الفصل الثالث

فضاءات سوبولاف Sobolev الصحيحة الرتب

تعتبر فضاءات سوبولاف من أبرز الفضاءات المستخدمة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية. ذلك أنها تتميز بخواص تجعلها أحسن تعبيرا عن الحل ومميزاته على ضوء المعطيات. الهدف من هذا الفصل تقديم نبذة عن هذه الفضاءات مركزين على الهيلبرتية منها.

1- تعاريف وخواص أولية

عندما نقول عن دالة إنها دالة مصقولة (أو ملساء smooth) أو "جيّدة" فهذا يعني أنها تتمتع بخواص تحليلية تسمح لنا بحل المسألة المطروحة أو بالتعرف أكثر على جملة من خواصها.

ما هي هذه الخواص؟ قد تكون قابلية اشتقاق إلى رتبة معينة (الانتماء إلى الفضاء C^m) وقد تكون قابلية مكاملة (الانتماء إلى فضاء لوبيغ Lebesgue L^p حيث $1 \le p \le +\infty$)، وقد تكون خواص من نوع آخر كالانتماء إلى فضاءات هولدر Hölder[1] C^α (حيث $0 < \alpha < 1$)، إلخ. وفي التحليل الرياضي

[1] أوتو هولدر رياضي ألماني (1859-1937).

تكثر المسائل التي نحتاج فيها إلى دوال مصقولة، بمعنى أن لها - في آن واحد- قابلية اشتقاق وقابلية مكاملة. عندئذ تتدخل فضاءات سوبولاف Sobolev[2].

تعريف 1.1 (فضاء سوبولاف)

ليكن $m \in \mathbb{N}$. فضاء سوبولاف $H^m(\mathbb{R}^n)$ من الرتبة m هو الفضاء

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \le m \right\}.$$

(نذكّر أن $D^\alpha u$ يعني الاشتقاق بمفهوم التوزيعات، وهذا جائز لأن انتماء u إلى $L^2(\mathbb{R}^n)$ يؤدي إلى $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$).

ملاحظات

1) يمكن تعميم التعريف السابق باعتبار فضاء لوبيغ $L^p(\mathbb{R}^n)$ (حيث $1 \le p \le +\infty$) بدل $L^2(\mathbb{R}^n)$ فنعرّف فضاء سوبولاف الذي يرمز إليه بـ $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ أو بـ $W_p^m(\mathbb{R}^n)$:

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \ D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n), \quad |\alpha| \le m \right\}.$$

2) نعرّف $H^m(\Omega)$ أو $W^{m,p}(\Omega)$ كما ورد في التعريف السابق (استبدل $\mathbb{R}^n$ بجزء مفتوح Ω من $\mathbb{R}^n$). لاحظ أيضا أن فضاء سوبولاف H^0 هو L^2، كما أن $W^{0,p}$ هو L^p.

3) تعتبر فضاءات سوبولاف هي الفضاءات "الطبيعية" التي نبحث فيها عن حلول العديد من المعادلات التفاضلية الجزئية. فإذا اعتبرنا، مثلا، معادلة لابلاس Laplace [3]

[2] سرغي لفوفيتش سوبولاف (1908- 1989) رياضي وفيزيائي ذرّي روسي.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

في جزء من $\mathbb{R}^2$ ، وكان $f \in C^0$ (أي f مستمرة) فإن الحل u لا ينتمي عموما إلى C^2. أما إذا كان $f \in H^0 = L^2$ فإن $u \in H^2$ عموما (سنوضح ذلك لاحقا).

مبرهنة 2.1

يكون $H^m(\mathbb{R}^n)$ فضاء هيلبرتيا (نسبة إلى هيلبرت Hilbert [4]) لدى تزويده بالضرب الداخلي (الجداء السلمي) Inner product:

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \le m} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(x).\overline{D^\alpha v(x)}dx .$$

النظيم المزوّد به هذا الفضاء هو إذن:

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2} .$$

البرهان

من الواضح أن $(.,.)_{H^m}$ ضرب داخلي.

لنثبت أن $H^m(\mathbb{R}^n)$ فضاء تام. نعتبر متتالية كوشية (u_j) من $H^m(\mathbb{R}^n)$ ، أي متتالية تحقق : $\lim_{j,k \to +\infty} \|u_j - u_k\|_{H^m} = 0$.

يعني ذلك أن:

$$\lim_{j,k \to +\infty} \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha (u_j - u_k)\|_{L^2}^2 = 0 .$$

ومنه:

$$\lim_{j,k \to +\infty} \|D^\alpha (u_j - u_k)\|_{L^2} = 0$$

---

[3] بيير سيكون لابلاس (1749-1827) رياضي فرنسي.

[4] ديفد هيلبرت (1862-1943) رياضي ألماني.

