \rho_1 = v_1 \, \Delta t \, A_1 \, \rho_1$$



وبنفس الطريقة فإن السائل في الجزء العلوي يقطع مسافة Δx_2 في نفس الزمن Δt وكتلة الجزء المظلل هي

$$\Delta m_2 = V_2 \, \rho_2 = \Delta x_2 \, A_2 \, \rho_2 = v_2 \, \Delta t \, A_2 \rho_2$$

وحيث إن التدفق انسيابي فإن $\Delta m_1 = \Delta m_2$ ومنه فإن :

$$v_1 A_1 p_1 = v_2 A_2 P_2 \qquad (2.1)$$

وحيث إن السائل مثالي فإن $\rho_1 = \rho_2$ وعليه فإن :

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{ثابت} \qquad (2.2)$$

وهذه هي معادلة الاستمرار The Continuity Equation والتي تعني أن :

حاصل ضرب المساحة والسرعة عند كافة النقاط على طول الأنبوب متساوية دائماً للسائل المثالي .

ومن المعادلة نرى أن مساحة المقطع عند نقطة تتناسب عكساً مع سرعة التدفق كما نرى أن لها وحدة حجم/زمن ولهذا يسمى vA بالتدفق الحجمي أو معدل التدفق ، ويمكن كتابته على الصورة التالية :

$$Q = \frac{A\,v\,t}{t} = \frac{V}{t} \qquad (2.3)$$

مثال 2.1

استخدم خرطوم مياه نصف قطر نهايته $5.0cm$ لملء خزان ماء سعته $3.6m^3$ إذا استغرق ذلك نصف ساعة ، فاحسب سرعة التدفق.

الحل :

مساحة مقطع الخرطوم

$$\pi r^2 = \pi\,(5.0cm)^2 = 25.0\,\pi\,cm^2$$

معدل التدفق للماء

$$Q=\frac{V}{t}=\frac{3.6\ m^3}{30.0\ \min}=\frac{3.6\times(100.0)^3\ cm^3}{30.0\min\times 60.0\ \ \sec/\min}=2000.0\ cm^3/\sec$$

لكن

$$Q=vA$$

إذن :

$$v=\frac{2000.0\,cm^3/s}{25\ \pi\ cm^2}=25.5\ cm/s$$

مثال 2.2

يدخل الماء إلى منزل خلال أنبوب نصف قطره الداخلي $2.0cm$ وبسرعة $200.0m/s$ ليصعد إلى الدور الثاني بسرعة $300.0cm/s$. احسب نصف قطر الأنبوب في هذا الموقع.

الحل :

$$A_2=\frac{v_1\ \ A_1}{v_2}=\frac{(200.0\ cm/s)\times(\pi)\times(2.0\ cm)^2}{300.0\ cm/s}=\frac{8}{3}\ \pi\ cm^2$$

إذن :

$$A_2=\pi\ r_2^2=\frac{8}{3}\ \pi\ cm^2$$

$$r_2=1.63\ cm$$

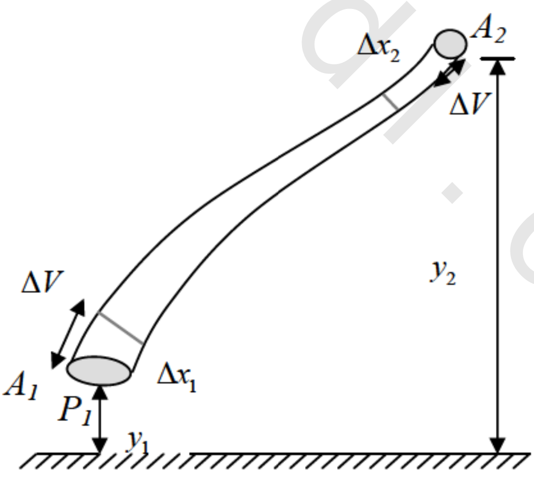
* * *

2.3 معادلة بيرنولي Bernoulli's Equation

لاحظنا في الفصل السابق أن السرعة تتغير بتغير مساحة مقطع الأنبوب ولحدوث ذلك فإن قوة التحريك تتغير كذلك أي أن الضغط متغير على طول الأنبوب، كذلك سنجد من خلال معادلة بيرنولي وجود ضغط إضافي إذا تغير ارتفاع الأنبوب، أما المعادلة التي نقوم باستنتاجها فهي معادلة عامة تربط بين فرق الضغط بين نقطتين في مسار السائل وكل من التغير في السرعة والارتفاع عندهما . وقد اشتقها العالم السويسري Daniel Bernoulli عام 1738.

اعتبر التدفق في جزء غير منتظم من الأنبوب كما بالشكل (2.2) وفي زمن قدره Δt . يؤثر على الجزء السفلي قوة قدرها $P_1 A_1$ وتصنع شغلاً.

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$$



شكل (2.2)

حيث ΔV هو حجم الجزء السفلي المظلل ، وبنفس الأسلوب فإن الشغل عند الجزء العلوي وفي نفس الوقت Δt هو $W_2 = P_2 A_2 \Delta x_2 = P_2 \Delta V$ (الحجم

الذي مر من النقطة 1 في زمن Δt هو نفس الحجم للسائل الذي مر عند النقطة 2 في نفس الزمن . ونعطي الشغل W_2 إشارة سالبة لأن ضغط السائل عكس اتجاه الحركة . ولنحصل على صافي الشغل بين النقطتين $\Delta W = (P_1 - P_2)\,\Delta V$ هذا الشغل يوزع بين طاقة الحركة وطاقة الوضع للسائل واللذين يعطيان من المعادلتين .

$$\Delta K = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2 \qquad (2.4)$$

و

$$\Delta U = m\, g\, y_2 - m\, g\, y_1 \qquad (2.5)$$

حيث ΔK يمثل التغير في طاقة الحركة و ΔU يمثل التغير في طاقة الوضع و m هي كتلة السائل المار في الأنبوب في زمن Δt . ويمكننا الآن استعمال نظرية الشغل والطاقة الذي له الصيغة:

$$\Delta W = \Delta K + \Delta U \qquad (2.6\ )$$

والذي يعطي

$$(P_1 - P_2)\,\Delta V = \frac{1}{2} m\, v_2^2 - \frac{1}{2} m\, v_1^2 + m\, g\, y_2 - m\, g\, y_1 \qquad (2.7)$$

و حيث إن

$$m = \rho\, \Delta V$$

فإننا نحصل على:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho\, v_2^2 - \frac{1}{2} \rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y_2 - \rho\, g\, y_1 \qquad (2.8)$$

وبإعادة الترتيب نحصل على معادلة بيرنولي العامة للسائل المثالي :

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g\, y_1 = P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g\, y_2 \qquad (2.9)$$

والتي عادة تكتب بالصيغة التالية:

$$P+\frac{1}{2}\rho\, v^2+\rho\, g\, y \;=\; \text{ثابت} \qquad (2.10)$$

هذه المعادلة يُعبر عنها بما يلي :

مجموعة الضغط(P) وطاقة الحركة لكل وحدة حجم $\left(\frac{1}{2}\rho\, v^2\right)$ وطاقة الجهد لكل وحدة حجم $(\rho\, g\, y)$ لها قيمة ثابتة عند أي نقطة على طول مسار السائل.

