الفصل الثاني

التوزيعات Distributions

نقدم في هذا الفصل مفهوم التوزيعات والتوزيعات المتراصة الحامل، ونأتي بالكثير من التفاصيل حول أبرز خواصها. وسنتناول العمليات التي تجرى على التوزيعات مركّزين على عملية الاشتقاق التي تؤدي دورا بالغ الأهمية في حل المعادلات التفاضلية الجزئية.

1- تعاريف وأمثلة

تعريف 1.1 (التوزيع)

ليكن Ω جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^n$. نسمي توزيعا على Ω كل شكل خطي مستمرّ على الفضاء (الخطي الطبولوجي) $D(\Omega)$. وبعبارة أخرى، يكون شكل خطي $T : D(\Omega) \to \mathbb{C}$ توزيعا إذا وفقط إذا كان:

لكل متراص $K \subset \Omega$، يوجد عدد طبيعي p وثابت C موجب بحيث:

$$\forall \varphi \in D_K(\Omega), \quad \left| < T,\varphi > \right| \le C \sup_{x\in K,\ |\alpha|\le p} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|, \qquad (❖)$$

مع العلم أننا وضعنا $< T,\varphi >= T(\varphi)$. نرمز بـ $D'(\Omega)$ لفضاء التوزيعات على Ω.

ترميز: يرمز لـ $< T,\varphi >$ أحيانا بـ $< T(x),\varphi(x) >$ أو $\int_\Omega \varphi dT$ ، إلخ.

ملاحظة

العلاقة (❖) في التعريف السابق تستلزم أن T مستمرّ لأن افتراض تقارب المتتالية (f_j) نحو f في $D(\Omega)$ يستلزم وجود متراص K وعدد طبيعي p بحيث :

$$\lim_j \sup_{x\in K\ ,|\alpha|\le p} \left|D^\alpha\left(\varphi_j(x)-\varphi(x)\right)\right| = 0.$$

فإذا طبّقنا العلاقة (❖) على المتراص K والعدد p (لاحظ أن φ_j و φ تنتمي كلها إلى $(D_K(\Omega)$) نجد:

$$\left|< T,\varphi_j-\varphi >\right| \le C \sup_{x\in K,\ |\alpha|\le p} \left|D^\alpha(\varphi_j(x)-\varphi(x))\right| \xrightarrow{j\to+\infty} 0.$$

ومن ثمّ يأتي: $< T,\varphi_j > \xrightarrow{j\to+\infty} < T,\varphi >$.

وهو ما يعني أن T مستمرّ.

نلاحظ أن القضية العكسية (استمرار T يستلزم قيام العلاقة (❖)) ليست بديهية وتتطلب إدخال أنصاف النظيمات.

الطبولوجيا المعرّفة على $D'(\Omega)$: الفضاء $D'(\Omega)$ هو الثنوي الطبولوجي للفضاء $D(\Omega)$. وتفاديا للتعقيدات الطبولوجية الناجمة عن تعقيدات طبولوجيا $D(\Omega)$ نكتفي بتعريف مفهوم التقارب في هذا الفضاء $D'(\Omega)$ لأنه يفي بحاجتنا.

تعريف 2.1 (التقارب في $D'(\Omega)$)

نقول عن متتالية $(T_j)\in D'(\Omega)$ إنها متقاربة في الفضاء $D'(\Omega)$ نحو T إذا كان:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad <T_j, \varphi> \xrightarrow{j\to+\infty} <T, \varphi>.$$

المبرهنة التالية تسهل التأكد من استمرار شكل خطي على $D(\Omega)$:

مبرهنة 3.1

لتكن $(T_j) \in D'(\Omega)$ متتالية توزيعات. نفرض أن المتتالية العددية $<T,\varphi_j>$ تتقارب نحو نهاية نرمز لها بـ $l(\varphi)$ ، وذلك لكل دالة اختبارية φ. نعرّف شكلا خطيا T على $D(\Omega)$ بوضع $<T,\varphi>) = l(\varphi)$.
عندئذ يكون $T \in D'(\Omega)$.

البرهان

نستخدم النتيجة التي تفيد بأن استمرار شكل خطي على $D(\Omega)$ يكافئ استمرار اقتصاره على $D_K(\Omega)$ وذلك لكل متراص $K \subset \Omega$.

لنطبق مبرهنة بناخ- شتاينهاوس (4.3 من الفصل 1) باعتبار $D_K(\Omega) = E$ وهو فضاء فريشيه و $T_n = L_n$ و $\mathbb{C} = F$. ينتج من ذلك أن T مستمرّ على $D_K(\Omega)$. ومنه يأتي استمرار T على $D(\Omega)$.□

تعريف 4.1 (رتبة توزيع)

ليكن $T \in D'(\Omega)$. عندئذ:

لكل متراص $K \subset \Omega$ يوجد عدد طبيعي m وثابت M بحيث :

$$\forall \varphi \in D_K(\Omega), \quad \left|<T,\varphi>\right| \le M.p_{K,m}(\varphi)$$

مع العلم أن :

$$p_{K,m}(\varphi) = \sup_{x\in K,\ |\alpha|\le m} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|.$$

إذا كان العدد الطبيعي m مستقلا عن K نقول إن T توزيع منتهي الرتبة. نسمي أصغر عدد m يحقق هذه الخاصية رتبة التوزيع T.

ملاحظة

يمكن إثبات أن كل توزيع من الرتبة m يمثل شكلا خطيا مستمرا على $D^m(\Omega)$، أي أنه عنصر من الثنوي $(D^m(\Omega))'$ لـ $D^m(\Omega)$. القضية العكسية صحيحة أيضا، أي أن $(D^m(\Omega))'$ يمثل مجموعة التوزيعات ذات الرتبة m.

أمثلة

مثال 1: ليكن $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (أي أن f تقبل المكاملة محليا، وهذا يعني: لكل متراص $K \subset \Omega$ فإن $\int_K f(x)dx < +\infty$). نعرّف التوزيع T_f بـ:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad < T_f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

للتأكد من أن T_f توزيع نلاحظ لكل φ من $D_K(\Omega)$ (حيث $K \subset \Omega$ متراص) أن:

$$\begin{aligned}\left|< T_f, \varphi >\right| &= \left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right| \\ &\le \left|\int_K f(x)dx\right| . \sup_K |\varphi(x)| \\ &\le M . p_{K,0}(\varphi).\end{aligned}$$

وهكذا: لكل متراص $K \subset \Omega$، يوجد ثابت M ($= \left|\int_K f(x)dx\right|$) وعدد طبيعي m ($= 0$) بحيث :

$$\forall \varphi \in D_K(\Omega), \quad \left|< T_f, \varphi >\right| \le M . p_{K,0}(\varphi),$$

ومنه فإن T_f توزيع من الرتبة 0.

خلاصة

كل دالة من الفضاء $L^1_{loc}(\Omega)$ تعرّف توزيعا من الرتبة 0.

تعريف 5.1 (قياس رادون Radon [1])

يسمى كل توزيع على Ω من الرتبة 0 قياسا لرادون على Ω.

وهكذا فإن كل دالة من الفضاء $L^1_{loc}(\Omega)$ تعرّف قياسا لرادون.

ملاحظة

أ) يمكن تعريف قياس رادون على أنه شكل خطي مستمرّ على $D^0(\Omega)$ (فضاء الدوال المستمرة المتراصة الحوامل مزوّدا بطبولوجيا معينة شبيهة بتلك التي نزوّد بها الفضاء $D(\Omega)$).

ب) نرمز أحيانا بـ f (بدل T_f) فنكتب$<f,\varphi>$ بدل $<T_f,\varphi>$.

مثال 2: توزيع ديراك Dirac[2] δ_a عند النقطة a من $\mathbb{R}^n$ معرّف بـ:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \quad : \quad <\delta_a,\varphi>=\varphi(a).$$

يمثل توزيع ديراك قياسا رادونيا (نسبة إلى رادون) لأن : مهما كان المتراص K من $\mathbb{R}^n$ فإن :

$$\forall \varphi \in D_K(\Omega), \quad \left|<\delta_a,\varphi>\right| \leq 1.p_{K,0}(\varphi).$$

مثال 3: لتكن a نقطة من Ω. نعرّف التوزيع T على النحو التالي:

---

[1] جوهان كارل رادون (1887- 1956) رياضي نمساوي.

