الفصل التاسع

المسائل التطورية الخطية

في هذا الفصل نودّ مناقشة بعض المسائل التطورية الخطية ونبيّن كيفية حلها، وذلك باستعمال بعض الوسائل الحديثة من نظرية التحليل الدالي. ونركّز هنا على معادلتي الحرارة والأمواج. فيما يلي نعتبر فضاء هيلبرتيا H ومؤثرا خطيا $A : D(A) \subset H \to H$

1) رتيبا، أي لكل $u \in D(A)$ فإن $(Au,u) \geq 0$ حيث يرمز $(.,.)$ للضرب الداخلي الحقيقي،

2) أعظميا، أي لكل $f \in H$ ، يوجد $u \in D(A)$ بحيث $u + Au = f$.

1- مبرهنة هيل- يوشيدا (Hille[2] - Yosida[1])

توطئة **1.1**

ليكن $A : D(A) \subset H \to H$ مؤثراً خطيا رتيبا وأعظميا. لديناً :

أ) مجال تعريف A (أي $D(A)$) كثيف في H ، و A مغلق.

بـ) لكل عدد $\lambda > 0$ ، المؤثر $I + \lambda A : D(A) \to H$ تقابلي، ومن ثمّ يكون $(I + \lambda A)^{-1}$ محدودا وَ $\left\|(I + \lambda A)^{-1}\right\| \leq 1$.

البرهان

أ) لما كان A رتيبا أعظميا فإنه لكل $f \in H$، يوجد $v_0 \in D(A)$ يحقق $v_0 + Av_0 = f$.

[1] كوماتسو يوشيدا (1909- 1990) رياضي ياباني.

[2] إينر هيل (1894- 1980) رياضي أمريكي.

نفرض أن :

$$(f,v)=0,\ \forall v\in D(A).$$

عندئذ :

$$0=(f,v_0)=\|v_0\|^2+(Av_0,v_0),$$

وحيث أن $(Av_0,v_0)\geq 0$ نستنتج $\|v_0\|=0$. مما يستلزم أن $v_0=0$. ومنه $f=0$، وهو ما يبيّن أن $D(A)$ كثيف في H.

ب) نلاحظ أولاً أن للمعادلة $u+Au=f$ حلا وحيدا وذلك لأنه لو كان لها حلان u_1 و u_2 فإنه يصبح لدينا :

$$u_1-u_2+A(u_1-u_2)=0 \tag{1}$$

وبضرب المعادلة (1) بـ u_1-u_2 (ضرباً سلميا) نحصل على :

$$\|u_1-u_2\|^2+(A(u_1-u_2),u_1-u_2)=0$$

وباستعمال رتابة A نصل إلى $\|u_1-u_2\|^2=0$. ومنه $u_1=u_2$.

كما أن المعادلة $u+Au=f$ تؤدي إلى :

$$\|u\|^2+(Au,u)=(f,u).$$

وهذا يستلزم

$$\|u\|^2\leq(f,u)\leq\|f\|\,\|u\|,$$

أي أن $\|u\|\leq\|f\|$. وهو ما يبيّن أن المؤثر $(I+A)^{-1}$ محدود من H إلى $D(A)$، مع $\left\|(I+A)^{-1}\right\|\leq 1$.

الآن، نبيّن أن A مغلق. نعتبر متتالية $(u_n)\in D(A)$ بحيث :

$$\begin{cases}u_n\to u,\\ Au_n\to g\end{cases}$$

مما يعطي مباشرة : $u_n+Au_n\to u+g$.

نود إثبات أن $u\in D(A)$ و $g=Au$. ولهذا الغرض نكتب :

$$u_n=(I+A)^{-1}(u_n+Au_n)\to(I+A)^{-1}(u+g)\in D(A)$$

وذلك من محدودية $(I+A)^{-1}$. إذن:

$$u=(I+A)^{-1}(u+g)\in D(A).$$

وهذا يؤدي بدوره إلى :

$$(I+A)u=u+g.$$

وبالتالي $g=Au$. ومنه فإن A مغلق.

جـ) لنفرض أنه يوجد عدد $\lambda_0>0$ بحيث تكون صورة (نطاق) $I+\lambda_0 A$ هي H، نعبر عن ذلك بـ $R(I+\lambda_0 A)=H$. سوف نبيّن أن :

$$R(I+\lambda A)=H\ ,\forall\lambda>\frac{\lambda_0}{2}. \tag{2}$$

نعلم أنه، لكل $f\in H$، يوجد عنصر وحيد $u\in D(A)$ بحيث $u+\lambda_0 Au=f$ وأن المؤثر العكسي $(I+\lambda_0 A)^{-1}$ محدود بحيث إن $\left\|(I+\lambda_0 A)^{-1}\right\|\le 1$. لنعتبر الآن المعادلة

$$u+\lambda Au=f\ ,\ \lambda>0 \tag{3}$$

نستطيع كتابتها على الشكل :

$$u+\lambda_0 Au=\frac{\lambda_0}{\lambda}f+\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)u \tag{4}$$

إذا كانت $\frac{\lambda_0}{2}<\lambda$ فمن السهل ملاحظة أن $\left|1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right|<1$. ومن ثمّ نستخدم مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ، وهذا ما يبيّن أن للمعادلة (4) حلاً وحيداً $u\in D(A)$.

ولما كان A رتيبا أعظميا فإن $(I+A)$ غامر. ومنه نستنتج أن $(I+\lambda A)$ غامر أيضا لكل $\lambda>\frac{1}{2}$. وباستعمال ما سبق نصل إلى أن $(I+\lambda A)$ غامر لكل $\lambda>\frac{1}{4}$، وهكذا دواليك. ومن ثمّ فإن $(I+\lambda A)$ غامر لكل $\lambda>0$.□

تعريف 2.1

ليكن A مؤثراً رتيباً أعظمياً. نعرّف :

أ) حالّة A (Resolvant of A) بـ : $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$.

ب) صاقلة يوشيدا (Yosida Regularization) A_λ بـ :

$$\lambda > 0\,,\ A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

مبرهنة 3.1

ليكن A مؤثراً رتيباً أعظمياً. عندئذ :

1) $A_\lambda v = A(J_\lambda v), \forall v \in H, \forall \lambda > 0$.

2) $A_\lambda v = J_\lambda(Av),\ \forall v \in D(A), \forall \lambda > 0$.

3) $\|A_\lambda v\| \le \|Av\|,\ \forall v \in D(A), \forall \lambda > 0$.

4) $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v, \forall v \in H$.

5) $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av, \forall v \in D(A)$.

6) $(A_\lambda v, v) \ge 0, \forall v \in H, \forall \lambda > 0$.

7) $\|A_\lambda v\| \le \frac{1}{\lambda}\|v\|,\ \forall v \in H, \forall \lambda > 0$.

البرهان

1) لدينا :

$$\begin{aligned}
A(J_\lambda v) &= A(J_\lambda v) + \frac{1}{\lambda}J_\lambda v - \frac{1}{\lambda}J_\lambda v \\
&= \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(J_\lambda v) - \frac{1}{\lambda}J_\lambda v \\
&= \frac{1}{\lambda}v - \frac{1}{\lambda}J_\lambda v \\
&= \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)v = A_\lambda v.
\end{aligned}$$

2) لدينا :

$$J_\lambda(Av) = J_\lambda(Av) + J_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}v\right) - J_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}v\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda}J_\lambda(I+\lambda A)v - J_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}v\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)v = A_\lambda v.$$

3) باستعمال التوطئة 1.1 والقضية 2) السابقة نحصل على :

$$\|A_\lambda v\| \le \|J_\lambda\|\|Av\| \le \|Av\|.$$

4) لنأخذ أولاً $v \in D(A)$. فمن 3) يتبيّن أن :

$$\|v - J_\lambda v\| = \lambda\|A_\lambda v\| \le \lambda\|Av\|,\ \forall v \in D(A).$$

ومنه :

$$\lim_{\lambda\to 0}\|v - J_\lambda v\| = 0\ ,\ \forall v \in D(A).$$

ولما كان $D(A)$ كثيفا في H فإن هذه النتيجة تظل صحيحة لكل $v \in H$.