وذلك من أجل $|\alpha| \leq m$. ومن ثمّ فإن $D^\alpha u_j$ متتالية كوشية في الفضاء التام (الهيلبرتي) $L^2(\mathbb{R}^n)$ ، وهذا مهما كان α بحيث $|\alpha| \leq m$. إذن لكل α ، يوجد $v_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

$$D^\alpha u_j \xrightarrow{L^2(\mathbb{R}^n)} v_\alpha .$$

ومنه (تأكد من ذلك): $D^\alpha u_j \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} v_\alpha$. لكن :

$$u_j \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} v_0$$

يستلزم أن :

$$D^\alpha u_j \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} D^\alpha v_0$$

وهذا لكل α.

وعليه : $v_\alpha = D^\alpha v_0$ في $D'(\mathbb{R}^n)$ لكل α. وهكذا أصبح لدينا :

$$\begin{cases} v_\alpha \overset{D'(\mathbb{R}^n)}{=} D^\alpha v_0 \\ v_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

ولذا: $D^\alpha v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ، وهذا لكل α بحيث $|\alpha| \leq m$. إذن :

$$v_0 \in H^m(\mathbb{R}^n).$$

وفي الأخير نلاحظ بأن لدينا فعلا:

$$\|u_j - v_0\|_{H^m}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_j - v_\alpha\|_{L^2}^2 \xrightarrow{j \to +\infty} 0. \square$$

مبرهنة 3.1

إن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^m(\mathbb{R}^n)$.

البرهان

نسلّم الآن بهذه النتيجة لأنها ستُثبَت في إطار أعمّ، وذلك عند تناول فضاءات سوبولاف الكسرية الرتب (انظر المبرهنة 3.1 من الفصل 6). □

ملاحظة

إن الفضاء $D(\Omega)$ ليس عموما كثيفا في $H^m(\Omega)$ (أي أنه لا يجوز استبدال $\mathbb{R}^n$ بمفتوح كيفي Ω في المبرهنة السابقة). للتأكد من ذلك، إليك التمرين التالي:

تمرين

نعتبر $\Omega =]0,1[$. وليكن $u \in H^1(\Omega)$. نفرض وجود متتالية $(u_j) \in D(\Omega)$ بحيث:

$$u_j \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$$

1) أثبت أن المتتالية (u_j) متقاربة بانتظام في $[0,1]$ نحو دالة مستمرّة v بحيث $v(0) = v(1) = 0$.

2) بيّن أن $u = v$ حيثما كان تقريبا على المجال $[0,1]$.

3) استنتج أن $D(\Omega)$ ليس كثيفا في $H^1(\Omega)$.

تعريف 4.1 (فضاء سوبولاف برتبة سالبة)

ليكن $m \in \mathbb{N}$. نرمز بـ $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ لفضاء التوزيعات u بحيث يوجد ثابت موجب C يحقق:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad \left|\langle u, \varphi \rangle\right| \le C \|\varphi\|_{H^m}.$$

ملاحظة

يعبّر هذا التعريف عن استمرار الشكل الخطي u على $D(\mathbb{R}^n)$، وذلك عندما يكون مزودا بالطبولوجيا المستنتجة من طبولوجيا $H^m(\mathbb{R}^n)$.

تقدّم المبرهنة الموالية تمديدا للثنوية القائمة بين $D'(\mathbb{R}^n)$ و $D(\mathbb{R}^n)$ إلى ثنوية بين فضاءي سوبولاف $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ و $H^m(\mathbb{R}^n)$.

مبرهنة **5.1** (تمديد الثنوية)

1) ليكن $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. إن التطبيق:

$$D(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi \longrightarrow \langle u,\varphi \rangle_{D',D}$$

يمتدّ إلى شكل خطي ومستمرّ على $H^m(\mathbb{R}^n)$. نرمز لهذا الشكل الخطي المستمرّ بـ:

$$H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$v \longrightarrow \langle u,v \rangle_{H^{-m},H^m}.$$

2) يسمح هذا التمديد بمطابقة الفضاء $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ بثنوي الفضاء $H^m(\mathbb{R}^n)$، أي أن:

لكل $L \in (H^m(\mathbb{R}^n))'$ (حيث يرمز $(H^m(\mathbb{R}^n))'$ لثنوي $H^m(\mathbb{R}^n)$)،

يوجد $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث:

$$\forall v \in H^m(\mathbb{R}^n), \qquad L(v) = \langle u,v \rangle_{H^{-m},H^m}.$$

البرهان

1) نعلم (المبرهنة 3.1) أن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^m(\mathbb{R}^n)$. وعليه إذا كان $v \in H^m(\mathbb{R}^n)$ فإنه توجد متتالية (φ_j) من $D(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\varphi_j \xrightarrow{H^m} v$.

ثمّ من تعريف H^{-m} (التعريف 4.1) ينتج وجود ثابت موجب C بحيث:

$$\left|\langle u,\varphi_j - \varphi_k \rangle\right| \le C\left\|\varphi_j - \varphi_k\right\| \xrightarrow{j,k \to +\infty} 0.$$

ولذلك فإن المتتالية $\langle u,\varphi_j \rangle$ متقاربة (لأنها كوشية). لنرمز بـ $\langle u,v \rangle_{H^{-m},H^m}$ لنهايتها.

