obeikandl.com

البـاب الأول

الموائع السـاكنة

Fluid Static

obeikandl.com

مقدمـــة

لا تقل دراسة الموائع أهمية عن دراسة المواد الصلبة خاصة إذا عرفنا أن حالة المائع تشمل المواد السائلة والمواد الغازية . وبنظرة عاجلة نلاحظ أن الموائع هي مقومات أساسية لحياة الإنسان وكافة الكائنات الأخرى ، وعليه فإن تعاملنا معها وحاجتنا الدائمة لها تقضي أن ندرس خصائصها العامة من كثافة ولزوجة ودرجة غليان ودرجة تجمد ، ثم نذهب لدراسة أدق بدراسة تركيبها الذري وتركيبها البلوري ووزنها الجزيئي ونوعها من قلوية وحمضية وتفاعلاتها الكيميائية إلى غير ذلك ، كل ذلك لتتم الاستفادة منها بأفضل ما يكون.

وفي دراستنا للموائع في البابين الأول والثاني سوف نقتصر على دراسة الخصائص العامة لها من كثافة وضغط داخلها وطفو ولزوجة وتوتر سطحي . ثم ندرس حركة السوائل والتي ندرس فيها ما يسمى بالمائع المثالي وهو المائع غير القابل للانضغاط ، وهنا سوف تقتصر الدراسة على السوائل ، ولذا نهمل قوى الاحتكاك الداخلية وكذلك نهمل اللزوجة رغم أنه في حركة السوائل داخل الأنابيب نرى اختلاف السرعات باختلاف محور الحركة وذلك بسبب قوى الاحتكاك واللزوجة . كذلك سندرس ما يدعى بخط التدفق الذي نجد حولها العلاقة بين سرعة السائل ومساحة مقطع المسار وكذلك معدل التدفق. وعموماً سنجد أن السرعة تتغير مقداراً واتجاهاً من نقطة إلى أُخرى على خط التدفق ، وسوف ندرس علاقة سرعات السوائل عند نقاط محددة مع ارتفاع هذة النقاط وذلك باستخدام قانون حفظ الطاقة وقانون تساوي معدل التدفق عند هذه النقاط . ثم نختم دراستنا للبابيـن بدراسة لزوجة السوائل والاستفادة منها في معرفة حركة الأجسام الصلبة داخلها ودراسة نوع حركة السائل من اضطراب و خلافه .

1.1 الكثافة Density

تعرف الكثافة Density لمادة متجانسة بأنها كتلة وحدة الحجم ، ووحدتها الدولية (mks) هي كيلو جرام لكل متر مكعب kg/m^3 أو جرام لكل سنتيمتر مكعب g/cm^3 وذلك بالوحدات المشتقة (cgs) ، وسوف نمثل الكثافة بالحرف الإغريقي ρ

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (1.1)$$

ويعطي الجدول (1.1) كثافة بعض المواد وذلك عند درجة حرارة الغرفة وللقيام بالتحويل فإن $1.0 g.cm^{-3} = 1000.0 kg.m^{-3}$

جدول (1.1) كثافة بعض المواد شائعة الاستعمال

المادة	الكثافة g/cm^3	المادة	الكثافة g/cm^3
الهيدروجين	8.99×10^{-5}	الألومنيوم	2.7
الهيليوم	1.79×10^{-4}	الحديد	7.86
الهواء	1.22×10^{-3}	النحاس	8.92
الأكسجين	1.43×10^{-3}	الفضة	10.5
الكحول الإيثيلي	0.806	الرصاص	11.3
البنزين	0.879	الزئبق	13.6
الثلج	0.917	البلاتين	21.4
الماء	1.00		

obeikandl.com

وهذه القيم تتغير بتغير درجة الحرارة إذ أن الحجم دالة في درجة الحرارة ونجد من المناسب أن نورد ما يعرف بالجذب النوعي " Specific gravity" للمادة والذي يعرف بأنه النسبة بين كثافة المادة إلى كثافة الماء، ومن التعريف نلاحظ أنها كمية نسبية ولا وحدة لها. وهذا تعريف ضعيف إذ أنه لاعلاقة له بالجاذبية ولهذا يستخدم عوضاً عنه عبارة "الكثافة النسبية Relative density".

مثال 1.1(a)

كرة نصف قطرها $2.0\ cm$ وكتلتها $300.0g$. عين الكثافة النسبية لمادتها.

الحل :

حجم الكرة وكثافتها

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 33.5\ cm^3 \quad , \quad \rho_{sph} = \frac{300.0\ g}{33.5\ cm^3} = 8.95\ g/cm^3$$

لكن $\rho_w = 1.0\ g/cm^3$

إذن

$$R.d = \frac{\rho_{sph}}{\rho_w} = \frac{8.95\ g/cm^3}{1\ g/cm^3} = 8.95$$

مثال 1.1 (b)

قارن بين كتلة وحدة الحجم لكل من الهواء والماء وكذلك بين كل من الماء والألومونيوم.

الحل :

باستخدام العلاقة $m = \rho V$ وقيم الكثافة من الجدول نجد أن

$$m_{Al} = 2.7x10^6 g \quad , \quad M_w = 10^6 g \quad , \quad m_{air} = 1.22g$$

ومنها فإن

$$\frac{m_{Ae}}{m_w} = 2.2 \quad , \quad \frac{m_w}{m_{air}} = 8.2x10^5$$

obeikandl.com

1.2 الضغط في السوائل Pressure in fluids

لاشك أن الضغط الجوي يختلف من مكان إلى آخر إذ أنه يزداد بالاتجاه إلى مستوى سطح البحر ويقل بالاتجاه نحو المرتفعات كذلك يزداد الضغط في المحيطات والبحار بزيادة العمق وعليه فإننا نعرف الضغط عند أي نقطة بأنه

"النسبة بين القيمة العددية للقوة العمودية إلى المساحة الواقعة تحت تأثير هذه القوة " أي أن

$$P = \frac{F}{A} \qquad (1.2)$$

وحيث إن الضغط داخل السائل يختلف من نقطة إلى أخرى، فإنه يمكن استخدام ΔF وΔA لتعبر عن القوة والمساحة عند النقطة، ونعيد كتابة المعادلة السابقة بالصيغة :

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \qquad (1.3)$$

وحيث إن الضغط هو قوة لكل وحدة مساحة فإن وحدته هي N/m^2 ويُعبر عنها بالباسكال (Pa) Pascal أي أن $1\ Pa = 1\ N/m^2$

ولحساب الضغط داخل سائل ساكن نأخذ شريحة مساحة قاعدتها A ووزنها dw وسمكها dy وتبعد عن قاع الوعاء مسافة y ، انظر الشكل (1.1) وتؤثر عليها القوة $(P+dP)A$ إلى أسفل والقوة PA إلى أعلى ووزنها $dw = mg = \rho\, dVg = \rho gAdy$ إلى أسفل وحيث إن الشريحة في حالة اتزان فإن

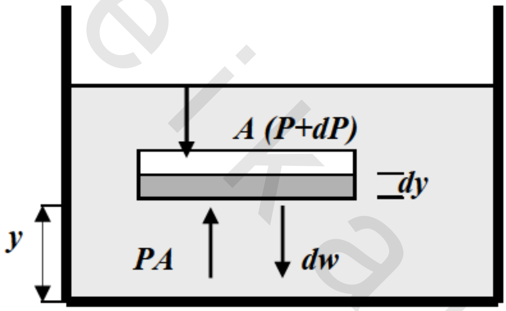
$$\sum F_y = PA - (P + dP)\, A - \rho gAdy = 0$$

