الفصل السابع

مسائل ناقصية خطية

في هذا الفصل نتطرق إلى مبرهنة ستانباكيا Stampacchia ومبرهنة لاكس- ميلغرام Lax-Milgram. كما نتعرض إلى بعض التطبيقات المتمثلة في حل بعض المسائل الخطية الناقصية Elliptic.

1- تمهيدات

نقدم هنا، بعض المعلومات التي نرى ضرورتها في إثبات بعض المبرهنات التي سوف نعرضها في هذا الفصل حتى إن كان بعضها معروفا لدى القارئ.

قضية **1.1** (مبرهنة النقطة الثابتة)

ليكن (X,d) فضاءً مترياً تاماً و $S: X \to X$ تطبيقاً يحقق :

$$d(Su,Sv) \leq k\ d(u,v)\ ,\ \forall u,v \in X\ ,\ 0<k<1.$$

عندئذ تكون لـ S نقطة ثابتة وحيدة $w \in X$، أي بحيث أن $Sw=w$.

قضية **2.1** (مبرهنة تمثيل ريس Riesz)

ليكن H فضاء هيلبرتيا، وليكن H' فضاءه الثنوي. عندئذ، لكل $f \in H'$، يوجد عنصر وحيد $u \in H$ بحيث:

$$\langle f,v \rangle = (u,v)\ ,\ \forall v \in H$$

حيث تمثّل $\langle .,. \rangle$ الثنوية بين H و H'، بينما يرمز $(.\ ,\ .)$ للضرب الداخلي.

obeikandl.com

2- المسائل التغيراتية Variational Problems

نتعرض في هذا الباب إلى مبرهنة ستانباكياStampacchia[1] وكذلك إلى مبرهنة لاكس- ميلغرام Lax[3]- Milgram[2].

تعريف 1.2 (شكل ثنائي الخطية)

> ليكن H فضاء هيلبرتيا، وليكن التطبيق $a: H\times H\to\mathbb{R}$.
> نقول إن a شكل ثنائي الخطية على H إذا:
> 1) $a(\alpha u+\beta v,w)=\alpha a(u,w)\quad \beta a(v,w)$
> 2) $a(u,\alpha v+\beta w)=\alpha a(u,v)\quad \beta a(u,w)$
> لكل $u,v,w\in H$ ولكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

تعريف 2.2 (التناظر)

> ليكن H فضاء هيلبرتيا وَ a شكلاً ثنائي الخطية معرفاً على H.
> نقول إن a متناظر (تناظري) إذا تحقق :
> $$a(u,v)=a(v,u),\ \forall u,v\in H.$$

تعريف 3.2 (القسْرية)

> ليكن H فضاء هيلبرتيا وَ a شكلاً ثنائي الخطية معرفاً على H.
> نقول إن a قسري[4] coercive إذا وجد ثابت $\alpha>0$ بحيث :
> $$a(u,u)\ge\alpha\|u\|^2,\forall u\in H.$$

[1] غيدو ستامباكيا (1922- 1978) رياضي إيطالي.

[2] أرثر نورتن ميلغرام (1912- 1960) رياضي أمريكي.

[3] بيتر لاكس (1926-) رياضي أمريكي من أصل مجري.

[4] تستعمل في بعض المراجع أيضاً كلمة ناقصي أو أهليلجي للتعبير عن القسرية (coercivity).

obeikandi.com

قضية 4.2

ليكن H فضاء هيلبرتيا وَ a شكلاً ثنائي الخطية معرفاً على H.
نقول إن a مستمر (أو محدود) إذا وجد ثابت $C>0$ بحيث :

$$|a(u,v)| \le C\,\|u\|.\|v\|,\forall u,v \in H .$$

تعريف 5.2 (التحدّب)

ليكن X فضاء بناخيًا وليكن $K \subset X$. نقول إن K مجموعة جزئية محدّبة إذا كان :

$$tu+(1-t)v \in X ,\forall u,v \in K,\ 0 \le t \le 1.$$

مبرهنة 6.2 (ستانباكيا)

