الفصل السادس

فضاءات سوبولاف الكسرية الرتب

كنا قد قدمنا في الفصل الثالث فضاءات سوبولاف ذات الرتب الصحيحة. ولم نكن قادرين آنذاك على تقديم فضاءات سوبولاف ذات الرتب الحقيقية غير الصحيحة لأننا كنا نفتقد إلى الأداة التي تمكننا من ذلك التعريف. وهذه الأداة هي التوزيعات المعتدلة وتحويل فوريي.

وما دمنا قد تناولنا ذلك النوع من التوزيعات وعلاقة تحويل فوريي به نستطيع الآن تعريف فضاءات سوبولاف الكسرية الرتب (أي الحقيقية). الهدف من هذا الفصل هو الإشارة بالكثير من الإيجاز إلى هذا النوع من الفضاءات وإلى بعضٍ من خواصها وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية.

1- تعاريف وخواص أولية

دعنا نذكّر، في البداية، بالتعريف الذي أوردناه بخصوص فضاء سوبولاف $H^m(\mathbb{R}^n)$ عندما يكون m عددا صحيحا:

تعريف 1.1 (فضاء سوبولاف ذو رتبة صحيحة)

ليكن $m \in \mathbb{N}$.

1) فضاء سوبولاف $H^m(\mathbb{R}^n)$ من الرتبة m هو الفضاء :

$$H^m(\mathbb{R}^n)=\left\{u \in L^2(\mathbb{R}^n):\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n),\quad |\alpha| \le m\right\}.$$

(نذكّر أن $D^\alpha u$ يعني الاشتقاق بمفهوم التوزيعات، وهذا جائز لأن انتماء u إلى $L^2(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$).

2) فضاء سوبولاف $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ هو فضاء التوزيعات u بحيث يوجد ثابت موجب C يحقق:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n):\qquad |\langle u,\varphi\rangle| \le C\,\|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}.$$

يمثّل $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ في نفس الوقت ثنوي $H^m(\mathbb{R}^n)$ (بالمطابقة).

لنعرّف الآن فضاء سوبولاف $H^s(\mathbb{R}^n)$ حيث $s \in \mathbb{R}$.

تعريف 2.1 (فضاء سوبولاف ذو رتبة كسرية)

ليكن $s \in \mathbb{R}$. نرمز بـ $H^s(\mathbb{R}^n)$ (فضاء سوبولاف من الرتبة s) للفضاء :

$$H^s(\mathbb{R}^n)=\left\{u \in S'(\mathbb{R}^n):\ \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}$$

علما أن $|.|$ يرمز للنظيم الأقليدي في $\mathbb{R}^n$.

ملاحظة

1) سؤال : هل اختيار $s=m\in\mathbb{N}$ في التعريف السابق يعطي نفس التعريف لـ $H^m(\mathbb{R}^n)$ الذي ذكّرنا به في التعريف 1.1؟ الجواب : نعم.

والدليل على ذلك هو : بعد التأكد من قيام المتباينة التالية من أجل $s = m \in \mathbb{N}$ و $|\alpha| \le s$:

$$\exists C > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n :\quad |\xi^\alpha|^2 |\hat{u}|^2 \le C.\left(1+|\xi|^2\right)^s |\hat{u}|^2$$

يتضح أن $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ (حسب التعريف 2.1) يستلزم أن $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ من أجل $|\alpha| \le s$، وهذا يعني أن $\widehat{D^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$، أي $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ من أجل $|\alpha| \le s$. ومن ثمّ $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ (حسب التعريف 1.1).

ومن جهة أخرى، يوجد ثابت موجب C بحيث (تأكد من ذلك) :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n :\quad \left(1+|\xi|^2\right)^s \le C.\left(1+|\xi|^s\right)^2.$$

ومنه :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n :\quad \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}| \le C.\left[|\hat{u}| + |\xi|^s |\hat{u}|\right].$$

فإذا افترضنا أن $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ (حسب التعريف 1.1) فإن $\left[|\hat{u}| + |\xi|^s |\hat{u}|\right] \in L^2(\mathbb{R}^n)$. ومن ثمّ فالطرف الأيمن من المتباينة السابقة ينتمي إلى $L^2(\mathbb{R}^n)$. وبالتالي :

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

إذن $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ (حسب التعريف 2.1). وهكذا نستنتج تطابق التعريفين في حال رتبة s طبيعية.

