الفصل الرابع

جــداء التـــــزاوج Convolution Product

يؤدي جداء التزاوج (اللف) دورا بارزا في التحليل الدالي حيث يتيح بوجه خاص، تقريب دوال لا تتمتع بخواص تحليلية كثيرة (أي سيئة السلوك) بمتتالية دوال حسنة السلوك. ويهمنا هنا كيف يمكن تعميم هذا المفهوم ليشمل تزاوج دالة مع توزيع أو توزيع مع توزيع.

1- مبرهنتان أساسيتان

يؤدي جداء التزاوج دورا مهمّا في التحليل، سيما في إثبات العديد من النتائج. وقد سبق أن أشرنا إليه في الفصل الأول (المبرهنة 3.2). ويهمنا هنا دراسة جداء التزاوج المعرف على التوزيعات، باعتبار أن القارئ ملمّ بخصائصه في حالة الدوال العادية.

ورغم ذلك يستحسن، قبل الشروع في تقديم مفهوم التزاوج المتعلق بالتوزيعات، التذكير ببعض خواصه عندما يتعلق الأمر بالدوال.

إذا كانت f و g دالتين قابلتين للمكاملة محليا على $\mathbb{R}^n$ ، نسمي جداء تزاوج f و g عند a ، الذي نرمز له بـ $f*g(a)$ ، القيمة المعرفة بالتكامل (في حالة تقاربه):

$$f*g(a)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(a-x)dx$$

نجمّع في القضية التالية بعض خاصيات هذا الجداء:

قضية 1.1

1) جداء التزاوج تبديلي.

2) إذا كـان الجـداء $f * g$ موجـودا فـإن حاملـه محتـوى في ملاصـقة مجموع حاملي f و g ، أي : $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

3) إذا كـان $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ حيـث $1 \le p \le +\infty$ ورمزنـا بـ p' للعدد المرافق لـ p (أي أن $\frac{1}{p} \quad \frac{1}{p'} = 1$) فإن:

أ) $f * g$ معرف عند كل نقطة وهو محدود ومستمر بانتظام على $\mathbb{R}^n$.

ب) لدينا : $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$.

جـ) إذا كـان $1 < p < +\infty$ فإن $f * g$ منعدم عند اللانهاية ، أي أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد متراص $K \subset \mathbb{R}^n$ بحيث:

$$x \in \complement_{\mathbb{R}^n} K \quad \Rightarrow \quad |f * g(x)| \le \varepsilon$$

4) إذا كـان f و g عنصرين من $L^1(\mathbb{R}^n)$ فإن $f * g$ عنصر من $L^1(\mathbb{R}^n)$ ، ولدينا : $\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)dx = (\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy)(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)dz)$.

5) ليكـن p و q عـددين حقيقيين بحيـث $1 \le p \le +\infty$ و $1 \le q \le +\infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ge 0$. وليكـن $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. عندئذ:

أ) $f * g(a)$ معرف لكل $a \in \mathbb{R}^n$ تقريبا.

ب) إذا كـان العدد r يحقق $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ فإن:

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n), \|f * g\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} .$$

6) إذا كانت f دالة قابلة للمكاملة محليا على $\mathbb{R}^n$ وكانت $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ، وحامل إحدى الدالتين متراصا فإن الدالة $f * g$ من الصنف $C^k(\mathbb{R}^n)$. ونحصل على المشتقات الجزئية $D^\alpha(f * g)$ وفق القاعدة:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n : \ |\alpha| \leq k, \qquad D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g.$$

نقـدّم الآن مـبرهنتين أولاهمـا خاصـة بالاشـتقاق وثانيتهمـا خاصـة بالمكاملـة، مـع التـذكير بـأن $E(\mathbb{R}^d) = C^\infty(\mathbb{R}^d)$ وأن $E'(\mathbb{R}^d)$ يرمـز لثـوي $E(\mathbb{R}^d)$ ، وهذا الثنوي يطابق فضاء التوزيعات المتراصة الحامل.

مبرهنة **2.1** (الاشتقاق)

نعتبر الدالة $\varphi \in E(\mathbb{R}^{p+q})$ والتوزيع $T \in E'(\mathbb{R}^p)$. إن الدالة:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^q &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longrightarrow f(y) = \langle T(x), \varphi(x, y) \rangle \end{aligned}$$

من الصنف $C^\infty(\mathbb{R}^q)$ ، ولدينا:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^q, \qquad D^\alpha f(y) = \langle T(x), D_y^\alpha \varphi(x, y) \rangle.$$

البرهان

نكتفي هنا بوصف خطوات إثبات المبرهنة.

المرحلة الأولى: يتم البرهان على استمرار الدالة

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^q &\longrightarrow E(\mathbb{R}^p) \\ y &\longrightarrow \varphi_y = \varphi(., y) \end{aligned}$$

من $\mathbb{R}^q$ إلى $C^0(\mathbb{R}^p)$ ، وذلك باعتبار $\varphi \in E(\mathbb{R}^{p+q})$ مثبتا. ثم نستنتج استمرار هذه الدالة من $\mathbb{R}^q$ إلى $E(\mathbb{R}^{p+q})$. وهكذا نستخلص أن التركيب :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^q &\xrightarrow{\psi} E(\mathbb{R}^p) \xrightarrow{T} \mathbb{C} \\ y &\longrightarrow \varphi_y \longrightarrow \langle T, \varphi_y \rangle \end{aligned}$$

التطبيق مستمرّ بوصفه تركيب دالتين مستمرتين.

المرحلـة الثانيـة: نحـسب مـشتقا جزئيـا للدالـة f. نكتـب (حيـث $\{e_i,\ i=1,...,n\}$ يمثّل الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^n$):

$$\frac{f(y+he_i)-f(y)}{h}-\left\langle T,\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi_y\right\rangle=\left\langle T,\frac{\varphi_{y+he_i}-\varphi_y}{h}-\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi_y\right\rangle.$$

ونضع:

$$u_h=\frac{\varphi_{y+he_i}-\varphi_y}{h}-\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi_y.$$

ثم نثبت أن $\lim_{h\to 0}u_h=0$ في $\mathrm{E}(\mathbb{R}^p)$ وذلك بعد كتابة u_h على النحو:

$$u_h(x)=\frac{\varphi(x,y+he_i)-\varphi(x,y)}{h}-\frac{\partial}{\partial y_i}\varphi(x,y).$$

وبالتالي نحصل، بفضل انتماء T إلى $\mathrm{E}'(\mathbb{R}^p)$ على: $\lim_{h\to 0}\langle T,u_h\rangle=\langle T,0\rangle$. وهـذا يعني أن: $\frac{\partial f}{\partial y_i}(y)=\langle T,\varphi_y\rangle$.

المرحلة الثالثة: نثبت أن $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ مستمر، وبذلك تكون $f\in C^1(\mathbb{R}^q)$. ثم نواصـل بـالتراجع (induction) فيتبـيّن أن الانتمـاء $f\in C^m$ يـستلزم $f\in C^{m+1}$، وهو ما يبيّن أن $f\in C^\infty(\mathbb{R}^q)$.□

مبرهنة **3.1** (المكاملة)

> ليكن $\varphi\in\mathrm{E}(\mathbb{R}^{p+q})$ و $T\in\mathrm{E}'(\mathbb{R}^p)$. نرمز بـ P لبلاطة متراصة من $\mathbb{R}^q$. عندئذ: $\left\langle T,\int_P\varphi(.,y)dy\right\rangle=\int_P\langle T,\varphi(.,y)\rangle dy$.

البرهان

يكفي إثبات المبرهنة من أجل $q=1$، أي $P=[a,b]$، ذلك أننا نحصل على الحالة العامة بالمكاملة المتوالية بالنسبة لـ y_1، ...، y_q (وضّح ذلك).

نضع:

$$F(y) = \left\langle T, \int_a^y \varphi(.,t)dt \right\rangle$$

ثم نطبّق المبرهنة السابقة فنحصل على:

$$F'(y) = \left\langle T, \left(\int_a^y \varphi(.,t)dt \right)' \right\rangle$$
$$= \langle T, \varphi(.,y) \rangle.$$

ومن ثمّ:

$$F(b) = F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b F'(y)dy$$
$$= \int_a^b \langle T, \varphi(.,y) \rangle dy$$

أي:

$$\left\langle T, \int_a^b \varphi(.,y)dy \right\rangle = \int_a^b \langle T, \varphi(.,y) \rangle dy .$$

وهو المطلوب.□

ملاحظة

1) نكتب، أحيانا، تجاوزا:

$$\left\langle T(x), \int_P \varphi(x,y)dy \right\rangle = \int_P \langle T(x), \varphi(x,y) \rangle dy$$

بدل

$$\left\langle T, \int_P \varphi(.,y)dy \right\rangle = \int_P \langle T, \varphi(.,y) \rangle dy .$$

2) يمكننا في هذه المبرهنة استبدال P بمجموعة أخرى ليس لها شكل البلاطة.

ندخل الآن مفهوم المجموعات المتزاوجة.

تعريف 4.1 (المجموعات المتزاوجة)

نقـول عـن مجمـوعتين مغلقـتين F و G مـن $\mathbb{R}^n$ إنهمـا متزاوجتـان (أو إنهما مقبولتان) إذا كان:

$$\forall R>0,\ \exists \rho>0:$$
$$\left(x\in F \wedge\ y\in G\ \wedge\ \|x+y\|<R\right)\ \Rightarrow\ \left(\|x\|<\rho\ \ \wedge\ \|y\|<\rho\right).$$

وبصفة عامة نقول عن جماعة منتهية من المغلقات $(F_j)_{j\in J}$ إنها متزاوجة (أو مقبولـة) إذا كـان: لـكـل مجموعـة جزئيـة $I\subset J$ وكـل $0<R$، يوجـد ρ بحيث :

$$\forall R>0,\ \exists \rho>0:\ \left((x_i)_{i\in I}\in F_i\quad \wedge\quad \left\|\sum_{i\in I} x_i\right\|<R\right)\Rightarrow\left(\|x_i\|<\rho\ ,\ i\in I\right).$$

تمرين

نترك للقارئ مهمة إثبات الخواص التالية:

1) إذا كـان A مغلقـا و B متراصـا في $\mathbb{R}^n$ فـإن الجماعـة (A,B) متزاوجة.