لتكن K مجموعة جزئية مغلقة ومحدّبة وغير خالية من فضاء هيلبرتي H. وليكن $a: H\times H \to \mathbb{R}$ شكلاً ثنائي الخطية مستمراً وقسرياً.
عندئذ، لكل $\varphi \in H'$ يوجد عنصر وحيد $u \in K$ بحيث :

$$a(u,v-u) \ge \langle \varphi, v-u \rangle, \forall v \in K \qquad (1)$$

بالإضافة، إذا كان a متناظراً فإن u يتمتع بالخاصية :

$$\frac{1}{2}\,a(u,u)-\langle \varphi,u\rangle = \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}\,a(v,v)-\langle \varphi,v\rangle\right\}. \qquad (2)$$

البرهان

بما أن $\varphi \in H'$ ، فإن استخدام مبرهنة تمثيل ريس يبيّن وجود عنصر وحيد $f \in H$ يحقق :

$$\langle \varphi, v\rangle = (f,v), \forall v \in H .$$

ومن جهة أخرى، لكل عنصر مثبت $w \in H$ ، فالتطبيق $v \to a(w,v)$ شكل خطي مستمر معرف على H ، ولذا يوجد عنصر وحيد $Aw \in H$ بحيث :

(3) $$a(w,v)=(Aw,v),\forall v\in H .$$

التطبيق $A:H\to H$ المعرف بـ (3) له الخواص الآتية:

أ) الخطية: ليكن $w\in H$ و $z\in H$ و $\alpha\in\mathbb{C}$. لدينا :

$$\begin{aligned}\forall v\in H,\ \big(A(w+z),v\big)&=a(w+z,v)\\&=a(w,v)+a(z,v)\\&=(Aw,v)+(Az,v)\\&=(Aw+Az,v),\end{aligned}$$

$$\big(A(\alpha w),v\big)=a(\alpha w,v)=\alpha a(w,v)=\alpha(Aw,v).$$

وعليه فإن $A(\alpha w+z)=\alpha Aw+Az$.

ب) الاستمرار: ليكن $w\in H$. لدينا :

$$\begin{aligned}\forall v\in H,\ |(Aw,v)|&=|a(w,v)|\\&\le C\,\|w\|\|v\|,\end{aligned}$$

مما يستلزم وجود ثابت موجب C بحيث :

$$\begin{aligned}\|Aw\|&=\sup_{v\in H}\frac{|(Aw,v)|}{\|v\|}\\&\le C\,\|w\|\end{aligned}$$

مهما كان $w\in H$. إذن التطبيق A خطي ومستمر ويحقق :

$$\begin{aligned}\forall w\in H,\ (Aw,w)&=a(w,w)\\&\ge\alpha\|w\|^2.\end{aligned}$$

الآن نود أن نبيّن أنه يوجد عنصر $u\in H$ يحقق :

(4) $$(Au,v-u)\ge(f,v-u),\forall v\in K$$

لنأخذ δ صغيرا بحيث $0<\delta<\frac{2\alpha}{C^2}$. إن المتباينة (4) تكافئ :

(5) $$(\delta f-\delta Au+u-u,v-u)\le 0,\forall v\in K$$

مما يستلزم أن : $u=P_K(\delta f-\delta Au+u)$ حيث إن $P_K:H\to K$ هو مؤثر الإسقاط العمودي على K. نعرّف الآن $S:K\to K$ كالآتي :

obeikandl.com

$$Sv = P_K(\delta f - \delta Av + v), \forall v \in K$$

فمن خواص مؤثر الإسقاط لدينا : $\|Sv - Sw\| \leq \|(v - w) - \delta(Av - Aw)\|$ ،

ومنه يأتي :

$$\|Sv - Sw\|^2 \leq \|v - w\|^2 - 2\delta(Av - Aw, v - w) + \delta^2\|Av - Aw\|^2$$
$$\leq \left[1 - 2\delta\alpha + S^2C^2\right]\|v - w\|^2 .$$

ولما كان $0 < \delta < \dfrac{2\alpha}{C^2}$ فإن $0 < \beta = 1 - 2\delta\alpha + \delta^2C^2 < 1$.