إذن

$$dP + \rho g dy = 0$$

أو

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \qquad (1.4)$$



شكل (1.1)

ومن هذه النتيجة يتضح أنه بزيادة الارتفاع الموجب dy يتناقص الضغط dP (سالب) . إذا كان P_1 و P_2 هما الضغط عند الارتفاعين y_1 و y_2 على التوالي فإن

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \qquad (1.5)$$

أو

$$P_1 = P_2 + \rho g(y_2 - y_1) \qquad (1.6)$$

والأن نفرض أن الوعاء مفتوح وأن ارتفاع السائل به y_2 وارتفاع النقطة عن القاعدة هو y_1 وأن $h = y_2 - y_1$ ومنه ينتج أن P_2 تمثل الضغط الجوي [انظر الشكل (1.2)] ومنه نجد أن:

$$P = P_0 + \rho g h \qquad (1.7)$$

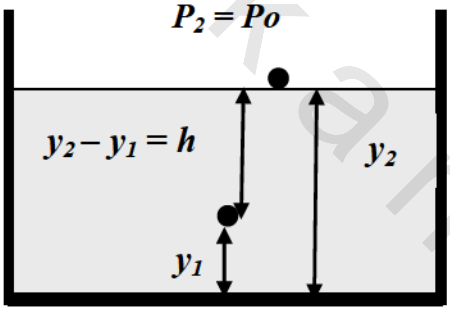
حيث:

$$P_0 = 1.013 \times 10^5 \ Pa$$

وذلك عند سطح البحر وهو مايعادل ضغط جوي واحد One atmospheric.

obeikandi.com

بتعبير آخر نقول إن الضغط المطلق (Absolute pressure) P على عمق h من سطح سائل مفتوح على الفضاء يزيد عن الضغط الجوي بمقدار ρgh . ومن المعادلة نلاحظ أن الضغط داخل سائل لا يعتمد على شكل الوعاء وأنه متساوٍ عند النقاط ذات الارتفاع الواحد، وحيث إن الضغط داخل السائل يعتمد فقط على العمق فإن أي زيادة في الضغط عند سطح السائل تنتقل إلى كل نقطة داخله. هذه الحقيقة قام بإيضاحها الفرنسي باسكال Pascal (1623–1662) في صيغة قانون نصه" أي زيادة في الضغط على سائل محصور تنتقل غير منقوصة إلى كل نقطة في السائل وإلى الوعاء المستخدم".



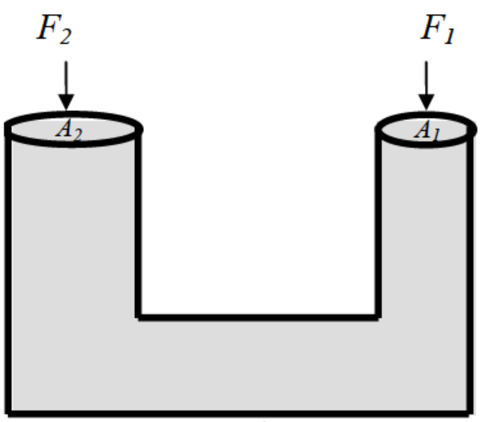
شكل (1.2)

هذا القانون له استخدامات كثيرة خاصةً في الروافع المستخدم بها سوائل. فإذا نظرنا إلى الشكل (1.3) وفيه أثرنا بقوة F_1 على مساحة صغيرة A_1 فينتقل الضغط إلى مساحة أكبر هي A_2 لنحصل على قوة أكبر من F_1 وبمقدار يعادل $\frac{A_2}{A_1}$ وذلك لأن:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

أي أن:

$$F_2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) F_1$$



شكل (1.3)

1.3 مقاييس الضغط Pressure gauges

ما ذكرناه في الفصل السابق يمكن تطبيقه على بعض أجهزة قياس الضغط للغازات، وأبسطها هو المانوميتر Manometer الموضح في الشكل (1.4a) وهو أنبوب على شكل الحرف U يحوي سائلاً، أحد طرفيه مفتوح على الضغط الجوي والآخر موصول بالغاز المراد معرفة ضغطه. وحيث إن الضغط في أسفل نقطة من السائل مشترك بين شقي الأنبوب فإن:

$$P + \rho g y_1 = P_0 + \rho g y_2 \tag{1.8}$$

منها يكون:

$$P - P_0 = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \tag{1.9}$$

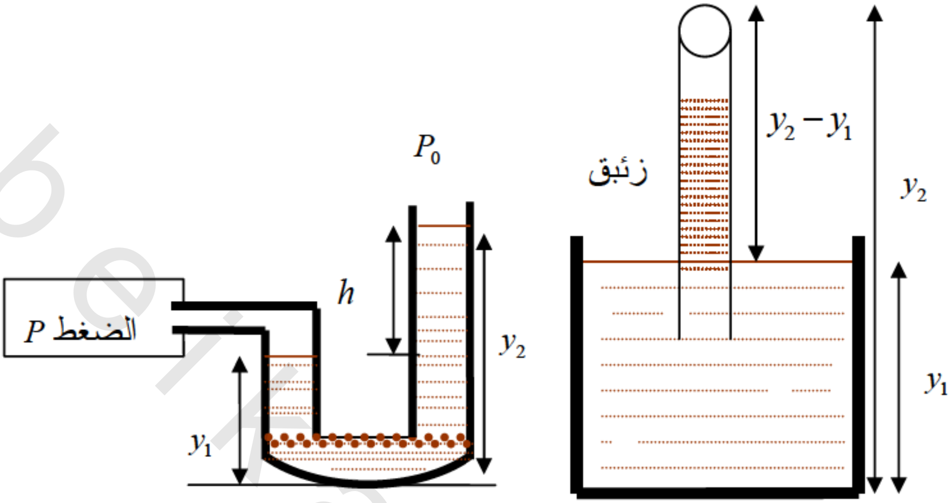
ويسمى الضغط P بالضغط المطلق absolute pressure بينما يدعى الفرق $P - P_0$ بالضغط المقاس gauge pressure.

أما المقياس الثاني فهو البارومتر barometer وهو أنبوب زجاجي طويل مليء بالزئبق ونُكِس في وعاء به زئبق شكل (1.4b) والضغط على سطحه هو الضغط الجوي، أما الفراغ في أعلى الأنبوب الزجاجي فإنه مفرغ إلا من بخار الزئبق الذي يمكن إهمال ضغطه وعليه فإن $P_2 = 0$ ومنه نجد أن:

$$P_0 = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \tag{1.10}$$

ذكرنا سلفاً أن وحدة الضغط هي الباسكال ويستحسن أن نشير إلى وحدات أخرى أقل استعمالاً وأقل شهرة ومنها one bar ويساوي $10^5\ Pa$ أي الضغط الناتج عن عمود من الزئبق ارتفاعه $75.0cm$ وكذلك الوحدة الأخرى وهي Torr نسبة إلى (Torricelli) وهي تعتمد على الكثافة والتي تتغير مع درجة الحرارة وكذلك مع الجاذبية الأرضية المعتمدة على موقع القياس أما ارتفاع عموده فهو واحد ملم ولهذه

الأسباب لم يعد يُستعمل.