2) في $\mathbb{R}$، تمثل الفترات $[a_i,+\infty[$ (حيث $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ أعداد حقيقية) جماعة متزاوجة.

3) لاحظ أن الفترتين $]a,+\infty]$ و $]-\infty,b]$ ليستا متزاوجتين، وذلك مهما كان العددان الحقيقيان a و b.

قضية 5.1

إذا كـان F و G مغلقـين ومتـزاوجين مـن $\mathbb{R}^n$ فـإن مجموعهمـا $F+G$ مغلق من $\mathbb{R}^n$.

البرهان

لتكن (x_j) متتالية من $F+G$ تؤول إلى عنصر x من $\mathbb{R}^n$. نريد إثبات أن $x\in F+G$. لنضع $x_i = y_i + z_i$ حيث $y_i\in F$ و $z_i\in G$.

لما كانت المتتالية (x_j) متقاربة فهي محدودة من الأعلى. إذن، يوجد $R>0$ بحيث $\|x_j\|<R$، أي $\|y_j+z_j\|<R$. لكن F و G متزاوجان. ومنه يوجد $\rho>0$ بحيث $\|y_j\|<\rho$ و $\|z_j\|<\rho$. ومن ثمّ، توجد متتالية جزئية (y_{j_i}) من (y_i) متقاربة (نسمي نهايتها y).

ثم إن (z_{j_i}) مغلق، وعليه $y\in F$. وهكذا ينتج بالمرور إلى النهاية في المساواة $x_{j_i} = y_{j_i} + z_{j_i}$ أن المتتالية z_{j_i} متقاربة نحو عنصر z ينتمي إلى المغلق G. ومنه: $x = y+z\in F+G$. □

لنوضّح الآن كيف يمكن الاستفادة من المجموعات المتزاوجة.

مبرهنة 6.1

ليكن A و B فضاءين خطيين جزئيين من $D'(\mathbb{R}^n)$ مستقرين بالنسبة للضرب في $D(\mathbb{R}^n)$ (أي، لكل $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$ و $u\in A$ و $v\in B$ فإن $\varphi.u\in A$ و $\varphi.u\in B$).

وليكن:

$$f:\left(A\cap \mathrm{E}'(\mathbb{R}^n)\right)\times\left(B\cap \mathrm{E}'(\mathbb{R}^n)\right)\longrightarrow \mathrm{E}'(\mathbb{R}^n)$$

تطبيقا ثنائي الخطية يحقق:

$$\operatorname{supp} f(u,v)\subset \operatorname{supp} u+\operatorname{supp} v. \tag{❖}$$

عندئذ:

1) يمكن تمديد التطبيق f إلى مجموعة الثنائيات $(u,v)\in A\times B$ ذات الحوامل المتزاوجة (صورة التمديد ستكون $D'(\mathbb{R}^n)$ بدل $E'(\mathbb{R}^n)$).
2) تظل العلاقة (❖) قائمة من أجل الثنائيات الوارد ذكرها آنفا.

البرهان

نلاحظ أنه إذا كانت الثنائية (u,v) عنصرا من $\left(A\cap E'(\mathbb{R}^n)\right)\times\left(B\cap E'(\mathbb{R}^n)\right)$ فإن $\operatorname{supp} u$ و $\operatorname{supp} v$ متزاوجان لأنهما متراصان.

المرحلة الأولى: نعرّف التمديد $\tilde{f}$ لـ f بالطريقة التالية:

لتكن $(\varphi_j)_j$ متتالية دوال من $D(\mathbb{R}^n)$ بحيث تكون الأجزاء $K_j=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad \varphi_j(x)=1\right\}$ من $\mathbb{R}^n$ متتالية معمّقة من المتراصات (انظر البند 4.2 من الفصل الأول). ثم نضع لكل $\psi\in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\left\langle \tilde{f}(u,v),\psi\right\rangle=\lim_{j\to+\infty}\left\langle \tilde{f}(\varphi_j u,\varphi_j v),\psi\right\rangle.$$

لاحظ أن فرضية الاستقرار لـ A و B يؤدي إلى $\varphi_j u\in A$ و $\varphi_j v\in B$. كما أن حاملي $\varphi_j u$ و $\varphi_j v$ متراصان، ولهذا $\varphi_j u\in A\cap E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi_j v\in B\cap E'(\mathbb{R}^n)$، وهذا يعرّف المتتالية (g_j) : $g_j:=\left\langle f(\varphi_j u,\varphi_j v),\psi\right\rangle$.

المرحلة الثانية: يتمّ فيها البرهان على أن المتتالية (g_j) هي، في الواقع، ثابتة ابتداءً من رتبة معيّنة، أي أنه يوجد عدد طبيعي N بحيث إذا كان $N<j$ و $N<k$ فإن $g_j=g_k$. وللحصول على ذلك نكتب:

$$g_j-g_k=\left\langle f(\varphi_j u-\varphi_k u,\varphi_j v),\psi\right\rangle+\left\langle f(\varphi_j u,\varphi_j v-\varphi_k v),\psi\right\rangle \qquad (1)$$

ونثبت أن كل حد من الطرف الأيمن في (1) منعدم عندما يكون j و k كبيرين بكفاية. نستخلص هذه النتيجة بإثبات العلاقة (عن طريق الخلف):

$$\left(\operatorname{supp}\left(\varphi_j u-\varphi_k u\right)+\operatorname{supp}\left(\varphi_j v\right)\right)\bigcap \operatorname{supp}\psi=\phi . \qquad (2)$$

وبما أن الفرض حول التطبيق f ينصّ على أن:

$$\operatorname{supp} f\left(\varphi_j u-\varphi_k u,\varphi_j v\right)\subset \operatorname{supp}\left(\varphi_j u-\varphi_k u\right)+\operatorname{supp}\left(\varphi_j v\right)$$

فإنه يتضح من (2) أن:

$$\operatorname{supp} f\left(\varphi_j u-\varphi_k u,\varphi_j v\right)\bigcap \operatorname{supp}\psi=\phi .$$

وعندئذ ينتج من القضية 3.5 (الفصل الثالث) أن:

$$\left\langle f\left(\varphi_j u-\varphi_k u,\varphi_j v\right),\psi\right\rangle=0 .$$

وبنفس الطريقة نتبيّن العلاقة:

$$\left\langle f\left(\varphi_k u,\varphi_j v-\varphi_k v\right),\psi\right\rangle=0 .$$

وبذلك ينتهي البرهان على أن (g_j) ثابتة ابتداءً من رتبة معينة.

المرحلة الثالثة: نلاحظ أن ثبوت المتتالية (g_j) ابتداءً من رتبة معيّنة يؤدي إلى تقاربها. ومنه نرى أن التمديد $\widetilde{f}$ ، كما ورد في بداية البرهان، معرفّ جيدا حيث إن:

$$\left\langle \widetilde{f}(u,v),\psi\right\rangle=\lim_{j\to+\infty} g_j$$

وحتى يكون تعريف التمديد $\widetilde{f}$ سليما ينبغي أيضا إثبات أنه مستقل عن اختيار المتتالية (φ_j).

المرحلة الرابعة: نثبت القضية الثانية الواردة في المبرهنة، أي :

$$\operatorname{supp}\widetilde{f}(u,v)\subset \operatorname{supp}u+\operatorname{supp}v .$$

نبيّن أولا أن العلاقة

$$\left(\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}v\right)\bigcap \operatorname{supp}\psi=\phi \qquad (3)$$

تستلزم $\left\langle \widetilde{f}(u,v),\psi\right\rangle=0$. وبما أن :

$$\operatorname{supp}\varphi_j u+\operatorname{supp}\varphi_j v\subset \operatorname{supp}u+\operatorname{supp}v$$

فإن العلاقة (3) تؤدي إلى :

$$\left(\operatorname{supp}\varphi_j u+\operatorname{supp}\varphi_j v\right)\bigcap\operatorname{supp}\psi=\phi$$

مع العلم أن:

$$\operatorname{supp} f\left(\varphi_j u,\varphi_j v\right)\subset\operatorname{supp}\varphi_j u+\operatorname{supp}\varphi_j v.$$

إذن:

$$\operatorname{supp} f\left(\varphi_j u,\varphi_j v\right)\bigcap\operatorname{supp}\psi=\phi.$$

ومنه: $\left\langle f\left(\varphi_j u,\varphi_j v\right),\psi\right\rangle=0$.

لكننا نعلم أن $\left\langle f\left(\varphi_j u,\varphi_j v\right),\psi\right\rangle=\left\langle\widetilde{f}(u,v),\psi\right\rangle$ من أجل j كبير بكفاية. وهكذا يأتي من العلاقة (3): $\left\langle\widetilde{f}(u,v),\psi\right\rangle=0$.

ومن جهة أخرى فإن $\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}v$ مغلق (حسب القضية 5.1).

وبالتالي نكون قد أثبتنا:

$$\left(\forall\psi\in D(\mathbb{R}^n),\ \left(\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}v\right)\bigcap\operatorname{supp}\psi=\phi\right)\ \Rightarrow\ \left\langle\tilde{f}(u,v),\psi\right\rangle=0.$$

ومن ثمّ:

$$\forall\psi\in D\left(\complement_{\mathbb{R}^n}\left(\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}v\right)\right),\quad\left\langle\tilde{f}(u,v),\psi\right\rangle=0$$

وهذا يعني أن: $\operatorname{supp}\widetilde{f}(u,v)\subset\operatorname{supp}u+\operatorname{supp}v$. وهو المطلوب.□

2– تزاوج توزيع مع دالة

نذكّر أننا نعرّف جداء التزاوج لدالة $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ ودالة $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$ كما يلي:

$$f*\varphi(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-y)f(y)dy=\left\langle f,\tau_x\check{\varphi}\right\rangle$$

حيث $\tau_x \check{\varphi}(y) = \check{\varphi}(y-x) = \varphi(x-y)$.