ومن جهة أخرى، لما كان $\varphi_j \xrightarrow{H^m} v$ فإن $\lim_{j \to +\infty}\left\|\varphi_j\right\|_{H^m} = \|v\|_{H^m}$. ولذا نستنتج من العلاقة: $\left|\langle u,\varphi_j \rangle\right| \le C\left\|\varphi_j\right\|_{H^m}$ أن:

$$\left|\langle u,v \rangle_{H^{-m},H^m}\right| \le C\|v\|_{H^m}.$$

وهكذا يتبيّن أن:

$$\forall v \in H^m(\mathbb{R}^n): \qquad \left|\langle u,v\rangle_{H^{-m},H^m}\right| \leq C\,\|v\|_{H^m}.$$

ومنه يأتي استمرار التطبيق (الشكل الخطي):

$$\begin{aligned} H^m(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longrightarrow \langle u,v\rangle_{H^{-m},H^m}. \end{aligned}$$

تمرين

لاحظ أن هذا التعريف لـ u يستوجب قيام الشرط التالي:

مهما كانت المتتالية $\varphi_j \in D(\mathbb{R}^n)$ المتقاربة نحو v فإن :

$$\langle u,v\rangle_{H^{-m},H^m} = \lim_{j\to+\infty}\langle u,\varphi_j\rangle_{H^{-m},H^m}$$

أي أن النهاية المشار إليها في السطر السابق ينبغي أن تكون وحيدة. أثبت هذه الوحدانية.

2) لنثبت الآن النقطة الثانية في المبرهنة. من أجل ذلك نعتبر شكلا خطيا مستمرا $L \in (H^m(\mathbb{R}^n))'$. وليكن K متراصا من $\mathbb{R}^n$ و $\varphi \in D_K(\mathbb{R}^n)$.

يوجد (لماذا؟) ثابت C' بحيث :

$$|L(\varphi)| \leq C\,\|\varphi\|_{H^m} \leq C'\sup_{|\alpha|\leq m,\, x\in K}\left|D^\alpha\varphi(x)\right| = C'p_{K,m}(\varphi).$$

(حيث يرمز $p_{K,m}$ إلى نصف النظيم المعتاد).

ومنه فإن $L_{|D(\mathbb{R}^n)}$ توزيع (رتبته أقل من m أو تساويه). نرمز بـ u لهذا التوزيع، أي أن:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n): \qquad L(\varphi) = \langle u,\varphi\rangle_{D'(\mathbb{R}^n),D(\mathbb{R}^n)}.$$

لكن الثابت C الوارد أعلاه مستقل عن K (لماذا؟) و L مستمر، ولذا:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n): \qquad \langle u,\varphi\rangle_{D'(\mathbb{R}^n),D(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}.$$

إذن $u \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ (حسب تعريف $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$).

وبالاستناد إلى 1) فإن التوزيع u يمتدّ إلى الفضاء $H^m(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} H^m(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longrightarrow \langle u,v\rangle_{H^{-m},H^m} \end{aligned}$$

وهكذا يصبح لدينا شكلان خطيان ومستمران على $H^m(\mathbb{R}^n)$ ، هما:

$$\begin{aligned} H^m(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longrightarrow \langle u,v\rangle_{H^{-m},H^m} \end{aligned}$$

و :

$$\begin{aligned} L : H^m(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longrightarrow L(v) \end{aligned}$$

والشكلان يتطابقان على $D(\mathbb{R}^n)$ (الكثيف في $H^m(\mathbb{R}^n)$). وعليه فهما متطابقان على $H^m(\mathbb{R}^n)$ ، أي أن:

$$\forall v \in H^m(\mathbb{R}^n): \qquad L(v) = \langle u,\varphi\rangle_{H^{-m},H^m}$$

وحدانية u : تأتي من وحدانية التمديد في القضية 1) من المبرهنة (وضّح ذلك). □

ملاحظات

1) تعميم: من أجل $p>1$ فإن ثنوي الفضاء $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ هو الفضاء $W^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ حيث $\frac{1}{p'}=1$ + $\frac{1}{p}$.

2) تبيّن هذه المبرهنة أنه بالإمكان مطابقة الفضاء الثنوي $(H^m(\mathbb{R}^n))'$ للفضاء $H^m(\mathbb{R}^n)$ بـ $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$: إنها مطابقة ناتجة عن التمديد باستمرار للثنوية بين $D'(\mathbb{R}^n)$ و $D(\mathbb{R}^n)$.

ومن المهمّ (جدّا) أن نشير بأنها مطابقة مستقلة عن الضرب الداخلي المختار على الفضاء $H^m(\mathbb{R}^n)$. ولذا نسميها المطابقة القانونية Canonical .

3) علاوة على ما ورد في الملاحظة السابقة، نشير إلى أنه إذا كان $(.,.)$ ضربا داخليا على $H^m(\mathbb{R}^n)$ فإننا نستطيع مطابقة الفضاء $(H^m(\mathbb{R}^n))'$ بالفضاء ذاته (تلك هي خاصية يتمتع بها كل فضاء هيلبرتي):

$$\forall L \in (H^m(\mathbb{R}^n))', \quad \exists! u \in H^m(\mathbb{R}^n): \; L(v) = (u,v)_{H^m}, \forall v \in H^m(\mathbb{R}^n).$$

والمطابقة هنا تعني مطابقة العنصرين L و u.