شكل (1.4a) المانوميتر

شكل (1.4b) الباروميتر

obeikandi.com

مثال 1.2

في ورشة لإصلاح السيارات يوجد رافعة سُلط ضغط على المكبس الأصغر والذي نصف قطره $5.0cm$ والذي انتقل إلى المكبس الأكبر والذي نصف قطره $20.0cm$.

أ–احسب القوة المؤثرة على المكبس الأصغر لنتمكن من رفع سيارة وزنها $2.0\times10^4\ N$.

ب– احسب الضغط اللازم لإنتاج هذه القوة.

الحل :

حيث إن الضغط ينتقل كاملاً إلى كل نقطة داخل السائل فإنه يمكن استعمال المعادلة :

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2$$

$$F_1 = \frac{\pi(5.0\times10^{-2}m)^2}{\pi(20.0\times10^{-2}m)^2}(2.0\ \times10^4\mathrm{N}) = 1250.0N$$

وهي قيمة صغيرة مقارنة بوزن السيارة.

أما الضغط المسبب لهذه القوة فهو:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = 1.59\times10^5\ Pa$$

مثال 1.3

احسب الضغط المطلق على عمق $1500.0\ m$ من سطح المحيط.

الحل :

$$P = P_0 + \rho gh$$

$$= 1.013\times10^5\ Pa + \left(1.0\times10^3 kg/m^3\right)\left(9.8m/s^2\right)\left(1500.0m\right) = 1.48\times10^7\ Pa$$

وهذا أكبر من الضغط الجوي بحوالي 146 مرة.

مثال 1.4

احسب الضغط الجوي في يوم يرتفع فيه الزئبق $76.0cm$ في أنبوبة البارومیتر.

الحل :

من المعلوم أن الكثافة ρ تتغير بتغير درجة الحرارة أما عجلة الجاذبية g فإنها تتغير بتغير المكان ، إلا إنها تفرض ثابتة في هذا المثال

$$P = \rho gh$$

$$P = (13.6\times10^3 kg/m^3)(9.8\frac{m}{s^2})(0.76m)$$

$$= 1.013\times10^5 Pa = 1.0\ atm$$

obeikandl.com

مثال 1.5

أسطوانة بها أكسجين مضغوط كثافته $1.25 kg/m^3$ ودرجة حرارته $49.0^\circ C$ وصلت الأسطوانة بمقياس المانوميتر. إذا اعتبرنا الأكسجين غازا مثاليا فاحسب ارتفاع الزئبق داخل عمود المانوميتر .

الحل:

للغاز المثالي يمكن حساب الضغط داخل الأسطوانة من القانون العام للغازات

$PV = nRT$ وحيث إن $V = \dfrac{m}{\rho}$ و $n = \dfrac{m}{M}$ والتي لها القيم

$T = (273.0 + 49)K = 322.0K$ و $R = 8.314 J/mole.K$ و $M = 32.0 g/mole$

فإن

$$P\frac{m}{\rho_0} = \frac{m}{M}RT$$

ومنها فإن:

$$P = \frac{\rho_0}{M}RT = \left[\frac{1.25}{32\times10^{-3}}\times8.314\times322\right]Pa = 1.046\times10^5 Pa$$

وحيث إن المانوميتر مفتوح فإن $P - P_\circ = \rho_{Hg} gh$

ومنها فإن:

$$h = \frac{P - Po}{\rho_{Hg} g} = \left(\frac{1.046\times10^5 - 1.013\times10^5}{13.6\times10^3\times9.8}\right)m = 2.476 cm$$

obeikandl.com

مثال 1.6

احسب محصلة القوة المؤثرة على سد تجمع خلفه مياه بارتفاع H علماً أن عرض السد هو L كما يظهر بالشكل (1.5) .

الحل :

حيث إن الضغط الجوي يؤثر على وجهي محيط منطقة السد فإنه يمكن إهماله ، وعليه فإن الضغط على عمق h من سطح الماء هو :

$$P = \rho g h = \rho g (H - y)$$

القوة الواقعة على شريحة مساحتها $dA = Ldy$ هي :

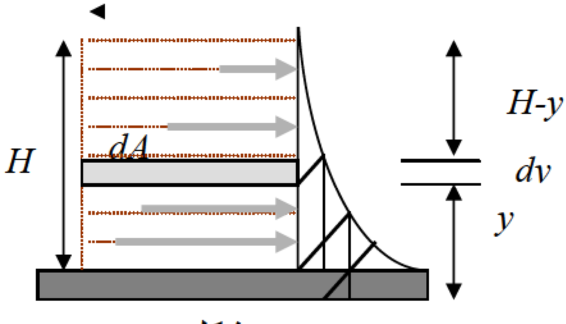
$$dF = PdA = \rho g (H - y) L dy$$

القوة الكلية المؤثرة على وجه السد هي :

$$F = \int dF = \int_0^H \rho g (H - y) L dy = \frac{1}{2} \rho g L H^2$$

خذ $H=30.0m$ و $L=100.0m$ نجد أن $F = 4.41 \times 10^8 N$

وهي قوة كبيرة جداً ولهذا فإنه بزيادة الضغط مع زيادة العمق يجعل من اللازم تصميم السدود بحيث يزيد السمك مع زيادة العمق.



شكل(1.5)

obeikandi.com

1.4 قاعدة أرشميدس Archimedes Principle

عند غمر جسم كلياً أو جزئياً في سائل فإن السائل يؤثر عليه بقوة إلى أعلى تعادل وزن السائل المزاح.

هذه الحالة نعايشها جميعاً، فنلاحظ أنه يسهل رفع الأجسام داخل السوائل بخلاف رفعها خارجها فنجد أنه يسهل حمل متدرب سباحة داخل الماء بينما يصعب ذلك بعد خروجه.

ولدينا حالتان:

الحالة الأولى: أن يُغمر الجسم جزئياً وفي هذه الحالة تكون قوة الطفو أكبر من وزن الجسم، فإذا فرضنا أن كثافة السائل هي ρ_L وكثافة الجسم الطافي هي ρ_S وحجمه V_s وحجم السائل المزاح V_L فإن وزن الجسم يساوي وزن السائل المزاح، أي أن:

$$W = m_S g = m_L g$$

$$m_S = \rho_S V_S = \rho_L V_L$$

أي أن:

$$\frac{\rho_S}{\rho_L} = \frac{V_L}{V_S} \tag{1.11}$$

الحالة الثانية: أن يُغمر الجسم كلياً

في هذه الحالة، حجم السائل المزاح هو حجم الجسم المغمور، وعليه فإن:

$$\Delta F = F - W = (\rho_L - \rho_S) V_S g \tag{1.12}$$

حيث F هي قوة الطفو إلى أعلى ومن هذه المعادلة نلاحظ ثلاث حالات:

أولاً– إذا كانت كثافة السائل أكبر من كثافة الجسم ($\rho_L > \rho_S$) فإن قوة الدفع

obeikandl.com

إلى أعلى أكبر من وزن الجسم وهنا فإن الجسم يطفو وتطبق عليه في هذه الحالة المعادلة (1.11) .

ثانياً – إذا تساوت الكثافتان فإن الجسم يكون في حالة اتزان داخل السائل ومحصلة القوى المؤثرة عليه تساوي الصفر.

ثالثاً – إذا كانت كثافة الجسم أكبر من كثافة السائل فإن الجسم يتجه إلى قاع الوعاء.