5) نستخلص من 4) :

$$\lim_{\lambda\to 0}\|A_\lambda v - Av\| = \lim_{\lambda\to 0}\|J_\lambda(Av) - Av\| = 0$$

لأن $Av \in H$.

6) لدينا :

$$(A_\lambda v, v) = (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v)$$
$$= (A_\lambda v, \lambda A_\lambda v) + (A(J_\lambda v), J_\lambda v)$$
$$\ge \lambda\|A_\lambda v\|^2$$
$$\ge 0.$$

وذلك لأن $(A(J_\lambda v), J_\lambda v) \ge 0$ إذ أن A رتيب.

7) من المتباينة الأخيرة نحصل على

$$\|A_\lambda v\|^2 \le \frac{1}{\lambda}(A_\lambda v, v) \le \frac{1}{\lambda}\|A_\lambda v\|\|v\|$$

ولذا، لكل $\lambda > 0$ فإن $\|A_\lambda v\| \le \frac{1}{\lambda}\|v\|$. □

ملاحظة

من القضية 5) نستنتج أن $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ متتالية مؤثرات محدودة متقاربة نحو المؤثر A.

قضية 4.1 (كوشي- ليبشيتز- بيكار Cauchy-Lipschitz[3]-Picard[4])

ليكن E فضاء بناخيا و $F: E \to E$ تطبيقا يحقق :
يوجد ثابت $L > 0$ بحيث :

$$\|F(v)-F(u)\| \le L\,\|v-u\|,\ \forall u,v \in E.$$

عندئذ، لكل $u_0 \in E$ ، يوجد حل وحيد $u \in C^1([0,+\infty);E)$ للمسألة :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(u),\ t \in (0,+\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

قبل تقديم المبرهنة الموالية، ولكل فضاء بناخي V وعدد طبيعي m ، نعرّف الفضاء $C^m([0,+\infty);V)$ بأنه مجموعة الدوال $f:[0,+\infty) \to V$ من الصنف C^m.

مبرهنة 5.1 (هيل– يوشيدا)

ليكن A مؤثراً رتيباً أعظمياً على فضاء هيلبرتي H. عندئذ، لكل $u_0 \in D(A)$ ، توجد دالة وحيدة :

$$u \in C^1([0,+\infty);H) \cap C([0,+\infty);D(A)) \qquad (5)$$

حل للمسألة :

[3] رودولف ليبشيتز (1832- 1903) رياضي ألماني.
[4] شارل بيكار (1856- 1941) رياضي فرنسي.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t)+Au(t)=0,\ \forall t\in(0,+\infty), \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{6}$$

فضلا عن ذلك، لدينا :

$$\forall t\geq 0,\ \ \|u(t)\|\leq\|u_0\|,$$

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|=\|Au(t)\| \tag{7}$$

$$\leq\|Au_0\|.$$

البرهان

نبدأ بإثبات وحدانية الحل. لنفرض أن هناك حلين u_1 و u_2. عندئذ يتضح بالضرب سلميا في $u_1(t)-u_2(t)$ أن :

$$\left(\frac{d}{dt}(u_1-u_2)(t),u_1(t)-u_2(t)\right)=-\big(A(u_1(t)-u_2(t)),u_1(t)-u_2(t)\big)\leq 0.$$

وهـذا يعـني أن : $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1(t)-u_2(t)\|^2\leq 0$ ، أي أن $t\mapsto\|u_1(t)-u_2(t)\|^2$ دالـة متناقصة. مما يستلزم:

$$\forall t\geq 0,\ \ \|u_1(t)-u_2(t)\|^2\leq\|u_1(0)-u_2(0)\|^2$$
$$=0,$$

ومن ثمّ فإن $u_1=u_2$ ، وهو المطلوب.

الآن، ننتقل إلى إثبات الوجود. هذه قضية دقيقة وسوف نعرضها ضمن عدة خطوات.

توطئة 6.1

للمسألة "المصقولة" التالية حل وحيد $u_\lambda\in C^1\big([0,+\infty);D(A)\big)$:

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt}+A_\lambda u_\lambda=0, \\ u_\lambda(0)=u_0\in D(A). \end{cases} \tag{8}$$

وذلك باستعمال القضية 4.1 وباعتبار $-A_\lambda = F$ و $E = D(A)$ (تأكد من أن $-A_\lambda$ يحقق شرط ليبشيتز).

توطئة 7.1

إن حل المسألة (8) يحقق :

$$\left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\| = \left\|A_\lambda u_\lambda(t)\right\| \leq \left\|Au_0\right\|.$$

البرهان

من (8) نستنتج :

$$-\left(\frac{du_\lambda}{dt}, A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}\right) = \left(A_\lambda u_\lambda, A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}\right).$$

وبمراعاة استمرار وخطية المؤثر A_λ فإن $A_\lambda \dfrac{d}{dt}u = \dfrac{d}{dt}A_\lambda u$. ومن ثمّ :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|A_\lambda u_\lambda(t)\right\|^2 = -\left(\frac{du_\lambda}{dt}, A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}\right) \leq 0.$$

وبالتالي فالدالة $t \mapsto \left\|A_\lambda u_\lambda(t)\right\|$ متناقصة. ومنه، حسب 3) من المبرهنة 3.1 :

$$\begin{aligned}\left\|A_\lambda u_\lambda(t)\right\| &\leq \left\|A_\lambda u_\lambda(0)\right\| \\ &= \left\|A_\lambda u_0\right\| \\ &\leq \left\|Au_0\right\|.\square\end{aligned}$$

توطئة 8.1

إن متتالية الحلول (u_λ) تتقارب عندما يؤول λ إلى الصفر.

بالإضافة إلى ذلك، فإن التقارب منتظم على كل فترة محدودة $[0,T]$.

البرهان

يعطى العددان الموجبان λ و γ. لدينا :

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\gamma}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\gamma u_\gamma = 0$$

ومنه نحصل على :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\lambda - u_\gamma\right\|^2 \\
&= -\left(A_\lambda u_\lambda - A_\gamma u_\gamma, u_\lambda - u_\gamma\right) \\
&= -\left(A_\lambda u_\lambda - A_\gamma u_\gamma, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\gamma u_\gamma + J_\gamma u_\gamma - u_\gamma\right) \\
&= \left(A_\lambda u_\lambda - A_\gamma u_\gamma, \lambda A_\lambda u_\lambda - \gamma A_\gamma u_\gamma\right) - \left(A\left(J_\lambda u_\lambda - J_\gamma u_\gamma\right), J_\lambda u_\lambda - J_\gamma u_\gamma\right) \\
&\le -\left(A_\lambda u_\lambda - A_\gamma u_\gamma, \lambda A_\lambda u_\lambda - \gamma A_\gamma u_\gamma\right).
\end{aligned}$$

وذلك لأن : $\left(A\left(J_\lambda u_\lambda - J_\gamma u_\gamma\right), J_\lambda u_\lambda - J_\gamma u_\gamma\right) \ge 0$. وباستخدام التوطئة 7.1 نحصل على :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_\lambda(t) - u_\gamma(t)\right\|^2 &\le \left\|A_\lambda u_\lambda - A_\gamma u_\gamma\right\|\left\|\lambda A_\lambda u_\lambda - \gamma A_\gamma u_\gamma\right\| \\
&\le \left[\left\|A_\lambda u_\lambda\right\| + \left\|A_\gamma u_\gamma\right\|\right]\left[\lambda\left\|A_\lambda u_\lambda\right\| + \gamma\left\|A_\gamma u_\gamma\right\|\right] \\
&\le 2(\gamma+\lambda)\left\|Au_0\right\|^2.
\end{aligned}$$

وبمكاملة الطرفين يكون لدينا : $\left\|u_\lambda(t) - u_\gamma(t)\right\|^2 \le 4(\lambda+\gamma)t\left\|Au_0\right\|^2$.