من المهمّ (جدّا) أن نشير بأنها مطابقة مرتبطة بالضرب الداخلي $(u,v)_{H^m}$.

علينا أيضا أن ننتبه إلى أنه بالإمكان تعريف أكثر من ضرب داخلي واحد، على فضاء معيّن، تنبثق عنها نظيمات متكافئة أو غير متكافئة.

خلاصة القول: ينبغي الحذر من مطابقة الفضاءات وإدراك نوع المطابقة التي نقصدها في كل حالة من الحالات التي نريد دراستها، وإلا ارتكبنا أخطاء لا تغتفر! ورغم هذا التحذير فإنه من المفيد أن نقول بأن اختلاف المطابقات ليس سلبيا في جميع الأحوال، إذ سنتمكن من استغلاله أحيانا للبرهان على نتائج مهمة كما سنرى أدناه.

إليك هذه النتيجة المهمة التي تميّز عناصر الفضاء الثنوي $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$:

مبرهنة 6.1

ليكن u عنصرا من $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. يوجد عدد منته من العناصر $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ حيث $|\alpha| \le m$ تحقق العلاقة:

$$u = \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha f_\alpha .$$

هذا يعني أن كل عنصر من الفضاء الثنوي $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ يكتب على شكل مجموع منته من مشتقات دوال ذات مربعات قابلة للمكاملة).

البرهان (طريقة أولى)

❖ ليكن $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. لدينا:

$$\forall |\alpha| \leq m : \quad D^\alpha v \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$$

ذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad \left|\left\langle D^\alpha v, \varphi\right\rangle\right| &= \left|\left\langle v, D^\alpha \varphi\right\rangle\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} v(x) D^\alpha \varphi(x) dx\right| \\ &\leq \|v\|_{L^2} . \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} \\ &\leq \|v\|_{L^2} . \|\varphi\|_{H^m} .\end{aligned}$$

ومنه، حسب تعريف $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$:

$$D^\alpha v \in H^{-m}(\mathbb{R}^n).$$

❖ ليكن $f \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. لنثبت أنه توجد عناصر f_α من $L^2(\mathbb{R}^n)$ (من أجل $|\alpha| \leq m$) بحيث: $f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha$.

لهذا الغرض نضع: $A = \left\{\alpha \in \mathbb{N}^n : \quad |\alpha| \leq m\right\}$

و:

$$(L^2(\mathbb{R}^n))^A = \left\{(u_\alpha)_{\alpha \in A} : \quad u_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n), \ \forall \alpha \in A\right\}$$

تمرين

أثبت أن $(L^2(\mathbb{R}^n))^A$ فضاء هيلبرتي لدى تزويده بالضرب الداخلي $(.,.)_{(L^2)^A}$ المعرف بـ:

$$\forall U \in (L^2(\mathbb{R}^n))^A, \ \forall V \in (L^2(\mathbb{R}^n))^A :$$
$$(U, V)_{(L^2)^A} = \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathbb{R}^n} u_\alpha(x) \overline{v_\alpha}(x) dx .$$

نعتبر الآن التطبيق:

$$D : H^{m}(\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow (L^{2})^{A}$$
$$u \longrightarrow Du = (D^{\alpha}u)_{\alpha\in A}$$

ونرمز بـ F لصورة $H^{m}(\mathbb{R}^{n})$ عبر التطبيق D ، أي $F = D(H^{m}(\mathbb{R}^{n}))$.

إن D إيزومترية (تقايس)، أي أنه يحقق $\|Du\|_{(L^2)^A} = \|u\|_{H^m}$ (تأكد من ذلك).

من جهة أخرى نلاحظ أن F تام لأن $H^{m}(\mathbb{R}^{n})$ تام. ومنه فهو مغلق.

لمواصلة تقديم البرهان نذكّر بالنتيجة المعروفة (الإسقاط العمودي) التالية:

مبرهنة 7.1

ليكن H فضاء هيلبرتيا و F فضاء متجهيا جزئيا مغلقا من H.

1) لكل عنصر $x\in H$ ، يوجد $x_0 \in F$ وحيد بحيث:

$$\begin{cases} x - x_0 \perp F, \\ \|x - x_0\| \le \|x - y\|, \ \forall y \in F. \end{cases}$$

2) يسمى التطبيق:

$$P : H \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow P(x) = x_0$$

الإسقاط العمودي لـ H على F ، وهو تطبيق خطي مستمرّ، ولدينا $\|P(x)\| = \|x\|$.

