الفصل العاشر

# المسائل التطورية غير الخطية

**نتطرق في هذا الفصل إلى بعض المسائل التطورية غير الخطية، ونبيّن طرق حلها مستعملين في ذلك بعض الوسائل الحديثة من نظرية التحليل الدالي.**

## 1- المسألة المجردة

نعرض فيما يلي المسألة المزمع مناقشتها:

ليكن $V$ فضاء بناخيا وانعكاسيا قابلا للفصل وكثيفا في فضاء هيلبرتي $H$ قابل للفصل بحيث $V \subset H \subset V'$، وذلك بغمس مستمر. وليكن $A : V \to V'$ مؤثرا غير خطي.

نعـرّف الفـضـاء $L^q\left(0,T;W\right)$ ، حيـث $W$ فـضـاء بنـاخي و $1 \le q \le +\infty$ ، بأنه مجموعة الدوال

$$v:\left(0,T\right) \to W$$
$$t \mapsto v(t)$$

التي تحقق :

$$\|v\|_{L^q(0,T;W)} := \left(\int_0^T \|v(t)\|_W^q \, dt\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

عندما يكون $1 \le q < +\infty$ ، و

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;W)} := ess \sup \|v(t)\|_W < +\infty$$

عندما يكون $q = +\infty$ .

نلاحظ أن $L^q\left(0,T;W\right)$ ، المزوّد بالنظيم $\|\,.\,\|_{L^q(0,T;W)}$ فضاء بناخي مهما كان $1 \le q \le +\infty$.

تُعطى دالة $f \in L^{p'}\left(0,T;V'\right)$ ودالة $u_0 \in H$. نودّ إيجاد دالة $u : \left[0,T\right] \to V$ تحقق المسألة :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A\left(u(t)\right) = f\left(t\right), \quad 0 < t < T, \\ u\left(0\right) = u_0. \end{cases}$$

ملاحظة

إذا كان $u\in L^p(0,T;V)$ و $u'\in L^{p'}(0,T;V')$ ، مع $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$ ، فإن $u\in C([0,T],H)$ (انظر المراجع [15]). سوف نستخدم فيما يلي $\|.\|$ للدلالة على النظيم في $V$ و $|.|$ للدلالة على نظيم $H$.

**مبرهنة 1.1**

ليكن $A:V\to V'$ مؤثراً (غير خطي) محدوداً ورتيباً ونصف مستمر ويحقق :

$$\langle A(v),v\rangle \geq \alpha\|v\|_V^p\ ,\ \ \forall v\in V \tag{2}$$

حيث $\alpha>0$ و $1<p<+\infty$. عندئذ، لكل $f\in L^{p'}(0,T;V)$ (مع $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$) و $u_0\in H$ ، تقبل المسألة (1) حلاً وحيداً $u\in L^p(0,T;V)$.

البرهان

نستعمل طريقة فادو- غليركين Faedo-Galerkin[1]. لما كان $V$ قابلا للفصل فإنه يوجد أساس قابل للعد كثيف في $V$، لنرمز له بـ $(w_j)_{j\geq 1}$.
وليكن $V_m$ الفضاء الجزئي المنتهي البعد والمولّد بـ $(w_j)_{j=1,\dots,m}$.

نبحث عن وجود دالة

[1] بوريس غليركين (1871- 1945)، رياضي روسي.

$$u_m(t)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)w_j \tag{3}$$

تحقق :

$$\begin{cases}\langle u'_m(t),w_i\rangle+\langle A(u_m(t)),w_i\rangle=\langle f(t),w_i\rangle, \quad \forall i=1,\dots,m,\\ u_m(0)=u_{0m}\end{cases} \tag{4}$$

حيث إن $u_{0m}$ هو مسقط $u_0$ على الفضاء الجزئي $V_m$.

تضمن نظرية المعادلات التفاضلية العادية وجود حل محلي للمسألة (4)، أي أنه توجد دالة $u_m:[0,t_m]\to V_m$ تحقق (4) بحيث $0<t_m\le T$.