وللتأكيد على أن دراسة السائل الساكن هي حالة خاصة من دراسة السائل المتحرك نضع :

$$v_1=v_2=0$$

وعليه فإن المعادلة العامة تأخذ الصيغة التالية :

$$P_1-P_2= \rho\, g(y_2-y_1)=\rho\, g\, h \qquad (2.11)$$

وهذه تتفق مع المعادلة (1.9).

مثال 2.3

عند نقطة من أنبوب ماء كان نصف قطر مقطعه $2.0\ cm$ وكان الضغط عندها $5.0\times10^5\ Pa$. وعند نقطة أخرى كان نصف قطر مقطعه $1.0\ cm$ وكانت هذه النقطة على ارتفاع $10.0\ m$ من النقطة الأُولى . إذا كانت السرعة عند النقطة الأُولى هي $4.0\ m/s$. فاحسب سرعة السائل والضغط عند النقطة الثانية.

الحل :

نحسب السرعة من معادلة الاستمرار

$$v_2=\frac{v_1\, A_1}{A_2}=\frac{(4.0\ m/s)\times\pi(2.0cm)^2}{\pi(1.0cm)^2}=4\ m/s\times4=16\ m/s$$

ونحصل على الضغط من معادلة بيرنولي

$$P_2 = P_1 - \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) - \rho\, g\left(y_2 - y_1\right)$$
$$= 5.0\times10^5 Pa - \left[\frac{1}{2}\times\left(1.0\times10^3\ kg/m^3\right)\times\left(256.0\ m^2/s^2 - 16.0\ m^2/s^2\right)\right]$$
$$-\left(1.0\times10^3\ kg/m^3\right)\times\left(9.8\ m/s^2\right)\times\left(10.0m\right) = 2.82\times10^5\ Pa$$

2.4 بعض التطبيقات على معادلة بيرنولي

Applications of Bernoulli's Equation

1- سرعة التدفق Speed of Efflux أو نظرية تورشلي Torricelli's Theorem

يمثل الشكل (2.3) خزان مغلق مساحة مقطعه A_1 وبه سائل كثافته ρ وعمقه y ، أما المنطقة فوق السائل ففيها هواء ضغطه P ويتدفق السائل من ثقب مساحته A_2 . نعتبر الخزان أنبوبة غير منتظمة سرعة السائل عند السطح v_1 وسرعة التدفق v_2 ، نلاحظ أن الضغط عند النقطة 2 هو الضغط الجوي Pa .

نطبق معادلة بيرنولي على النقطتين 1 و 2 لنحصل على :

$$P + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + \rho\, g\, y = Pa + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 \qquad (2.12)$$

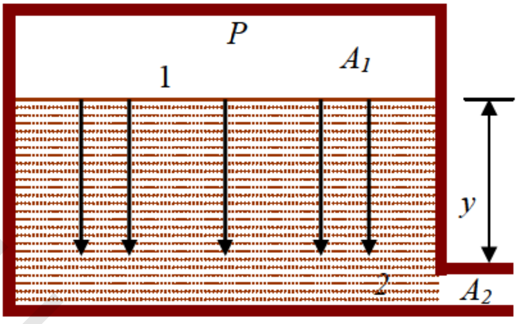
أو

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(P - Pa)}{\rho} + 2gy \qquad (2.13)$$

وبالتعويض من المعادلة (2.2) في المعادلة (2.13) نحصل على:

$$v_2^2 = v_2^2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + \frac{2\,(P - Pa)}{\rho} + 2\,g\,y \qquad (2.14)$$

ولنأخذ الآن حالة خاصة للمعادلة (2.13) وهي حالة الخزان المفتوح أي الحالة التي فيها $P = Pa$ لتصبح سرعة التدفق



شكل (2.3) خزان مليء بسائل كثافته ρ وعمقه y ومساحة مقطعه A_1 موصول بالخارج بالفتحه A_2 وضغطها Pa

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\,g\,y \qquad (2.15)$$

وهي إحدى معادلات الحركة .

إذا كان الخزان كبيراً بحيث تكون $A_1 >> A_2$ فإن v_1 تصبح صغيرة جداً بالنسبة إلى v_2 مما يمكن من إهمالها لتصبح المعادلة على الصورة التالية :

$$v_2 = \sqrt{2\,g\,y} \qquad (2.16)$$

أي أن سرعة التدفق هي نفس سرعة جسم يسقط سقوطاً حراً . وهذه هي معادلة تورشيلي .

نعود مرة أخرى إلى المعادلة (2.13) ونأخذ حالة الخزان المغلق المتسع والذي فيه $v_1^2 + 2\,g\,h >> \frac{2\,(P - Pa)}{\rho}$ لنحصل على صيغة تقريبية لسرعة التدفق وهي :

$$v_2 = \sqrt{2\,(P - Pa)/\rho} \qquad (2.17)$$

نلاحظ أنه إذا كان الضغط عالياً أو الكثافة صغيرة (غاز مضغوط داخل الخزان) فإن سرعة التدفق تكون عالية وقد تصل حالة التدفق إلى الاضطراب مما يجعل نموذج السائل المثالي غير مناسب.

قـــوة الـــــدفـــع The Reaction force

إن تدفق السائل من الأنبوب يحدث قوة دفع للسائل ويمكن استخدام معادلة بيرنولي لحساب هذه القوة فإذا كان A هو مساحة مقطع الأنبوبة و ρ هو كثافة السائل و v هو سرعة التدفق فإن كتلة السائل المتدفق في زمن Δt هي $\rho\, A\, v\, \Delta t$ وكمية حركته (الكتلة × السرعة) هي $\rho\, A\, v^2\, \Delta t$ أما معدل تغير كمية الحركة بالنسبة للزمن فهو $\rho A v^2$. وهذه هي قوة الدفع المطلوبة فإذا أخذنا الصيغة المقربة الأخيرة للسرعة فإن القوة تعطى بالمعادلة :

$$F = \rho\, A\, v^2 = \rho\, A \frac{2\,(P - Pa)}{\rho} = 2\, A\, \left(P - Pa\right) \qquad (2.18)$$

ومنها نلاحظ أن قوة الدفع لا تعتمد إطلاقاً على الكثافة بينما سرعة التدفق تتناسب عكساً مع مقلوب جذرها .