نطبقّ هذه النتيجة باعتبار عنصر u من $H^{-m}(\mathbb{R}^{n})$ نعرّف بواسطته، وبواسطة الإسقاط العمودي، الشكل الخطي المستمرّ:

$$L : (L^{2})^{A} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$W \longrightarrow (u, D^{-1}PW)_{H^{-m}, H^{m}}.$$

يتبيّن حينئذ من مبرهنة ريس Riesz [5] أنه يوجد V من $(L^2)^A$ وحيد بحيث:

$$\forall W \in (L^2)^A, \quad L(W) = (W, V)_{(L^2)^A}.$$

نختار بعد ذلك φ كيفيا في $D(\mathbb{R}^n)$ ونضع:

$$W = (D^\alpha \varphi)_{\alpha \in A} \in (L^2)^A.$$

لدينا: $W \in F$. ومنه $PW = W$. وعليه $D^{-1}W = \varphi \quad D^{-1}PW =$ وهكذا نرى أن:

$$\begin{aligned} L(W) &= (u, D^{-1}PW)_{H^{-m},H^m} \\ &= (W, V)_{(L^2)^A} \\ &= \sum_{\alpha \in A} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha \varphi(x) \overline{v_\alpha}(x) dx \end{aligned}$$

أي: $\langle u, \varphi \rangle_{H^{-m},H^m} = \langle u, \varphi \rangle_{D',D}$ حيث $V \in (v_\alpha) \in (L^2)^A$ (أي $v_\alpha \in L^2$ من أجل $|\alpha| \le m$). إذن:

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle_{H^{-m},H^m} &= \sum_{\alpha \in A} \langle \overline{v_\alpha}, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in A} (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha \overline{v_\alpha}, \varphi \rangle \\ &= \left\langle \sum_{\alpha \in A} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{v_\alpha}, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

ومن ثمّ، نحصل على المساواة التالية في $D'(\mathbb{R}^n)$:

$$u = \sum_{\alpha \in A} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{v_\alpha}.$$

ومنه تأتي نفس المساواة في $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ (تأكد من ذلك بالرجوع إلى تعريف $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$).

وهو المطلوب. □

ملاحظة

سنرى إثباتا آخر للمبرهنة 6.1 (المبرهنة 5.2).

[5] فريجيس ريس (1880-1956) رياضي مجري.

2- تطبيقات

نعتبر في $\mathbb{R}^n$ المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية :

$$\sum_{i,j=1,\dots,n} D_i\big((a_{ij}(x).D_j u(x)\big) - \lambda u(x) = f(x)$$

حيث $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ دوالّ محدودة ذات قيم حقيقية و $0<\lambda$.

نفرض أن المصفوفة $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ متناظرة وحقيقية ومعرّفة موجبة بانتظام، أي أنه يوجد ثابت موجب C بحيث:

$$\forall \xi \in \mathbb{C}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x)\xi_i \overline{\xi_j} \geq C|\xi|^2$$

مثال ذلك: نعتبر $a_{ij} = \delta_{ij}$ (حيث يشير δ_{ij} لرمز كرونيكر Kronecker[6])

فنحصل على المعادلة:

$$\Delta u - \lambda u = f$$

حيث يرمز Δ لمؤثر لابلاس Laplace. نعرّف التطبيق :

$$A : H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$$

$$u \longrightarrow Au = \sum_{i,j=1,\dots,n} D_i(a_{ij} D_j u)$$

(لاحظ أن $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ يستلزم $D_j u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. ومنه $a_{ij} D_j u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ لأن $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ محدودة، ومن ثمّ يأتي $D_i(a_{ij} D_j u) \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$).

لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة 1.2

لكل $0<\lambda$ وكل $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$، يوجد $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث:

$$(A-\lambda)u = f.$$

---

[6] ليوبولد كرونيكر (1823-1891) رياضي ألماني.

حالة خاصة: إذا كان $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ فإنه يوجد $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث $(A-\lambda)u = f$.

لإثبات هذه المبرهنة نحتاج إلى النتيجة الموالية:

توطئة **2.2**

إن التطبيق:

$$A : H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$
$$(u,v) \to (u,v)_*$$

حيث

$$(u,v)_* = \sum_{i,j=1,\dots,n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}(x) D_i u(x) \overline{D_j v}(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \bar{v}(x) dx$$

يمثّل ضربا داخليا على $H^1(\mathbb{R}^n)$ ويعرّف نظيما يكافئ النظيم المعتاد (الوارد في المبرهنة 2.1).

برهان التوطئة

إن التطبيق المعطى معرف جيّدا، وهو ضرب داخلي على $H^1(\mathbb{R}^n)$ (تأكد من ذلك: لا تنس أن $0 < \lambda$).