2) لاحظ صحة الاستلزام لكل دليل متعدد α :

$$u \in H^m(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow\ D^\alpha u \in H^{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n).$$

يمكن التأكد من ذلك استنادا إلى التعريف. لدينا فعلا :

$$D^{\alpha}u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} \widehat{D^{\alpha}u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Leftrightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} |\xi^{\alpha}||\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

لكن :

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} |\xi^{\alpha}||\hat{u}| \leq \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}|.$$

ومنه :

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} |\xi^{\alpha}||\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} \widehat{D^{\alpha}u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow D^{\alpha}u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n).$$

3) نزود الفضاء $H^s(\mathbb{R}^n)$ بالضرب الداخلي :

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s \hat{u}(x)\bar{\hat{v}}(x)dx .$$

فيصبح فضاء هيلبرتيا (تأكد من أنه تام) نظيمه :

$$\|u\|_{H^s} = \left\| \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

لدينا النتيجة العامة التالية :

مبرهنة 3.1

> لكل عدد $s \in \mathbb{R}$ فإن مجموعة الدوال الاختبارية $D(\mathbb{R}^n)$ كثيفة في $H^s(\mathbb{R}^n)$.

البرهان

أولا : نبدأ بإثبات أن $S(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^s(\mathbb{R}^n)$. من أجل ذلك نلاحظ أن التطبيق :

$$H^s(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \supset S(\mathbb{R}^n)$$

$$u \mapsto \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}$$

إزومترية. وبالتالي فإن تطبيقه العكسي يحوّل $S(\mathbb{R}^n)$ (الكثيف في $L^2(\mathbb{R}^n)$) إلى فضاء جزئي A كثيف في $H^s(\mathbb{R}^n)$.

إن $S(\mathbb{R}^n) = A$: نعلم أن

$$u \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}}_{\in O_M(\mathbb{R}^n)} \hat{u} \in S(\mathbb{R}^n).$$

إذن $S(\mathbb{R}^n) \subset A$. لنتأكد من القضية العكسية. لدينا :

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}} \in O_M(\mathbb{R}^n).$$

وبالتالي :

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \underbrace{\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}}_{\in O_M(\mathbb{R}^n)} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \hat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow u \in S(\mathbb{R}^n).$$

إذن $S(\mathbb{R}^n) \supset A$. وهكذا $S(\mathbb{R}^n) = A$ ، ومنه نستنتج أن $S(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^s(\mathbb{R}^n)$.

ثانيا : نلاحظ أن :

$$\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{\varphi}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left(\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}+N}\widehat{\varphi}(\xi)\right)\times\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{-N}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

لكل $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ و N طبيعي كبير بكفاية (لكي يكون $\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{-N}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ محدودا). نختار العدد الطبيعي q أكبر من $\frac{s}{2}+N$

ونتذكّر أنصاف النظيمات التي أدخلناها في الفصل الخامس :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \ N_p(\varphi)=\sum_{\substack{|\alpha|\leq p\\|\beta|\leq p}}\left\|x^\alpha D^\beta\varphi(x)\right\|_{L^\infty}$$

المعرفة على $S(\mathbb{R}^n)$ فنستنتج أن :

$$\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n),\ \ \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq\underbrace{\left\|\left(1+|\xi|^2\right)^{-N}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}_{=C}.N_q(\widehat{\varphi}).$$

لنتذكّر المبرهنة 2.2 التي وردت فيها العلاقة :

$$\exists C>0,\ \forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n):\ \ N_q(\widehat{\varphi})\leq C.N_{q+n+1}(\varphi)$$

ولذلك :

$$\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n),\ \ \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq C.N_{q+n+1}(\varphi).$$

وهكذا تحصلنا على عدد طبيعي p يحقق :

$$\exists C>0,\ \forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n),\ \ \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq C.N_p(\varphi). \qquad (❖)$$

ثالثا : سنستخدم الخاصية القائلة بأن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $S(\mathbb{R}^n)$ (حتى إن لم نأت على برهانها).