وباستخدام مبرهنة النقطة الثابتة (القضية 1.1) فإنه يوجد عنصر وحيد $u \in K$ يحقق $Su = u$ ، ومن ثمّ يحقق (5) و (4).

وباستغلال (3) نصل إلى أن u هو الحل الوحيد للمتباينة (1).

وعندما يكون a متناظراً فإنه من السهل التحقق من أن $a : H \times H \to \mathbb{R}$ يعرّف ضربا داخليا له نظيم (norm) $\sqrt{a(v,v)}$ مكافئ للنظيم الأساسي للفضاء H. وباستخدام مبرهنة تمثيل ريس فإن، لكل $\varphi \in H'$ ، يوجد عنصر وحيد $g \in H$ بحيث :

$$\langle \varphi, v \rangle = a(g, v), \forall v \in H . \qquad (6)$$

ومنه فإن (1) تكافئ :

$$a(g - u , v - u) \leq 0, \forall v \in K \qquad (7)$$

وهذا يعني أن g هي إسقاط u على K بالنسبة للضرب الداخلي الجديد ، أي أن $g = P_K(u)$ (بالنسبة للضرب الداخلي الجديد). وبالتالي فإن u هو الحل الوحيد للمسألة $\min\limits_{v \in K}\left[a(g - v , g - v)\right]^{\frac{1}{2}}$ أو للمسألة $\min\limits_{v \in K}\left[a(g - v , g - v)\right]$ ، أي $\min\limits_{v \in K}\left[a(v,v) - 2a(g,v)\right]$ ، أو $\min\limits_{v \in K}\left[\dfrac{1}{2}a(v,v) - (\varphi, v)\right]$. ومنه :

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K}\left\{\frac{1}{2}\, a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle\right\}.$$

وهي العلاقة المطلوبة في (2).□

obeikandl.com

لازمة 7.2 (توطئة لاكس- ميلغرام)

ليكن H فضاء هيلبرتيا وَ $a:H\times H\to\mathbb{R}$ شكلاً ثنائي الخطية مستمراً وقسرياً. عندئذ، لكل $\varphi\in H'$، يوجد عنصر وحيد $u\in H$ بحيث :

$$a(u,v)=\langle\varphi,v\rangle,\forall v\in H. \qquad (8)$$

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان a متناظراً فإن u تحقق :

$$\frac{1}{2}a(u,u)-\langle\varphi,u\rangle=\min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)-\langle\varphi,v\rangle\right\}.$$

البرهان

باستخدام المبرهنة 1.2 يتضح وجود عنصر وحيد $u\in H$ يحقق :

$$a(u,w-u)\geq\langle\varphi,w-u\rangle,\forall w\in H.$$

لنأخذ $w=v+u$. ومن ثمّ نصل إلى :

$$a(u,v)\geq\langle\varphi,v\rangle,\forall v\in H. \qquad (9)$$

ولنأخذ الآن $w=-v+u$. فنحصل على :

$$a(u,v)\leq\langle\varphi,v\rangle,\forall v\in H. \qquad (10)$$

وبمراعاة (9) وَ (10) نحصل على (8).

الجزء الباقي من اللازمة هو نتيجة مباشرة من المبرهنة 1.2.

3- تطبيقات

كل الدوال التي نعتبرها في الأمثلة الموالية ستكون ذات قيم حقيقية.

المثال 1

تعطى $f\in H^{-1}(\Omega)$ (علما أن $H^{-1}(\Omega)$ هو الفضاء الثنوي للفضاء $H_0^1(\Omega)$ الذي يمثل ملاصقة $D(\Omega)$).