وباستغلال العلاقة (2) فإن (4) تعطي:

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t\|u_m(s)\|^p ds\le\frac{1}{2}|u_0|^2+\int_0^t\|f(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V ds \tag{5}$$

وعند استخدام متباينة يونغ Young[2] نصل إلى :

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_m(s)\|^p ds\le\frac{1}{2}|u_0|^2+\frac{1}{2\alpha}\int_0^T\|f(s)\|_{V'}^{p'} ds. \tag{6}$$

تمكننا العلاقة (6) من تمديد $t_m$ إلى $T$ لأن الطرف الأيمن لا يتعلق بالمتغير $t$. كما تبيّن أن :

$$u_m\in L^\infty(0,T;H)\cap L^p(0,T;V). \tag{7}$$

وفضلا عن ذلك، يوجد ثابت $M>0$ بحيث :

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad \max\left(\|u_m\|_{L^p(0,T;V)},\|u_m\|_{L^\infty(0,T;W)}\right)\le M.$$

[2] وليم يونغ (1863- 1942) رياضي إنكليزي.

ومنه يمكننا استخراج متتالية جزئية (نرمز لها بـ $u_k$) تحقق (لاحظ أن $A$ محدود):

$$\begin{aligned} u_k &\xrightarrow{W} u \quad \text{in}\, L^p\left(0,T;V\right), \\ u_k &\xrightarrow{W^*} u \quad \text{in}\, L^\infty\left(0,T;H\right), \\ A\left(u_k\right) &\xrightarrow{W} \psi \quad \text{in}\, L^{p'}\left(0,T;V'\right), \end{aligned} \tag{8}$$

حيث يشير $\xrightarrow{W}$ إلى التقارب الضعيف، بينما يرمز $u_k \xrightarrow{W^*}$ للتقارب الضعيف نجميا (انظر المراجع [5] ، [6] ، [27]).

كما تحقق المتتالية الجزئية $\left(u_k\right)$ :

$$\left\langle u_k'\left(t\right), w_i\right\rangle + \left\langle A\left(u_k\left(t\right)\right), w_i\right\rangle = \left\langle f\left(t\right), w_i\right\rangle, \quad \forall k > i \tag{9}$$

وبتثبيت $i$ وأخذ $k$ إلى لانهاية نحصل على :

$$\left\langle u'\left(t\right), w_i\right\rangle + \left\langle \psi(t), w_i\right\rangle = \left\langle f\left(t\right), w_i\right\rangle, \quad \forall i = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

وهذا يستلزم أن

$$u'\left(t\right) \overset{D'(0,T,V)}{=} -\psi\left(t\right) + f\left(t\right), \;\; 0 < t < T. \tag{11}$$

ومن ثمّ فإن $u' \in L^{p'}\left(0,T;V'\right)$. وباستخدام الملاحظة الواردة قبل هذه المبرهنة نحصل على $u \in C\left(\left[0,T\right],H\right)$. ومن ثمّ $u\left(0\right) = u_0$.

فيما يلي، نبيّن أن $\psi = A\left(u\right)$. ولهذا الغرض نعرّف، لكل $v \in L^p\left(0,T,V\right)$ ، المتتالية الحقيقية $\left(X_k\right)$ :

$$X_k = \int_0^T \left\langle A\left(u_k\left(t\right)\right) - A\left(v\left(t\right)\right), u_k\left(t\right) - v\left(t\right)\right\rangle dt. \tag{12}$$

من الواضح أن رتابة $A$ تستلزم أن $X_k \geq 0$.

نعوّض $w_i$ بـ $u_k$ في (10)، ثم نكامل على $[0,T]$ فنحصل على :

$$\int_0^T \langle A(u_k(t)), u_k(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_{0k}|^2 - \frac{1}{2}|u_k(T)|^2. \tag{13}$$

وبالتعويض في (12) يأتي :

$$X_k = \int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_{0k}|^2 - \frac{1}{2}|u_k(T)|^2 - \int_0^T \langle A(u_k(t)), v(t)\rangle dt - \int_0^T \langle A(v(t)), u_k(t) - v(t)\rangle dt.$$

ومنه نستنتج :

$$0 \leq \limsup X_k \leq \int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T \langle \psi(t), v(t)\rangle dt - \int_0^T \langle A(v(t)), u_k(t) - v(t)\rangle dt.$$

كما تؤدي (11) إلى :

$$\int_0^T \langle f(t), u_k(t)\rangle dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int_0^T \langle \psi(t), u(t)\rangle dt .$$