ليكن $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$ و $0<\varepsilon$ معطى. بما أن $S(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^s(\mathbb{R}^n)$ فإنه يوجد $\varphi\in S(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\|u-\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq\frac{\varepsilon}{2}$. ثم إن كثافة $D(\mathbb{R}^n)$ في $S(\mathbb{R}^n)$ تؤدي إلى :

$$\exists\varphi_j\in D(\mathbb{R}^n):\ \ \forall p\in\mathbb{N},\ N_p(\varphi-\varphi_j)\xrightarrow{j\to+\infty}0.$$

وباستخدام العلاقة (❖) التي سبق تبيانها نجد :

$$\exists C>0,\ \exists j_0\in\mathbb{N},\ j\geq j_0:\ \left\|\varphi-\varphi_j\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\leq C.N_p(\varphi-\varphi_j)$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}.$$

وهكذا ينتج :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists j_0\in\mathbb{N}:$$
$$\begin{aligned} j\geq j_0\ \Rightarrow\ \left\|u-\varphi_j\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} &= \left\|u-\varphi+\varphi-\varphi_j\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq C.N_p(\varphi-\varphi_j)\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\ &=\varepsilon. \end{aligned}$$

ومنه تأتي نتيجة الكثافة المطلوبة.□

توضح النتيجة التالية كيف نستغل كثافة $S(\mathbb{R}^n)$ في $H^s(\mathbb{R}^n)$ لتمديد قوس الثنوية " $\langle u,\varphi\rangle_{S',S}$ " إلى قوس الثنوية " $\langle u,v\rangle_{H^{-s},H^s}$ " بفضل المطابقة بين الفضاء $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ وثنوي $H^s(\mathbb{R}^n)$.

مبرهنة **4.1** (الثنوية)

1) ليكن $s\in\mathbb{R}$ و $u\in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. إن التطبيق:

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}^n)&\longrightarrow\mathbb{C}\\ \varphi&\longrightarrow\langle u,\varphi\rangle_{S',S} \end{aligned}$$

يمتدّ إلى شكل خطي ومستمرّ على $H^s(\mathbb{R}^n)$. نرمز لهذا الشكل الخطي المستمرّ بـ:

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}^n)&\longrightarrow\mathbb{C}\\ v&\longrightarrow\langle u,v\rangle_{H^{-s},H^s}. \end{aligned}$$

2) يسمح هذا التمديد بمطابقة الفضاء $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ بثنوي الفضاء $H^s(\mathbb{R}^n)$، أي أن :

لكل $L \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$ (حيث يرمز $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ لثنوي $(H^s(\mathbb{R}^n))$، يوجد $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث:

$$\forall v \in H^s(\mathbb{R}^n): \qquad L(v) = \langle u,v \rangle_{H^{-s},H^s}.$$

البرهان

هذه المبرهنة هي مثيلة المبرهنة 5.1 من الفصل الثالث. ولذا لن نكرّر برهان القضية الأولى فيها، ونكتفي بالتذكير بأن كثافة $S(\mathbb{R}^n)$ في $H^s(\mathbb{R}^n)$ تؤدي إلى : لكل $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ توجد متتالية $\varphi_j \in S(\mathbb{R}^n)$ متقاربة في $H^s(\mathbb{R}^n)$ نحو v. ومن ثمّ نضع، كما هو الحال في المبرهنة 5.1 (الفصل 3) :

$$\forall v \in H^s(\mathbb{R}^n), \qquad \langle u,v \rangle_{H^{-s}(\mathbb{R}^n),H^s(\mathbb{R}^n)} := \lim_{j\to+\infty} \langle u,\varphi_j \rangle_{S'(\mathbb{R}^n),S(\mathbb{R}^n)}.$$