نودّ إيجاد دالة $u\in H_0^1(\Omega)$ تحقق :

(11)
$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)=f(x),\ x\in\Omega \\ \qquad u(x)=0\ ,\ \ x\in\Gamma=\partial\Omega \end{cases}$$

حيث (a_{ij}) دوال تتمتع بالخاصية :

(12)
$$\begin{cases} a_{ij}\in L^{\infty}(\Omega),\forall i,j=1,....,n, \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j\geq\alpha\left|\zeta\right|^2,\ \ a.e\ x\in\Omega,\forall\zeta\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

و $\alpha>0$ عدد حقيقي وَ Ω مجال محدود من $\mathbb{R}^n$.

نضرب المعادلة (11) في $\varphi\in D(\Omega)$، ونكامل على Ω لنحصل، مستعملين الشرط الحدي وصيغة غرين Green للتكامل، على :

(13)
$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\ \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\ \mathrm{d}x=\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx\,.$$

تسمى المعادلة (13) الصيغة التغيراتية (Variational form) أو الصيغة الضعيفة (Weak form) للمعادلة (11). ولما كان $D(\Omega)$ كثيفا في $H_0^1(\Omega)$ يمكن صياغة المسألة (11) كالآتي: أوجد $u\in H_0^1(\Omega)$ بحيث :

(14)
$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\ \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\ dx=\langle f,v\rangle,\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

مبرهنة **1.3** (وجود ووحدانية)

> إذا كانت $f\in H^{-1}(\Omega)$ وكانت الدوال (a_{ij}) تحقق (12) فإن للمسألة (11) حلا $u\in H_0^1(\Omega)$.

البرهان

نعرّف الشكل الثنائي الخطية الآتي :

$$\forall u,v\in H_0^1(\Omega),\ \ a(u,v)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\ \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\ dx,$$

كما نأخذ الشكل الخطي التالي:

$$F(v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

وحيث إن $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ فإنه يوجد $M > 0$ يحقق $|a_{ij}(x)| \le M$ ، وذلك لكل $i, j = 1,2,\ldots,n$ ولكل x تقريباً على Ω. ومنه فإن :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega),\ |a(u,v)| \le M \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\le M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

وهو ما يثبت أن a شكل ثنائي الخطية محدود.

لدينا أيضاً :

$$a(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\, dx$$
$$\ge \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

وهو ما يبيّن أن a شكل قسري.

تجدر الإشارة هنا إلى أننا استعملنا النظيم المكافئ على الفضاء $H_0^1(\Omega)$.

الآن نبيّن أن F محدود. لدينا : $|F(v)| \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$.

وباستعمال توطئة لاكس- ميلغرام فإنه يوجد $u \in H_0^1(\Omega)$ وحيد يحقق (14) لكل $v \in H_0^1(\Omega)$.□

تعريف 2.3 (الحل الضعيف)

> تسمى المسألة (11) بمسألة حدّية، ويسمى الشرط الحدي $u = 0$ على $\partial\Omega$ (حافة Ω) بشرط ديرشلت Dirichlet[5].
>
> تسمى الدالة $u \in H_0^1(\Omega)$ التي تحقق (14) الحل الضعيف للمسألة (11).

---

[5] لوجان ديرشلت (1805- 1859) رياضي ألماني.

obeikandl.com

ملاحظة

نحصل على نفس النتيجة إذا كانت $f \in L^2(\Omega)$. كما يمكن للدالة u أن تكون ملساء إذا انتمت f والمعاملات (a_{ij}) إلى فضاءات سوبولاف ذات رتب عالية. قارن هذه النتيجة بما جاء في المبرهنة 1.3 من الفصل السادس.