ومن ثمّ :

$$\left\|u_\lambda(t) - u_\gamma(t)\right\| \le 2\sqrt{(\lambda+\gamma)t}\left\|Au_0\right\| \qquad (9)$$

أي أن (u_λ) متتالية كوشية، وعليه فهي متقاربة. ليكن (t) $u(t) = \lim_{\lambda\to 0} u_\lambda(t)$.

بمآل γ إلى الصفر في (9) يأتي :

$$\left\|u_\lambda(t) - u(t)\right\| \le 2\sqrt{\lambda t}\left\|Au_0\right\|.$$

وهو ما يبيّن أن التقارب منتظم على كل فترة محدودة $[0,T]$.□

توطئة 9.1

نفرض أن $u_0 \in D\left(A^2\right)$. عندئذ تكون المتتالية $\left(\dfrac{du_\lambda}{dt}\right)$ متقاربة عندما تؤول λ إلى الصفر. وهذا التقارب منتظم على كل فترة $[0,T]$.

البرهان

لما كان $u_0 \in D\left(A^2\right)$ فإن $u_0 \in D(A)$، وكذلك $Au_0 \in D(A)$.

نضع $v_\lambda = \dfrac{du_\lambda}{dt}$.

ومن ثمّ فإن v_λ تحقق :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0, \\ v_\lambda(0) = \dfrac{du_\lambda}{dt}(0) = -A_\lambda u_0 \in D(A). \end{cases}$$

بمحاكاة برهان التوطئة السابقة ينتج :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_\lambda - v_\gamma\right\|^2 \le \left[\left\|A_\lambda v_\lambda\right\| + \left\|A_\gamma v_\gamma\right\|\right]\left[\lambda\left\|A_\lambda v_\lambda\right\| + \gamma\left\|A_\gamma v_\gamma\right\|\right]. \tag{10}$$

وباستخدام تناقص الدالة $t \mapsto \left\|A_\lambda v_\lambda\right\|$، فإننا نصل إلى :

$$\begin{aligned} \left\|A_\lambda v_\lambda(t)\right\| + \left\|A_\gamma v_\gamma(t)\right\| &\le \left\|A_\lambda v_\lambda(0)\right\| + \left\|A_\gamma v_\gamma(0)\right\| \\ &= \left\|A_\lambda^2 u_0\right\| + \left\|A_\gamma^2 u_0\right\|. \end{aligned}$$

وحيث إن $Au_0 \in D(A)$ فالمبرهنة 3.1 تؤدي إلى :

$$A_\lambda^2 u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0,$$

ولذا:

$$\max\left(\left\|A_\lambda^2 u_0\right\|, \left\|A_\gamma^2 u_0\right\|\right) \le \left\|A^2 u_0\right\|.$$

وعليه فإن (10) تأخذ الشكل :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_\lambda - v_\gamma\right\|^2 \le 2(\lambda + \gamma)\left\|A^2 u_0\right\|^2.$$

وبالمكاملة نحصل على :

$$\left\|v_\lambda(t) - v_\gamma(t)\right\| \le 2\sqrt{(\lambda + \gamma)t}\,\left\|A^2 u_0\right\|$$

ونستنتج كما سبق أن $v_\lambda = \dfrac{du_\lambda}{dt}$ متقاربة نحو v عندما تؤول λ إلى الصفر، وهذا التقارب منتظم على كل فترة محدودة $[0,T]$.□

توطئة 10.1

إذا كان $u_0 \in D\left(A^2\right)$ فإن للمسألة (6) حلا.

البرهان

بما أن :

$u_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \to 0} u(t)$ بانتظام على $[0,T]$،

$\dfrac{du_\lambda}{dt}(t) \xrightarrow{\lambda \to 0} v(t)$ بانتظام على $[0,T]$،

لكل $T > 0$ فإن : $u \in C^1\left([0,+\infty);H\right)$ وَ $\dfrac{du}{dt} = v$.

لنُعِد كتابة المعادلة (8) كالآتي: $\dfrac{du_\lambda}{dt} + A\left(J_\lambda u_\lambda\right) = 0$. وحيث إن :

$$\left\|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\right\| \le \left\|J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)\right\| + \left\|J_\lambda u(t) - u(t)\right\|$$

فلا بد أن يكون :

$\left\|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\right\| \xrightarrow{\lambda \to 0} 0$ بانتظام على $[0,T]$.

ومن جهة أخرى، نعلم أن بيان A مغلق، ولذا يأتي : $u(t) \in D(A)$، وكذلك

$$\frac{du}{dt} + Au = 0.$$

ولما كان $u \in C^1\left((0,+\infty);H\right)$ فالدالة $t \mapsto Au(t) = -\dfrac{du}{dt}(t)$ من الصنف $C\left((0,+\infty);H\right)$. ومنه : $u \in C\left([0,+\infty);D(A)\right)$.□

كما يمكننا التحقق بسهولة من أن :

$\left\|\dfrac{du}{dt}(t)\right\| \le \left\|Au_0\right\|$ وَ $\left\|u(t)\right\| \le \left\|u_0\right\|$.

توطئة 11.1

لنفرض أن $u_0 \in D(A)$. عندئذ، لكل $\varepsilon > 0$، يوجد $v_0 \in D\left(A^2\right)$ بحيث :

$$\begin{cases} \|u_0 - v_0\| < \varepsilon, \\ \|Au_0 - Av_0\| < \varepsilon. \end{cases} \qquad (11)$$

البرهان

لتكن $v_0 = J_\lambda u_0$. عندئذ $v_0 \in D(A)$، ولدينا كذلك

$$v_0 + \lambda A v_0 = u_0 \in D(A),$$

مما يستلزم أن $A v_0 = \frac{1}{\lambda}(u_0 - v_0) \in D(A)$. وعليه $v_0 \in D(A^2)$. ثم إن $A v_0 = A(J_\lambda u_0) = J_\lambda A u_0$، ولذا : $\lim_{\lambda \to 0} \|v_0 - u_0\| = \lim_{\lambda \to 0} \|J_\lambda u_0 - u_0\| = 0$.

وكذلك : $\lim_{\lambda \to 0} \|A v_0 - A u_0\| = \lim_{\lambda \to 0} \|J_\lambda (A u_0) - A u_0\| = 0$. وعليه يمكن اختيار λ صغيرا جدا حتى تتحقق العلاقة (11). □

تتمة إثبات المبرهنة 5.1

لإتمام البرهان، نضع $u_{0n} = J_{\frac{1}{n}} u_0 \in D(A^2)$. اعتماداً على التحليل السابق، نعرف أن للمسألة

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + A u_n = 0 \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \qquad (12)$$

حلا وحيدا u_n يحقق :

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \le \|u_{0n} - u_{0m}\| \xrightarrow{m,n \to +\infty} 0,$$

$$\left\|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right\| \le \|Au_{0n} - Au_{0m}\| \xrightarrow{m,n \to +\infty} 0.$$

ومنه نستنتج :

$$u_n(t) \to u(t),$$

$$\frac{du_n}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t),$$

بانتظام على $[0,T]$. وعندما تؤول n إلى لانهاية في (12) نصل إلى المطلوب. □

2 – الصقالة (الملوسة) Regularity

نناقش في هذا البند صقالة الحلول عندما تكون المعطيات أكثر صقالة. لنعتبر المسألة (6) وحلها المعطى بـ (5). دعنا نفرض أن القيمة الابتدائية u_0 أكثر صقالة، ولنناقش تأثير ذلك على الحل.