لاحظ أيضا أن :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \qquad \langle u,\varphi \rangle_{S'(\mathbb{R}^n),S(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n} \left\langle \hat{u}, \hat{\check{\varphi}} \right\rangle_{S'(\mathbb{R}^n),S(\mathbb{R}^n)}.$$

ومنه :

$$\langle u,\varphi \rangle_{S'(\mathbb{R}^n),S(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(1+\left|\xi^2\right|\right)^{-s/2} \hat{u}(\xi)\right].\left[\left(1+\left|\xi^2\right|\right)^{s/2} \hat{\check{\varphi}}(\xi)\right] d\xi$$

ومن ثمّ، يوجد ثابت موجب C بحيث :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \langle u,\varphi \rangle_{S'(\mathbb{R}^n),S(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| \left(1+\left|\xi^2\right|\right)^{-s/2} \hat{u} \right\|_{L^2} \left\| \left(1+\left|\xi^2\right|\right)^{s/2} \hat{\check{\varphi}} \right\|_{L^2}$$
$$= C \left\| u \right\|_{H^{-s}} \left\| \varphi \right\|_{H^s}.$$

وهو ما يثبت استمرار التطبيق

$$S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longrightarrow \langle u,\varphi \rangle_{S',S}$$

عندما يكون الفضاء $S(\mathbb{R}^n)$ مزودا بنظيم $H^s(\mathbb{R}^n)$. وبناء على ذلك يمكن تمديد هذا التطبيق إلى $H^s(\mathbb{R}^n)$ باستخدام كثافة $S(\mathbb{R}^n)$ في $H^s(\mathbb{R}^n)$.

أما برهان القضية الثانية فيتم كما يلي : نعتبر $L \in \left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)'$ ونعرّف التطبيق $A : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ بـ :

$$A(f) = L\left(F^{-1}(1+|\xi|^2)^{-s/2}f\right)$$

واضعين $w = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{-s/2}f$ ، حيث يرمز F^{-1} لمعكوس تحويل فوريي.

لدينا : $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ لأنه من السهل التأكد من أن :

$$\widehat{w} = (1+|\xi|^2)^{-s/2}f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

ومن جهة أخرى : $\|w\|_{H^s} = \|f\|_{L^2}$. وباستخدام استمرار التطبيق L نحصل على :

$$\begin{aligned}\exists C \geq 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \ |Af| &\leq C\|w\|_{H^s} \\ &= C\|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

وبالتالي فإن التطبيق A خطي ومستمر على $L^2(\mathbb{R}^n)$. ولذلك يوجد (حسب مبرهنة ريس) $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ بحيث :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \ Af = (f, \overline{g})_{L^2}.$$

عندما نضع :

$$u = F\left((1+|\xi|^2)^{s/2}g\right) \in S'(\mathbb{R}^n)$$

نلاحظ أن :

$$(1+|\xi|^2)^{-s/2}\overline{F}u = (2\pi)^n g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

ومنه : $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

لدينا أيضا :

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n),\ \langle u,\varphi\rangle &= \left\langle F\left((1+|\xi|^2)^{s/2} g\right),\varphi\right\rangle\\ &= \left\langle (1+|\xi|^2)^{s/2} g,\hat{\varphi}\right\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2} g.\hat{\varphi}\\ &= A\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}\right)\\ &= L(F^{-1}\hat{\varphi})\\ &= L(\varphi).\end{aligned}$$

هـذا يعـني تطـابق التطبـيقين u و L الخطـيين والمـستمرين علـى $S(\mathbb{R}^n)$ ، الكثيف في $H^s(\mathbb{R}^n)$. ومن ثمّ، فهما متساويان على $H^s(\mathbb{R}^n)$.□

ملاحظات

نكـرّر هنـا حرفيـا تقريبـا ملاحظـتين أوردناهمـا في الفصل الثالـث (فضاءات سوبولاف الصحيحة الرتب) :

1) تبـيّن هـذه المبرهنـة أنـه بالإمكـان مطابقـة الفـضاء الثـوي $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ للفضاء $H^s(\mathbb{R}^n)$ بـ $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$: إنها مطابقة ناتجة عن تمديد باستمرار للثنوية بين $S(\mathbb{R}^n)$ و $S'(\mathbb{R}^n)$.