[2] بول ديراك (1902- 1984) رياضي أنكليزي.

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad |< T,\varphi >| = D^{\alpha}\varphi(a).$$

ومنه يأتي:

$$\forall \varphi \in D_K(\Omega), \quad |< T,\varphi >| \leq 1.p_{K,|\alpha|}(\varphi).$$

إن T توزيع من رتبة أصغر من $|\alpha|$ أو تساويه. يمكن البرهان على أن الرتبة تساوي $|\alpha|$. يسمى هذا التوزيع "ثنائي القطب" أو "متعدد الأقطاب"، وكل عبارة خطية لمثل هذه التوزيعات تحمل نفس الاسم. لنبيّن، لما $n=1$ ، أن الرتبة تساوي فعلا $|\alpha|$ ، أي 1. نختار $a=0$ فنعرّف توزيعا ثنائي القطب بـ :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), \quad < T,\varphi > = \varphi'(0).$$

لتكن ψ دالة اختبارية تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ بحيث $\psi'(0)=1$. وليكن A عددا حقيقيا بحيث $\mathrm{supp}\psi \subset [-A,A]$. نضع $\psi_j(x) = j\psi(jx)$ لكل عدد طبيعي j وكل عدد حقيقي x. لدينا : $\mathrm{supp}\psi_j \subset [-A,A]$ ، أي أن $\psi_j \in D_{[-A,A]}(\mathbb{R})$. لنتساءل عما إذا كان يوجد ثابت C بحيث :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad |\langle T,\psi \rangle| = |\psi_j'(0)| \leq C. \sup_{x\in[-A,A]} |\psi_j(x)|$$

أي : $j^2 \leq C.j$ لكل $j \in \mathbb{N}$.

الجواب: لا ! ومنه لا يمكن أن تكون رتبة T مساوية لـ 0. وحيث إنه لا يمكن أيضا أن تكون أكبر من 1 فهي تساوي 1.

مثال **4**: ليكن $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ شكلا خطيا موجبا، أي أنه إذا كان : $\varphi \geq 0$ فإن $< T,\varphi > \geq 0$. أثبت أن T توزيع من الرتبة 0 (أي أنه قياس رادوني).

مثال **5**: ليكن f عنصرا من $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. نضع:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3), \quad < T,\varphi > = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\varphi(x,y,0)dxdy .$$

إن T قياس رادوني (أثبت ذلك)، يدعى التوزيع البسيط الطبقة simple layer ذا الكثافة f.

مثال 6: ليكن f عنصرا من $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. نضع:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^3), \quad <T,\varphi>=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,0)dxdy .$$

إن T توزيع من الرتبة 1 (أثبت ذلك)، يدعى التوزيع المزدوج الطبقة double layer ذا الكثافة f.

مثال 7: التوزيع $pv\dfrac{1}{x}$ "القيمة الرئيسة لكوشي" Cauchy principal value [3].

لتكن f دالة اختبارية من $D(\mathbb{R})$. يوجد عدد A بحيث $\text{supp} f \subset [-A,A]$. لاحظ أن:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{f(x)}{x}dx\right\}. \tag{1}$$

لحساب هذه النهاية نضع $\psi(x)=\int_0^1 f'(tx)dt$. عندئذ يكون $\psi(0)=f'(0)$ و $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(0)}{x}+\psi(x)$ لما $x\neq 0$. وباستخدام العلاقة (1) نجد :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{f(0)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{f(0)}{x}dx+\int_{-A}^{-\varepsilon}\psi(x)dx+\int_{\varepsilon}^{A}\psi(x)dx\right\}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-A}^{-\varepsilon}\psi(x)dx+\int_{\varepsilon}^{A}\psi(x)dx\right\}\\&=\int_{-A}^{A}\psi(x)dx.\end{aligned}$$

والتكامل الأخير موجود لأن ψ مستمر على $\mathbb{R}$.

نضع، تعريفا:

[3] أغسطين لويس كوشي (1789- 1857) رياضي فرنسي.

$$\forall f \in D(\mathbb{R}), \qquad < pv\frac{1}{x}, f >:= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx .$$

إن $pv\frac{1}{x}$ توزيع لأنه مستمرّ. ثم إنه لكل متراص $K \subset [-A, A]$ نجد :

$$\forall f \in D_K(\mathbb{R}), \qquad \left| < pv\frac{1}{x}, f > \right| = \left| \int_{-A}^{A} \psi(x)dx \right| \quad \left| \int_{-A}^{A} \left(\int_0^1 f'(tx)dt \right) dx \right|$$
$$\leq \left| \int_{-A}^{A} \int_0^1 p_{K,1}(f) dt dx \right|$$
$$\leq 2A p_{K,1}(f).$$

وعليه فإن $pv\frac{1}{x}$ توزيع منتهي الرتبة، ورتبته لا تتجاوز 1.

تمرين

أثبت أن رتبة $pv\frac{1}{x}$ تساوي 1. إرشاد : اعتبر متتالية الدوال (f_j) المعرفة بـ $f_j(x) = \varphi(x) \arctan jx$ حيث φ دالة زوجية تنتمي إلى $D(\mathbb{R})$ وتساوي 1 بجوار 0. استخدم هذه المتتالية لإثبات (بطريقة الخلف) أن رتبة $pv\frac{1}{x}$ لا تساوي 0.

2- خواص ونتائج

إليك خاصية مفيدة في التقريبات

مبرهنة 1.2

لتكن (f_j) متتالية من $L^1(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

1) $\forall j \in \mathbb{N}, \ f_j \geq 0 \ \wedge \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx = 1$.

2) $\operatorname{supp} f_j \subset B(0, \varepsilon_j)$ لكل $j \in \mathbb{N}$ حيث $\varepsilon_j \xrightarrow{j \to +\infty} 0$، وحيث يرمز $B(0, \varepsilon_j)$ للكرة المعتادة.

عندئذ: $\delta \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^n)} f_j$ (حيث يرمز δ لتوزيع ديراك).

البرهان

ليكن φ عنصرا من $D(\mathbb{R}^n)$. لدينا استنادا إلى الشروط التي تحققها المتتالية (f_j):

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\left(f_j(x)\varphi(x)-\varphi(0)\right)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\left(\varphi(x)-\varphi(0)\right)dx\right|$$
$$\leq \sup_{x\in B(0,\varepsilon_j)}\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right| . \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx$$
$$= \left|\varphi(x_j)-\varphi(0)\right| \xrightarrow{j\to+\infty} 0.$$

ذلك أنه لكل j يوجد x_j من $B(0,\varepsilon_j)$ بحيث :

$$\sup_{x\in B(0,\varepsilon_j)}\left|\varphi(x)-\varphi(0)\right| = \left|\varphi(x_j)-\varphi(0)\right|. \square$$

تقدم المبرهنة التالية خاصية أخرى من الخاصيات التي تربط التوزيعات بالدوال القابلة للمكاملة محليا.

مبرهنة 2.2

ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ و f عنصرا من $L^1_{loc}(\Omega)$ و T_f التوزيع المعرف على Ω بـ:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad \langle T_f ,\varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

إن الخاصيتين التاليتين متكافئتان:

أ) $T_f = 0$ في $D'(\Omega)$.

ب) $f = 0$ حيثما كان تقريبا على Ω.

ملاحظة

ينتج من هذه المبرهنة أنه إذا كان f و g عنصرين من $L^1_{loc}(\Omega)$ فإن $T_f=T_g$ يكافئ $f=g$ حيثما كان تقريبا. ومن ثمّ نستطيع مطابقة $L^1_{loc}(\Omega)$ بفضاء جزئي من $D'(\Omega)$، إذ إن التطبيق الذي يرفق كل عنصر f من $L^1_{loc}(\Omega)$ بالعنصر T_f من $D'(\Omega)$ تطبيق متباين (ومستمر). وعليه نعتبر ضمن هذه المطابقة: $T_f = f$.

نستنتج أيضا (من استمرار التباين القانوني) أن تقارب متتالية دوال (f_j) في $L^1_{loc}(\Omega)$ نحو f يؤدي إلى تقارب متتالية التوزيعات (T_{f_j}) في $D'(\Omega)$ نحو T_f.