قضية 1.2

إن الفضاء

$$D\left(A^k\right):=\left\{v\in D\left(A^{k-1}\right): Av\in D\left(A^{k-1}\right)\right\}$$

المعرّف لكل عدد طبيعي $k\geq 2$ ، فضاء بناخي عند تزويده بالنظيم

$$\|u\|_{D\left(A^k\right)}=\left(\sum_{i=0}^{k}\left\|A^j u\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ملاحظة

يمثّل $D\left(A^k\right)$ أيضاً فضاء هيلبرتيا بالنسبة للضرب الداخلي :

$$\left(u,v\right)=\sum_{j=0}^{k}\left(A^j u,A^j v\right)_H .$$

مبرهنة 2.2

إذا كان $u_0\in D\left(A^k\right)$ فإن حل المسألة (6) يحقق الشرط :

$$u\in C^k\left(\left[0,+\infty\right);H\right)\cap C^{k-j}\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^j\right)\right),\forall j=1,2,\ldots,k.$$

البرهان

يكون البرهان بالاستقراء. ولنبدأ بالحالة $k=2$. لنعتبر الفضاء الهيلبرتي $H_1=D\left(A\right)$ المزود بالضرب الداخلي

$$\left(u,v\right)_{H_1}=\left(u,v\right)_H+\left(Au,Av\right)_H .$$

ولنعرّف المؤثر

$$A_1:D\left(A_1\right)\subset H_1\to H_1$$

على النحو:

$$\begin{cases} D(A_1) = D(A^2), \\ A_1 v = Av,\ \forall v \in D(A^2). \end{cases}$$

وبما أن

$$(A_1 u - A_1 v, u - v)_{H_1} = \sum_{i=1}^{2} \left(A^j u - A^j v, A^{j-1} u - A^{j-1} v \right) \geq 0$$

فإن A_1 رتيب على H_1. كما أنه أعظمي إذ أن : لكل $f \in H_1$، فالمعادلة

$$u + A_1 u = f$$

لها حل $u \in D(A)$. ولكن

$$A_1 u = f - u \in D(A).$$

ومنه $u \in D(A^2)$، أي $u \in D(A_1)$. ومن ثمّ فالمسألة التالية، المعطاة في H_1 :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A_1 u = 0, \forall t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in D(A_1) \end{cases} \tag{13}$$

لها حل وحيد

$$u \in C^1([0,+\infty); H_1) \cap C([0,+\infty); D(A_1))$$

أي أن

$$u \in C^1([0,+\infty); D(A)) \cap C([0,+\infty); D(A^2)).$$

يبقى إثبات $u \in C^2([0,+\infty); H)$.

بما أن $A : H_1 \to H$ محدود وَ $u \in C^1([0,+\infty); H_1)$ فإن :

$$\frac{d}{dt}(Au) = A\left(\frac{du}{dt}\right).$$

وباشتقاق (13) نحصل على :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0, \forall t \geq 0 \\ v(0) = -Au_0 \in D(A) \end{cases} \tag{14}$$

حيث إن $\frac{du}{dt}=v$. ومما سبق نعرف أن للمسألة (14) حلا v يحقق $v\in C^1\left(\left[0,+\infty\right);H\right)$، أي $u\in C^2\left(\left[0,+\infty\right);H\right)$، وهو المطلوب.

الآن، ننتقل إلى الحالة $k\geq 3$، ونستخدم الاستقراء. لنفرض أن نتيجة المبرهنة صحيحة حتى الرتبة $(k-1)$. ليكن $u_0\in D\left(A^k\right)$. عندئذ نلاحظ أن $\frac{du}{dt}=v$ يحقق : $v\in C^1\left(\left[0,+\infty\right);H\right)\cap C\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A\right)\right)$.

وكذلك

$$\begin{cases}\frac{dv}{dt}+Av=0,\forall t\geq 0,\\ v(0)=-Au_0\in D\left(A^{k-1}\right),\end{cases}$$

وباستعمال فرضية الاستقراء نستنتج أن

$$v\in C^{k-1}\left(\left[0,+\infty\right);H\right)\cap C^{k-1-j}\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^j\right)\right),\forall j=1,2,\dots,k-1$$

مما يستلزم أن

$$u\in C^{k}\left(\left[0,+\infty\right);H\right)\cap C^{k-j}\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^j\right)\right),\forall j=1,2,\dots,k-1.$$

ولإثبات أن $u\in C\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^k\right)\right)$، نلاحظ أن $v=\frac{du}{dt}\in C\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^{k-1}\right)\right)$، وباستخدام (13)، نرى أن :

$$Au=-\frac{du}{dt}\in C\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^{k-1}\right)\right)$$

وبالتالي فإن $u\in C\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^k\right)\right)$. وهو المطلوب.□

3 – حالة ذاتية القرين Self Adjoint

نناقش في هذا البند الحالة التي يكون فيها المؤثر ذاتي القرين ولنبدأ ببعض التعريفات.

تعريف 1.3 (المؤثر القرين)

يعطى المؤثر $A : D(A) \subset H \to H$ بحيث يكون $\overline{D(A)} = H$ ، ونطابق H بفضائه الثنوي، أي $H' = H$. نعرّف المؤثر القرين A^* كالآتي :

$$\forall (u,v) \in D(A) \times D(A^*), \ (Au,v) = (u, A^*v).$$

تعريف 2.3 (المؤثر المتناظر، الذاتي القرين)

1) نقول عن مؤثر A إنه متناظر إذا حقق :

$$\forall (u,v) \in D(A) \times D(A), \ (Au,v) = (u, Av).$$

2) نقول عن مؤثر A إنه ذاتي القرين (أو قرين الذات) إذا كان :

$D(A) = D(A^*)$ وَ $A^* = A$.

ملاحظة

كل مؤثر ذاتي القرين متناظر. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان A محدوداً ومتناظراً فإنه ذاتي القرين.

قضية 3.3

إذا كان A مؤثراً رتيباً أعظمياً ومتناظراً فإنه قرين الذات.

البرهان

نضع $J = (I + A)^{-1}$ ولنتحقق من أن J متناظر.

ليكن $u_1 = Ju$ وَ $v_1 = Jv$. عندئذ : $v_1 + Av_1 = v$ وَ $u_1 + Au_1 = u$.

وباستعمال خاصية التناظر للمؤثر A نحصل على :

$$(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1)$$

أي أن : $(u_1, v) = (u, v_1)$ ، وهذا يستلزم

$$\left(Ju,v\right)=\left(u,Jv\right).$$

وهو ما يبيّن أن J متناظر، ومن ثمّ فهو ذاتي القرين، لأنه محدود. وهذا يؤدي بدوره إلى $\left(I+A\right)^{*}=I+A$ ، أي أن $A^{*}=A$.

لنبيّن الآن أن $D\left(A^{*}\right)=D\left(A\right)$. لهذا الغرض نأخذ $u\in D\left(A^{*}\right)$ ونضع $f=u+A^{*}u$. لدينا :

$$\left(f,v\right)=\left(u,v+Av\right),\forall v\in D\left(A\right). \tag{15}$$

ثم إن A أعظمي، ولذا فإن (15) تؤدي إلى :

$$\forall w\in H,\left(f,Jw\right)=\left(u,w\right)..$$

وبما أن J قرين الذات فإن

$$\forall w\in H,\left(Jf,w\right)=\left(u,w\right)$$

أي أن $u=Jf\in D\left(A\right)$. إذن $D\left(A^{*}\right)=D\left(A\right)$. ومن ثمّ يأتي المطلوب.□

توطئة 4.3

ليكن A مؤثراً أعظمياً ورتيباً وذاتي القرين، و $u_0\in D\left(A^2\right)$. إذا كان :

$$u\in C^{2-j}\left(\left[0,+\infty\right);D\left(A^{2-j}\right)\right)\cap C\left(\left[0,+\infty\right);H\right),j=0,1$$

حلاً للمسألة (6) فإن

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|\leq\frac{1}{t}\left\|u_0\right\|,\forall t>0. \tag{16}$$

البرهان

نبدأ بالتذكير بأن $A_{\lambda}^{*}=A_{\lambda}$ وَ $J_{\lambda}^{*}=J_{\lambda}$ ، وأننا إذا اعتبرنا، لكل $\lambda>0$ ، المسألة التقريبية (8)

$$\begin{cases}\dfrac{du_{\lambda}\left(s\right)}{dt}+A_{\lambda}u_{\lambda}\left(s\right)=0,\\ u_{\lambda}\left(0\right)=u_0\in D(A)\end{cases}$$

وضربنا سلميا بـ u_λ، وكاملنا على $[0,t]$ لكان لدينا :

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(t)\|^2+\int_0^t(A_\lambda u_\lambda(s),u_\lambda(s))ds=\frac{1}{2}\|u_0\|^2. \tag{17}$$

لنضرب الآن بالقيمة $s\dfrac{du_\lambda(s)}{dt}$ ونكامل على $[0,t]$. عندئذ نحصل على : $\int_0^t s\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right\|^2 ds+\int_0^t s\left(A_\lambda u_\lambda(s),\frac{du_\lambda(s)}{dt}\right)ds=0$.