مثال 1.7

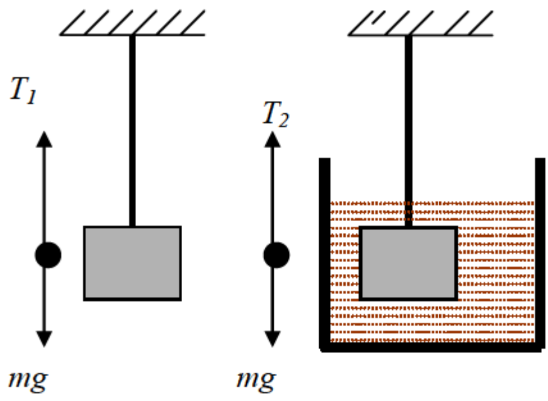
جسم كتلته $2.0kg$ وكثافته $3.0\times10^3 kg/m^3$ علق بخيط. احسب وزنه داخل وخارج الماء شكل (1.6).

الحل :

وزن الجسم خارج الماء

$$W = mg = (2.0kg)(9.8m/s^2) = 19.6N$$

من أجل حساب قوة الطفو فإنا نحسب حجم الجسم والذي يعادله حجم السائل المزاح



شكل (1.6)

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{2.0kg}{3.0\times10^3 kg/m^3} = 6.66\times10^{-4} m^3$$

وحيث إن قوة الطفو تعادل وزن الماء المزاح فإن:

$$F = m_w g = V\rho_w g = (6.66\times10^{-4} m^3)(1.0\times10^3 kg/m^3)(9.8m/s^2) = 6.53\,N$$

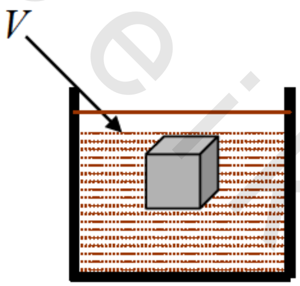
obeikandl.com

إذن وزن الجسم داخل الماء هو:

$$\Delta F = W - F = 19.6N - 6.53N = 13.07N$$

مثال 1.8

طفا مكعب ثلجي على الماء كما بالشكل (1.7). احسب نسبة الثلج الذي يطفو على السطح علما بأن كثافة الثلج $0.917\ kg/m^3$



شكل (1.7)

الحل :

من الحالة الأولى الموضحة سابقاً يتضح أن:

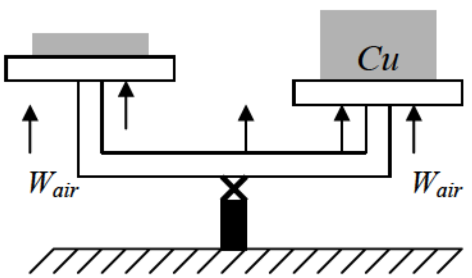
$$\frac{\text{حجم الماء المزاح}}{\text{حجم المكعب}} = \frac{\text{حجم الجزء المغمور}}{\text{حجم المكعب}}$$

$$= \frac{\text{كثافة الثلج}}{\text{كثافة الماء}} = \frac{917.0}{1000.0} = 0.917$$

إذن الجزء الطافي يمثل الباقي وهو 0.083 أو ٪ 8.3 من حجم الثلج.

مثال 1.9

أُستخدمت قطعة من النحاس كتلتها $200.0g$ على إحدى كفتي ميزان لمعادلة قطعة من الألومنيوم على الكفة الأخرى . ما الخطأ في حساب وزن الألومنيوم إذا أُهملت قوة الطفو (قوة إلى أعلى) الناتجة عن الهواء ؟ علماً أن $\rho_{Cu} = 8.9\ g/cm^3$ و $\rho_{Al} = 2.7\ g/cm^3$.



الحل :

حيث إن $V = \frac{m}{\rho}$

فإن:

$$V_{cu} = \frac{200.0\ g}{8.9\ g/cm^3} = 22.4\ cm^3$$

$$V_{al} = \frac{200.0\ g}{2.7\ g/cm^3} = 74.0\ cm^3$$

$$\Delta V = (74.0 - 22.4)\ cm^3 = 51.6\ cm^3$$

$$\therefore\quad \Delta W = \rho_{air}\ \Delta V\ g = (0.0013\ g/cm^3)(51.6\ cm^3)(980\ cm/s^2)$$

$$= 65.8\ dyne$$

وهي قوة صغيرة تقابل ضياع في كتلة الألومنيوم قدرها $0.07\ g$ يمكن إهمالها إلا في التجارب التي تتطلب دقة عالية .

مثال 1.10

قطعة ثلج سمكها $1.0m$ وكثافتها $900.0kg/m^3$ ومساحة وجهها A وضع عليها جسم كتلته $100.0kg$. احسب مقدار هذه المساحة علماً أن الثلج ينغمر بالكامل والجسم يبقى خارج الماء.

الحل :

حيث إن المجموعة متزنة فإن:

$$m_1 g + m_2 g = m_w g$$

وبالتعويض عن القيمة المعطاة فإن:

$$100.0kg + \rho_{ice} V = \rho_w V$$

$$(1000.0kg - 900.0kg)A/m^2 = 100.0kg$$

$$A = \frac{100.0}{100.0} m^2 = 1.0m^2$$

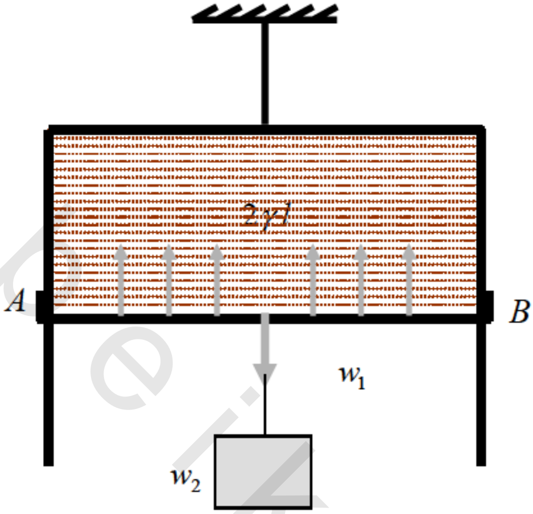
1.5 التوتر السطحي Surface Tension

من أجل فهم ظاهرة التوتر السطحي فإنه يلزم الإشارة إلى بعض الظواهر المشاهدة في الحياة اليومية ، ومنها خروج السوائل من أنبوبة طبية ضيقة على شكل نقاط وليس بشكل مستمر، إذا وضعت إبرة خياطة بعناية فائقة على سطح الماء فإنها تبقى على السطح رغم أن كثافة مادتها أكبر بكثير من كثافة الماء مع حدوث انخفاض حول الإبرة، عند غمر طرف أنبوبة زجاجية ضيقة ونظيفة في ماء نلاحظ ارتفاع الماء داخل الأنبوبة إلى مستوى أعلى من مستوى سطح الماء، أما إذا اسُتعمل الزئبق فإنه لا يصعد داخل الأنبوبة بل ينضغط إلى أسفل. هذه الظواهر وغيرها كثير مرتبطة بسطح التلامس بين السائل والمواد الأخرى وهذه الظواهر تشير إلى أن سطح السائل يقع تحت إجهاد دائم نتيجة لجذب الجزيئات القريبة من السطح له، ونسمي المنطقة القريبة من السطح والمؤثرة عليه بمنطقة مدى التجاذب وتسمى بالغشاء السطحي *Surface Film* فإذا تخيلنا خطاً وهمياً من سطح السائل طوله L فإن الجزيئات على أحد جوانب هذا الخط تؤثر على الجانب الآخر بقوة جذب قدرها F وعليه يتم تعريف التوتر السطحي بأنه **النسبة بين قوة الجذب والطول العمودي عليها** أي أن:

$$\gamma = \frac{F}{L} \tag{1.13}$$

أي أنه يقاس بوحدة N/m أو $dyne/cm$.