لمحة عن البرهان

- الخاصية ب) تستلزم الخاصية أ): قضية بديهية.
- الخاصية أ) تستلزم الخاصية ب): الخاصية أ) تعني أن :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

نعتبر متراصا كيفيا $K \subset \Omega$. ثم نضع $K_\varepsilon = K \;\; B(0,\varepsilon)$ حيث $\varepsilon < d(K, \complement_{\mathbb{R}^n}\Omega)$. ثم نمدّد f كما يلي :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K_\varepsilon, \\ 0, & x \notin K_\varepsilon. \end{cases}$$

ونعرف f_j بالجداء التزاوجي $f_j = \tilde{f} * \varphi_j$ حيث φ_j متتالية صاقلة بحيث $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B(0, \frac{\varepsilon}{j})$. فنبرهن أن :

$$\begin{aligned} \left|\int_K f(x)dx\right| &\le \left|\int_K \tilde{f}(x)dx\right| \\ &\le \left|\int_K \left(\tilde{f}(x) - f_j(x)\right)dx\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \left|\tilde{f}(x) - f_j(x)\right| dx \xrightarrow{j\to+\infty} 0, \end{aligned}$$

أي أن:

$$\forall K \subset \Omega, \quad \int_K f(x)dx = 0.$$

وبعد ذلك نستفيد من التوطئة التالية لإنهاء البرهان والحصول على انعدام f حيثما كان تقريبا:

توطئة 3.2

إذا كان $\int_K f(x)dx = 0$ لكل متراص $K \subset \Omega$ فإن $f = 0$ حيثما كان تقريبا (لدينا بصفة بديهية نفس النتيجة عند تعويض المتراصات بالمفتوحات).

ننهي هذه الفقرة بالنتيجة التالية الخاصة بتقريب توزيع بمتتالية دوال قابلة للمكاملة محليا:

مبرهنة 4.2

لتكن (f_j) متتالية من $L^1_{loc}(\Omega)$ متقاربة حيثما كان تقريبا نحو دالة f. نفرض أنه يوجد عنصر g من $L^1_{loc}(\Omega)$ بحيث $|f_j(x)| \leq g(x)$ حيثما كان تقريبا في Ω، وذلك لكل j.

عندئذ يكون: $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ويتحقق التقارب $f_j \xrightarrow{D'(\Omega)} f$.

البرهان

نطبق مبرهنة لوبيغ (التقارب المسقوف أو المهيمن) Dominated convergence theorem القائلة:

إذا كانت (f_j) متتالية من $L^p(\Omega)$ متقاربة حيثما كان تقريبا نحو دالة f. نفرض أنه يوجد عنصر g من $L^p(\Omega)$ بحيث $|f_j(x)| \le g(x)$ حيثما كان تقريبا في Ω، وذلك لكل j. عندئذ :

$f_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} f$ ، ولدينا : $f \in L^p(\Omega)$.

ملاحظة

نلاحظ أن التقارب $f_j \xrightarrow{D'(\Omega)} f$ يعني:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \quad \int_\Omega f_j(x)\varphi(x)dx \to \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx .$$

ليكن $\varphi \in D(\Omega)$. نضع $K = \operatorname{supp}\varphi$ و $K_\varepsilon = K + B(0,\varepsilon)$ حيث ε موجب وصغير بكفاية. لدينا :

$\varphi_j = f_j\varphi \to f\varphi$ حيثما كان تقريبا في المفتوح K_ε.

وبالإضافة إلى ذلك، لدينا:

$|\varphi_j(x)| \le g(x)|\varphi(x)|$ حيثما كان تقريبا في K_ε،

و $g\varphi \in L^1(K_\varepsilon)$. ومنه يأتي، حسب لوبيغ $fg \in L^1(K_\varepsilon)$ و :

$$\int_\Omega f_j(x)\varphi(x)dx = \int_{K_\varepsilon} f_j(x)\varphi(x)dx \to \int_{K_\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx .$$

وبالتالي: $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ و $f_j \xrightarrow{D'(\Omega)} f$.

3- الاشتقاق

لتبرير ما سيرد في التعريف الموالي نلاحظ أنه إذا كان f عنصرا من $C^1(\mathbb{R})$ و $T_{f'}$ التوزيع المرفق بالمشتق f' فإن :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), \qquad < T_{f'},\varphi >= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx - f'(x)\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

التوزيع $T_{f'}$ هو الذي سنسميه مشتق التوزيع T_f.

إليك التعريف العام التالي:

تعريف 1.3 (مشتق توزيع)

ليكن T عنصرا من $D'(\Omega)$ حيث Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$.

يسمى التوزيع $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ المعرف بـ :

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \qquad < \frac{\partial T}{\partial x_i},\varphi >= - < T,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$$

مشتق التوزيع T (بالنسبة للمتغير x_i).

ملاحظة

1) لاحظ أن $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ ينتمي فعلا إلى $D'(\Omega)$، فهو خطي على $D(\Omega)$ ومستمر لأنه، لكل متراص $K \subset \Omega$، يوجد عدد طبيعي m وثابت C بحيث :

$$\forall \psi \in D_K(\Omega), \qquad \left| < T,\psi > \right| \le C.p_{K,m}(\psi)$$

وذلك لأن T عنصر من $D'(\Omega)$. وبما أن :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \psi \in D_K(\Omega) \qquad \Leftarrow \qquad \varphi \in D_K(\Omega)$$

فإن :

$$\forall \varphi \in D_K(\Omega), \qquad \left| < \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi > \right| = \left| - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > \right|$$
$$\leq C.p_{K,m}(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})$$
$$\leq C p_{K,m+1}(\varphi).$$

2) ينتج مما سبق أنه إذا كان T من الرتبة m فإن رتبة المشتق $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ لا تتجاوز $m+1$.

3) حسب التعريف السابق، فكل توزيع يقبل الاشتقاق. وهكذا، يتضح أن كل دالة مستمرّة تقبل الاشتقاق بمفهوم التوزيعات (لأنها تقبل المكاملة محليا).

قضية 2.3

> ليكن T عنصرا من $D'(\Omega)$.
>
> لكل دليل متعدد $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ فإن :
>
> $$\forall \varphi \in D(\Omega), \qquad < D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >.$$

البرهان

ليكن $\varphi \in D(\Omega)$ و $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ دليلا متعددا. لدينا حسب تعريف المشتق:

$$< D^{\alpha_i} T, \varphi > = (-1)^{\alpha_i} < T, D^{\alpha_i} \varphi >$$

ومنه:

$$\begin{aligned}< D^{\alpha}T,\varphi > &=< D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}...D^{\alpha_n}T,\varphi > \\ &= (-1)^{\alpha_1} < D^{\alpha_2}...D^{\alpha_n}T,\varphi > \\ &= (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_n} < T, D^{\alpha}\varphi > \\ &= (-1)^{|\alpha|} < T, D^{\alpha}\varphi > .\square\end{aligned}$$

مبرهنة 3.3

لتكن (T_j) متتالية من $D'(\Omega)$. إذا كان $T_j \xrightarrow{D'(\Omega)} T$ فإن $D^{\alpha}T_j \xrightarrow{D'(\Omega)} D^{\alpha}T$ ، وهذا لكل دليل متعدد $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$.

البرهان

ليكن $\varphi\in D(\Omega)$ و $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ دليلا متعددا. لدينا :

$$< D^{\alpha}T_j,\varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T_j, D^{\alpha}\varphi > \xrightarrow{j\to+\infty} (-1)^{|\alpha|} < T, D^{\alpha}\varphi >=< D^{\alpha}T,\varphi >$$

وهو المطلوب. □

ملاحظة

يعني ذلك أن مؤثر الاشتقاق مؤثر مستمر.

أمثلة

مثال 1: دالة هيفساريد Heaviside [4]. تعرّف هذه الدالة، التي يرمز إليها عادة بـ (H) بـ:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

إن $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. لدينا لكل $\varphi\in D(\mathbb{R})$:

$$< H,\varphi >= \int_0^{+\infty}\varphi(x)dx .$$

[4] أولبفر هيفيساريد (1850- 1925) رياضي أنكليزي.

ومنه:

$$\begin{aligned} < H',\varphi > &= - < H,\varphi' > \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx \\ &= \varphi(0) \\ &= < \delta,\varphi > . \end{aligned}$$

وهكذا نحصل على : $H'=\delta$ ، حيث δ هو توزيع ديراك عند 0.