2- أنبوبة فنشوري The Venturi Tube

أنبوبة أفقية تضيق بالتدريج لتصل إلى عنق تتسع بعده بالتدريج كذلك ، كما يوجد بها فتحتان علويتان قبل العنق وبعده لمنع اضطراب السائل أثناء حركته كما بالشكل (2.4) وبتطبيق قاعدة بيرنولي على الأنبوب تصبح بالصيغة التالية :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\, v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 \qquad (2.19)$$

من معادلة الاستمرار نلاحظ أن السرعة v_2 أكبر من السرعة v_1 وعليه فإن الضغط P_2 عند العنق أقل من الضغط P_1 ، وبالتعويض عن v_1 في المعادلة أعلاه

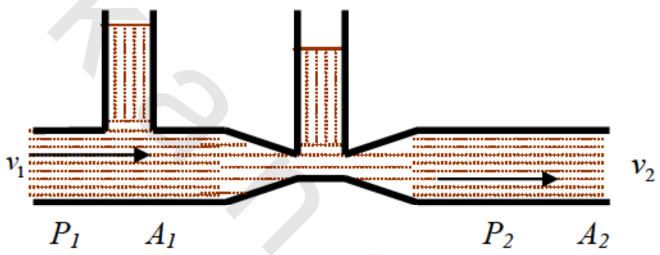
نحصل على السرعة v_2 بالصيغة التالية :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\, v_2^2$$

وبإعادة الترتيب نحصل على v_2 بالصيغة :

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2\left(P_1 - P_2\right)}{\rho\left(A_1^2 - A_2^2\right)}} \qquad (2.20)$$

ويمكن الحصول على صيغة للسرعة v_1 بدلالة هذه المعادلة ومعادلة الاستمرار.



شكل (2.4) أنبوبة فنشوري

3- قياس الضغط داخل سائل متحرك

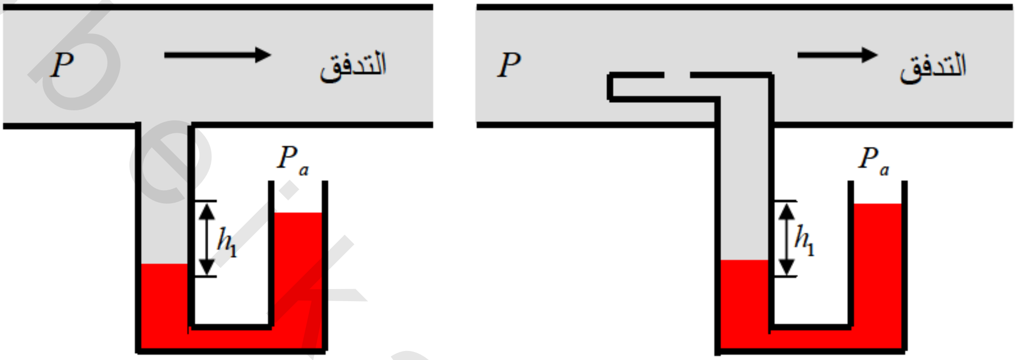
Measurement of Pressure in A moving Fluid

يمكن قياس الضغط P داخل سائل متحرك في أنبوب مغلق بإحدى طريقتين كما في الشكل(2.5) . في الشكل (2.5a) وصل طرف المانوميتر بفتحة في الأنبوب وفي الشكل(2.5b) أُدخل مسبر إلى داخل السائل ويلاحظ أن يكون المسبر دقيقاً حتى لا يُعطل حركة السائل أو يسبب اضطرابه ، وفي هذه الحالة فإن الفرق في الارتفاع h داخل المانوميتر يتناسب مع الفرق بين الضغط الجوي والضغط داخل السائل أي أن :

$$P = \rho_H\, g\, h_1 + Pa \qquad (2.21)$$

حيث ρ_H هي كثافة السائل داخل المانوميتر ومنها فإن:

$$Pa = P - \rho_H \, g \, h_1$$



شكل (2.5) قياس الضغط P داخل السائل المتدفق

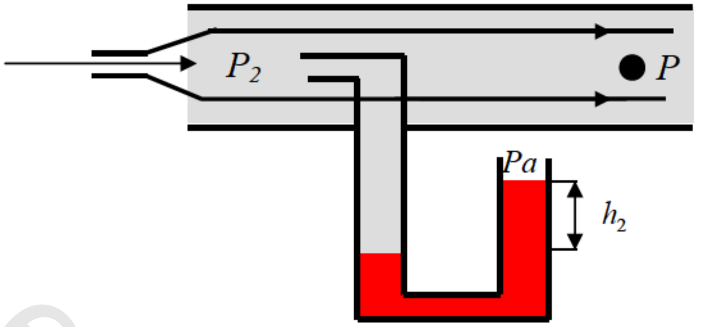
4- أنبوبة بايوت Piotot Tube

مسبر طرفه العلوي مفتوح داخل السائل الذي سرعته عندها صفراً و ضغطه P_2 ، نطبق قاعدة بيرنولي على نقطة الركود وعلى نقطة أخرى بعيدة عن المسبر وفي مكان ضغطه P وسرعة السائل v .

ومنه نحصل على التالي :

$$P_2 = P + \frac{1}{2}\rho\, v^2 \qquad (2.22)$$

أي أن الضغط عند نقطة الركود يساوي الضغط المتحرك $\frac{1}{2}\rho\, v^2$ مضافاً إليه الضغط الساكن P .



شكل (2.6) أنبوبة بايوت

وبدلالة الضغط الجوي فإن الضغط عند النقطه P هو:

$$P = Pa + \rho_h gh - \frac{1}{2}\rho v^2$$

حيث ρ_h هي كثافة السائل في المانوميتر.

مثال 2.4

ملئ برميل حجمه $1.0m^3$ بالماء ورفع عن سطح الأرض مسافة $2.0m$. فتح في قاعه ثقب قطره $2.0cm$ لينسكب الماء في زمن قدره $20.0min$. احسب سرعة الماء ومساحة مقطعه عند سطح الأرض .

الحل:

نعلم أن $Av = \frac{V}{t}$ ومنها فإن $v = \frac{V}{At}$

لكن

$$A = \pi r^2 = \pi \ cm^2$$

إذن :

$$v_1 = \left(\frac{1.0m^3}{3.14 \times 10^{-4} m^2 \times 20 \min x 60 \sec/\min} \right) = 2.65\, m/s$$

وتمثل سرعة التدفق من البرميل .