وتجاوزًا ، يمكننا كتابة:

$$f * \varphi(x) = \left\langle f(y), \varphi(x-y) \right\rangle.$$

وعلى ضوء ذلك نقدّم، في المرحلة الأولى، التعريف التالي الذي يعمّم جداء تزاوج دالتين إلى جداء تزاوج دالة مع توزيع متراص الحامل.

تعريف **1.2** (تزاوج دالة مع توزيع متراص الحامل)

> ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. جداء التزاوج $T * \varphi$ يُعَرّف عند كل نقطة $x \in \mathbb{R}^n$ بـ: $T * \varphi(x) = \left\langle T, \tau_x \check{\varphi} \right\rangle$.

إليك بعض خاصيات جداء تزاوج توزيع مع دالة.

مبرهنة **2.2**

> ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. لدينا:
>
> 1) $T * \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$.
>
> 2) $D^\alpha (T * \varphi) = T * D^\alpha \varphi = D^\alpha T * \varphi \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$.
>
> 3) $\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi$.

البرهان

1) تأتي من القضيتين 2) و 3).

2) يتبيّن من المبرهنة 2.1 بأن: $T * \varphi \in E(\mathbb{R}^n)$. كما أنّ :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad D^\alpha (T * \varphi)(x) = D^\alpha \left\langle T, \tau_x \check{\varphi} \right\rangle$$
$$= \left\langle T, D_x^\alpha \tau_x \check{\varphi} \right\rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\left\langle T, \tau_x D^\alpha \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle$$

$$= \left\langle T, \tau_x \overset{\vee}{D^\alpha} \varphi \right\rangle$$

$$= T * D^\alpha \varphi(x).$$

ومن جهة أخرى، لدينا أيضا:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad D^\alpha (T * \varphi)(x) = \left\langle T, D_x^\alpha \tau_x \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\left\langle T, D^\alpha (\tau_x \overset{\vee}{\varphi}) \right\rangle$$

$$= \left\langle D^\alpha T, \tau_x \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle$$

$$= D^\alpha T * \varphi(x).$$

3) لإثبـــات صـــحة الاحتـــواء نعتـــبر عنـــصرا x مـــن المفتـــوح $\complement_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi)$. مـن الواضـح أن $x - y \notin \operatorname{supp} \varphi$ وذلـك مهمـا كـان $y \in \operatorname{supp} T$. ثم إننا نلاحظ صحة الاستلزام:

$$y \in \operatorname{supp} \tau_x \overset{\vee}{\varphi} \Rightarrow x - y \in \operatorname{supp} \varphi$$

ولذلك فإن:

$$x - y \notin \operatorname{supp} \varphi \Rightarrow y \notin \operatorname{supp} \tau_x \overset{\vee}{\varphi}$$

وهكذا ينتج مما سبق أن:

$$y \in \operatorname{supp} T \Rightarrow y \notin \operatorname{supp} \tau_x \overset{\vee}{\varphi}.$$

وبالتالي: $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \tau_x \overset{\vee}{\varphi} = \phi$. إذن:

$$\forall x \in \complement_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi), \quad \left\langle T, \tau_x \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle = 0 \quad T * \varphi(x)$$

(أي أن المفتوح $\complement_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi)$ محتوى في مفتوح انعدام $T * \varphi$)، ولذا:

$$\operatorname{supp} T * \varphi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi. \square$$

إليك نتيجة أخرى تتعلق بخاصية التجميع.

مبرهنة 3.2

ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ و $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

1) $(T*\varphi)*\psi = T*(\varphi*\psi)$.

2) $\langle T*\varphi, \psi\rangle = \left\langle T, \check{\varphi}*\psi \right\rangle$.

البرهان

1) باستخدام المبرهنة 3.1 يأتي (حيث P بلاطة تحتوي $\operatorname{supp}\psi$):

$$\begin{aligned}(T*(\varphi*\psi))(x) &= \langle T(y), (\varphi*\psi)(x-y)\rangle \\ &= \left\langle T(y), \int_{IR^n} \psi(z).\varphi(x-y-z)dz \right\rangle \\ &= \int_P \langle T(y), \varphi(x-y-z)\rangle \psi(z)dz \\ &= \int_P \psi(z) T*\varphi(x-z)dz \\ &= \int_{IR^n} \psi(z) T*\varphi(x-z)dz \\ &= (T*\varphi)*\psi(x).\end{aligned}$$

ومنه: $T*(\varphi*\psi) = (T*\varphi)*\psi$.

2) لدينا:

$$\begin{aligned}\left\langle T, \check{\varphi}*\psi \right\rangle &= \left\langle T(x), \check{\varphi}*\psi(x) \right\rangle \\ &= \left\langle T(x), \int_P \psi(y).\check{\varphi}(x-y)dy \right\rangle \\ &= \int_P \langle T(x), \varphi(y-x)\rangle \psi(y)dy \\ &= \int_P (T*\varphi)(y)\psi(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (T*\varphi)(y)\psi(y)dy \\ &= \langle T*\varphi, \psi\rangle. \square\end{aligned}$$

قدمنا آنفا جداء تزاوج دالة مع توزيع متراص الحامل. نريد الآن تعميم ذلك التعريف ليشمل تزاوج دالة مع توزيع كيفي. سنستنجد في هذه العملية بالمبرهنة 6.1.

مبرهنة 4.2

ليكن $T \in D(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in E(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون حاملاً T و φ متزاوجين. عندئذ يمكن تعريف جداء التزاوج $T*\varphi$ بكيفية التمديد المبيّنة في المبرهنة 6.1 الخاصة باستخدام المجموعات المتزاوجة. ولدينا:

1) $T*\varphi \in E(\mathbb{R}^n)$.

2) $\operatorname{supp} T*\varphi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp}\varphi$.

البرهان

نعتبر في المبرهنة 6.1 : $A = D'(\mathbb{R}^n)$ و $B = E(\mathbb{R}^n)$ و $f(u,v) = u*v$ مع الملاحظة أن $E'(\mathbb{R}^n) = D'(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$ و $E(\mathbb{R}^n) = E(\mathbb{R}^n) \cap E'(\mathbb{R}^n)$.

ثم إن جداء التزاوج تطبيق ثنائي الخطية. وهكذا يكون:

$$f : E'(\mathbb{R}^n) \times D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow E'(\mathbb{R}^n)$$
$$(T,\varphi) \longrightarrow T*\varphi$$

ولذلك يمكن تطبيق المبرهنة 6.1.

1) لنثبت أن $T*\varphi \in E(\mathbb{R}^n)$. حسب الفرض فإن $\operatorname{supp} T$ و $\operatorname{supp}\varphi$ متزاوجان. ليكن $R > 0$. نرمز بـ ρ للعدد المرفق به وفق تعريف التزاوج. نعتبر دالة $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون ($B(0,\rho)$ هي الكرة ذات المركز 0 ونصف القطر ρ): $B(0,\rho) = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \quad \theta(x) = 1\right\}$. لدينا:

$$\forall \psi \in D\big(B(0,R)\big), \quad \left\langle \tilde{f}(T,\varphi),\psi \right\rangle = \left\langle f(\theta T,\theta\varphi),\psi \right\rangle$$

أي:

$$\forall \psi \in D\big(B(0,R)\big),\ \ \langle T*\varphi,\psi\rangle = \langle \theta T*\theta\varphi,\psi\rangle .$$

ومنه يتّضح، حسب المبرهنة السابقة:

$$T*\varphi_{|B(0,R)} = \theta T*\theta\varphi_{|B(0,R)} \in E(B(0,R)). \tag{4}$$

وهكذا: لكل $R>0$ توجد دالة θ تحقق (4). ومن ثمّ:

$$\forall R>0, \quad T*\varphi_{|B(0,R)} \in E(B(0,R)).$$

أي أن: $T*\varphi \in E(\mathbb{R}^n)$.□

ملاحظة

استخدمنا في البرهان السابق النتيجة التالية التي نترك إثباتها للقارئ:

نتبنى رموز المبرهنة 6.1 وفرضياتها. نفرض أن الثنائية $(\operatorname{supp} u, \operatorname{supp} v)$ تشكل جماعة متزاوجة، وليكن $R>0$. نرمز بـ ρ للعدد المرفق بـ R حسب تعريف المجموعات المتزاوجة. لكل $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$ بحيث :

$$B(0,\rho) \subset \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \theta(x)=1\}$$

فإن: $\tilde{f}(u,v)_{|B(0,R)} = f(\theta u,\theta v)_{|B(0,R)}$.

كتطبيق لجداء التزاوج، نقدم النتيجة التالية الخاصة بالكثافة.

مبرهنة 5.2

ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$. إن الفضاء $D(\Omega)$ كثيف في $D'(\Omega)$.

البرهان

نعتبر توزيعا $T \in D'(\Omega)$. نبدأ بإنشاء متتالية (f_j) من $D(\Omega)$ سنجعلها تؤول إلى T . ولتكن (K_j) متتالية معمّقة من المتراصات K_j بحيث $\bigcup_j K_j = \Omega$.

ونعتبر متتالية دوال $\psi_j \in D(\Omega)$ بحيث يكون $\psi_j = 1$ على K_j .

ولتكن متتالية أعداد (ε_j) موجبة ومتناقصة وتؤول نحو 0 بحيث $\varepsilon_j < \frac{1}{2} d\left(\operatorname{supp}\psi_j, \complement_{\mathbb{R}^n}\Omega\right)$. ونعتبر أيضا متتالية صاقلة χ_{ε_j} بحيث $\operatorname{supp}\chi_{\varepsilon_j} \subset B(0,\varepsilon_j)$. ثمّ نمدّد بالصفر التوزيع $\psi_j T$ ونرمز بـ $\overline{\psi_j T}$ لهذا التمديد. نلاحظ أن $\overline{\psi_j T}$ موجود حسب المبرهنة 4.5 من الفصل الثاني (مبدأ اللصق). وضّح ذلك.