يمكننا أيضا حساب المشتق الثاني:

$$\begin{aligned} < H'',\varphi > &= < H,\varphi'' > \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi''(x)dx \\ &= -\varphi'(0), \end{aligned}$$

أي أن المشتق الثاني لدالة هيفسايد (الذي يساوي المشتق الأول لدالة ديراك) يمثّل "ثنائي قطب" (نقول إن كتلته 1-)، انظر المثال 3 من الأمثلة الخاصة بالتعريف 4.1.

مثال 2: لتكن f دالة تقبل الاشتقاق على الفترة $I=[a,b]$ من $\mathbb{R}$ و $f'\in L^1_{loc}(I)$. لدينا: $T_{f'}=(T_f)'$ ذلك لأن:

$$\begin{aligned} \forall \varphi\in D(I) \qquad < (T_f)',\varphi > &= - < T_f,\varphi' > \\ &= -\int_I f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -f(x)\varphi(x)\big]_a^b + \int_I f'(x)\varphi(x)dx \\ &= < T_{f'},\varphi > . \end{aligned}$$

مثال 3: ليكن f عنصرا من $C^1(\complement_{\mathbb{R}}\{a\})$ حيث a نقطة من $\mathbb{R}$. نفرض أن f و f' تقبلان تقطعا من النمط الأول (أي أن النهايات $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ، و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x)$ موجودة). عندئذ:

$$(T_f)' = T_{f'} + \left(f(a^+) - f(a^-)\right)\delta_a ,$$

ذلك لأن:

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in D(\mathbb{R}): \quad <(T_f)',\varphi> &= -<T_f,\varphi'> \\ &= -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -f(x)\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx \\ &\quad -f(x)\varphi(x)\Big]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= -f\varphi(a^-) + f\varphi(a^+) + <f',\varphi> \\ &= \left(f(a^+) - f(a^-)\right)\varphi(a) + <f',\varphi> \\ &= \left(f(a^+) - f(a^-)\right) <\delta_a,\varphi> + <f',\varphi> .\end{aligned}$$

تعميم هذه النتيجة : نفرض أن f عنصر من $C^1\left(\complement_{\mathbb{R}} \bigcup_{j=1}^{N}\{a_j\}\right)$ حيث N عدد طبيعي. نفرض أن f و f' تقبلان تقطّعا من النمط الأول عند النقاط $(a_j)_{j=1,\dots,N}$. أثبت أن :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^{N}\left(f(a_j^+) - f(a_j^-)\right)\delta_{a_j}$$

تمرين

لتكن متتالية الدوال (f_j) المعرفة بـ

$$f_j(x) = \begin{cases} \ln|x|, & |x| \geq \dfrac{1}{j}, \\ -\ln j, & |x| < \dfrac{1}{j}. \end{cases}$$

1) تأكد من أن الدوال (f_j) تنتمي إلى $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ وأن

$$f_j \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} \ln|x| .$$

2) أثبت أن : $(\ln|x|)' \overset{D'(\mathbb{R})}{=} pv\frac{1}{x}$.

إرشـاد : اسـتفد في الـسؤال الأول مـن المبرهنـة 4.2 مـن هـذا الفـصل. أمـا في السؤال الثاني فالاستعانة بالمبرهنة 3.3 السابقة مفيدة ... وربما أيضا المثال 3.

مبرهنة 4.3

> ليكن I فترة من $\mathbb{R}$.
>
> 1) التوزيعات الوحيدة T على I بحيث $T'=0$ هي الدوال الثابتة.
>
> 2) لكل $v\in D'(I)$ ، يوجد $u\in D'(I)$ بحيث $u'=v$ ، (أي أن كل توزيع يقبل توزيعا أصليا).

يعتمد البرهان على النتيجة التالية:

توطئة 5.3

> ليكن $\varphi\in D(I)$ حيث I فترة من $\mathbb{R}$.
>
> أ) الشرطان التاليان متكافئان:
>
> 1) لـ φ دالة أصلية في $D(I)$.
>
> 2) $\int_I \varphi(x)dx=0$.
>
> ب) عندما تقبل φ دالة أصلية في $D(I)$ فهذه الدالة وحيدة.

برهان التوطئة

❖ إذا وجد $\psi\in D(I)$ بحيث $\psi'=\varphi$ فإن:

$$\int_I \varphi(x)dx = \int_I \psi'(x)dx \quad \psi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

ومنه: $\int_I \varphi(x)dx = 0$.

❖ نفرض الآن بأن الشرط 2) محقق، أي أن $\int_I \varphi(x)dx = 0$. نضع:
$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)dx$. إن $\psi \in C^\infty$ و $\psi' = \varphi$.

ومن جهة أخرى فإن ψ متراص الحامل (تأكد من ذلك). وبذلك ينتهي البرهان على تكافؤ الشرطين. □

تمرين

أثبت وحدانية الدالة الأصلية في $D(I)$.

برهان المبرهنة

1) ليكن $\theta \in D(I)$ بحيث $\int_I \theta(x)dx = 1$. لكل $\varphi \in D(I)$ نضع:

$$\rho = \varphi - \theta \int_I \varphi(x)dx.$$

عندئذ: $\int_I \rho(x)dx = 0$ مع الملاحظة أن $\rho \in D(I)$.

استنادًا إلى التوطئة، يوجد $\psi \in D(I)$ وحيد يحقق $\psi' = \rho$، أي:

$$\psi' = \varphi - \theta \int_I \varphi(x)dx.$$

نفرض أن $T' = 0$. عندئذ:

$$\begin{aligned} < T,\varphi > &= < T,\psi' + \theta \int_I \varphi(x)dx > \\ &= < T,\psi' > + c.\int_I \varphi(x)dx \\ &= - < T',\psi > + < c,\varphi > \\ &= < c,\varphi >. \end{aligned}$$

حيث $c = < T,\theta >$. إذن: $T = c$.

2) ليكن $v \in D'(I)$. نبحث عن $u \in D'(I)$ يحقق $u' = v$.

لكل $\varphi \in D(I)$ نضع: $<u,\varphi> = -<v,\psi>$ حيث ψ هي الدالة الوحيدة المنتمية إلى $D(I)$ المعرفة بالعلاقة $\psi' = \varphi - \theta \int_I \varphi(x)dx$ الواردة في بداية إثبات المبرهنة.

إن u خطي (تأكد من ذلك) ومستمر: ليكن $K \subset I$ متراصا و $\varphi \in D_K(I)$. عندئذ يوجد عدد m بحيث (علما أن $K' = K \cup \operatorname{supp}\theta$):

$$\begin{aligned}
|<u,\varphi>| &= |<v,\psi>| \\
&\leq C p_{K',m}(\psi) \\
&\leq C \max\left(\sup_{K'} |\psi|, \sup_{\substack{K' \\ 1\leq j\leq m}} |\psi^{(j)}| \right) \\
&\leq C' \max\left(\sup_{K'} |\psi|, \sup_{K',m} |\varphi| \right).
\end{aligned}$$

حيث C و C' ثابتان.

تأكد من أنه يوجد ثابت L بحيث: $\sup_{K'} |\psi| \leq L.\sup_{K} |\varphi|$.

ومنه يأتي وجود ثابت L' بحيث:

$$|<u,\varphi>| \leq L'.p_{K,m}(\varphi),$$

أي أن u مستمر، وهذا يعني أن $u \in D'(I)$.

للتأكد من أن $u' = v$ ننطلق من $\varphi \in D(I)$ ، ونلاحظ أن الدالة المسماة "ψ" المرفقة بـ φ' حسب العلاقة الواردة في بداية البرهان هي φ لأن لدينا:

$$\psi'' = \varphi' - \theta \int_I \varphi'(x)dx.$$

ومنه $\varphi' = \psi'$ ، أي $\varphi = \psi$ (بفضل وحدانية "ψ"). إذن:

$$<u',\varphi> = -<u,\varphi'> = <v,\varphi>.$$

وهكذا يأتي $u' = v$. □

تمرين

لتكن $(u_j) \in D'(\Omega)$ بحيث $\sum_j u_j < +\infty$. أثبت أن :

$$D^\alpha \sum_j u_j = \sum_j D^\alpha u_j .$$

يمكن تعميم جزء من المبرهنة 4.3 على الشكل التالي :

مبرهنة 6.3

ليكن $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ بحيث :

$$\forall i = 1,\dots,n, \qquad \partial_i T = 0 .$$

عندئذ يكون T توزيعا ثابتا.