مثال 2

ليكن Ω مجالا محدودا من $\mathbb{R}^n$ ، نبحث عن $u \in H^1(\Omega)$ تحقق المسألة الحدية :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) + a_0(x)u(x) = f(x) \text{ , } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ , on } \partial\Omega \end{cases} \tag{15}$$

حيث تحقق f و (a_{ij}) شروط المسألة (11). بالإضافة إلى ذلك نفترض أن :

$a_0 \in L^\infty(\Omega)$ وَ $a_0(x) \geq \beta > 0$ تقريباً لكل $x \in \Omega$.

هذه المسألة تسمى مسألة نِيُومان Neumann[6] حيث يمثل $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ المشتق الناظمي لـ u على الحافة $\partial\Omega$. يسمى الشرط $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ على $\partial\Omega$ شرط نيومان.

لنفرض أن Ω ذات حدود ملساء بكفاية (يكفي أن تكون من الصنف C^1)، ولتكن $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$. بضرب المعادلة (15) في φ والمكاملة على Ω نحصل على :

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + a_0(x)u(x)\varphi(x)\right] dx = \langle f, \varphi \rangle \tag{16}$$

ولما كان $C(\bar{\Omega})$ كثيفا في $H^1(\Omega)$ فإن (16) تبقى صحيحة، لكل $v \in H^1(\Omega)$:

[6] فون نيومان (1832- 1925) رياضي ألماني.

$$\forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + a_0(x)u(x)v(x) \right] dx = \langle f, v \rangle, \tag{17}$$

تعريف 3.3 (الحل الضعيف)

تسمى (17) الصياغة الضعيفة أو التغيراتية للمسألة (15). كما تسمى الدالة u الحل الضعيف للمسألة (15).

مبرهنة 4.3 (وجود ووحدانية)

ليكن Ω مجالاً ذا حدود ملساء من $\mathbb{R}^n$. نفرض أن $f \in H^{-1}(\Omega)$ وأن a_0 و (a_{ij}) تحقق الشروط المذكورة أعلاه. عندئذ يكون للمسألة (15) حل ضعيف وحيد $u \in H^1(\Omega)$ يحقق (17).

البرهان

نعرّف الشكل الثنائي الخطية على $H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + a_0(x)u(x)v(x) \right] dx.$$

ولما كان $a_0, a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ فإنه يوجد ثابت موجب C بحيث :

$$\left| a(u,v) \right| \le M \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| C_0 \right\|_\infty \left\| u \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| v \right\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\le C \left\| u \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| v \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

وهو ما يثبت أن a شكل ثنائي الخطية محدود. كما أن :

$$a(u,u) \ge \alpha \int_\Omega \left| \nabla u \right|^2 dx + \beta \int_\Omega u^2 dx$$

$$\ge \alpha_0 \int \left(\left| \nabla u \right|^2 + u^2 \right) dx$$

حيث $\alpha_0=\min(\alpha,\beta)$. وهو ما يثبت أن a شكل قسري. أما التطبيق $F(v)=\langle f,v\rangle$ فقد بينّا سابقاً أنه خطي ومحدود.

وباستعمال توطئة لاكس- ميلغرام، يتبيّن وجود $u\in H^1(\Omega)$ وحيد يحقق (17). وهو الحل الضعيف المطلوب.□

ملاحظة

لو اعتبرنا المسألة (15) بشرط ديرشلت، بدل شرط نيومن فإننا نحصل على حل وحيد دون اشتراط محدودية Ω ولا ملوسة حدودها.

يمكن أيضاً حل المسألة (11) في مجال Ω محدود باتجاه واحد وذلك لأن متباينة بوانكاريه Poincaré [7] صالحة للتطبيق في هذه الحالة.

مثال 3

نعتبر في الفضاء $H_0^1(\Omega)$، حيث Ω مجال محدود من $\mathbb{R}^n$، المجموعة

$$K=\left\{v\in H_0^1(\Omega):v(x)\geq 0\ ,\ a.e.\ x\in\Omega\right\}.$$

نودّ إيجاد حل للمتراجحة التغيراتية :

$$\langle -\Delta u,v-u\rangle\geq\langle f,v-u\rangle,\forall v\in K \tag{18}$$

حيث $f\in H^{-1}(\Omega)$.