وبمراعاة المساواة $A_\lambda^*=A_\lambda$ ، يكون

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda,u_\lambda)=\left(A_\lambda\left(\frac{du_\lambda}{dt}\right),u_\lambda\right)+\left(A_\lambda u_\lambda,\frac{du_\lambda}{dt}\right)=2\left(A_\lambda u_\lambda,\frac{du_\lambda}{dt}\right)$$

ثم نكامل بالتجزئة فنصل إلى :

$$\begin{aligned}&\int_0^t s\left(A_\lambda u_\lambda(s),\frac{du_\lambda}{dt}(s)\right)ds\\&=\frac{1}{2}\int_0^t s\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda(s),u_\lambda(s))ds\\&=\frac{1}{2}t(A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t))-\frac{1}{2}\int_0^t(A_\lambda u_\lambda(s),u_\lambda(s))ds.\end{aligned} \tag{18}$$

ومن جهة أخرى، فالدالة $t\mapsto\left\|\dfrac{du_\lambda(t)}{dt}\right\|^2$ متناقصة، ولذا :

$$\int_0^t s\left\|\frac{du_\lambda(s)}{dt}\right\|^2 ds\geq\frac{1}{2}t^2\left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\|^2. \tag{19}$$

وبدمج (17) وَ (19) يتضح أن :

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(t)\|^2+\frac{t}{2}(A_\lambda u_\lambda(t),u_\lambda(t))+\frac{t^2}{2}\left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\|^2\leq\frac{1}{2}\|u_0\|^2. \tag{20}$$

ولما كان A_λ رتيبا فإن (20) تؤدي بوجه خاص إلى :

$$\left\|\frac{du_\lambda(t)}{dt}\right\|\leq\frac{1}{t}\|u_0\|,\forall\lambda,t>0.$$

وعندما تؤول λ إلى الصفر نصل إلى (16).□

مبرهنة 5.3

ليكن A مؤثراً أعظمياً قرين الذات. عندئذ، لكل $u_0 \in H$، توجد دالة وحيدة

$$u \in C\left(\left[0,+\infty\right);H\right)\cap C^1\left(\left(0,+\infty\right);H\right)\cap C\left(\left(0,+\infty\right);D\left(A\right)\right) \tag{20}$$

حل للمسألة (6).

بالإضافة إلى ذلك، لدينا، لكل $t\in\left[0,+\infty\right)$:

$$\begin{aligned}\left\|u\left(t\right)\right\| &\le \left\|u_0\right\|,\\ \left\|\frac{du\left(t\right)}{dt}\right\| &= \left\|Au\left(t\right)\right\|\\ &\le \frac{1}{t}\left\|u_0\right\|.\end{aligned} \tag{21}$$

البرهان

لكل $u_0 \in H$، توجد متتالية $\left(u_{0n}\right)\in D\left(A^2\right)$ بحيث $u_{0n}\to u_0$.

ليكن u_n حل المسألة التقريبية

$$\begin{cases}\dfrac{du_n\left(t\right)}{dt}+Au_n\left(t\right)=0, t>0\\ u_n\left(0\right)=u_{0n}.\end{cases} \tag{22}$$

وباستخدام (7) وَ (16) نحصل على :

$$\left\|u_m\left(t\right)-u_n\left(t\right)\right\|\le\left\|u_{0m}-u_{0n}\right\|,\forall m,n,\forall t\ge 0,$$

$$\left\|\frac{du_m\left(t\right)}{dt}-\frac{du_n\left(t\right)}{dt}\right\|\le\frac{1}{t}\left\|u_{0m}-u_{0n}\right\|,\forall m,n,\forall t>0.$$

وعليه فإن :

$u_n\left(t\right)\to u\left(t\right)$ بانتظام على $\left[0,+\infty\right)$،

$\frac{du_n(t)}{dt} \to \frac{du(t)}{dt}$ بانتظام على $[\delta,+\infty)$ ، لكل $\delta > 0$.

ومن ثمّ:

$$u \in C^1((0,+\infty);H) \cap C([0,+\infty);H).$$

وباستغلال كون $u_n \in D(A)$ وكون A مؤثرا مغلقا ، يتضح أن $u \in D(A)$.

ومنه:

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0, \forall t > 0$$

نلاحظ أن (16) تبيّن بأن u_n يحقق :

$$\left\| \frac{du_n(t)}{dt} \right\| \leq \frac{1}{t} \|u_0\|, \forall t > 0.$$

وعندما يؤول n إلى لانهاية، نحصل على :

$$\left\| \frac{du(t)}{dt} \right\| \leq \frac{1}{t} \|u_0\|, \forall t > 0$$

أما وحدانية الحل فهي نتيجة للمبرهنة 5.1.□

مبرهنة 6.3

عندما تتوفر شروط المبرهنة 2.2 فإن الحل u يحقق :

$$u \in C^k((0,+\infty);D(A^l)), \forall k,l \in \mathbb{N}.$$

4- معادلة الحرارة

نقوم في هذا البند بحل بعض المسائل، وذلك باستخدام الوسائل التحليلية التي قدمت في البنود الثلاثة السابقة. لنعتبر المسألة

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{23}$$

حيث يمثّل $\Delta = \sum_{L=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ مؤثر لابلاس، و Ω مجالا من $\mathbb{R}^n$ عادة ما يؤخذ بحدود ملساء $\partial\Omega$، وهذا ما سنفترضه هنا. أما x فيمثّل المتغير الفضائي، بينما يمثل t المتغير الزمني. تسمى المعادلة في (23) معادلة الحرارة، وهي تعطي توزيع درجة الحرارة في الجسم Ω إذ تعبّر الدالة $u(x,t)$ عن درجة الحرارة عند أية نقطة $x \in \Omega$ في اللحظة $t > 0$.

يسمى الشرط الحدي $u(x,t) = 0$ شرط ديرشلت، وهو يدل على أن درجة الحرارة مثبّتة ومنعدمة على كل نقاط الحدود $\partial\Omega$ مهما كان $t \geqslant 0$. ويمكن استبدال هذا الشرط بشرط آخر، مثل شرط نيومان الذي يكتب على الشكل :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \geq 0$$

حيث يشير η لمتجه الناظم الخارجي. فهذا الشرط يعني أنه لا يوجد تبادل حرارة مع الوسط الخارجي، أي أن التدفق معدوم. ويقال في هذه الحالة أن الجسم معزول.

أما الشرط الابتدائي $u(x,0) = u_0(x)$ (أو مُعطَى كوشي) فيعطي توزيع الحرارة عند اللحظة (الابتدائية) $t = 0$.

نلاحظ أن معادلة الحرارة تمثّل نموذج فورييي (Fourier's model)، وهي أبسط المعادلات المكافئية (Parabolic equations). سنقوم بحل المسألة (23) وذلك بتطبيق مبرهنة هيل- يوشيدا (المبرهنة 5.1). ولهذا الغرض يجب تحديد المؤثر A وفضاء هيلبرت H بدقة.

مبرهنة 1.4

نفرض أن $u_0 \in L^2(\Omega)$. عندئذ يكون للمسألة (23) حل وحيد $u \in C\left(\left[0,+\infty\right);L^2(\Omega)\right)$ بحيث :

$$u \in C\left(\left(0,+\infty\right);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(\left(0,+\infty\right);L^2(\Omega)\right) \tag{24}$$

بالإضافة إلى ذلك، لدينا :

$$\begin{cases} u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\times\left[\delta,+\infty\right)\right), \forall \delta > 0, \\ u \in L^2\left(\left(0,+\infty\right);H_0^1(\Omega)\right), \end{cases} \tag{25}$$

و

$$\frac{1}{2}\left\|u(.,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t\int_\Omega \left|\nabla u(x,s)\right|^2 dx\, ds = \frac{1}{2}\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^2, \ \forall t > 0. \tag{26}$$

البرهان

نضع $H = L^2(\Omega)$ ونعرّف المؤثر A بـ :

$$\begin{cases} A = -\Delta, \\ D(A) = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

كما نفرض أن Ω ملساء. لنتحقق من أن A مؤثر رتيب أعظمي وقرين الذات.