وبدمج العلاقتين الأخيرتين نصل إلى :

$$\int_0^T \langle \psi(t) - A(v(t)), u(t) - v(t)\rangle dt \geq 0. \tag{14}$$

وعنـد أخـذ $v = u - \lambda w$ ، حيـث إن $\lambda > 0$ و $w \in L^p\left(0,T;V\right)$ والتعـويض في (14) يتضح أن : $\lambda \int_0^T \left\langle \psi\left(t\right) - A\left(u(t) - \lambda w(t)\right), w(t) \right\rangle dt \geq 0$ . وبالتالي :

$$\int_0^T \left\langle \psi\left(t\right) - A\left(u\left(t\right) - \lambda w\left(t\right)\right),\ w\left(t\right) \right\rangle dt \geq 0.$$

نستغل نصف استمرار $A$ ونجعل $\lambda$ يؤول إلى الصفر فينتج :

$$\int_0^T \left\langle \psi\left(t\right) - A\left(u\left(t\right)\right), w\left(t\right) \right\rangle dt \geq 0, \quad \forall w \in L^p\left(0,T,V\right). \tag{15}$$

تؤدي العلاقة الأخيرة إلى المساواة $\psi = A\left(u\right)$ ، وهو المطلوب.

أما وحدانية الحل فتُثبت بنفس الكيفية المتبعة في المسألة الخطية (راجع إثبات المبرهنة 5.1 من الفصل التاسع).

## 2- تطبيقات

### تطبيق 1

ليكن $\Omega$ مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء $\Gamma$ وَ $p \geq 2$ عدداً حقيقياً معطى. نعتبر المسألة غير الخطية :

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=f \text{ in } \Omega\times(0,T), \\ u=0 \text{ on } \Gamma\times[0,T],\ u(x,0)=u_0(x) \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

**مبرهنة 1.2**

نفرض أن

$$f\in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$$

وَ $u_0\in L^2(\Omega)$. عندئذ توجد دالة وحيدة $u\in L^p\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ تحقق (16).

**البرهان**

لإثبات المبرهنة يكفي التأكد من شروط المبرهنة 1.1. ولهذا الغرض نعتبر الفضاء $V=W_0^{1,p}(\Omega)$ مزوداً بالنظيم (المكافئ)

$$\forall v\in V,\ \|v\|=\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

كما نضع $H=L^2(\Omega)$. ولدينا $V'=W^{-1,p'}(\Omega)$ و $V\subset H\subset V'$ لأن $p\geq 2$. ومن جهة أخرى نعرّف $A:V\to V'$ كالتالي :

$$\langle A(u),v\rangle_{V'\times V}=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

وبالعودة إلى تطبيق 8.1 نرى أن $A$ يحقق كل شروط المبرهنة 1.1.

ومنه نستنتج أن للمسألة (16) حلا $u\in L^p\left(0,T;V\right)$. أما وحدانية الحل فتأتي من كون $A$ رتيبا تماماً.□

والآن نناقش وجود الحل تحت شروط أضعف من تلك التي فرضناها في المبرهنة 1.1.

**مبرهنة 2.2**

ليكن $A: V \rightarrow V'$ مؤثراً (غير خطي) محدوداً ورتيباً ونصف مستمر بحيث توجد ثوابت $0<\alpha$ ، $0<\beta$ ، $0<\lambda$ تحقق :

$$[v]+\lambda|v|\geq \beta\|v\|,\quad \forall v\in V$$
$$\left\langle A\left(v\right),v\right\rangle_{V'\times V}\geq \alpha[v]^p,\quad 1<p<+\infty$$

حيث يرمز $[.]$ لنصف نظيم على $V$.

عندئذ، لكل $f\in L^{p'}\left(0,T;V'\right)$ و $u_0\in H$، تقبل المسألة (1) حلاً وحيداً $u\in L^p\left(0,T;V\right)$.