وبتقريب السرعة على بعد y من قاع البرميل بالمعادلة :

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gy$$

إذن :

$$v_2^2 = (2.65\,m/s)^2 + 2x9.8\, m/s^2 x\, 2.0m = 46.24\,m^2/s^2$$

ومنها فإن:

$$v_2 \cong 6.8m/s$$

وتمثل سرعة الماء عند وصوله سطح الأرض . من معادلة الاستمرار لدينا

$$A_2 = \frac{A_1 v_1}{v_2} = 1.22\, cm^2$$

وتمثل مساحة مقطعه عند سطح الأرض.

مثال 2.5

أنبوب أفقي غير منتظم ، يُنقل به الماء . عند نقطتين داخل الأنبوب كانت أنصاف الأقطار *2.0cm* و *1.0cm* وفرق الضغط بين النقطتين هو *5.0cm* من الماء . احسب كمية الماء المتدفق من الأنبوب في نصف ساعة .

الحل :

نستخدم معادلة بيرلوني بالصيغة

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^{2)})$$

لكن

$$P_1 - P_2 = \rho gh = (1000.0\ x\ 9.8\ x\ 0.05)\ Pa$$

وأيضاً

$$v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1} = \frac{\pi x 1.0^2}{\pi x 2.0^2} v_2 = 0.25 v_2$$

إذن

$$v_2^2 (1 - 0.0625) = \frac{2x490}{1000} m^2 / s^2$$

ومنها فإن السرعة

$$v_2 = 1.00224 m / s$$

وبالتعويض فإن كمية الماء المتدفق هي :

$$V = v_2 A_2 t = (1.0224 x \pi x (0.01)^2 x 30 x 60) m^3 = 0.514 m^3$$

* * *

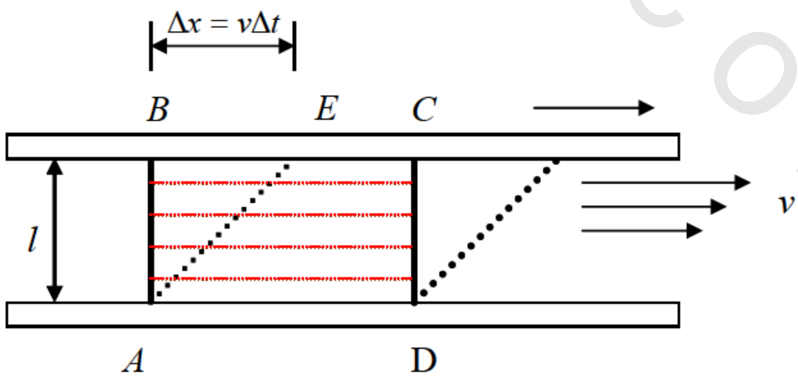
2.5 اللزوجة Viscosity

يلاحظ عند دراسة الإجهاد القصي (والذي سوف يرد مفصلاً في الباب الثالث) اقتصاره على المادة الصلبة دون السائلة إلا إنه في حالة حركة السائل والنظر إليه كطبقات متوازية فإنه ينشأ مقاومة قصية بين هذه الطبقات ، وهذه المقاومة هي شكل من أشكال المقاومة الداخلية والتي تسمى باللزوجة.

أي أن اللزوجة في السوائل تنشأ بسبب قوى الاحتكاك بين طبقات السائل المتلامسة وبسرعات مختلفة.

ولنضرب مثالاً توضيحياً :

لنأخذ لوحين من الزجاج وبينهما زيت نثبت أحد اللوحين ونحرك الآخر نجد سهولة حركة اللوح الحر ثم نكرر العملية بوضع قطران محل الزيت ونحرك اللوح الحر نجد أن الحركة أبطأ منها مع الزيت وعليه نقول إن القطران أكثر لزوجة من الزيت. يبين الشكل (2.7) أن السرعة لطبقات السائل تزداد من الصفر عند اللوح الثابت إلى v بملامسة اللوح المتحرك ولاستنتاج صيغة معامل اللزوجة نعود إلى استنتاج معامل المرونة القصي ونلاحظ وجود طبقتين من السائل متوازيتين إحداهما ساكنة والأخرى متحركة ونؤثر على الساكنة بإجهاد قصي



شكل (2.7) طبقة من الزيت بين لوحين أحدهما ثابت والسرعة عنده صفر والآخر متحرك إلى اليمين وبسرعة v

وبانفعال قصي :

$$\text{Shear strain} = \frac{\Delta x}{l} \quad \text{و} \quad \text{Shear stress} = \frac{F}{A}$$

وحيث إن اللوح العلوي يتحرك بسرعة v فإن السائل الملامس له يتحرك بنفس السرعة وذلك في زمن قدره Δt ليكون $\Delta x = v\Delta t$ ، وعليه يمكن التعبير عن الانفعال القصي لكل وحدة زمن بالصيغة :

$$\frac{shear\ strain}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x}{l}}{\Delta t} = \frac{v}{l} \qquad (2.23)$$

وعليه فإن معامل اللزوجة للسائل η يُعرف بأنه النسبة بين الإجهاد القصي ومعدل تغير الانفعال القصي

$$\eta = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{v}{l}} = \frac{F\,l}{v\,A} \qquad (2.24)$$

أو

$$F = \eta A \frac{v}{l}$$

نلاحظ في هذه المعادلة أن القوة تتناسب مع السرعة إلا أن هذه المعادلة لا تنطبق على كل السوائل ومنها الدم الذي وجد أن سرعته أكثر تزايداً من القوة، أما السوائل التي ينطبق عليها هذا القانون فتدعى سوائل نيوتن.

الوحدة الدولية للزوجة هي $N.s/m^2$ ، ويقابلها في وحدات (cgs) $dyn.s/cm^2$ وهي الوحدة الشائعة الاستعمال وتدعى البواز $poise$ وعليه فإن:

$$one\ poise = 1\ dyn.s/cm^2 = 10^{-1} N.s/m^2$$

وفي حالة القيم الصغيرة فإنه يمكن استخدام السنتيبواز (cp) أو الميكروبواز $(1\mu p = 10^{-6}\,poise)$ ، ويعطي الجدول (2.1) قيم اللزوجة لثلاث مواد موضحة مع قيم مختلفة لدرجات الحرارة.

جدول (2.1) قيم اللزوجة للهواء والماء وزيت الخروع

η للهواء μp	η لزيت الخروع $poise$	η للماء cp	درجة الحرارة C^0
171	53	1.792	0
181	9.86	1.005	20
190	2.31	0.656	40
200	0.80	0.469	60
209	0.30	0.357	80
218	0.17	0.284	100

مثال 2.6

رُبطت صفيحة معدنية مساحتها $0.05\ m^2$ بجسم كتلته $8.0g$ وذلك بخيط يمر على بكرة مثالية (ملساء ومهملة الكتلة) شكل (2.8) ، وُضعت طبقة شحمية بين الصفيحة والسطح بسمك $0.3mm$ ، عندما تركت المجموعة لتتحرك سارت بسرعة ثابتة قدرها $0.085\ m/s$. احسب معامل اللزوجة للمادة الشحمية.