أ) ليكن $u \in D(A)$. لدينا :

$$\begin{aligned}(Au,u) &= \int_\Omega -(\Delta u)u \\ &= \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

ومن ثمّ فإن A رتيب.

ب) ليكن $f \in L^2(\Omega)$. إن للمعادلة

$$-\Delta u + u = f$$

حلا وحيدا $u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. وعليه فإن A أعظمي.

جـ) ليكن $u,v \in D(A)$. عندئذ :

$$\begin{aligned}(Au,v) &= \int_\Omega (-\Delta u)v \\ &= \int_\Omega \nabla u.\nabla v \\ &= \int_\Omega -(\Delta v)u \\ &= (u, Av).\end{aligned}$$

وعليه فإن A متناظر، وبالتالي قرين الذات، لأنه رتيب وأعظمي.

باستخدام المبرهنة 5.3 يتضح أن للمسألة (23) حلا وحيدا $u\in C([0,+\infty);L^2(\Omega))$ يحقق (24).

لإثبات (25) وَ (26) نضع:

$$D(A^k)=\{u\in H^{2k}(\Omega): u=\Delta u=\Delta^2 u=\ldots=\Delta^{k-1}u=0 \ \text{ on}\,\partial\Omega\}.$$

في هذه الحالة فإن مبرهنة الصقالة (مبرهنة 6.3) تستلزم أن :

$$u\in C^m((0,+\infty);D(A^l)),\forall m,l\in\mathbb{N}.$$

ومنه فإن غمس فضاءات سوبلاف يؤدي إلى :

$$u\in C^k((0,+\infty);C^k(\overline{\Omega})),\forall k\in\mathbb{N}$$

وهو ما يستلزم :

$$u\in C^\infty(\overline{\Omega}\times[\delta,+\infty)),\forall\delta>0.$$

ولما كان $u\in C^1((0,+\infty);L^2(\Omega))$ فإن الدالة ψ المعرفة بـ:

$$t\mapsto\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx$$

من الصنف $C^1((0,+\infty))$ ، واشتقاقها يعطي، لكل $t>0$:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \int_\Omega u\partial_t u(x,t)dx \\ &= \int_\Omega u\Delta u(x,t)dx \\ &= -\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\,dx.\end{aligned}$$

ومنه :

$$\psi(t)-\psi(\delta)=\int_{\delta}^{t}\psi'(s)\,ds$$

$$=-\int_{\delta}^{t}\int_{\Omega}\left|\nabla u(x,s)\right|^{2}dx\,ds.$$

وعندما يؤول δ إلى الصفر نحصل على :

$$\frac{1}{2}\left\|u(.,t)\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}+\int_{0}^{t}\int_{\Omega}\left|\nabla u(x,s)\right|^{2}dx\,ds=\frac{1}{2}\left\|u_0\right\|_{L^2(\Omega)}^{2}$$

وذلك لأن $u\in C\left(\left[0,+\infty\right);L^{2}(\Omega)\right)$. وبهذا نكون أثبتنا (26).□

دعنا الآن نناقش معادلة الحرارة في بعد واحد. نودّ هنا الوقوف على نتائج الصقالة المذكورة أعلاه (المبرهنة 1.4). من أجل ذلك نعتبر المسألة الابتدائية :

$$\begin{cases} u_t(x,t)-ku_{xx}(x,t)=0, & -\infty<x<+\infty,\ t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases} \tag{27}$$

حيث $k>0$ ثابت.

لحل هذه المسألة نستعمل تحويل فوريي على المتغير الفضائي x ، فنحصل على :

$$\widehat{u_t}(s,t)+s^{2}k\hat{u}(s,t)=0,\ \ s\in\mathbb{R},t>0 \tag{28}$$

حيث نعرّف :

$$\hat{v}(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\,v(x,t)\,dx,\ \ v(.,t)\in L^{1}(\mathbb{R}).$$

إن المعادلة (28) معادلة تفاضلية عادية للمتغير t ، وحلها العام هو $\hat{u}(s,t)=ce^{-s^2kt}$ حيث نعيّن c بالرجوع إلى الشرط الابتدائي $u(x,0)=u_0(x)$ الذي يعطي : $\hat{u}(s,0)=\hat{u}_0(s)$. إذن :

$$\hat{u}(s,t)=\hat{u}_0(s).e^{-s^2kt}.$$

وبتطبيق تحويل فوريي العكسي نحصل على حل المسألة (27) :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}\hat{u}(s,t)\,ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks^2t}e^{isx}\widehat{u_0}(s)\,ds$$

علما أن :

$$\widehat{u_0}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta s}u_0(\zeta)\,d\zeta .$$

وعليه:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ks^2t}e^{is(x-\zeta)}ds\right]u_0(\zeta)\,d\zeta$$

وبما أن الحل المطلوب هو حل حقيقي فلا بد أن يكون :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ks^2t}\cos(\zeta - x)s\,ds\right]u_0(\zeta)\,d\zeta .$$

وباستغلال العلاقة المعروفة

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}\cos(\alpha r)\,dr = \sqrt{\pi}\,e^{\alpha^2/4}$$

نصل إلى الكتابة الصريحة للحل :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\zeta-x)^2}{4kt}}u_0(\zeta)\,d\zeta,\ t>0 \qquad (29)$$

وذلك بأخذ $r = s\sqrt{kt}$ وَ $\alpha = (x-\zeta)/t\sqrt{k}$.

ومن هنا نلاحظ أن $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$ حتى لو كانت u_0 دالة غير مستمرة. والواقع أنه يكفي أن يكون $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ للحصول على حل مصقول معطى بالعلاقة (29).

دعنا نعرض في آخر هذا البند مبدأ مهمّا يتعلق بالمعادلات المكافئية عموماً، وبمعادلة الحرارة خصوصاً. إنه مبدأ الأعظمية.

مبرهنة 2.4

ليكن $u_0 \in L^2(\Omega)$ و u حل المسألة (23) الوارد في (24). عندئذ :

$$\min\left\{0, \inf_{\Omega} u_0\right\} \leq u(x,t) \leq \max\left\{0, \sup_{\Omega} u_0\right\}, a.e.\ x \in \Omega,\ \forall t > 0. \tag{30}$$

البرهان

نستخدم طريقة البتر لستنباكيا. إذا كان الطرف الأيمن من (30) غير محدود فالمتباينة اليمنى محققة تلقائيا. لنفرض أن هذا الطرف محدود ونضع $k = \max\left\{0, \sup_{\Omega} u_0\right\}$.