والواقع أن $\operatorname{supp}\overline{\psi_j T} \subset \operatorname{supp}\psi_j$ لأن $\overline{\psi_j T} \in E'(\mathbb{R}^n)$. لنضع الآن: $f_j = \overline{\psi_j T} * \chi_{\varepsilon_j}$. إن $f_j \in D(\mathbb{R}^n)$ (حسب المبرهنة 2.2)، ولدينا:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} f_j &\subset \operatorname{supp}\overline{\psi_j T} + \operatorname{supp}\chi_{\varepsilon_j}\\ &\subset \operatorname{supp}\psi_j + B(0,\varepsilon_j)\\ &\subset \Omega.\end{aligned}$$

(مع العلم أن الاحتواء الأخير ناتج من المتباينة $2\varepsilon_j < d\left(\operatorname{supp}\psi_j, \complement_{\mathbb{R}^n}\Omega\right)$). ومنه $f_j \in D(\Omega)$.

لإنهاء البرهان، نثبت أن المتتالية (f_j) متقاربة في $D'(\Omega)$ نحو T. وعليه نعتبر $\varphi \in D(\Omega)$. لدينا بالاستناد إلى المبرهنة السابقة:

$$\begin{aligned}\langle f_j,\varphi\rangle &= \left\langle \overline{\psi_j T} * \chi_{\varepsilon_j},\varphi\right\rangle\\ &= \left\langle \overline{\psi_j T}, \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi\right\rangle\end{aligned}$$

(مع التذكير أن $\varphi \in D(\Omega)$ يستلزم أن $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$). وبما إن (χ_{ε_j}) صاقلة فإن المتتالية $\check{\chi}_{\varepsilon_j}$ صاقلة أيضا. ومنه (أنظر 3.2 من الفصل الأول):

$$\check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \xrightarrow{D(\mathbb{R}^n)} \varphi \in D(\Omega).$$

لكن $\check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \in D(\Omega)$ من أجل j كبير بكفاية، إذ أن:

$$\operatorname{supp} \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \subset \operatorname{supp}\varphi + B(0,\varepsilon_j).$$

وبالتالي: $\check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \xrightarrow{D(\Omega)} \varphi$.

وهكذا نحصل، عندما يكون j كبيرا، على:

$$\left\langle T, \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} \longrightarrow \left\langle T, \varphi \right\rangle.$$

وزيادة على ذلك، لدينا:

$$\left\langle \overline{\psi_j T}, \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} = \left\langle \psi_j T, \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}.$$

وحيث إن المتتالية (K_j) معمّقة فإنه يوجد عدد طبيعي N بحيث:

$$j > N \Rightarrow \quad \operatorname{supp}(\check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi) \subset K_j \subset \Omega.$$

إذن، $\psi_j = 1$ بجوار $\operatorname{supp}(\check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi)$ عندما يكون j كبيرا. ومن ثمّ يأتي:

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_j T, \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} &= \left\langle T, \psi_j (\check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi) \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} \\ &= \left\langle T, \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} \xrightarrow{j \to +\infty} \left\langle T, \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}. \end{aligned}$$

وفي الأخير يتأكد بأن:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \qquad \left\langle f_j, \varphi \right\rangle = \left\langle \overline{\psi_j T}, \check{\chi}_{\varepsilon_j} * \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} \xrightarrow{j \to +\infty} \left\langle T, \varphi \right\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}$$

أي: $f_j \xrightarrow{D'(\Omega)} T$. □

ملاحظة

يثبت البرهان السابق أن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $D'(\mathbb{R}^n)$. وبالتحديد، فهو يبرهن على أن

$$\forall T \in D'(\mathbb{R}^n), \qquad T * \chi_{\varepsilon_j} \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} T$$

وعليه، كان بإمكاننا إزالة الدوال (ψ_j) لو اقتصرنا برهاننا على الحالة $\Omega = \mathbb{R}^n$.

3- التزاوج والانسحاب وتزاوج توزيعين

نبدأ بتقديم النتيجة التالية:

قضية 1.3

ليكن $T \in \mathrm{E}'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

1) $\tau_a(T * \varphi) = \tau_a T * \varphi = T * \tau_a \varphi$.

2) $\langle T, \varphi \rangle = (T * \check{\varphi})(0)$.

البرهان

1) لدينا:

$$\tau_a T * \varphi(x) = \left\langle \tau_a T, \tau_x \check{\varphi} \right\rangle$$

$$= \left\langle T, \tau_{-a} \tau_x \check{\varphi} \right\rangle,$$

$$T * \tau_a \varphi(x) = \left\langle T, \tau_x (\tau_a \varphi)^{\vee} \right\rangle,$$

$$\tau_a (T * \varphi)(x) = (T * \varphi)(x - a)$$

$$= \left\langle T, \tau_{x-a} \check{\varphi} \right\rangle.$$

يمكن أن نتأكد بسهولة من أن:

$$\tau_x (\tau_a \varphi)^{\vee} = \tau_{x-a} \check{\varphi} = \tau_{-a} \tau_x \check{\varphi}.$$

ومنه تأتي العلاقة المطلوبة.

2) بديهية ، انطلاقا من تعريف جداء التزاوج. □

ملاحظة

إذا كان $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ معطى فإن مؤثر التزاوج A المعرف بـ

$$A : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^n)$$
$$\varphi \longrightarrow A\varphi = T * \varphi$$

يحقق حسب القضية السابقة: $\tau_a A\varphi = A\tau_a\varphi$.

تعني هـذه العلاقـة أن مـؤثر التـزاوج والانـسحاب يتبـادلان فيمـا بينهمـا. تـكاد تـكون خاصية التبادل هذه خاصية مميزة لمؤثر التزاوج. ذلك ما سيتضح من خلال المبرهنة 3.3.

وقبل ذلك نقدّم التوطئة التالية دون برهان:

توطئة 2.3

ليكن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$. إن المؤثر

$$A : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^n)$$
$$\varphi \longrightarrow A\varphi = T * \varphi$$

مـستمرّ، بمعنـى أن: لكـل مـتراص $K \subset \mathbb{R}^n$ وكـل عـدد طبيعـي m يوجـد متراص K' وعدد طبيعي q وثابت $C > 0$ بحيث:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad p_{K,m}(A\varphi) \leq C . p_{K',q}(\varphi).$$

مبرهنة 3.3

لـيكن $A : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^n)$ مـؤثرا خطيـا ومـستمرا يتبـادل مـع الانسحاب (أي أن $\tau_a A\varphi = A\tau_a\varphi$ لكل عنصر $a \in \mathbb{R}^n$).

عندئذ يوجد توزيع وحيد $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad A\varphi = T * \varphi..$$

البرهان

1) الوحدانية: نفترض وجود T. عندئذ يتبيّن من القضية 1.3 أن:

$$(T*\varphi)(0)=\left\langle T,\check{\varphi}\right\rangle$$
$$=\left\langle \check{T},\varphi\right\rangle.$$

إذن:

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n),\qquad \left\langle \check{T},\varphi\right\rangle = A\varphi(0),$$

مـع الملاحظـة أن $A\varphi(0)$ معلـوم لأن المـؤثر A معطـى. ومنـه تـأتي وحدانيـة $\check{T}$ ، ومن ثمّ نستخلص وحدانية T (كيف؟).

2) الوجود: ليكن v الشكل الخطي المعرّف بـ:

$$v: D(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$\varphi\longrightarrow\langle v,\varphi\rangle = A\varphi(0)$$

نأخـذ في التوطئـة 2.3 : $K=\{0\}$ و $p=0$. حينئـذ يوجـد مـتراص K' وعـدد طبيعي q و $C>0$ بحيث:

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n),\qquad \left|\langle v,\varphi\rangle\right|\le C.p_{K',q}(\varphi)$$

أي:

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n),\qquad \left|A\varphi(0)\right|\le C.p_{K',q}(\varphi).$$

ومنه $v\in E'(\mathbb{R}^n)$. لتكن $a\in\mathbb{R}^n$. لدينا ، حسب فرض المبرهنة:

$$A\varphi(a)=\tau_{-a}A\varphi(0)$$
$$=A\tau_{-a}\varphi(0).$$

إذن :

$$A\varphi(a)=\langle v,\tau_{-a}\varphi\rangle$$
$$=\left\langle \check{v},\tau_a\check{\varphi}\right\rangle$$
$$=\check{v}*\varphi(a).$$

وهكذا نستخلص أن $A\varphi=\check{v}*\varphi$. ومن ثم فإن $\check{v}$ هو التوزيع T المطلوب.□

ننتقل الآن إلى تعريف جداء تـزاوج تـوزيعين. مـن أجـل ذلـك نـذّكـر بأنـه إذا كـان $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $v \in D(\mathbb{R}^n)$ فإن:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad (T * v) * \varphi = T * (v * \varphi).$$

سننطلق من هذه العلاقة لتقديم تعريفنا.

مبرهنة- تعريف 4.3

ليكن T و S عنصرين من $E'(\mathbb{R}^n)$.

1) يوجد توزيع ω من $E'(\mathbb{R}^n)$ وحيد يحقق:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad T * (S * \varphi) = \omega * \varphi.$$

يسمى التوزيع ω جداء تزاوج T و S ونكتب $\omega = T * S$.

2) لدينا : $\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$.