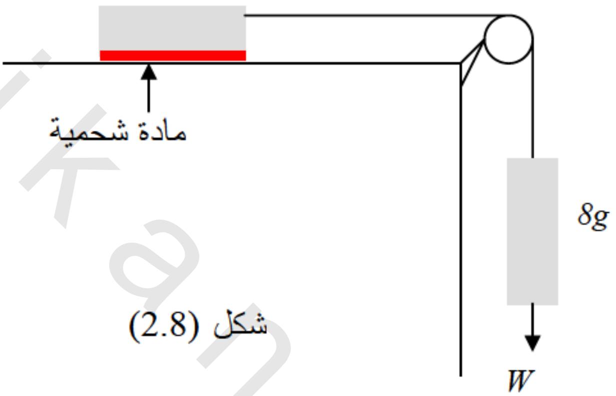
الحل :

حيث إن الجسم يتحرك بسرعة ثابتة فإن تسارعه يساوي الصفر ويتحرك تحت تأثير وزن الجسم المدلى

$$F = W = mg = \left(8\times10^{-3}\,kg\right)\times\left(9.80\ m/s^2\right) = 7.84\times10^{-2}\ N$$

الجزء من الطبقة الشحمية الملامس للسطح الأفقي ساكن والجزء الملامس للصفيحة يتحرك بنفس سرعتها وبالتعويض في معادلة معامل اللزوجة فإن:

$$\eta = \frac{F\,l}{A v} = \frac{\left(7.84\times10^{-2}\,N\right)\times\left(0.3\times10^{-3}\,m\right)}{\left(0.05\,m^2\right)\times\left(0.085\,m/s\right)} = 5.53\times10^{-3}\ N.s/m^2$$



شكل (2.8)

❋ ❋ ❋

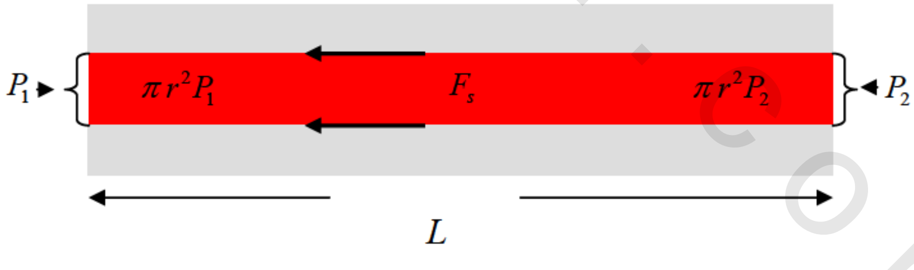
2.6 قانون بوازوي Poiseuille`s Law

عند تحرك سائل لزج داخل أنبوب فإنه يسير بسرعات مختلفة يكون أقلها سرعة الجزء الملامس لسطح الأنبوب وقد يصل إلى الصفر في حالة السرعات غير العالية للسائل بينما تكون أعلى سرعة على محور الأنبوب. وهنا يمكن تخيل السائل على شكل طبقات لكل منها سرعتها ، وهذه السرعات تزيد بالابتعاد عن الجدران .

والآن ندرس تغير سرعة السائل بتغير نصف القطر الداخلي للأنبوب الأسطواني المار به ، نأخذ أسطوانة من السائل نصف قطرها r وتؤثر عليها القوتان $\pi r^2 P_1$ و $\pi r^2 P_2$ ومحصلتهما في اتجاه حركة السائل F

$$F = \pi r^2 (P_1 - P_2) \qquad (2.25)$$

وحيث إن حركة السائل ثابتة فإن التسارع معدوم وعليه فإن هذه القوة تعادل قوة اللزوجة بين طبقات السائل انظر الشكل (2.9) والذي فيه F_s تمثل قوى اللزوجة والتي تعطى بالمعادلة (2.24)



شكل (2.9)

وحيث إن السرعة لا تتغير بانتظام مع الابتعاد عن المحور فإننا نستعيض عن $\frac{v}{l}$ بالتفاضل $\frac{dv}{dr}$ لتصبح المعادلة :

$$F_s = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \qquad (2.26)$$

حيث $2\pi r\, L$ هي مساحة جزء من الأنبوب نصف قطره r .

وبمساواة المعادلتين (2.25) و (2.26) نجد أن (لاحظ اتجاه القوتين)

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{(P_1 - P_2) r}{2\eta L}$$

وهذه معادلة توضح أن السرعة تتغير مع زيادة نصف القطر أما الإشارة السالبة فتوضح أنه بزيادة r تنقص v وحيث إن حدود r هي $r = 0$ و $r = R$ فإنه بالتكامل نحصل على:

$$-\int_v^0 dv = \frac{P_1 - P_2}{2\eta L} \int_r^R r\, dr$$

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \left(R^2 - r^2\right) \qquad (2.27)$$

وهذا يعني أن السرعة تنخفض من قيمة كبرى قدرها $\frac{P_1 - P_2}{4\eta L} R^2$ عند المركز إلي الصفر عند ملامسة الأنبوب أي أن:

$$v_{max} = DR^2 \qquad (2.28)$$

أي أنه عند المركز تتناسب السرعة الكبرى مع مربع نصف قطر الأنبوب:

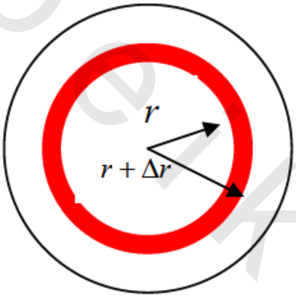
$$D = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}$$

والآن نأخذ شريحة أسطوانية داخل السائل نصف قطرها الداخلي r ونصف قطرها الخارجي $r + \Delta r$ انظر الشكل (2.10) ، و حجم السائل المار بهذه الشريحة في زمن dt هو $v dt dA$ حيث v هي السرعة عند نصف القطر r و dA

هي مساحة الوجه المظلل $dA = 2\pi r dr$ وبالتعويض عن قيمة السرعة من المعادلة (2.27) فإن :

$$dV = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)2\,\pi r dr dt$$

ومنها نحصل على حجم السائل الذي يعبر مقطع محدد وذلك بالتكامل لهذه المعادلة من $r = 0$ إلى $r = R$.



شكل (2.10)

$$V_1 = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{L}t \qquad (2.29)$$

أما معدل تدفق الحجم بالنسبة للزمن فيعطى بالمعادلة

$$Q = \frac{V_1}{t} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{L} \qquad (2.30)$$

وهذه المعادلة اشتقها بوازوي Poiseuille وتعرف بقانون بوازوي ومنه يظهر التناسب العكسي بين اللزوجة ومعدل التدفق الحجمي كما هو متوقع.