نعرّف بعد ذلك دالة $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ متزايدة (تماما) على $(0,+\infty)$، من الصنف $C^1(\mathbb{R})$ تحقق $G(s) = 0$ لكل $s \in \mathbb{R}^+$. ولتكن الدالتان المعرفتان بـ :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad H(s) = \int_0^s G(\zeta)\, d\zeta,$$

$$\forall t \geq 0, \quad \phi(t) = \int_{\Omega} H\big(u(x,t) - k\big)\, dx.$$

ليس من الصعب التحقق من :

$$\begin{cases} \phi \in C^1\big((0,+\infty)\big) \cap C\big([0,+\infty)\big), \\ \phi(0) = 0, \\ \phi(t) \geq 0,\ \forall t \geq 0. \end{cases}$$

ثم إن:

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \int_{\Omega} G\big(u(x,t) - k\big) u_t(x,t)\, dx \\ &= \int_{\Omega} G\big(u(x,t) - k\big) \Delta u(x,t)\, dx \\ &= \int_{\Omega} G'\big(u(x,t) - k\big) \left|\Delta u(x,t)\right|^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

وعليه نستنتج أن $\phi = 0$. وعليه :

$$\forall t>0,\quad H\big(u(x,t)-k\big)=0$$

علما بأن تعريف الدالة G يبيّن أن

$$H(s)=0 \;\Rightarrow\; s\le 0.$$

ولذلك :

$$u(x,t)-k\le 0,\;\; a.e.\, x\in\Omega,\, \forall t>0.$$

أما لإثبات المتباينة اليسرى من (30) فيكفي وضع $v=-u$ وملاحظة أن v يحقق :

$$\begin{cases} v_t-\Delta v=0, \\ v(x,0)=-u_0(x).\square \end{cases}$$

5- معادلة الأمواج

نعتبر المسألة

$$(31)\qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)=0, & x\in\Omega,\;\; t>0, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\;\; t\ge 0, \\ u(x,0)=u_0(x),\;\; u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega, \end{cases}$$

حيث يعبّر Δ عن مؤثر لابلاس، بافتراض Ω مجالاً مفتوحاً ومترابطاً من $\mathbb{R}^n$. تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية الواردة في (31) معادلة الأمواج. إنها تنمذج انتقال الأمواج في جسم متجانس Ω. وفي البعد الأحادي $(n=1)$ تعبّر المعادلة عن حركة خيط متجانس تحت تأثير وزنه وبدون أي مؤثر أو قوة خارجية. وفي حالة وجود قوة خارجية تصير المعادلة من الشكل:

$$u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t>0.$$

أما العلاقة

$$u(x,t)=0,\quad x\in\partial\Omega$$

فهي شرط ديرشلت الذي يبيّن أن حدود هذا المجال تبقى مثبتة (بمعنى تثبيت طرفي الخيط في حالة البعد الأحادي)، بينما يمثّل u_0 ، u_1 الوضع الابتدائي والسرعة الابتدائية على التوالي، وهما دالتان معطيان في فضاءات معينة.

مبرهنة 1.5 (الوجود والوحدانية)

نفرض أن $u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ و $u_1\in H_0^1(\Omega)$. عندئذ يكون للمسألة (31) حل وحيد $u\in C^2\left(\left[0,+\infty\right[;L^2(\Omega)\right)$ بحيث:

$$u\in C\left(\left[0,+\infty\right[;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left(\left[0,+\infty\right[;H_0^1(\Omega)\right). \tag{32}$$

بالإضافة إلى ذلك، لدينا، لكل $t\geq 0$:

$$\int_\Omega \left|u_t(x,t)\right|^2dx+\int_\Omega\left|\nabla u(x,t)\right|^2dx=\int_\Omega\left|u_1(x)\right|^2+\int_\Omega\left|\nabla u_0(x)\right|^2dx. \tag{33}$$

ملاحظة

تمثّل العلاقة (33) قانون حفظ الطاقة، وهو يدل على أن الطاقة الكلية تبقى محفوظة في كل لحظة. فالحد $\int_\Omega\left|u_t(x,t)\right|^2dx$ يمثّل الطاقة الحركية بينما يمثّل الحد $\int_\Omega\left|\nabla u(x,t)\right|^2dx$ الطاقة الكامنة.

البرهان

نناقش النتيجة في الحالتين : Ω محدودة و Ω غير محدودة.

1) Ω محدودة

نعيد صياغة المسألة (31) كالآتي: نضع $v=u_t$ فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases}u_t-v=0,\\ v_t-\Delta u=0.\end{cases}$$

وبوضع $U=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ يمكن كتابة هذا النظام على الشكل $U_t+AV=0$
حيث يعطى المؤثر A بـ : $D(A)=\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\times H_0^1(\Omega)$ و
$A=\begin{pmatrix}0&-1\\-\Delta&0\end{pmatrix}$. ولتطبيق مبرهنة هيل- يوشيدا نأخذ الفضاء الهيلبرتي
$H=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ مزوداً بالضرب الداخلي

$$(U,V)=\int_\Omega(\nabla u.\nabla v+\phi\psi) \tag{34}$$

حيث $U=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ وَ $V=\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix}$.

والآن، لنتحقق من شروط مبرهنة هيل- يوشيدا.

أ) رتابة A : لكل $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in D(A)$ لدينا

$$\begin{aligned}(AU,U)&=\left(\begin{pmatrix}-v\\-\Delta u\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right)\\&=-\int\nabla u.\nabla v+\int_\Omega v(-\Delta u)\\&=-\int_\Omega\nabla u.\nabla v+\int_\Omega\nabla v.\nabla u=0\end{aligned}$$

ب) أعظمية A : تعطى $\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}\in H$. نودّ حل المعادلة $AU=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}$ ، أي

$$\begin{pmatrix}-v\\-\Delta u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}.$$

إنه من السهل التأكد من وجود $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ يحقق $-\Delta u=g$.
بينما نأخذ $-v=f$. ومنه نصل إلى أن A مؤثر أعظمي. وبتطبيق مبرهنة هيل- يوشيدا نستنتج أن للمسألة (31) حلاً وحيداً

$$u \in C\left(\left[0,+\infty\right[;D\left(A\right)\right)\cap C^1\left(\left[0,+\infty\right[;H\right),$$
$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C\left(\left[0,+\infty\right[;\left(H^2\left(\Omega\right)\cap H_0^1\left(\Omega\right)\right)\times H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$
$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} \in C\left(\left[0,+\infty\right[;H_0^1\left(\Omega\right)\times L^2\left(\Omega\right)\right).$$

وهو ما يحقق (32).

2) Ω غير محدودة

في هذه الحالة لا يمكن أخذ الضرب الداخلي (34). ولتجاوز هذه العقبة، نضع $V = e^{-t}U$ حيث U هو الحل المنشود للمسألة :

$$\begin{cases} U_t + AU = 0, \\ U\left(0\right) = U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{35}$$

وعندئذ نحصل على المسألة

$$\begin{cases} V_t + BV = 0, \\ V\left(0\right) = V_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{36}$$

حيث $B = A + I$. لنتحقق الآن من شروط مبرهنة هيل- يوشيد للمسألة (36).

أ) رتابة B : بوضع $V = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}$ يكون لدينا :

$$\begin{aligned}(BV,V)&=(AV,V)+(V,V)\\&=\left(\begin{pmatrix}-\psi\\-\Delta\phi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\phi\\\psi\end{pmatrix}\right)\\&=\int_\Omega(-\nabla\psi.\nabla\phi.\phi\psi)+\int_\Omega\psi(-\phi)+\int_\Omega|\nabla\phi|^2+\phi^2+\psi^2\\&=\int_\Omega\left(-\phi\psi+|\nabla\phi|^2+\phi^2+\psi^2\right)\\&\geq\int_\Omega\left(-\phi\psi+\phi^2+\psi^2\right)\\&\geq 0.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

ب) أعظمية B : يعطى $F=\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$. نود حل المعادلة $BV=F$. أي:

$$\begin{cases}-\psi+2\phi=f\,,\\-\Delta\phi+2\psi=g\,.\end{cases}\tag{37}$$

وبضرب المعادلة الأولى في 2 وجمعها إلى الثانية نحصل على :

$$-\Delta\phi+4\phi=2f+g\in L^2(\Omega).\tag{38}$$

وباستخدام مبرهنة لاكس – ميلغرام والنظرية الناقصية (Elliptic theory) نثبت وجود $\phi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ وحيد يحقق (38). وبالتعويض في (37) نحصل على ψ. ومن ثمّ نكون قد أثبتنا أعظمية B. وبمراعاة مبرهنة هيل – يوشيدا فإنه يوجد حل وحيد للمسألة (36). إن $U=e^tV$ تحقق المسألة (35).

نترك للقارئ مهمة التأكد من أن $U=\begin{pmatrix}u\\u_t\end{pmatrix}$ يحقق (32).

ولإثبات (33) نضرب المعادلة في (31) بـ u_t ثم نكامل على $\Omega\times(0,t)$.□

ملاحظة

نشير إلى أن المؤثر A ليس قرين الذات. بل من السهل رؤية أن $A^* = -A$. إذن فلن نحصل على أي صقالة إضافية للحل كما كان الشأن في معادلة الحرارة.