البرهان

بإعادة إثبات المبرهنة 1.1 فإن المتباينة (5) تأخذ الشكل :

$$\frac{1}{2}\left|u_m\left(t\right)\right|^2+\alpha\int_0^t\left[u_m\left(t\right)\right]^p ds\leq\frac{1}{2}\left|u_{0m}\left(t\right)\right|^2 + \int_0^t\left\|f\left(s\right)\right\|_{V'}\left\|u_m\left(s\right)\right\|_V ds \qquad (17)$$

وعند استخدام شروط المبرهنة، نقدّر الحد الأيسر من (17) كالآتي:

$$\frac{1}{2}\left|u_{0m}(t)\right|^2+\int_0^t \|f(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V\,ds$$

$$\leq \frac{1}{2}|u_0|^2+\left(\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_0^t \|u_m(s)\|_V^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{1}{2}|u_0|^2+c_1\left(\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^{p'}ds\right)\left[\left(\int_0^t \left[u_m(s)\right]^p ds\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^t |u_m(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}|u_0|^2+c_1\left[\frac{\alpha}{2c_1}\int_0^t \left[u_m(s)\right]^p ds+c_\alpha\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^{p'}ds\right]$$

$$+\frac{1}{2}c_1\left(\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}}\left[1+\left(\int_0^t |u_m(s)|^p\,ds\right)^{\frac{2}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}\int_0^t \left[u_m(s)\right]^p ds+c_2\left(\int_0^t |u_m(s)|^p\,ds\right)^{\frac{2}{p}}+c_3$$

حيث :

$$c_3=\frac{1}{2}|u_0|^2+c_1c_\alpha\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^{p'}ds+\frac{1}{2}c_1\left(\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$c_2=\frac{1}{2}c_1\left(\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

وعليه فإن (17) تستلزم :

$$|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t[u_m(s)]^p\,ds\le c_4+c_4\left(\int_0^t|u_m(s)|^p\,ds\right)^{\frac{2}{p}} \tag{18}$$

حيث $c_4$ ثابت موجب. وهذا بدوره يؤدي إلى :

$$|u_m(t)|^2\le c_4+c_4\left(\int_0^t|u_m(t)|^p\,ds\right)^{\frac{2}{p}}.$$

وبرفع الطرفين إلى القوة $\frac{p}{2}$ واستخدام متباينة مينكوفسكي فإنه يتضح وجود ثابت موجب $c_5$ بحيث

$$|u_m(t)|^p\le c_5+c_5\int_0^t|u_m(t)|^p\,ds.$$

وباستعمال متراجحة غرانوول Gronwall [3] يتضح وجود ثابت $c_6$ بحيث :

$$|u_m(t)|\le c_6,\quad \forall 0\le t\le T. \tag{19}$$

وبدمج (18) وَ (19) فإنه يتأكد وجود ثابت موجب $c_7>0$ بحيث :

$$\int_0^t|u_m(s)|^p\,ds\le c_7,\quad \forall 0\le t\le T.$$

أخيراً نستخدم شروط المبرهنة لنرى وجود ثابت موجب $c_8$ يحقق :

$$\int_0^t\|u_m(s)\|^p\,ds\le c_8,\quad \forall 0\le t\le T.$$

ثم نواصل البرهان تماماً كما هو في إثبات المبرهنة 1.1. ومنه يأتي المطلوب.□

---

[3] توماس غرانوول (1877- 1932) رياضي سويدي.

**تطبيق 2**

نعتبر كما سبق مجالاً $\Omega$ محدوداً من $\mathbb{R}^n$ حدوده ملساء $\Gamma$ وَ $p>2$ عدداً حقيقياً معطى. نعتبر المسألة غير الخطية

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-div\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla u\right)=f & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0 & \text{on } \Gamma\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}$$

حيث إن $\eta$ هو متجه الناظم الخارجي على الحدود $\Gamma$.

**مبرهنة 3.2**

نفرض أن $f\in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right)$ وَ $u_0\in L^2(\Omega)$. عندئذ توجد دالة وحيدة $u\in L^p\left(0,T;W^{1,p}(\Omega)\right)$ تحقق (20).

**البرهان**

نضع $H=L^2(\Omega)$ ونزوّد $V=W^{1,p}(\Omega)$ بنصف النظيم $[v]=\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$، ونعرّف المؤثر (غير الخطي) $A$ بـ :

$$Av=-div\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right).$$

يمكننا إثبات أن $A$ محدود، ونصف مستمر بنفس الكيفية الواردة في التطبيق 8.1.