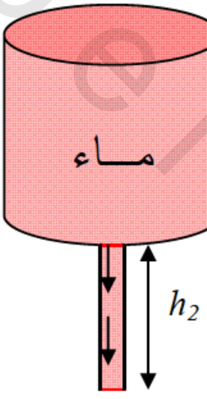
مثال 2.7

أسطوانة نصف قطر قاعدتها *5.0cm* و ارتفاعها *30.0cm* وموصل بقاعدتها أسطوانة شعرية نصف قطرها *0.5mm* وطولها *40.0cm* شكل(2.11) .

قارن بين سرعة تدفق الماء الخارج من الأنبوب الشعري في حال كانت الأسطوانة الكبرى مليئة بالماء وبين سرعة تدفق الماء إذا أصبحت الأسطوانة الكبرى فارغة علماً بأن معامل اللزوجة *0.01 poise* .

الحل:

يتدفق الماء في الأنبوب الشعري نتيجة ضغط الماء في الأسطوانة وكذلك ضغط الماء داخله وعليه فإن معدل تدفق الماء في حالة امتلاء الأسطوانة هو:



$$Q=\frac{V_1}{t}+\frac{V_2}{t}=\frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta h_2}(\Delta P_1+\Delta P_2)$$

حيث ΔP_1 هو الضغط من عمود سائل ارتفاعه h_1 أي أن $\Delta P_1=\rho g h_1$ و ΔP_2 هو الضغط من عمود السائل داخل الأنبوب الشعري $\Delta P_2=\rho g h_2$.

معدل التدفق Q بسبب هبوط مستوى الماء في أسطوانة ارتفاعها h يعطى كذلك بالصيغة

$$Q=\frac{hA}{t}=Av$$

ومنه فإن:

$$v_1=\frac{h}{t}=\frac{\pi}{8A}\frac{R^4}{\eta h_2}(h_1+h_2)\rho g$$

في حالة الامتلاء يكون:

$h_2=40.0\,cm$ و $h_1=30.0\,cm$

$$v_1=\frac{\pi\times(0.5\times10^{-3})^4\times1000.0\times0.7\times9.8}{8\times(2\pi\times0.05\times0.3)\times10^{-3}\times0.4}\quad m/s$$

$$=4.47\times10^{-6}\,m/s=1.61\,cm/hr$$

وفي حال كانت الإسطوانة فارغة فإن $h_1 = 0$

ويعوض أعلاه لتصبح السرعة :

$$v_2 = \frac{h'}{t} = \frac{\pi R^4}{8A\eta} \rho g = 1.61 \ cm/hr \times \frac{0.4}{0.7} = 0.92 \ cm/hr$$

* * *

2.7 قانون ستوك Stoke`s Law

عند تحرك جسم رأسياً داخل سائل لزج فإن القوى المؤثرة عليه هي وزنه وله اتجاه حركة الجسم ، ورد فعل السائل أو ما قد يعرف بقوى الطفو وكذلك القوى المعتمدة على لزوجة السائل وهاتان القوتان لهما اتجاه عكس اتجاه القوة الأُولى ، بعد مرور بعض الوقت على حركة الجسم تصبح سرعته ثابتة وهنا تكون محصلة القوى الثلاث تساوي الصفر. ولمعرفة هذه السرعة نفرض أن الجسم كروي ووزنه $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ حيث r نصف قطر الكرة و ρ كثافة مادتها كذلك فإن وزن السائل المزاح هو $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g$ حيث ρ_1 هي كثافة السائل . أما القوة المعتمدة على اللزوجة فمن الواضح أنها تعتمد على اللزوجة η وعلى سرعة الكرة v وكذلك على نصف قطر الكرة وقد عُرِّفت هذه القوى على الصورة

$$F_v = 6\pi\eta r v \tag{2.31}$$

مما تقدم نجد أن:

$$6\pi\eta r v_f + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

ومنها نجد أن:

$$v_f = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_1) \tag{2.32}$$

حيث v_f هي السرعة النهائية .

وهذه المعادلة مفيدة لحساب اللزوجة للسوائل في حال معرفة مادة الكرة ونصف قطرها وسرعتها النهائية .

مثال 2.8

قطرة زيت تحمل شحنة قدرها $100\,e$ ، حيث e هي شحنة الإلكترون ، ونصف قطرها $10\mu m$. احسب سرعتها النهائية إذا سقطت بين لوحين أفقيين فرق الجهد بينهما $1500.0V$ والمسافة بينهما $2.0cm$. علماً أن كثافتي الزيت والهواء على التوالي هما $800.0kg/m^3$ و $1.29kg/m^3$ ولزوجة الهواء $1.8\times10^{-5}\,N.s/m^2$.

الحل :

حيث إن القطرة تحمل شحنة سالبة فإنه يلزم أن يكون اللوح العلوي موجباً وعليه فإن لدينا أربع قوى تؤثر على القطرة هي وزنها إلى أسفل أما القوى الأخرى وهي الكهربية ولها القيمة $F_e = q\,e\,V/d$ وممانعة الهواء ولها القيمة $\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1$ وقوة اللزوجة وبجمع القوى فإن:

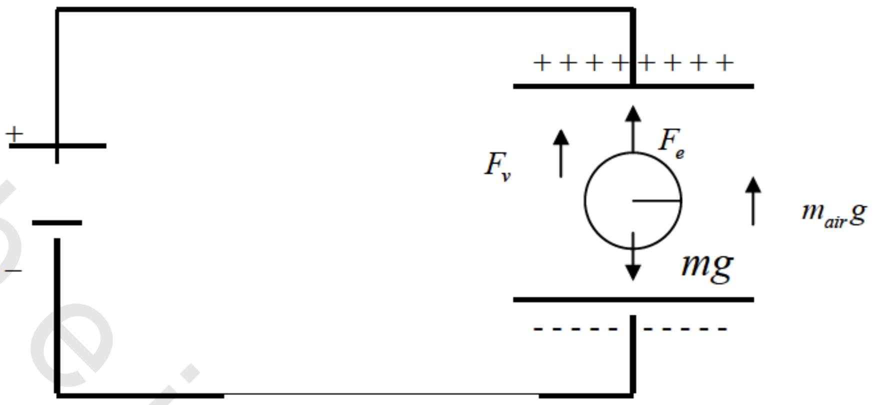
$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g + 6\pi\eta r v + \frac{qeV}{d}$$

ومنها فإن:

$$v_f = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho-\rho_1) - qeV/d}{6\pi\,\eta\, r}$$

$$v_f = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi(10\times10^{-6})^3\times9.8(800-1.29)-100\times1.6\times\times10^{-19}\times1500'0.02}{6\pi\times1.8\times10^{-5}\times10\times10^{-6}}\right) m/s$$

$$= \frac{3.2787\times10^{-11} - 1.2\times10^{-12}}{3.393\times10^{-9}} = 9.31\times10^{-3}\ m/s$$



شكل(2.12)

مثال 2.9

كرتان نصف قطر الأولى r ونصف قطر الثانية $2r$ ومن مادة واحدة كثافتها $8.0\ g/cm^3$ غُمرتا في وعاء به ماء لتصل الأُولى القاع في زمن قدره ثانية واحدة . احسب سرعتي الكرتين النهائيتين ونصف قطريهما ، علماً بأن عمق الماء $1.5m$.