4- عمليات على التوزيعات

نقدّم فيما يلي بعض العمليات المتداولة على التوزيعات.

تعريف 1.4 (اقتصار توزيع)

ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ و $T \in D'(\Omega)$. إذا كان U مفتوحا من Ω فإننا نعرّف اقتصار T على U، الذي نرمز إليه $T_{|U}$، بـ :

$$\forall \varphi \in D(U), \qquad < T_{|U}, \varphi > = < T, \varphi > .$$

ينتمي $T_{|U}$ إلى $D'(\Omega)$ لأن: لكل متراص $K \subset \Omega$، يوجد ثابت C وعدد m بحيث:

$$\forall \varphi \in D_K(U), \qquad \left| < T_{|U}, \varphi > \right| = \left| < T, \varphi > \right| \le C.p_{K,m}(\varphi)$$

ذلك لأن $\varphi \in D_K(\Omega)$.

تعريف 2.4 (التوزيع المرافق، الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لتوزيع)

ليكن $T\in D'(\Omega)$. نعرّف التوزيع المرافق $\overline{T}$ بـ:

$$\forall \varphi\in D(\Omega) \qquad <\overline{T},\varphi> = \overline{<T,\overline{\varphi}>}$$

ونعرّف الجزء الحقيقي $\mathrm{Re}\,T$ والجزء التخيّلي $\mathrm{Im}\,T$ لـ T بـ:

$$\mathrm{Re}\,T = \frac{T+\overline{T}}{2}\ , \qquad \mathrm{Im}\,T = \frac{T-\overline{T}}{2i}.$$

ملاحظة

لاحظ أن هذا التعريف يعتبر امتدادا لما نحصل عليه في الحالة التي يكون فيها $T = f\in L^1_{loc}$ إذ إن لدينا، لكل $\varphi\in D(\Omega)$:

$$\overline{<f,\overline{\varphi}>} = \overline{\int f\overline{\varphi}} = \int \overline{f}\varphi = <\overline{f},\varphi>.$$

تعريف 3.4 (الانسحاب)

ليكن $T\in D'(\mathbb{R}^n)$. الانسحاب $\tau_a T$ بالمتجه a للتوزيع T هو التوزيع المعرّف بـ:

$$\forall \varphi\in D(\mathbb{R}^n), \qquad <\tau_a T,\varphi> = <T,\tau_{-a}\varphi>.$$

ملاحظة

لاحظ أن هذا التعريف يعتبر امتدادا لما نحصل عليه في الحالة التي يكون فيها $T = f\in L^1_{loc}$ ذلك أن:

$$\int \tau_a f.\varphi = \int f(x-a)\varphi(x)dx$$
$$= \int f(y)\varphi(y+a)dy$$
$$= <f,\tau_{-a}\varphi>.$$

تعريف 4.4 (تمدّد توزيع)

> ليكن $T \in D'(\mathbb{R}^n)$. تمدّد التوزيع T بنسبة $\lambda \neq 0$ (λ حقيقي أو مركب) هو التوزيع T_λ المعرّف بـ:
>
> $$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad \langle T_\lambda, \varphi \rangle = |\lambda|^n \langle T, \varphi_{\frac{1}{\lambda}} \rangle$$
>
> حيث $\varphi_{\frac{1}{\lambda}}(x) = \varphi(\lambda x)$.

ملاحظة

لاحظ أن هذا التعريف يعتبر امتدادا لما نحصل عليه في الحالة التي يكون فيها $T = f \in L^1_{loc}$ إذ إن لدينا، لكل $\varphi \in D(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\langle f_\lambda, \varphi \rangle &= \int f_\lambda(x)\varphi(x)dx \\ &= \int f(\frac{x}{\lambda})\varphi(x)dx \\ &= \int f(y)\varphi(\lambda y)|\lambda|^n dy \\ &= \int f(y)\varphi_{\frac{1}{\lambda}}(y)|\lambda|^n dy \\ &= |\lambda|^n \langle f, \varphi_{\frac{1}{\lambda}} \rangle .\end{aligned}$$

حالة خاصة

إذا كان $\lambda = -1$ فإننا نكتب $\check{\varphi}$ بدل φ_{-1} بحيث يكون:

$$\check{\varphi}(x) = \varphi_{-1}(x) = \varphi(-x).$$

تعريف 5.4 (نظير توزيع، التوزيع الزوجي والفردي، التوزيع المتجانس)

> ليكن $T \in D'(\mathbb{R}^n)$.
>
> 1) نظير التوزيع T هو التوزيع $\check{T}$ المعرّف بـ:

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \qquad < \check{T}, \varphi > = < T, \check{\varphi} > .$$

2) نقول عن T إنه زوجي (فردي، على التوالي) إذا كان $\check{T} = T$ ($\check{T} = -T$ ، على التوالي).

3) نقول إن T متجانس من الدرجة m إذا كان :

$$\forall \lambda > 0, \qquad T_\lambda = \lambda^{-m} T .$$

تمرين

1) تأكد من أن هذه التعاريف تمثّل امتدادا لما هو متداول في الدوال.

2) هل δ زوجي؟ نفس السؤال فيما يخص توزيع هيفيسايد H .

مثال

توزيع ديراك متجانس ودرجته تساوي $-n$ حيث يمثل n بعد الفضاء $\mathbb{R}^n$. ذلك أن لدينا لكل $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \langle \delta_\lambda, \varphi \rangle &= \lambda^n \left\langle \delta, \varphi_{\frac{1}{\lambda}} \right\rangle \\ &= \lambda^n \varphi_{\frac{1}{\lambda}}(0) \\ &= \lambda^n \varphi(0) \\ &= \lambda^n \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

تعريف- مبرهنة 6.4 (ضرب دالة في توزيع)

ليكن $T \in D'(\Omega)$ و $f \in C^\infty(\Omega)$. نعرّف الجداء $f.T$ (جداء توزيع في دالة) على أنه التوزيع المعيّن بالعلاقة:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \qquad < f.T, \varphi > = < T, f\varphi > .$$

ينبغـي التأكـد مـن أن $f.T\in D'(\Omega)$: لـيكن K متراصـا مـن Ω و $\varphi\in D_K(\Omega)$. لدينا: $f.\varphi\in D_K(\Omega)$ ، ويوجد ثابت C وعدد m بحيث:

$$\begin{aligned}\left|< fT,\varphi >\right| &= \left|< T, f\varphi >\right|\\ &\leq C.p_{K,m}(f\varphi).\end{aligned}$$

غير أن :

$$\begin{aligned}p_{K,m}(f\varphi) &= \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}}\left|D^{\alpha}(f\varphi)\right|\\ &= \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}}\left|\sum_{\beta\leq\alpha} C_{\beta} D^{\alpha-\beta} f D^{\beta}\varphi\right|\\ &\leq C'\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}}\sum_{\beta\leq\alpha}\left|D^{\beta}\varphi\right|\\ &\leq C'' p_{K,m}(\varphi).\end{aligned}$$

حيث C_{β} و C' و C'' ثوابت. ومنه ينتج أن $f.T\in D'(\Omega)$.

ملاحظة

1) إذا كـان T من الرتبة m وكـان $f\in C^{\infty}$ فإن $f.T$ من رتبة أصغر مـن m أو يـساويه. لا يمكننـا القـول إن رتبـة $f.T$ تـساوي m (مـثلا إذا كـان $f=0$ فإن رتبة $f.T$ تساوي 0).

2) لا يمكـن تعريف جداء توزيعين يمدّد جداء الدوال محافظا على خاصية الاستمرار، أي أن القضية :

$$\begin{cases} T_j \xrightarrow{D'} T,\\ S_j \xrightarrow{D'} S,\end{cases}$$

لا تستلزم: $T_j.S_j \xrightarrow{D'} T.S$.