مبرهنة 5.3

للمسألة (18) حلّ وحيد $u\in K$.

بالإضافة إلى ذلك فإن u يحقق :

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx-\langle f,u\rangle=\min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v(x)|^2dx-\langle f,v\rangle\right\}. \tag{19}$$

[7] هنري بوانكريه (1854- 1912) رياضي فرنسي.

البرهان

الشكل التغيراتي للمتراجحة (18) هو :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\left(\nabla v(x)-\nabla u(x)\right)dx \geq \langle f, v-u\rangle, \forall v\in K. \qquad (20)$$

لنعتبر الشكل الثنائي الخطية :

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx\ .$$

من الواضح أن:

$$|a(u,v)|\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$a(u,u)=\int_\Omega |\nabla u(x)|^2=\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

وهو ما يبيّن أن a شكل مستمر وقسري. أما الشكل الخطي $F(v)=\langle f,v\rangle$ فقد سبق ورأينا أنه مستمر.

ليكن $v,w\in K$. من السهل رؤية (الرمز "a.e." يعني "تقريبا حيثما كان"):

$$t\ v(x)+(1-t)w(x)\geq 0\ ,\ \text{a.e. } x\in\Omega$$

أي أن $t\ v+(1-t)w\in H_0^1(\Omega)$. ومنه نستنتج أن K مجموعة محدّبة.

لتكن (v_n) متتالية من K. إنها من $H_0^1(\Omega)$. وإذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=v$ فإن $v\in H_0^1(\Omega)$، ذلك لأن $H_0^1(\Omega)$ مغلق. ولما كان $v_n(x)\geq 0$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x)\geq 0$ وذلك تقريباً لكل x $(a.e.\ x\in\Omega)$. إذن $v\in K$. ومنه فإن K مجموعة محدّبة ومغلقة.

باستخدام مبرهنة ستانباكيا نستنتج وجود عنصر وحيد $u\in K$ يحقق (20) وكذلك (19). ومن ثمّ فهو حل ضعيف للمتراجحة (18).□

obeikandl.com

4- مبدأ الأعظمية Maximum Principle

نتناول في هذا البند موضوع تطبيق مبدأ الأعظمية على حلول بعض المسائل الناقصية.

مبرهنة 1.4

لتكن $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ دوالَّ تحقق الشرط القسري (12)، ولتكن $f \in L^2(\Omega)$. إذا كانت $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ تحقق :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + uv \right) = \int_{\Omega} fv \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{21}$$

فإن (حيث يرمز Γ لحافة Ω) :

$$\min\left\{ \inf_{\Gamma} u \ , \ \inf_{\Omega} f \right\} \le u(x) \le \max\left\{ \sup_{\Gamma} u \ , \ \sup_{\Omega} f \right\}. \tag{22}$$

البرهان

لإثبات النتيجة نستعمل طريقة البتر Truncation لستانباكيا. ولهذا الغرض نعتبر دالة $G \in C^1(\mathbb{R})$ بحيث:

- $|G'(s)| \le M \, , \forall s \in \mathbb{R}$ ،
- G متزايدة (تماماً) على $(0,+\infty)$ ،
- $\forall s \le 0$ ، $G(s) = 0$.

الآن نبدأ بالبرهان على المتباينة اليمنى في (22). نضع :

$$k = \max\left\{ \sup_{\Gamma} u \ , \ \sup_{\Omega} f \right\}.$$

إذا كانت $k = +\infty$ فالمتباينة محققة. أما إذا كان $k < +\infty$ فنعرّف الدالة $w = G(u-k)$ ونميّز بين الحالتين:

الحالة الأولى : قياس Ω محدود، أي $|\Omega| < +\infty$.