ولإيضاح ما سبق نجري التجربة الآتية. نحضر سلكاً على شكل حرف U كما بالشكل (1.8) ينزلق عليه سلك AB دون احتكاك. نغمر السلكين في محلول صابون ثم يُرفع ليتكون عليه غشاء رقيق من الصابون ثم يُعلق الإطار رأسيا مما يجعل قوى التوتر السطحي تجذب السطح الملامس للسلك AB والذي يرتفع مسافة قدرها dx هذه القوة قدرها $2\gamma L$ حيث L طول السلك AB وضاعفناه لوجود وجهين للغشاء ولحساب γ فإنا نضع جسم كتلته m يعادل وزنه قوة الجذب أي أن:



شكل (1.8)

$$mg = 2L\gamma$$

أي أن:

$$\gamma = \frac{mg}{2L}$$

m هي كتلة الجسم المعلق مضافاً إليه كتلة السلك AB ويمكن كذلك تعريف التوتر السطحي بدلالة الشغل المبذول. إذ أن:

$$dw = Fdx = 2\gamma Ldx$$

لكن $2Ldx$ يمثل الزيادة في مساحة الغشاء أي أن:

$$dw = \gamma \, \Delta A$$

ومن هنا يعرف التوتر السطحي **بأنه الشغل المبذول لزيادة مساحة السطح بمقدار الوحدة مع ثبات درجة الحرارة وتكون وحدته** (J/m^2).

مثال 1.11

احسب الشغل اللازم لزيادة نصف قطر قطرة من سائل بمقدار ΔR ، كذلك احسب الشغل اللازم لتكوين فقاعة.

الحل :

حيث إن القطرة كروية فإن مساحتها هي:

$$A = 4\pi R^2$$

فإذا زاد نصف القطر بمقدار $\Delta R \approx dR$ فإن الزيادة في مساحة القطرة هي:

$$dA = 8\pi R dR$$

ويكون الشغل المبذول لحصول هذه الزيادة هو:

$$dW = \gamma \, dA = 8\pi \, \gamma R dR$$

وعليه فإن الشغل اللازم بذله لتكوين قطرة نصف قطرها R هو:

$$W = \int_0^R 8\pi\gamma r dr = 4\pi\gamma R^2 = \gamma A$$

ولحساب الشغل المبذول لتكوين فقاعة نتبع الخطوات السابقة مع الضرب في اثنين لوجود وجهين للفقاعة أي أن:

$$W = \int_{R_1}^{R_2} 16\pi \, \gamma \, r dr = 8\pi \, \gamma \, (R_2^2 - R_1^2)$$

حيث R_1 و R_2 يمثلان نصف القطر الداخلي ونصف القطرالخارجي للفقاعة.

مثال 1.12

احسب الشغل اللازم لتفتيت قطرة من زئبق نصف قطرها $1.0mm$ إلى مليون قطرة متشابهة ولها نفس الحجم علماً بإن التوتر السطحي للزئبق هو $0.55N/m$.

الحل :

مساحة سطح القطرة الكبيرة

$$A_1 = 4\,\pi\, R_1^2$$
$$= 1.26 \times 10^{-5}\, m^2$$

حجم القطرة الكبيرة

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\, R_1^3 = \frac{4}{3}\pi (0.001)^3\, m^3$$

حجم القطرة الصغيرة

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{V_1}{n} = \frac{4}{3}\pi\,(\frac{10^{-9}}{10^6})\ m^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi \times 10^{-15}\ m^3$$

إذن :

$$R_2 = 10^{-5}\,m$$

الشغل اللازم لتكوين قطرة صغيرة

$$W_1 = 4\pi r^2 \gamma = 6.19 \times 10^{-10} J$$

الشغل اللازم لتكوين 10.0^6 قطرة

$$W = nW_1 = 6.19 \times 10^{-4} J$$

* * *

obeikandl.com

جدول (1.2) بعض القيم التجريبية للتوتر السطحي

السائل ملامساً للهواء	درجة الحرارة C^o	التوتر السطحي Dyne/cm
بنزين	20	28.9
الكحول الإيثيلي	20	22.3
الجليسرين	20	63.1
الزئبق	20	465
زيت الزيتون	20	32.0
محلول الصابون	20	25.0
الماء	0	75.6
الماء	20	72.8
الماء	60	66.2
الماء	100	58.9
الأكسجين	-193	15.7
النيون	-247	5.15
الهيليوم	-269	0.12

obeikandi.com

1.6 فرق الضغط بين وجهي سطح السائل والتوتر السطحي

لمعرفة العلاقة بين التوتر السطحي وفرق الضغط بين وجهي السائل نعرض رسماً يقرب من المستطيل على سطح السائل طوله وعرضه هما L_2 و L_1 ونصفا قطرا الانحناء لهما R_1 و R_2 كما بالشكل (1.9a) فإذا زاد الضغط داخل السائل بمقدار ΔP فإن سطح السائل سوف يتحرك مسافة مقدارها x ويصبح الطول L_1+dL_1 والعرض L_2+dL_2 ويصبح نصفا قطر التكور R_1+x و R_2+x كما في الشكل(1.9b)،

ولحساب ΔP نتبع الخطوات الآتية:

الشغل المبذول نتيجة زيادة الضغط هو:

$$dW = L_1 L_2 \Delta P x \tag{1.14}$$

وبدلالة التوتر السطحي فإنه:

$$dW = \gamma\, dA = \gamma\, d(L_1 L_2) = \gamma(L_1 dL_2 + L_2 dL_1) \tag{1.15}$$

ومن المعادلتين نحصل على فرق الضغط

$$\Delta P = \gamma\left(\frac{dL_1}{L_1 x} + \frac{dL_2}{L_2 x}\right) \tag{1.16}$$

ومن التشابه في الشكل (1.9b) يتضح أن:

$$\frac{L_1 + dL_1}{R_1 + x} = \frac{L_1}{R_1} \tag{1.17}$$

وبضرب الطرفين في $\frac{R_1}{L_1}$ ينتج أن:

$$\frac{dL_1}{x} = \frac{L_1}{R_1} \tag{1.18}$$

وبالمثل ينتج أن:

$$\frac{dL_2}{x} = \frac{L_2}{R_2} \tag{1.19}$$

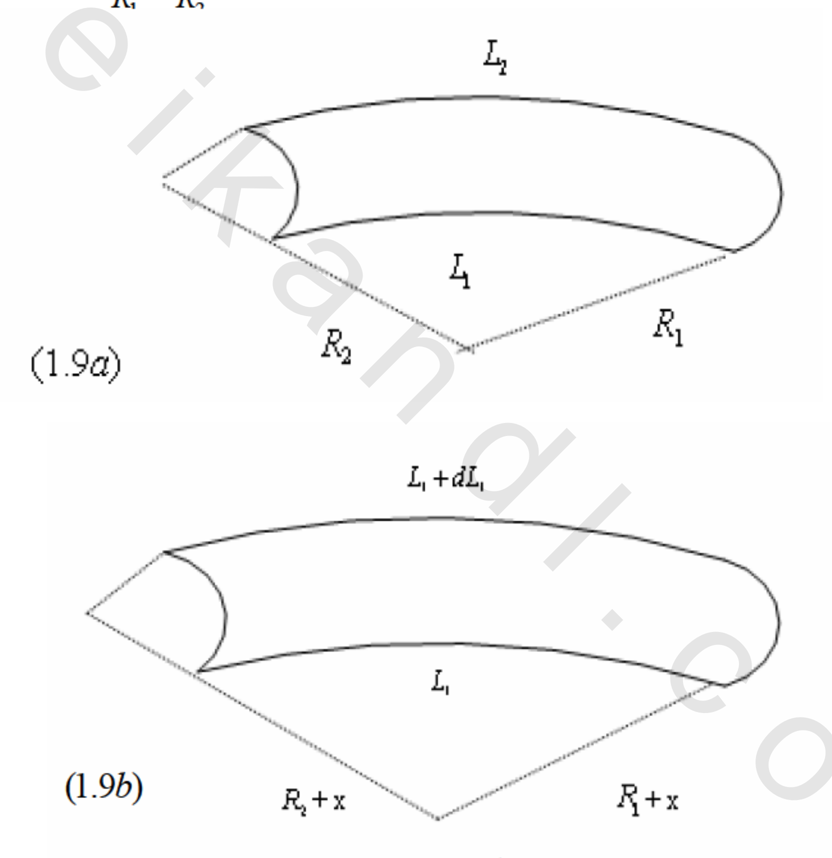
obeikandi.com

وبالتعويض من (1.18) و (1.19) في (1.16) ينتج أن:

$$\Delta P = \gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (1.20)$$

وفي حالة الغشاء ذي الوجهين تصبح العلاقة بالصيغة

$$\Delta P = 2\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (1.21)$$



شكل (1.9)

هناك حالات خاصة منها:

1 – إذا كان سطح السائل كروياً وذي وجه واحد مثل قطرة سائل فإن $R=R_1=R_2$ وتصبح المعادلة (1.21) بالصيغة:

obeikandl.com

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \qquad (1.22)$$

2 – إذا كان سطح السائل كروياً وذا وجهين مثل الفقاعة فإن:

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{R} \qquad (1.23)$$

ومن هذه المعادلة يظهر لنا أن فرق الضغط يتناسب عكساً مع نصف القطر أي أن الضغط داخل فقاعة صغيرة أكبر منه داخل فقاعة كبيرة.

3 – إذا كان السائل أسطوانيا فإن $R_1 = R, \mathrm{R}_2 = \infty$ وعليه فإن:

$$\Delta P = \frac{\gamma}{R} \qquad (1.24)$$

وفي حالة الغشاء ذي الوجهين فإن:

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \qquad (1.25)$$

مثال 1.13

احسب الضغط داخل قطرة من الزئبق نصف قطرها $4.0mm$ عند درجة حرارة $20.0^{\circ}C$.

الحل :

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2.0\times 465.0\times 10^{-3}\,N.m^{-1}}{4.0\times 10^{-3}\,m}$$

$$= 232.5\,N.m^{-2} = 2.3\times 10^{-3}\,atm.$$

$$\therefore\ P = P_{air} + 2.3\times 10^{-3} = 1.0023\,atm.$$

مثال 1.14

أعد المثال (1.13) مع قطرة نصف قطرها $2.0mm$ وذلك لملاحظة التناسب العكسي.

obeikandl.com

الحل :

$$\therefore \Delta P = 4.6 \times 10^{-3} \ atm$$

أي ضعف الناتج في مثال (1.13)

مثال 1.15

إذا كان ضغط الهواء داخل فقاعة صابون نصف قطرها $4.0mm$ يساوي ضغط عمود من الماء ارتفاعه $10.0mm$. فاحسب التوتر السطحي داخل الفقاعة.

الحل :

$$\Delta P = h\rho g = 10.0 \times 10^{-3} m \times 10.0^{3} kg / m^{3} \times 9.8 m / s^{2} = 98.0 N.m^{-2}$$

لكن

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{r}$$

أي أن :

$$\gamma = \frac{4.0 \times 10^{-3} m \times 98 N.m^{-2}}{4.0} = 0.098 N.m^{-1}$$

$$= 98.0 dyne / cm$$

* * *

obeikandl.com

1.7 زاوية التلامس والخاصة الشعرية

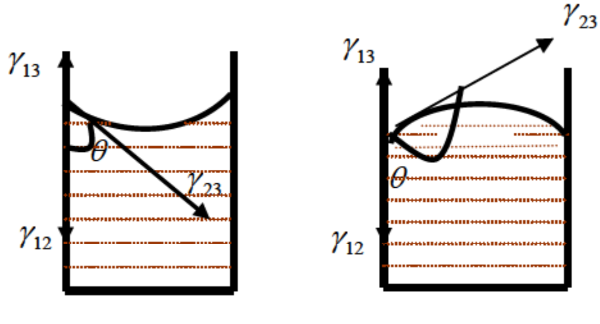
Contact angle and Capillarity

عند وجود سائل في وعاء يكون لدينا على حدود السائل ثلاثة أوساط متلامسة وهي الجدار الصلب للوعاء نعتبره الوسط الأول والسائل هو الوسط الثاني والهواء هو الوسط الثالث. وتؤثر ثلاث قوى تلامس على منحنى التلامس تتجه كل منها على امتداد المماس لسطح تلامس الوسطين الآخرين وفي الجهة الداخلية لسطح التلامس ونرمز لها بالرموز γ_{12} ، γ_{13} ، γ_{23} كما بالشكل (1.10)

وعادة عندما نتحدث عن التوتر السطحي لسائل فإنما نقصد التوتر بين السائل والهواء ، γ_{23} ، ونعرِّف زاوية التلامس بأنها " الزاوية المحصورة بين السائل والسطح الصلب مقاسة داخل السائل " . ولحساب زاوية التلامس نستفيد من شرط الاتزان عند التقاء الأوساط الثلاثة كالآتي:

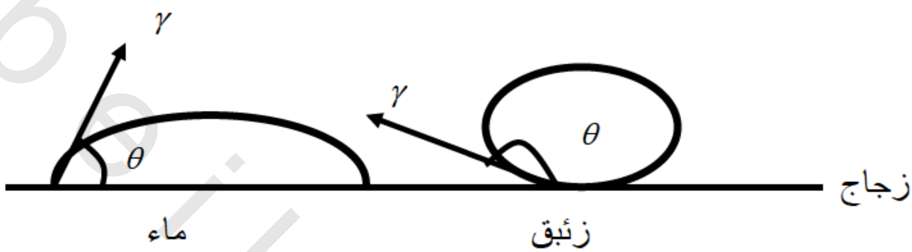
$$\gamma_{13} = \gamma_{12} + \gamma_{23}\cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\gamma_{13} - \gamma_{12}}{\gamma_{23}} \qquad (1.26)$$



شكل (1.10)

وعليه فإن الزاوية تعتمد على معاملات التوتر وليس على شكل الوعاء . إذا كان الطرف الأيمن موجبًا فإن θ تكون حادة كما في حالة الماء أما إذا كان سالباً فإن θ تكون منفرجة كما في حالة الزئبق انظر الشكل (1.11) .