من المهمّ جدّا أن نشير إلى أنها أيضا مطابقـة مستقلة عن الضرب الداخلي الذي نختاره على الفضاء $H^s(\mathbb{R}^n)$. ولذا نسميها المطابقة القانونية.

2) إذا كـان $(.,.)$ ضـربا داخليـا علـى $H^s(\mathbb{R}^n)$ فإننـا نـستطيع مطابقة الفضاء $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ بالفضاء ذاته (تلك هي خاصية يتمتع بها كل فضاء هيلبرتي):

$$\forall L\in (H^s(\mathbb{R}^n))',\ \exists! u H^s(\mathbb{R}^n):\ \ L(v)=(u,v)_{H^s},\forall v\in H^s(\mathbb{R}^n).$$

والمطابقة هنا تعني مطابقة العنصرين L و u.

من المهمّ (جدًّا !) إلى أن نشير إلى أنها مطابقة مرتبطة بالضرب الداخلي $(u,v)_{H^s}$.

علينا أيضا أن ننتبه إلى أنه بالإمكان تعريف أكثر من ضرب داخلي، على فضاء معيّن، تنبثق عنها نظيمات متكافئة.

خلاصة القول: ينبغي الحذر من مطابقة الفضاءات وإدراك نوع المطابقة التي نقصدها في كل حالة من الحالات التي نريد دراستها، وإلا ارتكبنا أخطاء لا تغتفر. وعلى الرغم من هذا التحذير فإنه من المفيد أن ننبّه إلى أن اختلاف المطابقات ليس سلبيا في جميع الأحوال، إذ يمكن حسن استغلالها للبرهان على نتائج مهمة كما رأينا في فصل فضاءات سوبولاف الصحيحة الرتب.

3) إن الفضاء $D(\Omega)$ ليس عموما كثيفا في $H^s(\Omega)$ (أي أنه لا يجوز استبدال $\mathbb{R}^n$ بمفتوح كيفي Ω في المبرهنة السابقة). لكن ما هو $H^s(\Omega)$ عندما يكون $s \notin \mathbb{Z}$؟ فنحن لا نستطيع تعريفه باستخدام تحويل فوريي الذي لا يصلح في غير الفضاء بأكمله. هناك عدة تعريفات لـ $H^s(\Omega)$ تتطابق كلها في الحالة التي يكون فيها Ω أملس (regular). ومن بين تلك التعريفات ذلك الذي يقول إن $u \in H^s(\Omega)$ إذا وجد $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ بحيث $v_{|\Omega} = u$ وهذا لكل $s \geq 0$.

ونعرّف الفضاء الجزئي $H_0^s(\Omega)$ بأنه ملاصقة $D(\Omega)$ في $H^s(\Omega)$ لما $s \geq 0$. ويمكن أن نميّزه عموما بأنه يتألف من عناصر $H^s(\Omega)$ التي تحقق شروطا معيّنة على حافة Ω. ومن ثمّ نعرّف $H^{-s}(\Omega)$ على أنه ثنوي الفضاء $H_0^s(\Omega)$.

إليك التمرين التالي الذي يوضح بأن $H_0^s(\Omega) \subsetneq H^s(\Omega)$:

تمرين

نعتبر $\Omega =]0,1[$. وليكن $u \in H^1(\Omega)$. نفرض وجود متتالية $(u_j) \in D(\Omega)$ بحيث:

$$u_j \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$$

1) أثبت أن المتتالية (u_j) متقاربة بانتظام في $[0,1]$ نحو دالة مستمرّة v بحيث $v(0) = v(1) = 0$.

2) بيّن أن $u = v$ حيثما كان تقريبا على المجال $[0,1]$.

3) استنتج أن $D(\Omega)$ ليس كثيفا في $H^1(\Omega)$.