نودّ أن نبيّن الآن بأن $A$ رتيب. ولهذا الغرض نعتبر $u,v\in V$ ونكتب :

$$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle_{V'V}$$
$$=\int_\Omega\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)(\nabla u-\nabla v)$$
$$=\int_\Omega\left[|\nabla u|^{p}+|\nabla v|^{p}-\left(|\nabla u|^{p-2}+|\nabla v|^{p-2}\right)\nabla u.\nabla v\right]$$
$$\geq\int_\Omega\left[|\nabla u|^{p}+|\nabla v|^{p}-|\nabla v|^{p-1}|\nabla u|-|\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\right]$$
$$=\int_\Omega\left[|\nabla u|^{p-1}\left(|\nabla u|-|\nabla v|\right)+|\nabla v|^{p-1}\left(|\nabla v|-|\nabla u|\right)\right]$$
$$=\int_\Omega\left(|\nabla u|^{p-1}-|\nabla v|^{p-1}\right)(\nabla u-\nabla v)\geq 0.$$

وذلك باستخدام المتباينة :

$$\left(a^{p-1}-b^{p-1}\right)(a-b)\geq 0,\quad \forall a,b\geq 0.$$

وهذا ما يبيّن أن $A$ رتيب.

يبقى الآن التحقق من أن نصف النظيم $[.]$ يتمتع بالشروط المطلوبة.

نبدأ بالقسرية. إنها تأتي من :

$$\langle A(v),v\rangle_{V',V}=\int_\Omega|\nabla u|^{p}.$$

أما بالنسبة للشرط

$$[v]+\lambda|v|\geq\beta\|v\|$$

فإننا نلاحظ بمراعاة احتواءات فضاءات سوبولاف وجود $c_0>0$ يحقق :

$$\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c_0\left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right), \quad \forall v\in V \tag{21}$$

حيث $\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$.

ولما كان $2<p<p^*$ فإن استعمال الاستقطاب - أو الاستكمال Interpolation- (انظر المراجع [1] ، [6] ، [27]) يؤدي إلى وجود ثابت $c>0$ بحيث :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \frac{c}{\varepsilon}\|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\varepsilon>0. \tag{22}$$

وبدمج العلاقتين (21) و (22) نحصل على :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{c}{\varepsilon}\|v\|_{L^2(\Omega)} + c_0\varepsilon\left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}\right)$$

وباختيار $\varepsilon=\frac{1}{2c_0}$ نجد ثابتا موجبا $c_1$ يحقق :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le c_1\left(\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

وبإضافة $\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$ إلى الطرفين نصل إلى المطلوب. وهذا يعني أن للمسألة (2.20) حلا وحيدا $u\in L^p\left(0,T;W^{1,p}(\Omega)\right)$.□

وبإعادة خطوات مشابهة، يمكننا إثبات المبرهنة التالية باعتبار المسألة

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t)+A(u(t))=f(t), & 0<t<T, \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{23}$$

**مبرهنة 4.2**

ليكن $A:V \to V'$ مؤثراً (غير خطي) محدوداً رتيباً ونصف مستمر ويحقق :

$$\langle A(v),v\rangle \geq \alpha \|v\|_V^p, \quad \forall v \in V$$

حيث $\alpha > 0$ و $1 < p < +\infty$. عندئذ، لكل $u_0 \in H$ و $f \in L^{p'}(0,T;V)$ (مع $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$)، تقبل المسألة (23) حلاً وحيداً $u \in L^p(0,T;V)$.

# 3- تمارين

**تمرين 1**

تُعطى المسألة

$$\begin{cases} u_t - div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+u = f, & \text{in } \mathbb{R}^n, \quad t>0 \\ u(x,0)=u_0(x), & \text{in } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

حيث

$$\begin{cases} f \in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}\left(\mathbb{R}^n\right)\right), & p \geq 2 \\ u_0 \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right), \end{cases}$$

و $p'$ مرافق $p$.

أثبت أن للمسألة حلاً وحيداً.

## تمرين 2

تُعطى المسألة

$$\begin{cases} u_t - div\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right) = f, \;\; \text{in } \Omega, \;\; t > 0 \\ u = 0, \;\; \text{on } \partial\Omega, \;\; t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; \text{in } \Omega, \end{cases}$$

حيث $\Omega$ مجال غير محدد من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء وَ $f$ ، $u_0$ ، $p$ تحقق نفس شروط التمرين 1.