البرهان

1) نرمز بـ U و V للمؤثرين من $D(\mathbb{R}^n)$ نحو $D(\mathbb{R}^n)$ المعرفين بـ:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad U\varphi = T * \varphi$$
$$V\varphi = S * \varphi.$$

ونـضع $W = U \circ V$. مـن الواضـح أن : $W : D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow D(\mathbb{R}^n)$ مـؤثر خطـي ومستمرّ ويتبادل مع الانسحابات لأن المؤثرين U و V يتمتعان بنفس الخواص:

$$\begin{aligned} W\tau_a\varphi &= (U \circ V)\tau_a\varphi \\ &= U(V\tau_a\varphi) \\ &= U(\tau_a V\varphi) \\ &= \tau_a U(V\varphi) \\ &= \tau_a(U \circ V\varphi) \\ &= \tau_a W\varphi. \end{aligned}$$

عندئذ ينتج من المبرهنة السابقة أنه يوجد توزيع $\omega \in E'(\mathbb{R}^n)$ وحيد يحقق:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad W\varphi = \omega * \varphi.$$

وهكذا:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad \begin{aligned} \omega * \varphi &= W\varphi \\ &= U(V\varphi) \\ &= T * V\varphi \\ &= T * (S * \varphi). \end{aligned}$$

2) فيما يخص العلاقة بين الحوامل، نريد إثبات:

$$\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$$

* أي: $\complement_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S) \subset \complement_{\mathbb{R}^n} \operatorname{supp}(T * S)$. وهذا يعني قيام الاستلزام:

$$\varphi \in D\left(\complement_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S)\right) \quad \Rightarrow \quad \langle T * S, \varphi \rangle = 0.$$

بمعنى أن العلاقة:

$$\operatorname{supp}\varphi + \bigcap(\operatorname{supp} T \quad \operatorname{supp} S) = \phi \tag{5}$$

تستلزم المساواة:

$$\langle T * S, \varphi \rangle = 0. \square \tag{6}$$

تمرين

أثبت أن العلاقة (5) تستلزم أن

$$0 \notin \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} \check{\varphi}. \tag{7}$$

نلاحظ أن (القضية 1.3):

$$\langle T * S, \varphi \rangle = (T * S) * \check{\varphi}(0) = T * (S * \check{\varphi})(0). \tag{8}$$

ومن جهة أخرى نعلم أن $T \in E'(\mathbb{R}^n)$ و $S * \check{\varphi} \in D(\mathbb{R}^n)$، وبالتالي (المبرهنة 2.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\left(T * (S * \check{\varphi})\right) &\subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S * \check{\varphi} \\ &\subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} \check{\varphi}. \end{aligned}$$

وبالتالي فإن العلاقة (5) تعطي، استنادا إلى التمرين السابق والعلاقة (8) :

$$\left(T*(S*\check{\varphi})\right)(0)=0$$

أي $0=\langle T*S,\varphi\rangle$. وهي العلاقة (6) المراد استنتاجها من (5).

وهكذا تمكنّا من تعريف جداء تزاوج توزيعين متراصي الحاملين. هل نستطيع تعريف جداء تزاوج توزيعين من $D'(\mathbb{R}^n)$ ؟ إليك إجابة عن هذا السؤال:

مبرهنة 5.3

ليكن T و S عنصرين من $D'(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون الحاملان $\operatorname{supp} T$ و $\operatorname{supp} S$ متزاوجين. عندئذ تسمح كيفية التمديد المقدّمة في المبرهنة 6.1 بتعريف جداء تزاوج T و S ، ولدينا:

1) $T*S\in D'(\mathbb{R}^n)$.

2) $\operatorname{supp} T*S\subset \operatorname{supp} T+\operatorname{supp} S$.

البرهان

يكفي أن نطبق المبرهنة السابقة، ونستند إلى المبرهنة 6.1 باعتبار: $A=B=D'(\mathbb{R}^n)$ ، أي أن:

$$f\ :E'(\mathbb{R}^n)\times E'(\mathbb{R}^n)\longrightarrow E'(\mathbb{R}^n)$$

وسيكون:

$$\tilde{f}\ :D'(\mathbb{R}^n)\times D'(\mathbb{R}^n)\longrightarrow D'(\mathbb{R}^n).\ \square$$

فيما يتعلق بخاصيتي التجميع والتبديل لجداء التزاوج نشير لهذه النتيجة دون برهان.

قضية 6.3

1) إذا كانت u و v و w توزيعات ذات حوامل متزاوجة فإن:

$$(u*v)*w=u*(v*w).$$

2) إذا كان u و v توزيعين حاملاهما متزاوجان فإن: $u*v=v*u$.

ملاحظة

إذا لم تكن حوامل u و v و w متزاوجة فإنه بالإمكان فقدان خاصية التجميع. مثال ذلك:

$$(1*\delta')*H=0*H=0$$
$$1*(\delta'*H)=1*H'=1*\delta=1.$$

حيث δ توزيع ديراك و H توزيع هيفسايد Heaviside. سبب ذلك هو أنه بالإمكان أن تكون الثنائية $(\operatorname{supp}u,\operatorname{supp}v)$ متزاوجة، وكذلك

$(\operatorname{supp}v,\operatorname{supp}w)$ و $(\operatorname{supp}u*v,\operatorname{supp}w)$ و $(\operatorname{supp}u,\operatorname{supp}v*w)$

وهذا دون أن تكون الثلاثية

$$(\operatorname{supp}u,\operatorname{supp}v,\operatorname{supp}w)$$

متزاوجة. تلك هي الظاهرة التي حدثت في المثال أعلاه.

نختم هذه الفقرة بالنتيجة الحسابية التالية:

قضية 7.3

- لكل توزيع $u\in D'(\mathbb{R}^n)$ و $a\in\mathbb{R}^n$، لدينا:

1) $\delta*u=u$.

2) $\delta_a*u=\tau_a u$.

3) $D^\alpha\delta*u=D^\alpha u$.

- إذا كان حاملاً التوزيعين u و v متزاوجين فإن:

1) $\tau_a(u*v)=\tau_a u*v=u*\tau_a v$.

2) $D^\alpha(u*v)=D^\alpha u*v=u*D^\alpha v$.

4- جداء التزاوج بالطريقة المؤترية

الهدف من هذا البند هو تعريف القارئ بطريقة ثانية لتقديم جداء تزاوج التوزيعات، وهي تعتمد على الجداء المؤتري. ولذا سوف لن نخوض في البراهين، وإنما سنركز على مسلك الطريقة الموترية مقارنة بالكيفية التي لجأنا إليها في هذا الفصل خلال تقديم مفهوم التزاوج.

نذكّر، في البداية، بتعريف الجداء الموتري لدالتين.

تعريف 1.4 (الجداء المؤتري)

ليكن U و V مفتوحين من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ على التوالي. ولتكن: $f:U \longrightarrow \mathbb{C}$ و $g:V \longrightarrow \mathbb{C}$ دالتين.

الجداء الموتري $f \otimes g$ لـ f و g هو الدالة المعرفة عند كل نقطة (x,y) من $U \times V$ بـ: $(f \otimes g)(x,y) = f(x).g(y)$.

إليك البعض من خواص الجداء الموتري.

قضية 2.4

1) إذا كان $f \in E(U)$ و $g \in E(V)$ فإن: $f \otimes g \in E(U \times V)$.

2) لدينا: $\operatorname{supp} f \otimes g = (\operatorname{supp} f) \times (\operatorname{supp} g)$.

3) إن $D(U) \times D(V)$ كثيف في $D(U \times V)$.

ملاحظة

إذا كان U و V مفتوحين من $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ على التوالي، وكانت f و g دالتين قابلتين للمكاملة محليا على U و V على التوالي، فإن:

$$\forall \varphi \in D(U \times V), \quad \langle T_{f \otimes g}, \varphi \rangle = \int_{U \times V} (f \otimes g)(x,y).\varphi(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{U \times V} f(x) g(y).\varphi(x,y)\,dxdy.$$

وعندما يكتب φ على النحو $\theta\otimes\psi$ (لاحظ أنه يمكن دوما كتابته كنهاية لمثل هذه الدوال حسب الخاصية الثالثة من القضية السابقة) فإننا نحصل على:

$$\forall\varphi\in D(U\times V),\qquad \left\langle T_{f\otimes g},\varphi\right\rangle=\left(\int_U f(x).\theta(x)dx\right)\times\left(\int_V g(y).\psi(y)dy\right)$$
$$=\left\langle T_f,\theta\right\rangle.\left\langle T_g,\psi\right\rangle.$$

ومن ثمّ نستخلص تعريف الجداء الموتري للتوزيعات.

تعريف **3.4** (الجداء الموتري لتوزيعين)

ليكن $S\in D'(U)$ و $T\in D'(V)$. الجداء الموتري لـ S و T هو التوزيع $W\in D'(U\times V)$ المعرّف بـ:

$$\forall\varphi\in D(U),\ \forall\psi\in D(V),\qquad \left\langle W,\varphi\otimes\psi\right\rangle=\left\langle S,\varphi\right\rangle.\left\langle T,\psi\right\rangle.$$

ونكتب $W=S\otimes T$.

لن يكون لهذا التعريف معنى بدون قيام النتيجة الأولى من المبرهنة التالية:

مبرهنة **4.4**

1) إذا كان $S\in D'(U)$ و $T\in D'(V)$ فإن التوزيع $S\otimes T$ الوارد في التعريف 3.4 موجود ووحيد.

2) إذا كان $S\in E'(U)$ و $T\in E'(V)$ فإن التوزيع $S\otimes T$ متراص الحامل، أي أنه ينتمي إلى $E'(U\times V)$.

3) لدينا:

$$\forall\theta\in E(U\times V),\qquad \left\langle S\otimes T,\theta\right\rangle=\left\langle S,\left\langle T,\theta(x,.)\right\rangle\right\rangle$$
$$=\left\langle T,\left\langle S,\theta(.,y)\right\rangle\right\rangle.$$

إليك بعضا من خواص الجداء الموتري للتوزيعات.

قضية 5.4

ليكن $S\in D'(U)$ و $T\in D'(V)$ حيث U جزء مفتوح من $\mathbb{R}^n$ و V جزء مفتوح من $\mathbb{R}^p$. لدينا :

1) $\operatorname{supp}(S\otimes T)=\operatorname{supp} S\times \operatorname{supp} T$.

2) $D_x^{\alpha}D_y^{\beta}(S\otimes T)=D^{\alpha}S\otimes D^{\beta}T$.

3) $\forall f\in E(U),\quad \forall g\in E(V),\qquad (f\otimes g)(S\otimes T)=(fS)\otimes(gT).$

4) الجداء الموتري تجميعي.

5) الجداء الموتري ليس تبديليا عموما.