الحل :

لدينا من المعادلة الأُولى السرعتان للكرتين

$$v_1 = \frac{2r^2 g}{9\eta}(\rho - \rho_1)$$

$$v_2 = \frac{8r^2 g}{9\eta}(\rho - \rho_1)$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad v_2 = 4v_1$$

أي أن سرعة الكرة الكبرى أربعة أضعاف سرعة الكرة الصغرى ومن معادلة الحركة $x = vt$ نجد أن:

$v_1 = 1.5 m/s$ و $v_2 = 6.0\ m/s$

وبالتعويض عن السرعة في إحدى المعادلتين نجد أن:

$$9.0 \times 1.5\eta = 2r^2 \times 9.8 m/s^2 \times 7 \times 10^3 kg/m^3$$

وبأخذ $\eta = 10^{-3}\ N.s/m^2$ عند درجة حرارة $20.0^0 C$ فإن:

$r_1 = 3.14 \times 10^{-4} m$ ويمثل نصف قطر الكرة الأُولى ومنه يكون $r_2 = 6.27 \times 10^{-4} m$ ويمثل نصف قطر الكرة الثانية.

* * *

2.8 الاضطراب في السوائل المتحركة وعدد رينولدز

Turbulent in Fluids and Reynold's Number

إذا زادت سرعة سائل متحرك خطياً عن حد معين يسمى السرعة الحرجة للسائل فإنه تنشأ مركبة عمودية لحركة السائل ، وتسبب هذه المركبة في حركة دوامية في السائل تمتص جزءاً من طاقة حركته . وقد وجد تجريبياً أن السرعة الحرجة v_c تعتمد على كل من لزوجة السائل η وكثافته ρ وكذلك على قطر الأنبوب D ، ولتحديد شكل العلاقة فإنا نكتبها بالصيغة :

$$v_c = N_R\, \eta^{\gamma}\, \rho^{\beta}\, D^{\alpha}$$

حيث N_R ثابت و α , β , γ ثوابت نحددها من معادلة التناسب البعدية حيث:

$$m.s^{-1} = \left(kg.m^{-1}.s^{-1}\right)^{\gamma}\left(kg.m^{-3}\right)^{\beta}(m)^{\alpha}$$

إذن

$$1.0 = kg^{\gamma+\beta}, \quad m = m^{-\gamma-3\beta+\alpha}, s^{-1} = s^{-\gamma}$$

أي أن:

$$\gamma + \beta = 0 \qquad \text{و} \qquad \gamma = 1$$

و

$$1 = -\gamma - 3\beta + \alpha$$

ومنها نجد أن:

$$\gamma = 1 \quad , \quad \beta = -1 \quad , \quad \alpha = -1$$

أي أن:

$$v_c = \frac{N_R\, \eta}{\rho\, D} \qquad (2.34)$$

ويسمى الثابت N_R عدد رينولد نسبة إلى Reynold .

وقد أكدت مجموعة من التجارب أنه إذا كانت قيمة N_R أقل من 2000.0 فإن السائل يكون انسيابياً Laminar وتكاد تنعدم المركبة العمودية لحركة السائل أما إذا زاد هذا العدد عن 3000.0 فإن السائل يكون مضطربا Turbulent . أما منطقة الانتقال وهي بين 2000 و 3000 فإن السائل يكون غير مستقر ويمكن أن ينتقل من حالة الانسياب إلى حالة الاضطراب أو العكس .

مثال 2.10

يتحرك سائل داخل أنبوب. إذا كانت كثافته $880.0kg/cm^3$ ولزوجته $0.3P$ وسرعته $200.0cm/s$ ونصف قطر الأنبوب $1.0cm$ فعين نوع حركة السائل.

الحل:

بالتعويض في المعادلة $N_R = \dfrac{v_c \rho D}{\eta}$ فإن:

$$N_R = \frac{(200cm/s)\times 0.88g/cm^3 \times 2.0cm}{0.3P} = 1173.3$$

وهذا يعني انسياب حركته Laminar

مثال 2.11

عين السرعة الحرجة للماء إذا تحرك في أنبوب قطره $1.0cm$ وذلك عند درجة حرارة $20.0^\circ C$.

الحل :

لدينا $N_R = 2000.0$ و $\rho = 1000.0kg/m^3$ و $\eta = 0.1\,N.s/m^2$

وحيث إن :

$$\frac{\rho\, v_c\, D}{\eta} < 2000.0$$

إذن

$$v_c \le \frac{2000.0 \times 0.001\, N.s.m^{-2}}{10.0^3\ kg/m^3 .10.0^{-2} m} \quad m/s$$

$$= 0.2\ m/s = 20\ cm/s$$

أما إذا سار الماء وعند نفس درجة الحرارة بسرعة $30.0 cm/s$ فإن الحركة تكون مضطربة.

مثال 2.12

إذا سار الهواء بسرعة $30.0\ cm/s$ وفي نفس الأنبوب في المثال أعلاه وتحت نفس درجة الحرارة ، فاحسب ثابت رينولد.

الحل :

$$N_R = \frac{\left(1.29\ kg/m^3\right)\left(0.3 m/s\right)\left(0.01 m\right)}{1.81 \times 10^{-5} N.s.m^{-2}} = 215$$

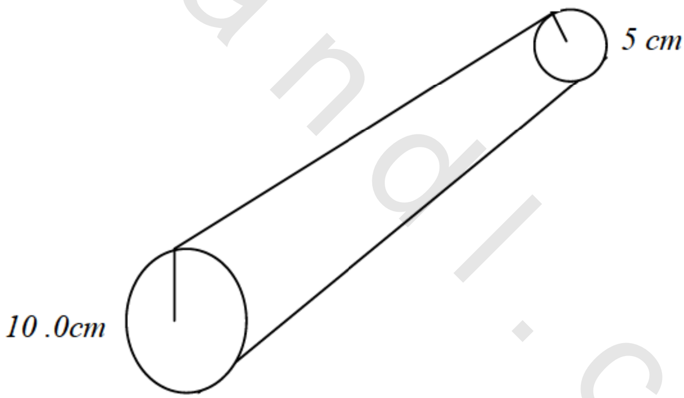
وعليه فإن الهواء ينساب دون اضطراب حتى تصل N_R للهواء إلى 30000 فإنه يلزم أن تصل سرعة الهواء إلى حوالي $400.0 cm/s$.