ومن جهة أخرى فإن الدوال $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ محدودة، وعليه يوجد ثابت M موجب بحيث:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x) \xi_i \overline{\xi_j} \le M |\xi|^2 .$$

إذن، بالاستناد إلى الفرضيات بخصوص الدوال $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$، نجد باعتبار $\xi = \nabla u(x)$ (حيث يرمز ∇ للتدرج):

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \qquad \mathrm{C} |\nabla u(x)|^2 \le \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x) D_i u(x) \overline{D_j(x)} \le M |\nabla u(x)|^2 .$$

نكامل بالنسبة إلى x ونضيف $\lambda \|u\|_{L^2}^2$، فنحصل على (حيث يرمز $\|.\|_*$ للنظيم المعرّف بالضرب الداخلي $(.,.)_*$):

$$\min(C,\lambda)\|u\|_{H^1}^2 \le \|u\|_*^2 \le \max(M,\lambda)\|u\|_{H^1}^2 .$$

ومنه يأتي تكافؤ النظيمين المشار إليهما في نص التوطئة. □

إثبات المبرهنة **1.2** (الطريقة الأولى)

ليكن $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. نعتبر الشكل الخطي:

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ v &\longrightarrow \langle f, v\rangle_{H^{-1},H^1} . \end{aligned}$$

عندئذ، يوجد $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث:

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^n): \qquad \langle f, v\rangle_{H^{-1},H^1} = (u,w)_*$$

ومن ثمّ نحصل على:

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \\ &\langle f,\varphi\rangle_{H^{-1},H^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x) D_i\varphi(x) D_j\overline{w}(x)dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{w}(x)dx \\ &\qquad = \left\langle -\sum_{i,j=1,\dots,n} D_i(a_{ij}D_j\overline{w}) + \lambda\overline{w}, \varphi\right\rangle. \end{aligned}$$

لنضع $u = -\overline{w}$. حينئذ:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i,j=1,\dots,n} D_i(a_{ij}D_j u) - \lambda u \\ &\overset{D'(\mathbb{R}^n)}{=} (A-\lambda)u. \end{aligned}$$

وحدانيـــة u: إن كـــان هنـــاك حـــلان u_1 و u_2 يحققـــان مـــا يحققـــه u فإن $u = u_1 - u_2$ حلّ للمعادلة $(A-\lambda)u = 0$. يتّضح من الحسابات السابقة أن:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad (\overline{u},\varphi)_* = 0.$$

إذن: $\overline{u} \perp D(\mathbb{R}^n)$، مع العلم أن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^1(\mathbb{R}^n)$.

ومنه: $\overline{u} \perp H^1(\mathbb{R}^n)$. وهكذا يأتي: $\overline{u} = 0$. □

إثبات المبرهنة 1.2 (طريقة ثانية)

ليكن $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$. نفرض أن الدوال هنا ذات قيم حقيقية ، ونعتبر التطبيق: $J : H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بـ:

$$J(v) = \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x) D_i v(x) D_j v(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} v^2(x) dx\right] + \langle f, v \rangle_{H^{-1},H^1}.$$

لنفترض أنه يوجد عنصر $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

$$J(u) = \min_{v \in H^1(\mathbb{R}^n)} J(v).$$

عندئذ:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 \le J(u + t\varphi) - J(u)$$
$$= t.B_1 \quad \frac{t^2}{2}.B_2.$$

حيث:

$$B_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) + \lambda u(x) \varphi(x) \right) dx + \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H^1}$$

$$B_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x) D_i \varphi(x) D_j \varphi(x) + \lambda \varphi^2(x) \right) dx.$$

وبالتالي:

$$\forall t \ge 0, \qquad 0 \le B_1 + \frac{t}{2} B_2$$
$$\forall t \le 0, \qquad 0 \ge B_1 + \frac{t}{2} B_2.$$

إذن : $B_1 = 0$ ، أي أنه عندما يدرك التطبيق J قيمته الصغرى عند u فإن:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n),$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{ij}(x) D_i u(x) D_j \varphi(x) + \lambda u(x) \varphi(x) \right) dx + \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1},H^1} = 0$$

وهذا يكافئ :

$$\sum_{i,j=1,\dots,n} D_i(a_{ij}D_j u) - \lambda u \overset{D'(\mathbb{R}^n)}{=} f$$

أي أن: $Au - \lambda u \overset{D'(\mathbb{R}^n)}{=} f$.

وهكذا فإن الحل u للمعادلة المطروحة هو العنصر الذي يدرك عنده التطبيق J قيمته الصغرى. وعليه يكفي أن نبرهن على أن J يدرك قيمته الصغرى عند "نقطة" من $H^1(\mathbb{R}^n)$ (يثبت ذلك وجود الحل، أما وحدانية الحل فهي تثبَت بسهولة كما جاء في طريقة البرهان الأولى).

لإنهاء البرهان نلاحظ أن انتماء f إلى الثنوي $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ يستلزم وجود عنصر وحيد u_0 من $H^1(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^n), \qquad \langle f, v \rangle_{H^{-1},H^1} = (-u_0, v)_*.$$

ومن ثمّ (انظر تعريف J والضرب الداخلي $(.,.)_*$):

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}(u,u)_* \quad \langle f,u \rangle \; + \\ &= \frac{1}{2}(u,u)_* - (u_0,u)_*. \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\left[(u-u_0, u-u_0)_* - (u_0,u_0)_*\right] \\ &\geq -\frac{1}{2}(u_0,u_0)_*. \end{aligned}$$

و:

$$J(u_0) = -\frac{1}{2}(u_0,u_0)_*.$$

وهكذا نحصل في الأخير على:

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^n), \qquad J(u_0) \leq J(u),$$

أي أن القيمة الصغرى لـ J تدرك عند u_0. وعليه فإن u_0 هو الحل المطلوب. □

إليك نتيجة أخرى مهمة خاصة بالمعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة $2m$:

مبرهنة 3.2

ليكن $m \in \mathbb{N}^*$ كيفيا.