مثال ذلك: نعتبر متتالية الدوال (f_j) القابلة للمكاملة محليا على $\mathbb{R}$:

$$f_j(x)=\begin{cases} j, & x\in \left[0,\frac{1}{j}\right], \\ 0, & x\notin \left[0,\frac{1}{j}\right]. \end{cases}$$

نعتبر $S_j = T_j \quad f_j$. لدينا:

$$\forall \varphi\in D(\mathbb{R}),\quad <T_j,\varphi> = \int_{\mathbb{R}} f_j(x)\varphi(x)dx$$

$$= j\int_0^{\frac{1}{j}}\varphi(x)dx \xrightarrow{j\to+\infty} \varphi(0) = <\delta,\varphi>$$

لأن:

$$\inf_{x\in\left[0,\frac{1}{j}\right]}\varphi(x) \le j\int_0^{\frac{1}{j}}\varphi(x)dx$$

$$\le \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{j}\right]}\varphi(x),$$

$$\lim_{j\to+\infty}\inf_{x\in\left[0,\frac{1}{j}\right]}\varphi(x)=\varphi(0)$$

$$= \lim_{j\to+\infty}\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{j}\right]}\varphi(x).$$

إذن: $T_j \to \delta$.

ومن جهة أخرى:

$$<T_j.S_j,\varphi> = \int_{\mathbb{R}} f_j^2(x)\varphi(x)dx = j^2\int_0^{\frac{1}{j}}\varphi(x)dx.$$

ومنه يتضح أن المتتالية $T_j.S_j$ متباعدة لأنه إذا كان $\varphi=1$ بجوار 0 فإن:

$$<T_j.S_j,\varphi> = j^2\int_0^{\frac{1}{j}}\varphi(x)dx = j \to +\infty$$

ومن ثمّ يأتي المطلوب.

تقدّم المبرهنة الموالية نتيجة ينبغي مقارنتها بالنتيجة التي نفينا صحتها في الملاحظة السابقة.

مبرهنة 7.4

لتكن المتتاليتان $T_j \in D'(\Omega)$ و $f_j \in C^\infty(\Omega)$ بحيث: $T_j \xrightarrow{D'} T$ و $f_j \xrightarrow{C^\infty} f$ (أي أن المتتالية $D^\alpha f_j$ متقاربة بانتظام نحو $D^\alpha f$ على كل متراص محتوى في Ω وذلك مهما كان الدليل المتعدد α). عندئذ:

$$f_j.T_j \xrightarrow{D'(\Omega)} f.T\,.$$

البرهان

يجب إثبات العلاقة:

$$(2)\qquad \forall \varphi \in D(\Omega),\quad \langle f_j.T_j,\varphi\rangle \xrightarrow{j\to+\infty} \langle f.T,\varphi\rangle.$$

لتكن $\varphi \in D(\Omega)$ دالة مثبّتة. نضع $K=\operatorname{supp}\varphi$. نثبت العلاقة (2) من أجل هذه الدالة φ. نعتبر الشكل الثنائي الخطية:

$$B : D'(\Omega)\times C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$$

المعرف بالعلاقة:

$$B(u,g) = \langle gu,\varphi \rangle = \langle u,g\varphi \rangle\,.$$

1) إن B مستمرّ بالنسبة لكل مركبة:

❖ إذا كان: $u_j \xrightarrow{D'(\Omega)} u$ فإن:

$$B(u_j,g) = \langle u_j,g\varphi \rangle \xrightarrow{j\to+\infty} \langle u,g\varphi\rangle = B(u,g).$$

❖ إذا كان: $g_j \xrightarrow{C^\infty(\Omega)} g$ فإنه يوجد ثابت C وعدد m يحققان:

$$\left|B(u,g_j)-B(u,g)\right| = \left|\langle u,(g_j-g)\varphi\rangle\right|$$
$$\le C.p_{K,m}\left((g_j-g)\varphi\right) \xrightarrow{j\to+\infty} 0.$$

وذلك لأن المتتالية $D^\alpha g_j$ تتقارب بانتظام نحو $D^\alpha g$ على كل متراص K محتوى في Ω.

2) حتى نثبت استمرار B نطبّق مبرهنة بناخ- شتاينهاوس (4.3 من الفصل 1): نضع في نص هذه المبرهنة $E = C^\infty$ (وهو فضاء فريشيّ)، و $F = \mathbb{C}$، ونعرّف التطبيق $L_j : E \to F$ لكل j بـ : $L_j(g) = B(T_j, g)$.

بما أن $T_j \xrightarrow{D'(\Omega)} T$ فإنه ينتج مما سبق:

$$\forall g \in E, \qquad L_j(g) \to B(T,g).$$

ومن جهة أخرى فإن التطبيق الخطي L_j مستمر (تأكد من ذلك باستخدام الاستمرار بالنسبة لكل مركبة). وهكذا تتحقق شروط مبرهنة بناخ- شتايهاوس (4.3 من الفصل 1). وعليه فإن القضية $f_j \xrightarrow{C^\infty(\Omega)} f$ تستلزم أن: $L_j(f_j) \xrightarrow{j\to+\infty} L(f)$، أي:

$$< f_j.T_j, \varphi > = B(T_j, f_j) \xrightarrow{j\to+\infty} B(T, f) = < fT, \varphi > ,$$

وهو المطلوب. □

5- التوزيعات المتراصة الحامل

نبدأ بتقديم التعريف التالي:

تعريف 1.5 (مفتوح انعدام توزيع، حامل توزيع)

1) مفتوح انعدام توزيع $T \in D'(\Omega)$ هو أكبر مفتوح ω (إن وجد) في Ω ينعدم فيه T ، أي بحيث:

$$\forall \varphi \in D(\omega), \quad < T, \varphi >= 0.$$

2) حامل توزيع $T \in D'(\Omega)$ هو المجموعة $\complement_\Omega \omega$ المتممة (في Ω) لمفتوح الانعدام ω (إن وجد).

يبدو للوهلة الأولى أنه قد توجد توزيعات لا تملك مفتوحات انعدام، ومن ثمّ لا تقبل حاملا. المبرهنة الموالية تثبت أنه لا وجود لمثل هذه التوزيعات.

مبرهنة 2.5

كل توزيع يقبل مفتوح انعدام، ومن ثمّ يقبل حاملا.

البرهان

ليكن $T \in D'(\Omega)$. نعتبر مجموعة المفتوحات $(\omega_i)_{i\in I}$ في Ω التي ينعدم فيها T (هذه المجموعة قد تكون خالية). إن كانت غير خالية، نضع $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. من الواضح أن ω مفتوح. نثبت الآن بأن $T_{|\omega} = 0$، أي $< T_{|\omega}, \varphi >= 0$ مهما كان $\varphi \in D(\omega)$.

من أجل ذلك نعتبر $\varphi \in D(\omega)$، ونضع $K = \text{supp}\varphi$. لدينا $K \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$.

ومنه يأتي وجود عدد منته من المفتوحات ω_1، ω_2، ...، ω_N تغطي المتراص K، أي بحيث :

$$\text{supp}\varphi = K \subset \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i .$$

بالاستناد إلى مبرهنة تجزئة الوحدة (المبرهنة 9.2 من الفصل 1) يتبيّن وجود دوال $\psi_j \in D(\omega_j)$ بحيث $0 \le \psi_j \le 1$ و $\sum_{j=1}^{N} \psi_j = 1$ بجوار K. وبالتالي:

$$\forall x \in \Omega, \qquad \varphi(x) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x).\varphi(x),$$

$$\forall j = 1,...,N, \qquad \psi_j \varphi \in D(\omega_j).$$

وهكذا نحصل على:

$$< T, \varphi > = < T, \sum_{j=1}^{N} \psi_j \varphi >$$
$$= \sum_{j=1}^{N} < T, \psi_j \varphi >$$
$$= \sum_{j=1}^{N} 0$$
$$= 0.$$

من الواضح أن ω هو أكبر مفتوح ينعدم فيه T إذ إنه يمثل اتحاد جميع المفتوحات التي ينعدم فيها T. إن كان هذا الاتحاد خاليا فهذا يعني أن مفتوح الانعدام هو المجموعة الخالية. □

قضية 3.5

ليكن $T \in D'(\Omega)$.

1) ليكن $\varphi \in D(\Omega)$ بحيث $\varphi = 0$ بجوار $\operatorname{supp} T$ (أي أن التقاطع $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} T$ مجموعة خالية). عندئذ: $< T, \varphi >= 0$.

2) $\operatorname{supp} T$ هو أصغر مغلق F يحقق الخاصية:

إذا كان $\varphi \in D(\Omega)$ و $\varphi = 0$ بجوار F فإن $< T, \varphi >= 0$.