لإدخال مفهوم التزاوج بالطريقة الموترية، نعتبر في البداية دالتين f و g من $L^1(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$. ونلاحظ أن:

$$\langle f\otimes g,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)\varphi(x)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}f(y)g(x-y)\varphi(x)dxdy.$$

ومنه:

$$\langle f*g,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}f(y)g(t)\varphi(y+t)dtdy$$
$$=\langle f\otimes g,\varphi^{\Delta}\rangle.$$

حيث: $\varphi^{\Delta}(t,y)=\varphi(y+t)$.

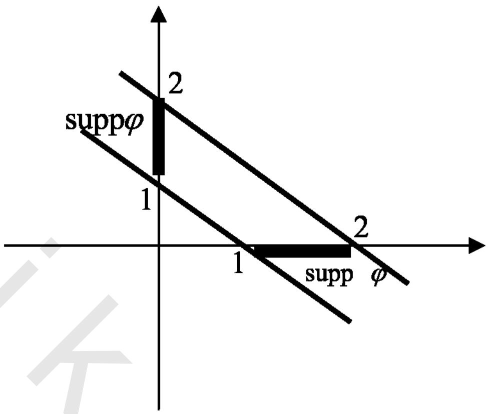
وهكذا يمكن كتابة: $\langle f*g,\varphi\rangle=\langle f\otimes g,\varphi^{\Delta}\rangle$. ومن ثمّ يتبادر إلى الذهن اتخاذ المساواة الأخيرة كتعريف لجداء تزاوج توزيعين بوضع: $\langle S*T,\varphi\rangle=\langle S\otimes T,\varphi^{\Delta}\rangle$، وذلك عندما يكون S و T توزيعين من $D'(\mathbb{R}^n)$.

وهنا ينبغي أن نلاحظ بأن : $(\operatorname{supp}\varphi^{\Delta})=(\operatorname{supp}\varphi)^{\Delta}$ حيث :

$$(\operatorname{supp}\varphi)^{\Delta}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}: x+y\in\operatorname{supp}\varphi\}.$$

ماذا ينتج عن ذلك؟ ينتج أن تراص حامل φ لا يضمن تراص حامل φ^{Δ}.

مثال ذلك: φ عنصر من $D(\mathbb{R})$ حيث $\operatorname{supp}\varphi=[0,2]$. انظر الشكل الموالي :



في هذا الشكل، حامل φ^{Δ} هو الشريط المائل المعرّف بـ $1\le x+y\le 2$

ومن ثمّ فإن φ^{Δ} لا ينتمي بالضرورة إلى $D(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. وإذا كان الأمر كذلك، فأي معنى تحمل الكتابة $\langle S\otimes T,\varphi^{\Delta}\rangle$؟

نعتمد على التعريف التالي للخروج من هذا المأزق:

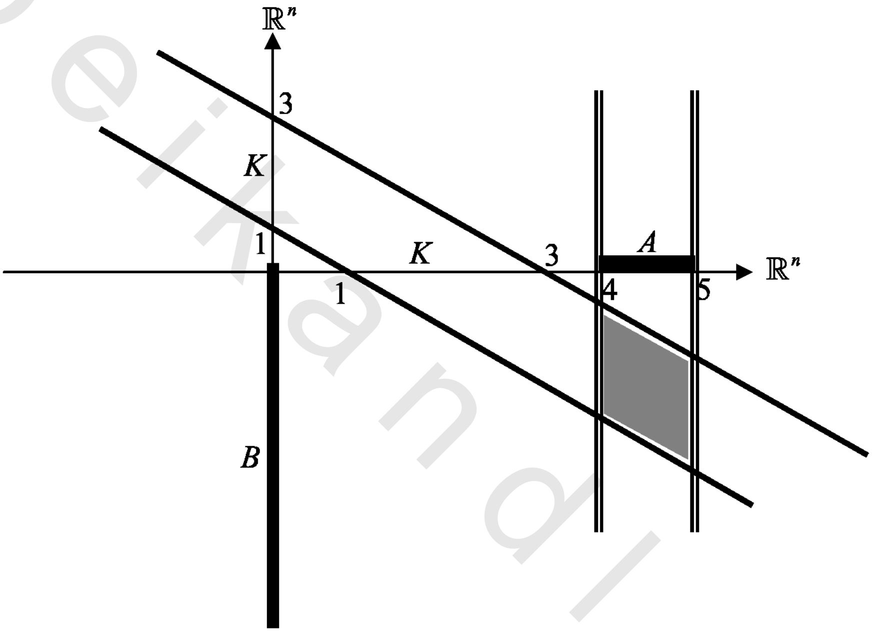
تعريف **6.4** (القوس $\langle .,.\rangle$)

> إذا كان $T\in D'(\mathbb{R}^n)$ و $f\in E(\mathbb{R}^n)$ بحيث يكون $\operatorname{supp}T\cap\operatorname{supp}f$ متراصا فإنه يمكننا تعريف $\langle T,f\rangle$ على النحو التالي:
>
> $$\langle T,f\rangle=\langle T,\theta.f\rangle$$
>
> حيث $\theta\in D(\mathbb{R}^n)$ مع $\theta=1$ في جوار متراص لـ $\operatorname{supp}T\cap\operatorname{supp}f$.

لهذا التعريف معنى لأنه إذا كانت θ_1 و θ_2 دالتين تحققان ما يحققه θ الوارد في التعريف السابق فإن: $\langle T,\theta_1.f\rangle=\langle T,\theta_2.f\rangle$. أثبت ذلك.

ومن هنا وجب الاهتمام بالثنائيات (A,B) من أجزاء $\mathbb{R}^n$ التي من أجلها يكـون $(A\times B)\cap K^{\Delta}$ متراصا مهمـا كـان المتراص K مـن $\mathbb{R}^n$ (حيـث يرمـز K^{Δ} هنا لمجموعة العناصر (x,y) من $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ بحيث $x+y\in K$).

مثال لـ $(A\times B)\cap K^{\Delta}$



في الشكل، $A=[4,5]$ و $B=\mathbb{R}^-$ و $K=[1,3]$ ،
و $(A\times B)\cap K^{\Delta}$ هو متوازي الأضلاع المظلل

تعريف **7.4** (تزاوج مجموعتين)

> ليكـن A و B جزأين مغلقين من $\mathbb{R}^n$. لكل متراص K من $\mathbb{R}^n$ ،
> نضع: $K^{\Delta}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n : x+y\in K\}$.
> نقـول عـن A و B إنهمـا متزاوجـان إذا كـان $(A\times B)\cap K^{\Delta}$ متراصـا من $\mathbb{R}^{2n}$ وذلك مهما كان المتراص K من $\mathbb{R}^n$.

تمرين

أثبت أن هذا التعريف يكافئ التعريف 4.1.

نستطيع الآن تعريف جداء تزاوج توزيعين حاملاهما متزاوجان، وهو الفرض الذي استندنا عليه لتقديم التعريف 5.3:

تعريف 8.4 (جداء تزاوج توزيعين)

ليكن S و T توزيعين من $D'(\mathbb{R}^n)$ حاملاهما متزاوجان (حسب مفهوم التعريف 4.1 أو 7.4). نضع لكل $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle S*T,\varphi\rangle = \langle S*T,\varphi^{\Delta}\rangle.$$

ملاحظة

إن لهذا التعريف معنى لأننا افترضنا أن حاملي S و T متزاوجان: هذا الفرض يؤدي إلى تراص $((\text{supp S})\times(\text{supp T}))\cap(\text{supp }\varphi)^{\Delta}$ في $\mathbb{R}^n$. لكن :

$$((\text{supp S})\times(\text{supp T}))\cap(\text{supp }\varphi)^{\Delta} = (\text{supp S}\otimes\text{T})\cap(\text{supp }\varphi^{\Delta})$$

وذلك حسب القضية 5.4 والعلاقة $(\text{supp }\varphi)^{\Delta} = \text{supp }\varphi^{\Delta}$.

ومنه فإن $(\text{supp S}\otimes\text{T})\cap(\text{supp }\varphi^{\Delta})$ جزء متراص من $\mathbb{R}^n$. وبذلك يكون للكتابة $\langle S\otimes T,\varphi^{\Delta}\rangle$ معنى حسب التعريف 6.4.

5 – معادلات التزاوج

نبدأ بتعريف معادلات التزاوج:

تعريف 1.5 (معادلة تزاوج)

نسمي معادلة تزاوج كل معادلة من الشكل : $A*u=f$ حيث A و f توزيعان معلومان و u توزيع مجهول.

مثال

لتكن المعادلة التفاضلية الجزئية في $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha .D^\alpha u = f$$

ذات المعاملات الثابتة. إنها تكتب على شكل معادلة تزاوج $A * u = f$ حيث : $A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha .D^\alpha \delta$ مع العلم أن δ يمثل توزيع ديراك. لدينا فعلا:

$$\begin{aligned} A * u &= \sum_{|\alpha|\le m} (a_\alpha .D^\alpha \delta) * u \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} \delta * a_\alpha .D^\alpha u \\ &= (\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha .D^\alpha u) * \delta \\ &= f * \delta \\ &= f. \end{aligned}$$

لمعالجـــة معـــادلات التـــزاوج نحتـــاج إلى مفهـــوم الحـــل الأساســـي (Fundamental solution):

تعريف 2.5 (الحل الأساسي)

> ليكن $f \in E'(\mathbb{R}^n)$.
>
> نقول عن توزيع $w \in D'(\mathbb{R}^n)$ إنه حل أساسي لـ A (أو حل أساسي للمعادلة $A * w = f$) إذا كان: $A * w = \delta$.

ملاحظات

1) الحل الأساسي ليس موجودا دوما، فهو يرتبط بخواص التوزيع A.

مثال ذلك: نفترض أن $A \in D(\mathbb{R}^n)$. لو كان الحل الأساسي w موجودا لانتمى إلى $D'(\mathbb{R}^n)$. لاحظ أن حاملي A و w متزاوجان، ومنه $A * w$ موجود و $A * w \in E(\mathbb{R}^n)$. لكن $\delta \notin E(\mathbb{R}^n)$. ومن ثمّ فإن w غير موجود.

2) نفترض أن w و w_1 حلان أساسيان لـ A. عندئذ:

$$A*(w-w_1)=\delta-\delta=0.$$

وبالتالي، حتى نحصل على كافة الحلول الأساسية، يكفي أن نضيف إلى حل أساسي خاص الحل العام للمعادلة $A*u=0$.