إن المؤثر التفاضلي:

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} : H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-m}(\mathbb{R}^n)$$

تشاكل (تقابلي).

البرهان

نضع : $A = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$. نلاحظ أن A معرف جيّدا ، أي أن:

$$u \in H^m(\mathbb{R}^n) \quad \Rightarrow \quad Au \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$$

وذلك لأن:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \quad \langle Au, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} (D^\alpha u, D^\alpha \varphi)_{L^2}$$
$$\le \|u\|_{H^m} \|\varphi\|_{H^m} .$$

❖ إن A خطي (بدهي) ومستمرّ لأن:

$$\|Au\|_{H^{-m}} = \sup_{0 \ne v \in H^m(\mathbb{R}^n)} \frac{\left| \langle Au, v \rangle_{H^{-m}, H^m} \right|}{\|v\|_{H^m}}$$
$$= \sup_{0 \ne v \in H^m(\mathbb{R}^n)} \frac{\left| (u, v)_{H^m} \right|}{\|v\|_{H^m}}$$
$$\le \|u\|_{H^m} .$$

ومن جهة أخرى، فإن $u = v$ يستلزم أن:

$$\|Au\|_{H^{-m}} = \sup_{0 \ne v \in H^m(\mathbb{R}^n)} \frac{\left| (u, v)_{H^m} \right|}{\|v\|_{H^m}}$$
$$\ge \|u\|_{H^m} .$$

ومن ثمّ: $\|u\|_{H^m} = \|Au\|_{H^{-m}}$ ، وهو ما يثبت الاستمرار والتباين (الواقع أن A تقايس).

بقيت رؤية الغمر: ليكن $T \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. تنصّ مبرهنة ريس على وجود $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث:

$$\forall v \in H^m(\mathbb{R}^n), \qquad T(v) = (u,v)_{H^m(\mathbb{R}^n)}$$

أي:

$$\forall v \in H^m(\mathbb{R}^n), \qquad T(v) = \langle Au, v \rangle_{H^{-m}, H^m} .$$

إذن: $T = Au$. وهو المطلوب. □

ملاحظات

1) ينتج من التباين أن:

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 .$$

2) تعميم: إذا أردنا استبدال $\mathbb{R}^n$ بـ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ في المبرهنة السابقة، فإنها تكون معبّرة عن النتيجة التالية: المؤثر التفاضلي

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} : H_0^m(\Omega) \longrightarrow H^{-m}(\Omega)$$

تشاكل (تقابلي)، بل هو تقايس (كما رأينا في إثبات المبرهنة)، حيث يرمز $H_0^m(\Omega)$ لملاصقة فضاء الدوال الاختبارية $D(\Omega)$ في الفضاء $H^m(\Omega)$. انظر أيضا المبرهنة 1.3 من الفصل 7.

حالة خاصة: من أجل $m = 1$ يكتب المؤثر $\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$ على الشكل $\Delta - I$ حيث يرمز Δ لمؤثر لابلاس و I للتطبيق المطابق. نجد في هذه الحالة أن المؤثر

$$\Delta - I : H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)$$

تشاكل (تقابلي)، وهو ما أشرنا إليه في وقت سابق.

لنبرهن على النتيجة التالية المتعلقة بخاصية الكثافة:

مبرهنة 4.2

إن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

البرهان

ليكن $T \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. يوجد $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ بحيث $Au = T$ (حيث يرمز A للمؤثر التفاضلي $\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}$).

نعلم (المبرهنة 3.1) أن $D(\mathbb{R}^n)$ كثيف في $H^m(\mathbb{R}^n)$. ومنه توجد متتالية (φ_n) من $D(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\varphi_n \xrightarrow{H^m} u$.

ولما كان A مستمرا فإن :

$$A\varphi_n \xrightarrow{H^{-m}} Au = T.$$

لكن $A\varphi_n \in D(\mathbb{R}^n)$. وهكذا: لكل $T \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$، توجد متتالية في $D(\mathbb{R}^n)$ متقاربة نحو T.□

ملاحظة

تظل هذه المبرهنة قائمة لكل $\Omega \subset \mathbb{R}^n$، أي أن $D(\Omega)$ كثيف في $H^{-m}(\Omega)$ ... على الرغم من أن $D(\Omega)$ ليس كثيفا عموما في $H^m(\Omega)$ عندما يكون $0 < m$.

علينا ألاّ نستغرب في هذه النتيجة التي مردّها أن $H^{-m}(\Omega)$ يُعَرّف بأنه ثنوي ملاصقة $D(\Omega)$ في $H^{-m}(\Omega)$ سواء كان $\Omega = \mathbb{R}^n$ أو $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

نختم هذا الفصل بالعودة إلى المبرهنة 6.1 التي وعدنا بتقديم برهان ثان لها. إليك صياغة أخرى لنصها متبوعة بالبرهان:

مبرهنة 5.2

ليكن $T \in D'(\mathbb{R}^n)$.