* * *

مســـائل

1- عند نقطتين من أنبوب أفقي كانت أنصاف الأقطار له $2.0\ cm$ و $3.0cm$ ، وكان فرق الضغط لماء يمر في الأنبوب بين هاتين النقطتين هو $500.0\ Pa$. احسب كمية الماء المتدفق عبر الأنبوب في الثانية الواحدة.

2- ينساب الماء داخل أنبوب مائل كما بالشكل بمعدل $10.0m^3/min$. عند المقطع الذي نصف قطره $10.0cm$ كان الضغط $1.2\times10^6 Pa$. احسب الضغط عند المقطع الذي نصف قطره $5.0cm$ ،علماً بأنه أعلى من المقطع الأول بمقدار $40.0cm$.



3- يندفع الماء من أعلى إلى خزان كبير بمعدل $0.4\ m^3/hr$ ولكنه يخرج من فتحة بقاع الخزان مساحتها $2.0cm^2$. احسب ارتفاع الماء في الخزان وذلك في حالة تساوي معدلي التدفق من وإلي الخزان.

4- يوجد ثقب دائري قطره $2.0cm$ ويبعد $10.0cm$ عن سطح الماء في أنبوب مفتوح وواقف .

أ- أحسب سرعة التدفق من الفتحة.

ب- حجم الماء المتدفق في الثانية.

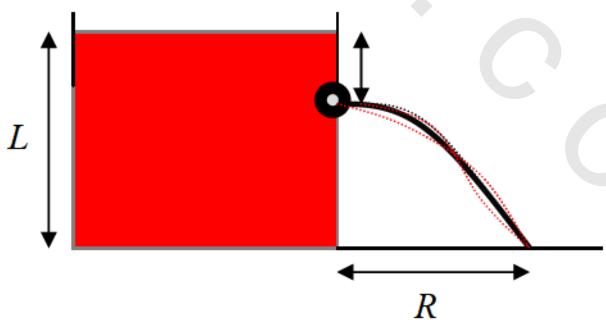
5- خزان ماء يقع على أرض مستوية وفتح به فتحتان يقعان على خط رأسي واحد. إحداهما تبعد $20.0cm$ و الأخرى $30.0\ cm$ عن الأرض. ما مقدار ارتفاع الماء في الخزان عندما يصل الماء الخارج من الفتحتين إلى نقطة واحدة.

6- خزان ذو مساحة كبيرة مليء بالماء وبارتفاع $0.5m$ ، يوجد في قاعه فتحة مساحتها $5cm^2$ تسمح بخروج الماء بانسياب .

أ- احسب معدل تدفق الماء من الفتحة بوحدة m^3/s.

ب-على أي بعد من قاع الخزان تكون مساحة مقطع الماء المتدفق تساوي نصف مساحة الفتحة.

7- خزان كبير ومفتوح ارتفاع مائه L .فتح ثقب على بعد h من سطح ماء الخزان . احسب المسافة R بين قاع الخزان ونقطة وصول الماء على الأرض.



8- عند نقطة في أنبوب أفقي كانت سرعة الماء $2.0m/s$ وكان الضغط يزيد عن الضغط الجوي بمقدار $2.0\times10^{4}Pa$. احسب الضغط على نفس الخط عندما يضيق الأنبوب لتصبح مساحته تعادل ربع مساحته عند النقطة الأولى.

9- ما الضغط داخل خط الماء العام الذي يجعل الماء يرتفع رأسياً $15.0\ m$ عند فتح وصل خرطوم طوارئ به.

10- يتدفق الماء في أنبوب أفقي وعند نقطة أولى كانت مساحة المقطع $5.0cm^{2}$ وعند نقطة أُخرى كانت المساحة $15.0\ cm^{2}$ وكان فرق الضغط بين النقطتين $1.0\times10^{3}Pa$. احسب عدد الأمتار المكعبة الخارجة من الأنبوب في ساعة.

11- عند نقطة في أنبوب أفقي كان الضغط المقاس $(P\text{-}Pa)$ هو $0.4\times10^{5}\ Pa$ وعند نقطة أخرى كان الضغط المقاس $0.2\times10^{5}\ Pa$. إذا كانت المساحتان عند النقطتين على التوالي هما $15.0\ cm^{2}$ و $7.5\ cm^{2}$. احسب عدد الأمتار المكعبة المارة من أحد المقطعين في الدقيقة.

12- يتدفق الماء في أنبوب أفقي بمعدل $0.4m^{3}/hr$. عند نقطة من الأنبوب كان الضغط المطلق $2.0\times10^{5}\ Pa$ وكانت المساحة $10.0cm^{2}$. احسب مساحة المقطع عند نقطة أخرى يكون عندها الضغط المطلق $1.5\times10^{5}\ Pa$.

13- يسير الماء في أنبوب نصف قطره $2.0cm$ وكانت سرعته عند محور الأنبوب $8.0\ cm/s$. احسب فرق الضغط بين نقطتين في الأنبوب المسافة بينهما $1.5\ m$ علماً بأن درجة الحرارة $20.0^{0}C$.

14- سقطت كرة من النحاس نصف قطرها $1.0\ cm$ في الماء وكانت درجة الحرارة 20.0^0C .احسب سرعتها النهائية.

15- عين سرعة كرة نصف قطرها $2.0mm$ عند تحركها رأسياً داخل جليسرين في اللحظة التي لها تسارع يساوي نصف تسارع الجسم الحر.
عين سرعتها النهائية إذا كانت كثافة الكرة $8.5g/cm2$ و كثافة الجليسرين $.1.32g/cm$

16- فقاعة نصف قطر تكورها $1.0mm$ و ترتفع في سائل لزوجته $170.0\ cp$ وكثافته $0.95\ g/cm3$

أ- احسب سرعتها النهائية فيه .ب- احسب سرعة نفس الفقاعة إذا تحركت في الماء.

17- يتحرك الماء بسرعة $0.5m/s$ داخل أنبوب نصف قطره $2.0mm$ وكانت درجة الحرارة $20.00C$.

أ- احسب عدد رينولد. ب- ما طبيعة التدفق.

18- عند درجة حرارة 20.0^0C كان الماء يندفع إلى الخارج من أنبوب نصف قطره $8.0\ cm$ وبسرعة $0.25\ m/s$.

أ- ما طبيعة التدفق. ب- احسب معدل تدفقه من الأنبوب.

* * *