أ) بيّن أن المسألة تقبل حلاً وحيداً.

ب) ماذا لو استبدِل شرط ديرشلت بشروط نيومان؟

## تمرين 3

ليكن $\Omega$ مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء وَ $p$ و $q$ عددين حقيقيين بحيث $\min(p,q) > 2$. تُعطى الدالتان $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$. بيّن أن للمسألة

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + (u - v) = 0 \text{ in } \Omega, \\ v_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^{q-2} \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + (u - v) = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = v = 0, \text{ on } \partial\Omega, \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) = 0, \ v(x,0) = v_0(x), \text{ in } \Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً.

## تمرين 4

ليكن $\Omega$ مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء. نفرض أن :

$$\begin{cases} f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \\ u_0 \in w_0^{1,p}(\Omega), \\ u_1 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

حيث إن $p \geq 2$.

استخدم طريقة غليركين لتبيّن أن للمسألة

$$\begin{cases} u_{tt} - div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = f, \text{ in } \Omega, \ t > 0, \\ u = 0, \text{ on } \partial\Omega, \ t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), \text{ in } \Omega \end{cases}$$

حلاً وحيداً:

$$u \in C\left(\left[0,T\right);W_0^{1,p}\left(\Omega\right)\right) \cap C^1\left(\left[0,T\right);L^2\left(\Omega\right)\right).$$

## تمرين 5

ليكن $\Omega$ مجالاً محدوداً من $\mathbb{R}^n$ بحدود ملساء. تُعطى الثوابت الحقيقية $\left(\alpha_i\right)_{i=1,2,\dots,n}$ والدوال

$$u_0 \in H_0^1\left(\Omega\right),\ \ u_1 \in L^2\left(\Omega\right),\ \ v_0 \in W_0^{1,p}\left(\Omega\right),\ \ p \ge 2.$$

بيّن أن للمسألة التالية حلاً وحيداً:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \ \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ v_t - div\left(\left|\nabla v\right|^{p-2} \nabla v\right) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} = 0, \ \text{in } \Omega,\ t > 0, \\ u = v = 0, \ \text{on } \partial\Omega,\ t \ge 0, \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) = 0,\ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right),\ v\left(x,0\right) = v_0\left(x\right),\ \text{in } \Omega \end{cases}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

# أبرز رموز

| الرمز | المعنى |
|---|---|
| $C^{\infty}(\Omega)$ أو $E(\Omega)$ | فضاء الدوال القابلة للاشتقاق نهائيا المعرفة من الجزء المفتوح $\Omega$ إلى $\mathbb{C}$. |
| $C^{m}(\Omega)$ | فضاء الدوال من الجزء المفتوح $\Omega$ إلى $\mathbb{C}$ القابلة للاشتقاق حتى الرتبة $m$ ومشتقاتها من هذه الرتبة مستمرة . |
| $C_b^{m}(\mathbb{R}^n)$ | فضاء الدوال القابلة للاشتقاق حتى الرتبة $m$ ومشتقاتها محدودة ومستمرة. |
| $C^m([0,+\infty);V)$ | فضاء الدوال $f:[0,+\infty)\to V$ من الصنف $C^m$. |
| $C^{\alpha}(\Omega)$ | فضاء هولدر Hölder حيث $0<\alpha<1$. |
| $D(\Omega)$ أو $C_0^{\infty}(\Omega)$ | فضاء الدوال المتراصة الحوامل على $\Omega$ المنتمية إلى الفضاء $C^{\infty}(\Omega)$. |
| $D'(\Omega)$ | فضاء التوزيعات على $\Omega$ ، وهو ثنوي $D(\Omega)$ . |
| $D_K(\Omega)$ | فضاء الدوال المنتمية إلى $D(\Omega)$ ذات الحوامل المحتواة في المتراص $K\subset\Omega$. |
| $\delta$ و $\delta_a$ | توزيع ديراك Dirac. |
| $\Delta$ | مؤثر لابلاس Laplace. |
| $E'(\Omega)$ | فضاء التوزيعات المتراصة الحامل على $\Omega$ ، المطابق لثنوي $E(\Omega)$ . |
| $f*g$ | الجداء التزاوجي للعنصرين (دالتين أو توزيعين) $f$ و $g$ . |
| $f\otimes g$ | الجداء الموْتري للعنصرين (دالتين أو توزيعين) $f$ و $g$ . |
| $F(f)$ أو $\hat{f}$ | تحويل فوريي Fourier لـ $f$ . |