3) أثبت مالغرنج Malgrange[1] و أهرنبرايس Ehrenpreis[2]، عام 1955، أن لكل معادلة تفاضلية جزئية ذات معاملات ثابتة حلا أساسيا. كما برهن على أن مثل هذا الحل لا يمكن أن يكون ذا حامل متراص (عندما تكون درجة المعادلة تختلف عن 0).

تظهر أهمية مفهوم الحل الأساسي من النتيجة التالية، حيث يسمح بكتابة حل المعادلة $A*u=f$ بدلالة w و f.

مبرهنة 3.5

ليكن $A\in E'(\mathbb{R}^n)$. نفترض أن لـ A حلا أساسيا w. عندئذ:

1) لكل $f\in E'(\mathbb{R}^n)$، يوجد $u\in D'(\mathbb{R}^n)$ بحيث $A*u=f$: أي $u=w*f$.

2) ليكن $f\in E'(\mathbb{R}^n)$. إذا وجد $u\in E'(\mathbb{R}^n)$، حل للمعادلة $A*u=f$، فهو وحيد، ولدينا: $u=w*f$.

البرهان

1) بما أن حاملي A و f متراصان فإن حوامل A و f و w متزاوجة، ولذا فخاصية التجميع قائمة، ولدينا:

[1] برنارد مالغرانج رياضي فرنسي ولد عام 1928.

[2] ليون أهرنبرايس (1930- 2010) رياضي أمريكي.

$$A*(w*f)=(A*w)*f$$
$$=\delta*f$$
$$=f\,.$$

2) إذا كان u موجودا وينتمي إلى $E'(\mathbb{R}^n)$ فإن حوامل u و A و w متزاوجة، ولذا فخاصية التجميع قائمة، ولدينا:

$$u=(w*A)*u$$
$$=w*(A*u)$$
$$=w*f\,.$$

وهو ما يثبت وحدانية u في $E'(\mathbb{R}^n)$ عند وجوده.□

لنر الآن الفائدة من مفهوم الحل الأساسي في دراسة معادلة لابلاس $\Delta u=f$ في $\mathbb{R}^n$ حيث $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^{\,2}}$. ها هو الحل الأساسي لهذا المؤثر.

مبرهنة 4.5

نعرّف الدالة w على $\mathbb{R}^n$ بالعبارتين التاليتين:

1) من أجل $n=2$:

$$w(x)=\frac{1}{2\pi}\ln\|x\|.$$

2) من أجل $n\neq 2$:

$$w(x)=\frac{-1}{(n-2).\omega_n}\cdot\frac{1}{\|x\|^{n-2}}.$$

حيث يرمز ω_n لمساحة سطح كرة الوحدة، أي:

$$\omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

(مع العلم أن Γ يشير للدالة غاما Gamma).

إن w المعرّف أعلاه حل أساسي لمؤثر لابلاس Δ ، أي أن: $\Delta w=\delta$.

البرهان

❖ نلاحظ في حالة $n=1$ أن $w(x)=\frac{|x|}{2}$. ومنه:

$$\forall \varphi\in D(\mathbb{R}),\qquad \left\langle \frac{|x|''}{2},\varphi\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle |x|,\varphi''\right\rangle = \varphi(0).$$

وبالتالي، نحصل بالفعل، على: $\Delta w=\delta$.

نحتاج لتقديم هذا البرهان إلى قانون غرين Green [3] الذي نذكّر فيما يلي بنصه:

توطئة 5.5

> ليكن Ω جزءا مفتوحا مترابطا مصقولا من $\mathbb{R}^n$ (مثلا Ω = متممة كرة). وليكن f و g عنصرين من $C^2(\overline{\Omega})$ بحيث يكون $\operatorname{supp} f\cap\overline{\Omega}$ و $\operatorname{supp} g\cap\overline{\Omega}$ متراصين. عندئذ يكون :
>
> $$\int_{\Omega}\big(g(x)\Delta f(x)-f(x)\Delta g(x)\big)dx=\int_{\partial\Omega}\left(g(s)\frac{\partial f}{\partial\eta}(s)-f(s)\frac{\partial g}{\partial\eta}(s)\right)ds$$
>
> حيث يرمز $\frac{\partial}{\partial\eta}$ للمشتق وفق ناظم الوحدة الخارجي على Ω، ويرمز $\partial\Omega$ لحافة Ω.

ليكن $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$\langle\Delta w,\varphi\rangle=\langle w,\Delta\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\|x\|>\varepsilon}w(x).\Delta\varphi(x)dx\ .$$

نطبق قانون غرين باعتبار $w=f$ و $\varphi=g$ (تأكد من شروط تطبيقه) فنجد:

$$\int_{\|x\|>\varepsilon}w(x).\Delta\varphi(x)dx=\int_{\|x\|>\varepsilon}\varphi(x).\Delta w(x)dx+\int_{\|x\|=\varepsilon}w(x).\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi(x)ds-\int_{\|x\|=\varepsilon}\varphi(x).\frac{\partial}{\partial\eta}w(x)ds \qquad (9)$$

[3] جورج غرين (1793- 1841) رياضي إنكليزي.

حيث يرمز $\frac{\partial}{\partial\eta}$ للمشتق وفق ناظم الوحدة الخارجي على $\complement_{\mathbb{R}^n} B(0,\varepsilon)$ ، أي الناظم الداخلي على $B(0,\varepsilon)$. بعد ذلك نلاحظ ما يلي:

- التكامل الأول في الطرف الثاني من (9) منعدم لأنه من اليسير أن نثبت بأن $\Delta w = 0$ لما $\varepsilon < \|x\|$.
- التكامل الثاني الوارد في الطرف الثاني من (9) يساوي :

$$\int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}.\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi(x)ds$$

مع الإشارة إلى أن العامل $\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi$ محدود من أجل $\|x\| = \varepsilon$. ومن ثمّ :

$$\exists C > 0: \quad \left|\int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}.\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi(x)ds\right| \le C\,\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\|x\|=\varepsilon} ds$$

$$\le C'\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}.\varepsilon^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

حيث C' ثابت موجب. وهذا لما $3 \le n$.

أما إذا كان $n = 2$ فإن:

$$\left|\int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}.\frac{\partial}{\partial\eta}\varphi(x)ds\right| \le C\,\varepsilon \ln\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

- التكامل الثالث الوارد في الطرف الثاني من (9): لدينا هنا $\frac{\partial}{\partial\eta} = -\frac{\partial}{\partial r}$. وبالتالي (من أجل $1 < n$):

$$\frac{\partial}{\partial\eta}w = -\frac{\partial}{\partial r}w$$

$$= -\frac{1}{\omega_n}.\frac{1}{r^{n-1}}.$$

ومنه:

$$\left|-\int_{\|x\|=\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\eta}(x).\varphi(x)ds-\varphi(0)\right|=\left|\int_{\|x\|=\varepsilon}\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\varphi(x)ds-\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\|x\|=\varepsilon}\varphi(0)ds\right|$$

إذن (يشير C و C' إلى ثابتين موجبين):

$$\begin{aligned}\left|-\int_{\|x\|=\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\eta}(x).\varphi(x)ds-\varphi(0)\right|&=\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\left|\int_{\|x\|=\varepsilon}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)ds\right|\\&\leq\frac{C}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\varepsilon.\sup_x\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\right|\varepsilon^{n-1}\\&\leq C'.\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon\to0}0.\end{aligned}$$

وهكـذا نـستنتج أن التكامـل الثالـث في الطـرف الأيمـن مـن (9) يـؤول إلى $\varphi(0)$ ، بمعنى أن:

$$-\int_{\|x\|=\varepsilon}\frac{\partial w}{\partial\eta}(x).\varphi(x)ds\xrightarrow{\varepsilon\to0}\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

وهذا يثبت أن: $\Delta w=\delta$.□

إليك نتيجة تتعلق أيضا بمؤثر لابلاس، نوردها بـدون برهـان (لاحظ أن القضية الأولى بديهية خلافا للقضيتين الأخريَيْن):

مبرهنة 6.5

نعتـبر الحـل الأساسـي w لمـؤثر لابـلاس Δ الـوارد في التوطئـة 5.5. وليكن $f\in E'(\mathbb{R}^n)$. نضع $u=w*f$. لدينا :

1) u حل للمعادلة $\Delta u=f$ ، وذلك لكل $2\leq n$.

2) $u\in E'(\complement_{\mathbb{R}^n}\operatorname{supp}f)$ ، وذلك لكل $2\leq n$.

3) $\lim_{\|x\|\to+\infty}u(x)=0$ ، وذلك من أجل $3\leq n$.

يعتمد البرهان على اعتبار الدالة

$$v : \complement_{\mathbb{R}^n} \operatorname{supp} f \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longrightarrow \langle f , \psi(x,.) \rangle$$

حيث $\psi(x,y) = \theta_x(y) w(x-y)$ و θ_x دالة من $D(\mathbb{R}^n)$ تحقق θ_x بجوار $\operatorname{supp} f$ و $\theta_x = 0$ بجوار النقطة x. إن الدالة v لا تتعلق باختيار الدالة θ_x. فنثبت أن $\psi(x,.) \in E(\mathbb{R}^n)$ وذلك لكل x. ثم نبرهن على أن $v \in C^\infty$. وبعد ذلك نبيّن أن $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} v(x) = 0$. وفي الأخير يتم البرهان على أن $v(x) = 0$ $u(x)$ وهذا لكل x من $\complement_{\mathbb{R}^n} \operatorname{supp} f$.

من أهم النتائج التي يمكن استخلاصها من المبرهنة السابقة هي :

مبرهنة 7.5

> ليكن Ω جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ ، حيث n عدد طبيعي غير منعدم. وليكن $u \in D'(\Omega)$ بحيث $\Delta u = 0$. عندئذ $u \in E(\Omega)$.
>
> (نعبّر عن هذه النتيجة بالقول إن التوزيعات التوافقية الوحيدة هي الدوال التوافقية المعتادة).