ولتوضيح الفكرة نورد هذه المسألة الابتدائية لمعادلة الأمواج في البعد الأحادي:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{39}$$

يعطى حل هذه المسألة بصيغة دالمبير (D'Alembert[5]) :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+t) + u_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds \tag{40}$$

فالصيغة (40) توضح أن درجة صقالة الحل لن تزيد أبداً عن درجة ملوسة المعطيات الابتدائية.

ملاحظة

نشير أنه لا يوجد عموماً أي مبدأ أعظمية لمسائل الأمواج خلافاً لمسائل انتشار الحرارة. ولتوضيح ذلك نأخذ هذا المثال :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{41}$$

يمكن التحقق بسهولة من أن $u(x,t) = \sin x . \cos t$ هو الحل الوحيد للمسألة (41)، وأن $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ بالرغم من أن $u_0 \geq 0$ وَ $u_1 = 0$ على $[0,\pi]$. وهذا خلافا للمسألة (39) التي يكون حلها غير سالب إذا كان كل من u_0 وَ u_1 دالتين غير سالبتين (انظر العلاقة (40)).

---

[5] جون لوروند دالمبير (1717- 1783) رياضي فرنسي.

6- تمارين

تمرين 1

ليكن H فضاء هيلبرتيا وَ $A : D(A) \to H$ مؤثراً رتيباً أعظمياً. بيّن أن $D(A)$ ، المزود بنظيم البيان

$$\forall u \in D(A), \quad \|u\|_* = \|u\|_H + \|Au\|_H$$

فضاء بناخي.

تمرين 2

ليكن $B : H \to H$ مؤثرا خطياً وتقابلياً. بيّن أنه إذا كان B قرين الذات فإن B^{-1} قرين الذات أيضاً.

تمرين 3

ليكن $A : D(A) \to H$ مؤثرا خطياً ورتيباً أعظمياً. نفرض أنه، من أجل ثابت $\lambda_0 > 0$ ، تقبل المسألة

$$u + \lambda_0 A u = f \in H$$

حلا $u \in D(A)$. ونعتبر المسألة

$$u + \lambda_0 A u = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u .$$

استخدم مبرهنة راسم التقلص (مبرهنة النقطة الثابتة لبناخ) لتثبت أن لهذه المسألة حلاً وحيداً (لاحظ أن $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ يستلزم $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$).

تمرين 4

إذا كان $A : D(A) \to H$ مؤثراً خطياً ورتيباً أعظمياً ومتناظرا تحقق من أن $J_\lambda^* = J_\lambda$ وَ $A_\lambda^* = A_\lambda$.

تمرين 5

أثبت أن للمسألة التالية حلاً وحيدًا إذا كانت $u_0 \in H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$:

$$\begin{cases} u_t\left(x,t\right)-\Delta u\left(x,t\right)+u\left(x,t\right)=0, & x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0, \\ u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right), \quad x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

تمرين 6

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ حدوده ملساء. نفرض أن

$$a_{ij}\in L^\infty\left(\Omega\right), \quad \forall i,j=1,\ldots,n$$

وأنه يوجد $c_0>0$ بحيث

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right)\zeta_i\zeta_j \geq c_0\left|\zeta\right|^2, \quad \forall\zeta\in\mathbb{R}^n, \quad a.e..x\in\Omega.$$

بيّن أن للمسألة التالية حلاً وحيداً إذا كان $(u_0,u_1)\in\left[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right]$:

$$\begin{cases} u_{tt}\left(x,t\right)-\sum_{i,j}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\left(x\right)\dfrac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x_i}\right)=0, \quad x\in\Omega, \quad t>0, \\ u\left(x,t\right)=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\geq 0, \\ u\left(x,t\right)=u_0\left(x\right), \quad x\in\Omega, \\ u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right), \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

تمرين 7

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ حدوده ملساء. تعطى الدالتان $u_0\in H^2\left(\Omega\right)\cap H_0^1\left(\Omega\right)$ وَ $u_1\in H_0^1\left(\Omega\right)$. بيّن أن للمسألة التالية حلاً وحيداً :

$$\begin{cases} u_{tt}\left(x,t\right)-\Delta u\left(x,t\right)+u_t\left(x,t\right)=0, \quad x\in\Omega, \quad t>0, \\ u\left(x,t\right)=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\geq 0, \\ u\left(x,t\right)=u_0\left(x\right), \quad u_t\left(x,0\right)=u_1\left(x\right), \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

تمرين 8

تعطى جملة تيموشنكو Timoshenko على الفترة $(0,1)$ كالآتي :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-\left(u_x(x,t)+v(x,t)\right)_x=0, \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ v_{tt}(x,t)-v_{xx}(x,t)+\left(u_x(x,t)+v(x,t)\right), \quad 0<x<1, \quad t>0, \\ u(0,t)=v(0,t)=u(1,t)=v(1,t)=0, \quad t\geq 0, \\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_0(x), \quad 0<x<1, \\ v(x,0)=v_0(x), \quad u_t(x,0)=v_1(x), \quad 0<x<1. \end{cases}$$

نفرض أن

$$\begin{cases} u_0,\ v_0\in H^2\left((0,1)\right)\cap H_0^1\left((0,1)\right), \\ u_1,\ v_1\in H_0^1\left((0,1)\right). \end{cases}$$

أثبت أن لجملة تيموشنكو حلاً وحيداً.

تمرين 9

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ حدوده ملساء. تعطى الدوال $u_0,\ \theta_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ وَ $u_1\in H_0^1(\Omega)$.

بيّن أن للمسألة التالية (**المرونة الحرارية**) حلاً وحيداً.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}(x,t)=0, \quad x\in\Omega, \quad t>0, \\ \theta_t(x,t)-\Delta u(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\partial t}=0, \quad x\in\Omega, \quad t>0, \\ u(x,t)=\theta(x,t)=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad t\geq 0, \\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad \theta(x,0)=\theta_0(x), \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

تمرين 10

ليكن Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ حدوده ملساء. تعطى الدالتان $u_0,v_0\in L^2(\Omega)$.

أ) بيّن أن للمسألة التالية حلاً وحيداً :

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\Delta u(x,t)+u(x,t)-v(x,t)=0, & x\in\Omega,\ t>0, \\ v_t(x,t)-\Delta v(x,t)-u(x,t)+v(x,t)=0, & x\in\Omega,\ t>0, \\ u(x,t)=v(x,t)=0, & x\in\partial\Omega,\ t\geq 0, \\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

ب) أثبت أن الحل يحقق التقديرات التالية :

$$\forall t\geq 0,\ \int_\Omega \left(u^2+v^2\right)(x,t)\,dx \leq \int_\Omega \left(u_0^2+v_0^2\right)(x)\,dx,$$

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2-(u-v)^2\right](x,t)\,dx \leq \int_\Omega \left[|\nabla u_0|^2+|\nabla v_0|^2-(u_0-v_0)^2\right](x)\,dx.$$

جـ) بيّن أنه إذا كان $u_0(x)+v_0(x)=0$ فإن :

$$\forall t\geq 0,\ u(x,t)+v(x,t)=0\ .$$

تمرين 11

ليكن u الموضح في العلاقة (24) حلاً للمسألة :

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\Delta u(x,t)+u(x,t)=f(x,t), & x\in\Omega,\ 0<t<T, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega, \\ u(x,t)=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

حيث $u_0\in L^2(\Omega)$ وَ $f\in L^2(\Omega\times(0,T))$.

أ) بيّن أن لكل $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$: $u(x,t)\leq \max\left\{\sup_{\Omega\times(0,T)} f, \sup_{\Omega} u_0\right\}$.

ب) أثبت أنه إذا كان :

$$u_0(x)\geq 0\quad a.e.\ x\in\Omega,$$
$$f(x,t)\geq 0\quad a.e.\ x\in\Omega,\ t\in(0,T).$$

فإن :

$$u(x,t)\geq 0\quad a.e.\ x\in\Omega,\ 0<t<T\ .$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