البرهان

1) إذا كان $\varphi = 0$ بجوار $\operatorname{supp} T$ فإن $\varphi \in D\left(\complement_{\Omega} \operatorname{supp} T\right)$. ومن ثم ينتج أن $< T, \varphi >= 0$ وذلك لأن $\complement_{\Omega} \operatorname{supp} T$ يمثّل مفتوح انعدام T.

2) تمرين : أثبت ذلك بالخلف. □

ملاحظة

لاحظ، حسب القضية السابقة، أن :

$$\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp} T = \varnothing \Rightarrow \; <T,\varphi>=0 .$$

ورغم ذلك: $\varphi_{|\operatorname{supp}T}=0$ لا يستلزم أن $<T,\varphi>=0$.

مثال ذلك: خذ $<T,\varphi>=\varphi'(0)$ و $\varphi(x)=x\psi(x)$ حيث $\psi\in D(\mathbb{R})$ يساوي 1 بجوار 0. إن $\operatorname{supp}T=\{0\}$ لأن:

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^*),\qquad \varphi'(0)=0.$$

ومن ثمّ: $<T,\varphi>=0$. ينتج من ذلك: $\operatorname{supp}T\subset\{0\}$.

ومن جهة أخرى، إن كان $\varphi\in D(\mathbb{R})$ فإن $<T,\varphi>\neq 0$ عموما. إذن $\operatorname{supp}T=\{0\}$.

لاحظ الآن أن φ المعرّف أعلاه منعدم على $\operatorname{supp}T$ (أي عند 0)، ورغم ذلك لدينا:

$$\begin{aligned}<T,\varphi> &= (x\psi(x))'_{|x=0}\\ &=\psi(0)+0\,\psi'(0)\\ &=\psi(0)\\ &=1\neq 0\end{aligned}$$

أمثلة

مثال **1**: $\operatorname{supp}\delta=\{0\}$ لأن

$$\forall\varphi\in D(\mathbb{R}^n),\qquad <\delta,\varphi>=0.$$

ومنه: $\mathbb{R}^*\subset\complement_{\mathbb{R}}\operatorname{supp}\delta$، أي: $\operatorname{supp}\delta\subset\{0\}$.

ومن جهة أخرى، إن كانت φ دالة اختيارية غير منعدمة عند 0 فإن $<\delta,\varphi>\neq 0$. إذن $\operatorname{supp}\delta=\{0\}$ لأن $\operatorname{supp}\delta$ غير خالٍ (لماذا؟).

مثال **2**: ليكن f دالة مستمرة على Ω. نعلم أن حامل f بوصفها دالة هو $\operatorname{supp} f$. يمكن أيضا اعتبار حامل f بوصفها توزيعا T_f (لأنها دالة تقبل المكاملة محليا). لدينا: $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} T_f$ (أي أن الحامل بالمعني التقليدي يطابق الحامل بمفهوم التوزيعات). أثبت ذلك.

مثال **3**: إذا كان $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ فإن مفتوح انعدام التوزيع T_f المعرف بـ:

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \qquad < T_f , \varphi >= \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

أكبر مفتوح في Ω تنعدم فيه الدالة f حيثما كان تقريبا (لأن الدالة ليست، بالضرورة، معرفة عند كل نقطة). ومنه فحامل T_f هو متممة هذا المفتوح.

مبرهنة **4.5** (مبدأ اللصق "recollement")

ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$، و $(\Omega_j)_{j\in J}$ تغطية مفتوحة لـ Ω ($\Omega = \bigcup_{j\in J} \Omega_j$). وليكن $T_j \in D'(\Omega_j)$ لكل $j \in J$. نفرض أن الجماعة $(T_j)_{j\in J}$ تحقق الشرط:

لكل i و j فإن $T_j = T_i$ على $\Omega_i \cap \Omega_j$ وهذا عندما يكون $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$. عندئذ:

1) يوجد $T \in D'(\Omega)$ وحيد بحيث: $T_i = T_{|\Omega_i}$ لكل i.

2) إذا كانت جميع التوزيعات T_i ذات رتب أقل من m فإن التوزيع T ذو رتبة أقل من m.

البرهان

❖ وحدانية T : نفرض وجود توزيعين T و S يحققان الشرط 1). عندئذ يصبح التوزيع $T-S$ محققا للعلاقة $\left(T-S\right)_{|\Omega_i}=0$ لكل i. ومنه $\left(T-S\right)_{|\bigcup_{i\in J}\Omega_i}=0$. إذن $T-S=0$ على Ω ، أي $T=S$.

❖ وجود T : نستعمل مبرهنة تجزئة للوحدة المتعلقة بالتغطية $(\Omega_j)_{j\in J}$ القائلة بوجود جماعة دوال $(g_j)_{j\in J}\in C^\infty(\Omega_j)$ تحقق الشروط التالية:

أ) $\operatorname{supp} g_j\subset\Omega_j \quad \wedge \quad 0\le g_j\le 1 \quad \forall j\in J,$.

ب) لكل متراص $K\subset\Omega$ ، كل الدوال g_j منعدمة على K باستثناء عدد منته منها.

جـ) $\forall x\in\Omega, \quad \sum_{j\in J} g_j(x)=1$.

نسلّم بهذه المبرهنة.

لكل $\varphi\in D(\Omega)$ نضع: $<T,\varphi>=\sum_{j\in J} T_j\langle g_j\varphi$ (لاحظ أن المجموع $\sum_{j\in J} g_j\varphi$ يضم في الواقع عددا منتهيا من الحدود بفضل الشرط ب) أعلاه، باعتبار المتراص K=suppφ). وبالتالي T شكل خطي على $D(\Omega)$.

لنثبت أن هذا الشكل مستمرّ : ليكن K متراصا من Ω و $\varphi\in D(\Omega)$. وبالتالي: $g_j\varphi\in D_{K_j\cap K}(\Omega_j)$ حيث $K_j=\operatorname{supp} g_j$. وعليه، لكل j يوجد ثابت C_j وعدد m_j بحيث:

$$\begin{aligned}\left|<T_j,g_j\varphi>\right| &\le C_j p_{K_j\cap K,m_j}(g_j\varphi)\\ &\le C'_j\, p_{K,m_j}(\varphi),\end{aligned}$$

حيث C'_j ثابت. إذن:

$$\left|\sum_{j\in J}<T_j,g_j\varphi>\right|\le\sum_{j\in J}C'_j\,p_{K,m_j}(\varphi)$$
$$\le C'p_{K,\max_j m_j}(\varphi)$$
$$\le C''p_{K,m}(\varphi),$$

علما أن C' و C'' ثابتان و $m=\max_j m_j$.

تمرين

استنتج مما سبق النتيجة 2) الواردة في نص المبرهنة.

نواصل البرهان بإثبات أن $T_i=T_{|\Omega_i}$. ليكن $j_0\in J$ و $\varphi\in D(\Omega_{j_0})$.

لدينا:

$$\forall j\in J,\quad \operatorname{supp} g_j\varphi\subset\Omega_{j_0}\cap\Omega_j.$$

ولذلك: $g_j\varphi\in D(\Omega_{j_0}\cap\Omega_j)$.

ثم إننا نعلم أن $T_j=T_{j_0}$ على $\Omega_{j_0}\cap\Omega_j$. وعليه:

$$<T_{j_0},g_j\varphi>=<T_j,g_j\varphi>.$$

ولذلك:

$$<T,\varphi>=\sum_{j\in J}<T_j,g_j\varphi>$$
$$=\sum_{j\in J}<T_{j_0},g_j\varphi>$$
$$=<T_{j_0},(\sum_{j\in J}g_j)\varphi>$$
$$=<T_{j_0},\varphi>.$$

إذن $T_{j_0}=T_{|\Omega_{j_0}}$. وهو المطلوب. □

تقدّم النتيجة التالية خواص تتعلق برتبة توزيع متراص الحامل.

مبرهنة 5.5

نرمز بـ $E(\Omega)$ للفضاء $C^{\infty}(\Omega)$ وبـ $E'(\Omega)$ لفضاء التوزيعات المتراصة الحامل على Ω. ليكن $T\in E'(\Omega)$.

1) إن T منتهي الرتبة.