يكون T عنصرا من $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ إذا وفقط إذا كان T يساوي مجموعا منتهيا لمشتقات، ذات رتب أقل من m ، لدوال من الفضاء $L^2(\mathbb{R}^n)$.

البرهان

❖ نفرض أن التوزيع T يكتب على الشكل $T = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha f_\alpha$ حيث $f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n)$ لكل $\alpha \in \mathbb{N}^n$ بحيث $|\alpha| \le m$. لما كان $D^\alpha f_\alpha \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ فإن $T \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

❖ إذا انتمى التوزيع T إلى $H^{-m}(\mathbb{R}^n)$ فإنه يوجد $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ وحيد بحيث:

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(D^\alpha u).
\end{aligned}
$$

عندئذ يكفي أن نضع $f_\alpha = D^\alpha u$ للحصول على النتيجة المطلوبة.□

ملاحظة

تظل هذه النتيجة قائمة عندما نستبدل $\mathbb{R}^n$ بأي جزء مفتوح $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3- تمارين

تمرين 1

ليكن $T \in D'(\Omega)$ حيث Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$. نفرض وجود ثابت موجب c بحيث :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad |<T,\varphi>| \leq c\sqrt{\int_\Omega |\varphi(x)|^2\,dx}\,.$$

أثبت أنه توجد $f \in L^2(\Omega)$ بحيث :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad <T,\varphi> = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\,.$$

تمرين 2

1) أثبت المتباينة :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \forall i = 1,\dots,n, \qquad \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot \left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

2) استنتج قيام نفس العلاقة لكل عنصر φ من $H^2(\mathbb{R}^n)$.

3) هل بالإمكان تحديد إشارة التكامل $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x)dx$ من أجل φ من $D(\mathbb{R}^n)$؟

تمرين 3

نعتبر $v \in H^1(\Omega)$ و $u \in H_0^1(\Omega)$.

1) أثبت أن $-<\Delta v, u>_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$

2) نفرض أن $u \in H_0^1(\Omega)$ و $\Delta u \in L^2(\Omega)$. قارن بين الضرب الداخلي $(\Delta u, u)_{L^2,L^2}$ و $\|\nabla u\|$، ثمّ عيّن جميع حلول المعادلة $\Delta u = 0$ في $H_0^1(\Omega)$.

تمرين 4

ليكن $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. تقبل المعادلة $\Delta u - u = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ حلا وحيدا $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$. لماذا؟

1) تأكد من وجود ثابت $C \geq 0$ بحيث $\|u\|_{H^1} \leq C.\|f\|_{L^2}$.

2) أثبت وجود $M \geq 0$ بحيث لكل $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ يكون $\|u\|_{H^2} \leq M.\left(\|u\|_{L^2} + \|\Delta u\|_{L^2}\right)$.

تمرين 5

1) نسلّم بأن العبارة :

$$\sum_{i,j=1,\dots,n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}} dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v} dx$$

تمثل ضربا داخليا على $H^2(\mathbb{R}^n)$ لكل $\lambda > 0$. أثبت أن النظيم المعرّف انطلاقا من هذا الضرب الداخلي يكافئ النظيم المعتاد على $H^2(\mathbb{R}^n)$.

2) أثبت أنه لكل $\lambda > 0$، وكل f من $H^{-2}(\mathbb{R}^n)$، يوجد حل وحيد $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ للمعادلة $(\Delta^2 + \lambda)u = f$.

تمرين 6

نسلّم بالنتيجة التالية (حيث يرمز r للمسافة التي تفصل عن الصفر) :

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \frac{u}{r} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

وليكن $u \in D(\mathbb{R}^n)$. نعرّف متتالية الدوال (u_j) بـ $u_j(x) = u(x).\theta(jx)$ علما أن $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ و :

$$\begin{cases} \theta(r) = 0 & r \leq 1, \\ \theta(r) = 1 & r \geq 2. \end{cases}$$

1) أثبت تقارب u_j في $L^2(\mathbb{R}^n)$ نحو u.

2) بيّن أن $\theta(jx).\frac{\partial u}{\partial x_i}$ متقاربة في $L^2(\mathbb{R}^n)$ نحو $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

3) أثبت أن $ju.\dfrac{\partial\theta(jx)}{\partial x_i}$ متقاربة في $L^2(\mathbb{R}^n)$ نحو 0 (إرشاد : يمكن استخدام نظرية لوبيغ بكتابة $(u.\dfrac{\partial\theta(jx)}{\partial x_i}=\dfrac{u}{r}.(r\dfrac{\partial\theta(jx)}{\partial x_i})$.

4) هل يمكن تأكيد أن الفضاء :

$$\left\{u\in D(\mathbb{R}^n):\exists r_u>0,\ u_{|B(0,r_u)}=0\right\}$$

كثيف في $H^1(\mathbb{R}^n)$ (حيث ترمز $B(0,r)$ للكرة المتمركزة في 0 ذات نصف القطر r)؟

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