شكل (1.11)

لحساب التوتر السطحي باستخدام الخاصية الشعرية يتم ذلك بغمر طرف أنبوبة ضيقة جداً – شعرية– داخل سائل انظر الشكل (1.12a) فإذا كانت زاوية التلامس حادة فإن الضغط تحت السطح مباشرة يكون أقل من الضغط الجوي بمقدار ΔP ولذلك فإن الضغط الجوي المؤثر على السائل في الوعاء يرفع السائل داخل الأنبوبة بما يعادل الفرق في الضغط أي أن:

$$\Delta P = \rho gh = \frac{2\gamma}{R} \tag{1.27}$$

حيث R هو نصف قطر تكور السائل و r هو نصف قطر الأنبوبة والعلاقة بينهما هي $r = R\cos\theta$ وبالتعويض في المعادلة (1.27) فإن:

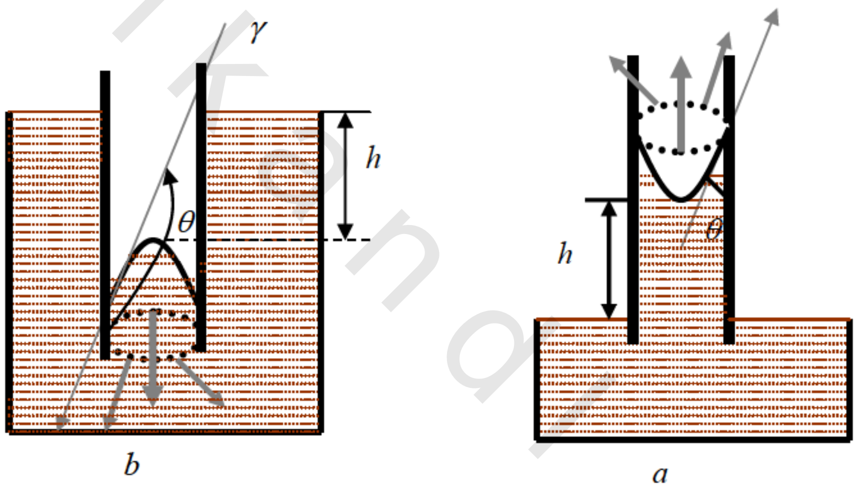
$$\rho gh = \frac{2\gamma\cos\theta}{r} \tag{1.28}$$

أي أن:

$$\gamma = \frac{\rho ghr}{2\cos\theta}$$

ويمكن الوصول إلى المعادلة (1.28) باستخدام قانون الاتزان . فإذا اعتبرنا الأنبوبة أسطوانية ونصف قطرها r فإن السائل يلامس الأنبوبة على خط طوله $2\pi r$ فإذا كانت زاوية التلامس θ فإن مركبة التوتر السطحي إلى أعلى هي $\gamma\cos\theta$ وعليه فإن قوة التوتر إلى أعلى هي $2\pi r\gamma\cos\theta$ والتي تتساوى مع وزن عمود السائل $\rho gh(\pi r^2)$، أي أن:

$2\pi r\gamma\cos\theta = \rho g h(\pi r^2)$ ومنها نستنتج أن:



شكل(1.12)

$$\gamma = \frac{\rho ghr}{2\cos\theta}$$

مثال 1.16

أنبوب شعري نصف قطره $0.2mm$ غمر أحد طرفيه في سائل كثافته $1.37\,g/cm^3$ وتوتره السطحي $27.0\,dyn/cm$ فارتفع السائل $2.0cm$ داخل الأنبوب. احسب زاوية التلامس له.

الحل :

$$\cos\theta = \frac{\rho g h r}{2\gamma} = \frac{1.37g/cm^3 \times 980cm/s^2 \times 2.0cm \times 0.02cm}{2.0 \times 27.0dyn/cm} = 0.995$$

$$\theta = 6.0^0$$

مثال 1.17

أُعيد غمر الأنبوب في المثال السابق في الماء والذي توتره السطحي $75.0dyn/cm$. احسب أقصى ارتفاع يمكن أن يصله الماء داخل الأنبوب.

إذا غُمر الأنبوب بالتدريج في الماء ليصبح ارتفاع الماء داخله واحد سم ، ماذا يحصل في هذه الحالة ؟

الحل :

1– من المعادلة (1.29) يمكن حساب ارتفاع الماء داخل الأنبوب

$$h = \frac{2\,\gamma\,\cos\theta}{\rho\,g r}$$

وللحصول على أعلى ارتفاع متوقع فإنه يلزم أن يكون البسط في المعادلة أعلاه أكبر ما يمكن وهذا يتحقق عند $\theta = 0.0^0$ وبالتعويض عن $\gamma = 75.0dyne/cm$ ونصف قطر الأنبوب $0.2\ mm$ نحصل على الارتفاع

$$h = \frac{2.0 \times 75.0dyn/cm \times 1.0}{1.0g/cm^3 \times 980.0cm/s^2 \times 0.02cm} = 7.6\ cm$$

2– عند غمر الأنبوب داخل الماء بالتدريج تتغير الزاوية من الصفر إلى 90.0° والتي عندها يصبح الارتفاع صفراً $(h = 0.0)$ وعليه فإن المطلوب هنا هو معرفة قيمة الزاوية عند الارتفاع $1.0cm$

$$\cos\theta = \frac{h_1\,\rho g r}{2\gamma}$$

obeikandi.com

$$= \frac{1.0cm \times 1.0g/cm^3 \times 980cm/s^2 \times 0.02cm}{2 \times 75.odyn/cm} = 0.13$$

إذن

$$\theta = 82.5^0$$

مثال 1.18

لوحان متوازيان من الزجاج، وضعا رأسيا بحيث يلامس طرفاهما السفليان سطح سائل يبلل الزجاج وتوتره السطحي γ . إذا كانت المسافة بين اللوحين x. احسب الارتفاع الذي يصل إليه السائل.

الحل :

طول كل لوح يساوي L (الطول الملامس للسائل). أي أن طول خط التلامس مع السائل هو $2L$ ومنه فإن قوة الجذب إلى أعلى هي $F = 2L\gamma$ والتي تتزن مع عمود السائل بين اللوحين،

$F = W = mg = 2L\gamma$ لكن $m = \rho V = \rho Ah = \rho Lxh$

وبالتعويض عن m نحصل على الارتفاع الذي يصل إليه السائل.

$$h = \frac{2L\gamma}{\rho Lxg} = \frac{2\gamma}{\rho xg}$$

كم الارتفاع للسائل إذا كان $\gamma = 27.0dyn/cm, \rho = 1.37g/cm^3, x = 2.0mm$

$$h = \frac{2 \times 27.0dyn/cm}{1.37g/cm^3 \times 0.2cm \times 980cm/s^2} = 2.01mm$$

obeikandi.com

مثال 1.19

عيّن مقدار الفرق في ارتفاع السائل في أنبوبين شعريين موصولين أنصاف أقطارهما r_1 و r_2 ، علماً بأن زاوية التلامس تساوي الصفر شكل (1.13)

الحل :

في الشكل نلاحظ أن قوى التوتر السطحي هي:

$T_2 = 2\pi\, r_2\gamma$ و $T_1 = 2\pi\, r_1\gamma$

إذا فرضنا أن W_1 و W_2 هما وزنا السائلين في الأنبوب الأول والأنبوب الثاني فإن صافي الوزن عند قاع كل أنبوب هو:

$F_2 = W_2 - T_2$ و $F_1 = W_1 - T_1$

ويقابلاهما الضغطان

$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{W_1 - T_1}{A_1} = g\, h_1\, \rho - \frac{T_1}{A_1}$$

و

$$P_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{W_2 - T_2}{A_2} = g\, h_2\, \rho - \frac{T_2}{A_2}$$

حيث ρ هي كثافة السائل و A_1 و A_2 هما مساحتا مقطعي الأنبوبين.