2) إذا كانت m رتبة T فإن: لكل جوار متراص K لـ $\operatorname{supp}T$ ، يوجد ثابت C بحيث:

$$\forall \varphi\in D(\Omega), \qquad \left|< T,\varphi >\right|\leq C.p_{K,m}(\varphi).$$

البرهان

ليكن K جوارا متراصا لـ $\operatorname{supp}T$ ، وليكن $\chi\in D(\Omega)$ بحيث $\operatorname{supp}\chi\subset K$ و $\chi=1$ بجوار $\operatorname{supp}T$. نعتبر الآن دالة $\varphi\in D(\Omega)$ فنلاحظ أن $\varphi-\chi.\varphi=0$ بجوار $\operatorname{supp}T$. ومنه يأتي $\langle T,\varphi-\chi.\varphi\rangle=0$. ومن ثم : $\langle T,\varphi\rangle=\langle T,\chi.\varphi\rangle$.

إن انتماء T إلى $D'(\Omega)$ يؤدي إلى وجود ثابت موجب C و عدد طبيعي l بحيث:

$$\forall \psi\in D_K(\Omega), \quad \left|\langle T,\psi\rangle\right|\leq C.p_{K,l}(\psi).$$

لاحظ أن $\chi.\varphi\in D_K(\Omega)$. ومن ثمّ :

$$\left|\langle T,\varphi\rangle\right|=\left|\langle T,\chi.\varphi\rangle\right|\leq C.p_{K,l}(\chi.\varphi)\leq C'.p_{K,l}(\varphi)$$

حيث C' ثابت (يتعلق بـ χ). وهكذا يتضح أن T ذو رتبة منتهية لأن العدد الطبيعي l لا يتعلق سوى بالمتراص K المثبّت منذ البداية بوصفها جوارا لـ $\operatorname{supp}T$. ومنه يأتي كل المطلوب. □

نقوم الآن بتمديد الثنوية duality القائمة بين $D'(\Omega)$ و $D(\Omega)$ إلى ثنوية بين $E'(\Omega)$ و $E(\Omega)$ ، وهذا لتعريف $< T,\varphi >_{E'(\Omega),E(\Omega)}$ عندما يكون $T\in E'(\Omega)$ و $\varphi\in E(\Omega)$.

تعريف 6.5 (الثنوية بين $E'(\Omega)$ و $E(\Omega)$)

ليكن $T\in E'(\Omega)$ و $\varphi\in E(\Omega)$. نضع:

$$< T,\varphi >_{E',E} = < T,\chi\varphi >_{D',D}$$

حيث $\chi\in D(\Omega)$ ويساوي 1 بجوار $\operatorname{supp} T$.

ملاحظات

1) هذه النتيجة مستقلة عن اختيار χ : لتكن χ_1 و χ_2 دالتين تحققان الفرض الذي يحققه χ. لدينا: $\chi_1\varphi-\chi_2\varphi=(\chi_1-\chi_2)\varphi=0$ بجوار $\operatorname{supp} T$. ومنه: $< T,(\chi_1-\chi_2)\varphi >=0$. إذن $< T,\chi_1\varphi >=< T,\chi_2\varphi >$.

2) لرؤية أن $<.,.>_{E',E}$ يمدّد $<.,.>_{D',D}$ ينبغي البرهان على :

$$\forall\varphi\in D(\Omega),\qquad < T,\varphi >_{E',E} = < T,\varphi >_{D',D}.$$

وهذا أمر واضح لأن $\varphi\in D(\Omega)$ يستلزم $(1-\chi)\varphi=0$ بجوار $\operatorname{supp} T$. ومن ثمّ: $< T,(1-\chi)\varphi >=0$. إذن: $< T,\varphi >_{E',E} = < T,\chi\varphi >_{D',D} = < T,\varphi >_{D',D}$.

3) يسمح التمديد السابق بمطابقة الفضاء $E'(\Omega)$ بثنوي $E(\Omega)$.

4) إن التطبيق (المسمى التباين القانوني)

$$E'(\Omega)\to D'(\Omega)$$
$$T\mapsto T$$

متباين ومستمرّ. لتوضيح التباين نفرض أن $T\in E'(\Omega)$ و $T=0$ في D' ، أي :

$$\forall\psi\in D(\Omega),\qquad < T,\psi >=0.$$

نعلم أن:

$$\forall \varphi \in E(\Omega), \qquad \langle T,\varphi \rangle_{E',E} = \langle T, \chi\varphi \rangle_{D',D} = 0,$$

ومنه: $T=0$ في E'. ومن ثمّ فالتطبيق متباين.

لرؤية الاستمرار، نفرض أن لدينا متتالية (T_j) من E' بحيث $T_j \xrightarrow{E'} 0$ و $\varphi \in D(\Omega)$. عندئذ:

$$.0 \xleftarrow{j\to+\infty} \langle T_j,\varphi \rangle_{E',E} = \langle T_j, \chi\varphi \rangle_{D',D} = \langle T_j,\varphi \rangle_{D',D}$$

وبالتالي: $T_j \xrightarrow{D'} 0$.

6- تمارين

تمرين 1

عيّن من بين التطبيقات $T : D(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ التالية تلك التي تعرّف توزيعا :

1) $\langle T,\varphi \rangle = |\varphi(0)|$.

2) $\langle T,\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx$.

3) $\langle T,\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(j)}(x) dx$ حيث j عدد طبيعي مثبت.

4) $\langle T,\varphi \rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{1}{k}) - n\varphi(0) - \varphi'(0)\ln n \right\}$.

5) $\langle T,\varphi \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi^{(k)}(0)$.

6) $\langle T,\varphi \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(k)$.

7) $\langle Pf(\frac{1}{x^2}),\varphi \rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right]$.

8) $\langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi \rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\ln\varepsilon \right]$ حيث يمثل H دالة هيفسايد.

تمرين 2

لتكن الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}: & x>0,\\ 0: & x\le 0.\end{cases}$$

وضّح كيف أن العلاقة :

$$\varphi\in D(\mathbb{R}),\quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

لا تعرّف توزيعا على $\mathbb{R}$ بينما العلاقة

$$\varphi\in D(\mathbb{R}^{+}),\quad \int_{0}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

تعرف توزيعا على $\mathbb{R}^{+}$.

تمرين 3

نعتبر المتتالية (φ_n) المعرفة بـ $\varphi_n(x)=e^{-n}\varphi(nx)$ حيث $\varphi\in D(\mathbb{R})$ دالة معطاة.

أ) أثبت أن هذه المتتالية متقاربة في $D(\mathbb{R})$.

ب) أدرس التقارب في $D(\mathbb{R})$ للمتتالية (ψ_n) المعرفة بـ $\psi_n(x)=(n\quad 1)^{\mp k}\varphi(nx)$ حيث $k\in\mathbb{N}^{*}$.

تمرين 4

نعرف المتتالية التالية (f_n) بـ :

$$f_n(x)=\begin{cases} n & : x\in \left]0,\frac{1}{n}\right[,\\ 0 & : x\in \complement_{\mathbb{R}}\left(\left]0,\frac{1}{n}\right[\right).\end{cases}$$

1) هل المتتالية متقاربة ببساطة؟

2) أثبت أن (f_n) تتقارب في $D'(\mathbb{R})$ نحو توزيع ديراك δ ، وأن مربع المتتالية متتالية غير متقاربة في $D'(\mathbb{R})$.

3) أثبت أن المتتالية $f_n^2 - n\delta$ متقاربة في $D'(\mathbb{R})$ ، واحسب نهايتها.

تمرين 5

عين التوزيع مقتصر توزيع ديراك $\delta_{|\mathbb{R}^*}$.

نفرض أن هناك $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ بحيث :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}), \quad < \delta, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx .$$

أثبت أن $f = 0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}^*$ واستنتج أن $f = 0$ تقريبا حيثما كان في $\mathbb{R}$. هل هناك تناقض؟

تمرين 6

احسب المشتق الأول والثاني للدالة $\ln|x|$ في $D'(\mathbb{R})$.

تمرين 7

ليكن التوزيع T المعرف بـ :

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2), \quad < T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, -x)dx.$$

1) أثبت أن T توزيع منتهي الرتبة وعيّن رتبته.

2) عيّن حامل T.

3) احسب العبارة $\partial_x T - \partial_y T$.

تمرين 8

حل في $D'(\mathbb{R})$ المعادلة التفاضلية $xT' + T = 0$.

****