2- صقالة (ملوسة) (regularity) عناصر $H^s(\mathbb{R}^n)$

نقصد بصقالة (أو ملوسة، أو مرونة) دالة مدى تمتعها بالخواص التحليلية، مثل الاستمرار وقابلية المفاضلة مرة أو أكثر، وكذا قابليتها للمكاملة، الخ. نبدأ بهذه التوطئة :

توطئة 1.2

ليكن $\xi \in \mathbb{R}^n$ و $\eta \in \mathbb{R}^n$. لدينا المتباينتان :

1) لكل $0 \le s$:

$$\left(1+|\xi|^2\right)^s \le 4^s \left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^s + \left(1+|\eta|^2\right)^s\right].$$

2) لكل $s \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(1+|\xi|^2\right)^s \le 2^{|s|} \left(1+|\eta|^2\right)^s \times \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{|s|}.$$

البرهان

1) تأتي من المتباينة $(a+b)^s \le 2^s\left(a^s+b^s\right)$ المحققة لكل أعداد موجبة a و b و s .

2) يكفي، بفضل التناظر بين ξ و η في المتباينة، إثباتها من أجل s موجب ... بل يكفي عندئذ إثبات:

$$\left(1+|\xi|^2\right)\times\left(1+|\eta|^2\right)^{-1} \le 2\left(1+|\xi-\eta|^2\right),$$

أي :

$$\left(1+|\xi|^2\right) \le 2\left(1+|\xi-\eta|^2\right)\left(1+|\eta|^2\right).$$

لاحظ أن ذلك يأتي من كون :

$$\begin{aligned}\left(1+|\xi|^2\right) &\le 1+2|\xi-\eta|^2+2|\eta|^2\\ &\le 2\left(1+|\xi-\eta|^2\right)\left(1+|\eta|^2\right).\square\end{aligned}$$

مبرهنة **2.2**

لكل $s>\frac{n}{2}$ ، لدينا :

1) كل عنصر من $H^s(\mathbb{R}^n)$ دالة مستمرة تؤول إلى 0 عند اللانهاية.

2) $\begin{cases}u\in H^s(\mathbb{R}^n)\\ v\in H^s(\mathbb{R}^n)\end{cases} \Leftarrow uv\in H^s(\mathbb{R}^n)$.

برهان

1) ليكن $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$. لاحظ أن :

$$\begin{cases} u \in H^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ s > \dfrac{n}{2} \Leftrightarrow \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

ومنه نكتب :

$$\hat{u}(\xi) = \underbrace{\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)} \times \underbrace{\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}}}_{\in L^2(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow s > \frac{n}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

ولذا فالفرض $s > \frac{n}{2}$ يؤدي إلى $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. وهذا يستلزم (حسب خواص تحويل فوريي) أن u مستمرة وتؤول إلى 0 عند اللانهاية.

2) ليكن $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ و $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. نعلم أن $\hat{u}\hat{v} = \widehat{u * v}$. وبالتالي $\widehat{uv} = (2\pi)^{-n}\hat{u} * \hat{v}$ (تأكد من ذلك). وبالاستناد إلى المتباينة الأولى الواردة في التوطئة السابقة يمكن القول بأنه يوجد ثابت موجب C بحيث:

$$\begin{aligned} \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \left|\widehat{uv}\right|(\xi) &\le C \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \left|\hat{u} * \hat{v}\right|(\xi) \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} \left|\hat{u}(\xi-\eta)\right|\right] . \left|\hat{v}(\eta)\right| d\eta \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{u}(\xi-\eta)\right| \left[\left(1+|\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} . \left|\hat{v}(\eta)\right|\right] d\eta. \end{aligned}$$

لاحظ بعد ذلك أن الدالة :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}} \left|\hat{u}(\xi-\eta)\right|\right] . \left|\hat{v}(\eta)\right| d\eta$$

جداء تزاوجي لدالتين، إحداهما في $L^1(\mathbb{R}^n)$ والثانية في $L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هما :

$$\begin{cases}\hat{v}\in L^1(\mathbb{R}^n),\\ \eta\mapsto\left(1+|\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}}\left|\hat{u}(\eta)\right|\in L^2(\mathbb{R}^n).\end{cases}$$

ومنه (حسب خواص الجداء التزاوجي) فهذا الجداء ينتمي إلى $L^2(\mathbb{R}^n)$.