في هذه الحالة، من السهل التحقق من أن $w \in H^1(\Omega)$ وأن

$$w(x) = 0 \quad , \forall x \in \Gamma .$$

ومنه فإن $w \in H_0^1(\Omega)$. نعوّض بهذه الدالة في (21) لنحصل على :

$$\int_\Omega \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \; G'(u-k) + \int_\Omega (u-k) \; G(u-k) = \int_\Omega (f-k) \; G(u-k) \tag{23}$$

والتي تعطي بدورها :

$$\int_\Omega (u-k) G(u-k) = -\int_\Omega \sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \; G'(u-k) + \int (f-k) G(u-k) \le 0 .$$

ولكن :

$$\int_\Omega (u-k) G(u-k) = \int_{\Omega^+} (u-k) G(u-k) \le 0 \tag{24}$$

حيث إن :

$$\Omega^+ = \left\{ x \in \Omega : u-k > 0 \right\} .$$

وباستعمال تزايد G على $(0,+\infty)$ فإننا نحصل على :

$$\int_{\Omega^+} (u-k) G(u-k) \ge 0 . \tag{25}$$

وبمراعاة (24) وَ (25) نصل إلى : $\int_{\Omega^+} (u-k) G(u-k) = 0$. وهو ما يستلزم أن قياس Ω^+ منعدم. ومن ثمّ فإن :

$$u - k \le 0 \quad a.e. \; x \in \Omega$$

أي :

$$u(x) - k \le 0, \quad a.e. \; x \in \Omega$$

ولما كان $u \in C(\bar{\Omega})$ فإن :

$$u(x) \le k, \;\; \forall x \in \Omega .$$

الحالة الثانية : قياس Ω غير محدود، أي $|\Omega| = +\infty$.

في هذه الحالة يكون $k \geq 0$ وذلك لأن :

$$f \in L^2(\Omega) \text{ وَ } f \leq k, \quad a.e.\, x \in \Omega.$$

ليكن $k' > k \geq 0$ ولنأخذ $w = G(u - k')$. إذن $w \in H^1(\Omega)$، وذلك لأن :

$$\begin{aligned} w &= G(u-k') - G(-k') \\ &= uG'(\zeta) \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = G'(u-k')\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega).$$

لدينا أيضاً :

$$w(x) = 0, \forall x \in \Gamma.$$

ومنه فإن $w \in H_0^1(\Omega)$. نستعمل، كما سبق، w في (21) لنصل إلى (23).

وبإعادة كل الخطوات السابقة نحصل على :

$$u(x) \leq k', \forall x \in \Omega.$$

ولما كان $k' > k$ عددا كيفيا فإن :

$$u(x) \leq k, \ \forall x \in \Omega.$$

وللحصول على المتباينة اليسرى من (21) نعوض u بالدالة $w = -u$ ونعيد كل الخطوات السابقة لنحصل على :

$$w(x) \leq \max\left\{\sup_{\Gamma} w \ , \ \sup_{\Omega} (-f)\right\}$$

وهذا يؤدي بدوره إلى : $u(x) \geq \min\left\{\inf_{\Gamma} u \ , \ \inf_{\Omega} f\right\}$. □

لازمة **2.4**

لتكن $f \in L^2(\Omega)$ وَ $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ تحقق شرط القسرية. نفرض أن $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ تحقق العلاقة (21). عندئذ:

أ) إذا كان $u \geq 0$ على Γ وَ $f \geq 0$ على Ω فإن $u \geq 0$ على Ω.

وبالإضافة إلى ذلك $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left\{\|u\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}$ ، ولدينا :

ب) إذا كانت $f = 0$ على Ω فإن $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Gamma)}$ ،

جـ) إذا كانت $u = 0$ على Γ فإن $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$.