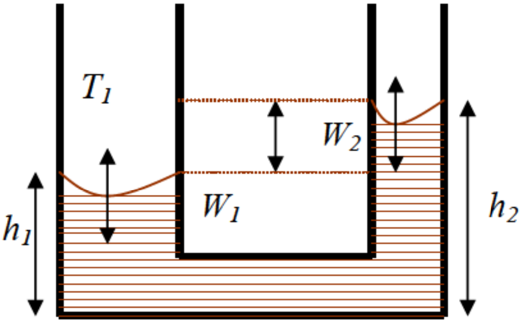
لكن P_1 و P_2 متساويتان

وهذا يجعل

$$gh_1\,\rho - \frac{T_1}{A_1} = gh_2\,\rho - \frac{T_2}{A_2}$$

أو

$$\rho\, g(h) = \frac{T_2}{A_2} - \frac{T_1}{A_1}$$



شكل (1.13)

obeikandl.com

$$\rho g(h) = \frac{2\pi r_2 \gamma}{\pi r_2^2} - \frac{2\pi r_1 \gamma}{\pi r_1^2}$$

$$= 2\gamma\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

وعليه فإن فرق الارتفاع هو:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{2\gamma(r_1 - r_2)}{\rho g r_1 r_2}$$

احسب h عند $\gamma = 75.0 dyn/cm, r_1 = 3.0cm, r_2 = 2.0cm$

$$h = \left(\frac{2\times 75.0\times 1.0}{1.0\times 980.0\times 2.0\times 3.0}\right)cm \approx 0.25mm$$

* * *

obeikandl.com

مسـائـل

1- أثرت ممرضة بقوة قدرها $50.0\ N$ على مكبس محقنة طبية نصف قطرها 1.2 cm . احسب الضغط الذي زاد على الدواء داخل المحقنة.

2- كرة كثافتها النسبية 8.9 ونصف قطر تكورها $5.0cm$. احسب كتلتها.

3- سيارة كتلتها $2500.0kg$ رفعت في ورشة بقوة $1500.0N$. ما النسبة بين نصفي قطري طرفي الرافعة ؟

4- احسب الضغط المطلق على عمق $5.0m$ داخل خزان للبنزين . احسبه على عمق $200.0m$ داخل المحيط .

5- احسب الضغط اللازم لرفع الماء إلى سطح بناية ارتفاعها $250.0m$.

6- مكعب طول ضلعه $20.0cm$. ملئ ربعه بالماء ثم أضيف إليه طبقة من الزيت بارتفاع $2.0cm$ وبكثافة نسبية قدرها 0.6 . احسب الضغط المطلق عند قاع الإناء.

7- احسب الضغط الجوي في يوم كان ارتفاع البارومتر فيه $75.0cm$.

8- يصل أنبوب ماء بين الدورين الأرضي والسطح في عمارة . وكان الضغط للماء الساكن عند الدور الأرضي $5.6x10^5\ Pa$ وكان $2.0x10^5\ Pa$ عند السطح . احسب ارتفاع العمارة.

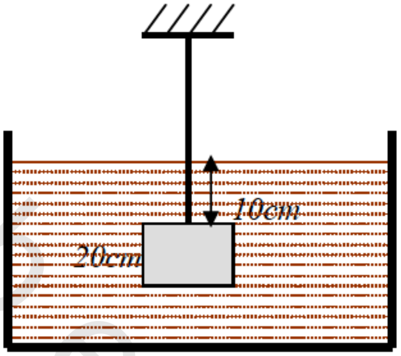
9- جسم مكعب طول حافته $20.0\ cm$ ووزنه في الهواء $100.0\ N$ علق بخيط داخل وعاء مفتوح به ماء كما بالشكل (1.14).

obeikandl.com

أ – احسب القوة المؤثرة على السطح العلوي للجسم والناتجة عن الهواء والماء.

ب– احسب القوة الكلية الواقعة على أسفل الجسم.

ج– احسب الشد في الخيط .



شكل(1.14)

10– احسب أقل مساحة لوجه قطعة من الثلج سمكها $0.5\ m$ تطفو على الماء ويمكن أن تحمل جسم وزنه $1200.0\ N$.

11– قطعة من الخشب تطفو على الماء انغمر منها ثلث حجمها ، وعندما وضعت على الزيت انغمر 0.9 من حجمها . احسب كثافتي الزيت والخشب.

12- جسم كتلته $500.0\ kg$ وحجمه الداخلي المفرغ $4.0\ m^3$ ما نسبة ما انغمر منه إلى حجمه الكلي إذا طفا على الماء . إذا بدأ الماء يتسرب إلى داخل الجسم ويحل محل الهواء فاحسب حجم الجسم الداخلي الذي يشغله الماء ويجعله ينغمر.

13- ما مساحة وجه أصغر قطعة ثلج سمكها $0.4\ m$ والتي بالكاد تحمل إنسان كتلته $80.0\ kg$ ؟ الكثافة النسبية للثلج هي 0.917 وتطفو في ماء نقي .

14– في المانوميتر الموضح بالشكل (1.4a) كان $y_1 = 4.0\ cm$ و $y_2 = 10.0\ cm$ وسائله هو الزئبق وكان الضغط الجوي يعادل واحد بار $one\ bar$.

أ– احسب الضغط المطلق في قاع الأنبوب وكذلك احسبه على بعد $5.0\ cm$ من الطرف المفتوح من الأنبوب.

ب– احسب الضغط المطلق للغاز داخل الوعاء.

omelkanadi.com

ج- احسب الضغط المقاس للغاز .

15- إذا كان المتر المكعب من ماء البحر يزن $9940.0\ N$. احسب الضغط المطلق على عمق $1000.0\ m$.

16- بارومتر طول أنبوبته $0.5\ m$ ومساحة مقطعه $20.0\ cm^2$ يرتفع به الزئبق إلى $4\ m$. حيث الجزء العلوي منه مفرغ . أُدخل أُكسجين إلى هذا الجزء لينخفض الزئبق إلى ارتفاع $0.3\ m$. احسب ضغط الأُكسجين داخل الجزء العلوي.

17- غُمرت أنبوبة شعرية نصف قطرها الداخلي $2.0\ mm$ في ماء توتره السطحي $70.0\, dyn/cm$. احسب ارتفاع الماء في الأنبوب علماً بأن زاوية التلامس تساوي الصفر . افرض أنا غمرنا الأنبوبة في الماء حتى لم يبق منها إلا واحد سم فوق سطح الماء . اشرح ما حصل للماء داخل الأنبوب .

18- أنبوبان شعريان أنصاف أقطارهما $0.5\ mm$ و $0.3mm$ وموصولان ببعضهما شكل (1.13) . بهما سائل كثافته $1.37\ g/cm^3$ و فرق الارتفاع بين السائل في الأنبوبين $5.0\ mm$ ومعامل التوتر السطحي له $30.0 dyne/cm$. عين زاوية التلامس في الأنبوب الأصغر علماً بأنها تساوي نصف زاوية التلامس في الأنبوب الأكبر.

* * *

obeikandi.com