نفس الملاحظة قائمة أيضا في الحد

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\hat{u}(\xi-\eta)\right|\left[\left(1+|\eta|^2\right)^{\frac{s}{2}}.\left|\hat{v}(\eta)\right|\right]d\eta.$$

ومن ثمّ فإن $\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\widehat{u.v}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ ، أي $u.v\in H^s(\mathbb{R}^n)$.□

مثال

كل عنصر من $H^1(\mathbb{R})$ دالة مستمرة و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}u(x)=0$ لأن $s=n=1$ ، ومنه يأتي قيام الشرط $\frac{n}{2}<s$.

نرمز بـ $C_b^m(\mathbb{R}^n)$ لفضاء الدوال القابلة للاشتقاق حتى الرتبة m ومشتقاتها محدودة ومستمرة.

نظرية 3.2 (غمس سوبولاف Sobolev embedding)

ليكن $m\in\mathbb{N}$ و $s>\frac{n}{2}+m$. لدينا الاحتواء الطبولوجي:

$$H^s(\mathbb{R}^n)\subset C_b^m(\mathbb{R}^n)$$

أي أن التطبيق المطابق

$$\begin{aligned}H^s(\mathbb{R}^n)&\to C_b^m(\mathbb{R}^n)\\ u&\mapsto u\end{aligned}$$

مستمرّ، بمعنى أنه يوجد ثابت موجب C بحيث :

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ |\alpha|\le m,\quad \left\|D^\alpha u\right\|_{C_b^m(\mathbb{R}^n)}\le C\left\|u\right\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

البرهان

نكتفي بتقديم الاحتواء الجبري : نفرض أن $|\alpha| \le m$. نعلم أن $D^{\alpha}u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$. ثم إن الفرض $s > \frac{n}{2} + m$ يؤدي إلى $s - |\alpha| > \frac{n}{2}$. ومنه، حسب المبرهنة السابقة : $D^{\alpha}u$ دالة مستمرة وتؤول إلى 0 عند اللانهاية. □

تعتبر فضاءات سوبولاف الفضاءات "الطبيعية" التي نبحث فيها عن حلول الكثير من المعادلات التفاضلية الجزئية. فإذا اعتبرنا، مثلا، معادلة لابلاس

$$\Delta u - \lambda u = f$$

في ساحة من $\mathbb{R}^2$، وكان $f \in C^0$ (أي f مستمرا) فإن الحل u لا ينتمي عموما إلى C^2. أما إذا كان $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ فإن u يكون في الفضاء الطبيعي $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$:

مبرهنة 4.2

$$\forall f \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad \exists! u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n) : \ \Delta u - \lambda u = f \ .$$

البرهان

نعلم أن المعطيات تستلزم أن $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ وأنه يوجد $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ وحيد حل للمعادلة المعطاة. ولدينا :

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{|\xi|^2 + \lambda}.$$

ومن ثمّ فالشرط $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى :

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s+2}{2}} |\hat{u}(\xi)| = \frac{1+|\xi|^2}{\lambda + |\xi|^2}\left(1 \quad |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}(\xi)|.$$

ولما كان

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

و $\dfrac{1+|\xi|^2}{\lambda+|\xi|^2}$ محدودا فإن

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s+2}{2}}\hat{u}\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

وهذا يعني : $u\in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$. أما وحدانية الحل فهي تأتي من وحدانيته في فضاء التوزيعات المعتدلة.□

ملاحظة

سؤال 1 : إذا كان $u\in H^s(\mathbb{R}^n)$ فإلى أي فضاء سوبولاف ينتمي الاقتصار $u_{|\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}}$، أي $u_{|\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}}\in H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ وما العلاقة بين s و r؟

سؤال 2 : إذا كان $u\in H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ فهل يوجد $v\in H^s(\mathbb{R}^n)$ بحيث $u=v_{|\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}}$؟ وإذا كان الجواب بنعم فما العلاقة بين s و r؟

الجواب عن السؤالين يكمن في المبرهنة الموالية.