مبرهنة 3.4

نفرض أن (a_{ij}) وَ f كما في المبرهنة 1.4. إذا كانت $u \in H^1(\Omega)$ تحقق :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv) = \int_\Omega fv$$

فإن :

$$\inf_\Omega f \leq u(x) \leq \sup_\Omega f, \quad a.e.\ x \in \Omega.$$

البرهان

تعاد خطوات إثبات المبرهنة 1.4.□

5- تمارين

تمرين 1

تعطى المسألة :

$$(P)\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

حيث $p \in C^1(\bar{I}), q \in C(\bar{I}), f \in L^2(\Omega)$ ، $I = (0,1)$.

أوجد شروطاً على الدالتين p وَ q لكي تقبل المسألة (P) حلاً وحيداً.

obeikandl.com

تمرين 2

أ) بيّن أن :

$$|||u||| = \left(\int_0^1 |u''(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

تعرِّف نظيماً مكافئاً للنظيم المعتاد للفضاء $W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I)$ حيث $I = (0,1)$.

ب) برهن أن للمسألة

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x), \ 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

حلاً وحيداً $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ إذا كان $f \in L^2(I)$.

تمرين 3

ليكن Ω مجالاً محدوداً منتظماً من $\mathbb{R}^n$. نعرّف

$$\lambda_1 = \inf_{u \in C_0^1(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx}{\int_\Omega |u(x)|^2\, dx}.$$

أ) بيّن أن $\lambda_1 > 0$.

ب) لتكن $f \in L^2(\Omega)$، أثبت أنه إذا كان $c > -\lambda_1$ فإن للمسألة :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, \ \text{in } \Omega \\ u = 0, \ \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً $u \in H_0^1(\Omega)$.

obeikandi.com

تمرين 4

لتكن $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ، وليكن $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ حلاً للمسألة :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ \lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

أثبت أن هذا الحل وحيد.

تمرين 5

ليكن Ω مجالاً محدوداً وأملسَ من $\mathbb{R}^n$ وَ $f \in L^2(\Omega)$. بيّن أن للمسألة :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{in } \Omega \\ \Delta u = u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً.

تمرين 6

نفرض أن الدالة $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ تحقق :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + a \int_\Omega uv = \int_\Omega fv,$$

حيث إن $a > 0$ ، $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ وتحقق شروط القسرية.

بيّن أن :

$$\forall x \in \Omega, \quad \min\left\{\inf_{\partial\Omega} u, \inf_\Omega \frac{f}{a}\right\} \leq u(x) \leq \max\left\{\sup_{\partial\Omega} u, \sup_\Omega \frac{f}{a}\right\}.$$

تمرين 7

تعطى $f \in L^2(\Omega)$، حيث Ω مجال محدود وأملس من $\mathbb{R}^n$. ليكن $u \in H^2(\Omega)$ حلاً للمسألة :

obeikandi.com

$$(P)\begin{cases} -\Delta u = f, \text{ in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

أ) بيّن أن :

$$\int_{\Omega} f(x)dx = 0.$$

ب) أثبت من خلال مثال أنه إذا كانت العلاقة الأخيرة غير محققة فإنه لا يوجد حل $u \in H^2(\Omega)$ للمسألة (P).

تمرين 8

تعطى $f \in L^2(\mathbb{R})$ ، وليكن $u \in H^2(\mathbb{R})$ حلاً للمسألة :

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

بيّن أن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

تمرين 9

نفرض أن $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ يحقق لكل $\phi \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \phi + \int_{\Omega} u\phi = \int_{\Omega} f\phi$$

حيث إن (a_{ij}) وَ b_k ثوابت تحقق :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \zeta_i \zeta_j \geq \alpha |\zeta|^2, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0.$$

إذا كان Ω مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ وَ $f \in L^2(\Omega)$ ، أثبت أن :

$$\forall x \in \Omega, \quad \min\left\{\inf_{\partial\Omega} u, \inf_{\Omega} f\right\} \leq u(x) \leq \max\left\{\sup_{\partial\Omega} u, \sup_{\Omega} f\right\}.$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

obeikandi.com