البرهان

ليكن $x_0 \in \Omega$ و $\varphi \in D(\Omega)$ بحيث $\varphi = 1$ بجوار V لـ x_0. لنثبت أن $u_{|_V} \in E(V)$ (ومنه سيأتي المطلوب). لدينا: $\varphi u \in D'(\mathbb{R}^n)$. نضع: $\Delta(\varphi u) = f$. وبالتالي (لاحظ أن $\Delta u = 0$ فرضا): $\Delta(\varphi u) = u \nabla \varphi + \nabla u \nabla \varphi$. وبما أن $\operatorname{supp} \varphi$ متراص فإن $\Delta \varphi$ و $\nabla \varphi$ منعدمان خارج هذا المتراص. إذن: $\Delta(\varphi u) \in E'(\mathbb{R}^n)$ ، أي: $f \in E'(\mathbb{R}^n)$.

وبالإضافة إلى ذلك، لدينا (لاحظ أن $\Delta \varphi = 0$ و $\nabla \varphi = 0$ على V):

$$f_{|_V} = \Delta(\varphi u)_{|_V} = 0.$$

ومنه: $\operatorname{supp} f \subset \complement_{\mathbb{R}^n} V$ ، ولذا: $x_0 \in \complement_{\mathbb{R}^n} \operatorname{supp} f$ لأن V جوار لـ x_0.

ومن جهة أخرى، نعلم أن حوامـل w و $\Delta\delta$ و φu متزاوجـة (لاحـظ أن $\text{supp}\,\Delta\delta$ و $\text{supp}\,\varphi u$ متراصان)، وعليه يأتي من خاصية التجميع:

$$\begin{aligned}\varphi u &= w * \Delta\delta * \varphi u \\ &= w * (\Delta\delta * \varphi u) \\ &= w * \Delta(\varphi u) \\ &= w * f .\end{aligned}$$

وهكــذا يتــضح مــن المبرهنــة الــسابقة أن: $w * f \in E(\complement_{\mathbb{R}^n} \text{supp} f)$. أي : $\varphi u \in E(\complement_{\mathbb{R}^n} \text{supp} f)$. لكن العلاقة $x_0 \in V \subset \complement_{\mathbb{R}^n} \text{supp} f$ المبيّنة آنفا تؤدي إلى $u = \varphi u_{|_V} \in E(V)$. ولذا يأتي أن $u \in C^\infty$ بجوار $x_0 \in \Omega$ ، أي $u \in E(\Omega)$.

إليك نتيجة تعمّم جزءا مما ورد بخصوص مؤثر لابلاس.

مبرهنة 8.5

ليكن P مؤثرا تفاضليا ذا معاملات ثابتة في $\mathbb{R}^n$. نفرض أن لـ P حـلا أساسـيا $w \in E(\mathbb{R}^n_*)$. عندئـذ، لكـل $f \in E'(\mathbb{R}^n)$، فـإن التوزيـع $u = E * f$ حل للمعادلة $Pu = f$ ، ولدينا: $u \in E(C_{\mathbb{R}^n} \text{supp} f)$.

ملاحظة

لا يوجد فرق كبير بين إثبات هذه المبرهنة والمبرهنة 6.5 لأن إثبات الأخيرة لا يستعمل شكل المؤثر P ولا شكل حله الأساسي E ، بل يستفيد فقط من كون $w \in E(\mathbb{R}^n_*)$.

نختم هذا الفصل بتقديم نتيجتين حول معادلات التزاوج في $D'(\mathbb{R}_+)$.
من أجل ذلك نعتبر مؤثرا تفاضليا P ثابت المعاملات وذا متغير حقيقي.
كنا رأينا بأننا نستطيع كتابة P على الشكل:

$$P = D^m + c_{m-1}D^{m-1} + c_{m-2}D^{m-2} + \ldots + c_1 D + c_0 .$$

لدينا النتيجة التالية بخصوص وجود الحل الأساسي ووحدانيته:

مبرهنة 9.5

يقبل المؤثر P حلا أوليا وحيدا $w \in D'(\mathbb{R}_+)$. ولدينا: $w = H.e$ حيث يرمز H لدالة هيفسايد و e للحل الوحيد للمسألة:

$$\begin{cases} Pe = 0, \\ e^{(j)}(0) = 0, \forall j = 0,\ldots, m-2, \\ e^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

البرهان

❖ الوجود: لكل $\psi \in E(\mathbb{R})$ نثبت بالحساب المباشر أن:

$$D^j(H.\psi) = \psi(0).\delta^{(j-1)} + \psi'(0)\delta^{(j-2)} + \ldots + \psi^{(j-1)}(0)\delta + \psi^{(j)}.H.$$

لنأخذ $\psi = e$. نلاحظ أن الفرضيات حول e تؤدي إلى:

$$D^j(He) = \begin{cases} e^{(j)}H, & \forall j = 0,\ldots, m-1, \\ e^{(m)}H + \delta, & j = m. \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} P(He) &= e^{(m)}H + \delta + \sum_{j=0}^{m-1} c_j e^{(j)} H \\ &= \delta + (Pe).H \\ &= \delta. \end{aligned}$$

إذن فإن $w = H.e$ حل أساسي.

❖ الوحدانية: نفرض وجود حلّ أساسي آخر F. بما أن كل الحوامل محتواة في $\mathbb{R}_+$ فإنها حوامل متزاوجة (تأكد من ذلك). ومن ثمّ نستطيع الاستفادة من خاصية التجميع وكتابة:

$$P * w * F = (P * w) * F = \delta * F = F$$
$$P * w * F = w * (P * F) = w * \delta = w,$$

واستنتاج أن: $w = F$. $\square$

وها هي النتيجة الأخيرة التي نريد تقديمها في هذا الفصل:

مبرهنة 10.5

E هو الحل الأساسي للمؤثر P من الدرجة m الذي ورد ذكره في المبرهنة السابقة. لدينا:

1) لكل $f \in D'(\mathbb{R}_+)$، يوجد $u \in D'(\mathbb{R}_+)$ وحيد حل للمعادلة $Pu = f$.

2) لكل $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+) \cap D'(\mathbb{R}_+)$ فإن الحل u للمعادلة $Pu = f$ ينتمي إلى $C^{m-1}(\mathbb{R}_+)$.

3) لكل $f \in C^k(\mathbb{R}_+)$ فإن الحل u للمعادلة $Pu = f$ ينتمي إلى $C^{k+m}(\mathbb{R}_+)$.

البرهان

1) ليكن f من $D'(\mathbb{R}_+)$. نستطيع فيما يلي الاستفادة من خاصية التجميع (لماذا؟):

$$\begin{aligned} P(w * f) &= A * (w * f) \\ &= (A * w) * f \\ &= \delta * f \\ &= f . \end{aligned}$$

ومنه فإن $u = w * f$ حل للمعادلة $Pu = f$.

للتأكد من الوحدانية، نفرض وجود $v \in D'(\mathbb{R}_+)$ حل للمعادلة $Pv = f$، أي $A * v = f$. وبالتالي:

$$w * (A * v) = w * f = u$$
$$(w * A) * v = \delta * v = v .$$

ومن ثمّ ينتج: $u = v$.

2) نسلّم بها.

3) ليكن f عنصرا من C^0. ومن ثمّ فهو عنصر من $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)\cap D'(\mathbb{R}_+)$. حينئذ يمكن كتابة $Pu = f$ على الشكل:

$$D^m u = f - \left(\sum_{j=0}^{m-1} c_j D^j u\right)$$

مع العلم أن $\sum_{j=0}^{m-1} c_j D^j u$ مستمرّ حسب القضية 2). إذن فإن $D^m u$ مستمرّ لأن 2) تبيّن أيضا بأن $D^j u$ مستمرّ لكل $j \le m-1$. كما أن f مستمر فرضا.

وهكذا، عندما يكون $Pu = f$ و f مستمرّا فإن $D^m u$ مستمرّ. بتطبيق هذه القاعدة يتبيّن أن $D^{j+m}u$ مستمر لأن $P(D^j u) = D^j f$ و $D^j f$ مستمرّ. ومن ثمّ يتضح أن الانتماء $f \in C^k$ يؤدي إلى الانتماء $u \in C^{k+m}$.□

6- تمارين

تمرين 1

لتكن المجموعتان

$$A = \left\{(x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^+_*\right\} \text{ و } B = \left\{(0, x) \in \mathbb{R}^2 : x \le 0\right\}.$$

هل A و B مغلقان؟ هل $A + B$ مغلق؟

تمرين 2

1) تأكد من وجود جداءات التزاوج التالية : $\delta_a * \delta_b$ ، $\delta' * H$ ، $\delta' * 1$ ، $1_{]a,b[} * 1_{]c,d[}$ (علما أن الرمز 1_A يشير إلى الدالة المميزة للمجموعة A).

2) احسب $(1 * \delta') * H$ و $1 * (\delta' * H)$.

تمرين 3

احسب جداء التزاوج في كل من الحالات التالية بعد التأكد من وجوده :

1) $\delta_a * H$.

2) $\delta' * 1$.

3) $T \in E'(\mathbb{R}),\ T * 1$.

4) $T \in E'(\mathbb{R}),\ T * e^x$.

5) $H * Pf(\frac{H}{x})$ ، حيث :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}),\ < Pf(\frac{H}{x^2}), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln\varepsilon\right].$$

6) $\delta' * \mathrm{pv}\frac{1}{x}$.

7) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n^{(n)}\right) * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n\right)$.

تمرين 4

ليكن $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ و $(\varphi_j)_j$ متتالية دوال من $D(\mathbb{R}^n)$.

أثبت أن تقارب $(\varphi_j)_j$ نحو φ في $D(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى التقارب البسيط للمتتالية $T * \varphi_j$ نحو $T * \varphi$.

تمرين 5

ليكن $T_1 \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $T_2 \in D'(\mathbb{R}^n)$ و $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ و $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$.

أثبت أن : $(T_1 * T_2) * (\varphi * \psi) = (T_2 * T_1) * (\varphi * \psi)$.

استنتج أن $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$.

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