مبرهنة 5.2

نفرض أن $s>\dfrac{n}{2}$. إن المؤثر

$$\gamma: S(\mathbb{R}^n)\to S(\mathbb{R}^{n-1})$$
$$\varphi\mapsto\gamma\varphi$$

حيث

$$\gamma\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},0)$$

يمتد بصفة وحيدة إلى مؤثر خطي ومستمر وغامر

$$\gamma: H^s(\mathbb{R}^n)\to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$$
$$v\mapsto\gamma v$$

يسمى γv أثر v، ويدعى المؤثر γ مؤثر الأثر (trace).

تعمّم هذه المبرهنة إلى الحالة التي نستبدل فيها $\mathbb{R}^n$ بـ Ω وعندئذ نستبدل في المبرهنة $\mathbb{R}^{n-1}$ بـ $\partial\Omega$ (حافة Ω) وذلك عندما تكون Ω ملساء.

نحصل مثل على تمييز للفضاء

$$H_0^1(\Omega)=\left\{u\in H^1(\Omega):u_{|\partial\Omega}=0\right\}$$

علما أن $u_{|\partial\Omega}\in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

يتم إثبات المبرهنة بالتأكد من العلاقة (أثبت أن هذا كاف) :

$$\exists C\geq 0,\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^n):\ \|\gamma\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})}\leq C\,\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

3- تمارين

تمرين 1

نعتبر أن $s\geq 0$.

1) أثبت أن $e^{-|x|}\in H^s(\mathbb{R})$ إذا وفقط إذا كان $s<\frac{3}{2}$.

2) ما هو الشرط اللازم والكافي حول s ليكون $\chi_{[-a,a]}\in H^s(\mathbb{R})$ ($\chi_{[-a,a]}$ هي الدالة المميّزة للمجال $[-a,a]$).

تمرين 2

أثبت أن $\delta\in H^s(\mathbb{R}^n)$ إذا وفقط إذا كان $s+\frac{1}{n}<0$ حيث يرمز $\delta\in H^s(\mathbb{R}^n)$ لتوزيع ديراك.

تمرين 3

أثبت لكل $s \in \mathbb{R}$ و $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ أن : $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. (إرشاد : استخدم المبرهنة السابقة لما $s > \frac{n}{2}$. أما في حالة $s \leq \frac{n}{2}$ فيمكن استغلال المتباينة الثانية في التوطئة 2.1).

تمرين 4

نقول إن $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ إذا كان $u \in D'(\Omega)$، ومهما كان $\varphi \in D(\Omega)$ فإن $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

أثبت أن :

1) $s > \frac{n}{2} + m$ يؤدي إلى $H^s_{\text{loc}}(\Omega) \subset C^m(\Omega)$.

2) $C^m(\Omega) \subset H^s_{\text{loc}}(\Omega)$.

3) $\bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s_{\text{loc}}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$.

تمرين 5

لتكن s و s_1 و s_2 أعدادا حقيقية بحيث $-\infty < s_1 < s < s_2 < +\infty$ و $s = (1-\theta)s_1 + s_2\theta$.

بكتابة

$$(1+|\xi|^2)^s |f(\xi)|^2 = \left((1+|\xi|^2)^{s_1} |f(\xi)|^2\right)^{1-\theta} \times \left((1+|\xi|^2)^{s_2} |f(\xi)|^2\right)^{\theta}$$

من أجل $f \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$، أثبت أن :

$$\exists C \geq 0,\ \forall f \in H^{s_2},\quad \|f\|_{H^s} \leq C \|f\|^{1-\theta}_{H^{s_1}} . \|f\|^{\theta}_{H^{s_2}} .$$

استنتج أن :

$$\exists C \geq 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall f \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n),\quad \|f\|_{H^{s_1}} \leq \varepsilon \|f\|_{H^{s_2}} + \frac{C}{\varepsilon^{\frac{\theta}{1-\theta}}} \|f\|_{H^{s_1}},$$

(إرشاد : استخدم متباينة هولدر والمتباينة $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ حيث $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$).

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