| | |
|---|---|
| $H$ | دالة هيفسايد Heaviside. |
| $H^s(\Omega)$ | فضاء سوبولاف Sobolev المبني على فضاء لوبيغ $L^2(\Omega)$. |
| $L^1_{loc}(\Omega)$ | فضاء الدوال القابلة للمكاملة محليا. |
| $L^p(\mathbb{R}^n)$ | فضاءات لوبيغ Lebesgue. |
| $N_p$ | أنصاف النظيمات المعرّفة لطبولوجيا $S(\mathbb{R}^n)$. |
| $O_M(\mathbb{R}^n)$ | فضاء الدوال البطيئة التناقص. |
| $pv\frac{1}{x}$ | توزيع القيمة الرئيسية لكوشي Cauchy principal value. |
| $p_{K,m}(\varphi)$ | $p_{K,m}(\varphi) = \sup_{x\in K,\ \lvert\alpha\rvert\le m} \left\lvert D^\alpha \varphi(x)\right\rvert$ حيث عموما $\varphi \in D_K(\Omega)$. |
| $\mathrm{supp}T$ | حامل التوزيع $T$. |
| $S(\mathbb{R}^n)$ | فضاء الدوال السريعة التناقص (فضاء شوارتز). |
| $S'(\mathbb{R}^n)$ | فضاء التوزيعات المعتدلة. |
| $T_{\lvert U}$ | اقتصار التوزيع $T$ على المفتوح $U$. |
| $\tau_a T$ | انسحاب التوزيع $T$ بالمتجه $a$. |
| $\check{T}$ | نظير التوزيع $T$. |
| $V'$ | ثنوي الفضاء $V$. |
| $W_p^s(\Omega)$ أو $W^{s,p}(\Omega)$ | فضاء سوبولاف Sobolev المبني على فضاء لوبيغ $L^p(\Omega)$. |
| $u_m \xrightarrow{W} u$ | التقارب الضعيف لـ $(u_m)$ نحو $u$. |
| $\nabla u$ | تدرج الدالة $u$ / انحدار الدالة $u$ |

# دليل المصطلحات

يقدم الجدول التالي أهم المصطلحات وأبرز الأماكن التي وردت فيها. وقد أشرنا لمكان الورود برقم الفصل والبند (مثال : 3/7 يعني الفصل 7/البند 3)

| المصطلح بالأنكليزية | ف/ب | المصطلح بالعربية |
|---|---|---|
| Trace | 2/6 | أثر |
| Interpolation | 2/10 | استقطاب (استكمال) |
| Projection | 2/6 -1/3 | إسقاط |
| Restriction of a distribution | 4/2 | اقتصار توزيع |
| Cauchy principal value | 1/2 | القيمة الرئيسية لكوشي |
| Translation of a distribution | 3/4 -4/2 | انسحاب توزيع |
| Truncation | 2/1 | بتر |
| Partition of unity | 2/1 | تجزئة الوحدة |
| Convexity | 2/7 | تحدب |
| Fourier transform | -4/5 -1/5 4 -9 | تحويل فوريي |
| Convolution of a distribution with a function | 2/4 | تزاوج توزيع مع دالة |
| Convolution of two distributions | 3/4 | تزاوج توزيعين |
| Approximation of unity | 2/1 | تقريب الوحدة |
| Gauss integral | 1/5 | تكامل غاوس |
| Symmetry | 2/7 | تناظر |

| | | |
|---|---|---|
| Distribution | 1/2 | توزيع |
| Harmonic distribution | 5/5 -5/4 | توزيع توافقي |
| Dirac distribution | -3/4 -1/2<br>-3/5 -5/4<br>4/5 | توزيع ديراك |
| Tempered distribution | 3/5 | توزيع معتدل |
| Uryshon lemma | 2/1 | توطئة أورشون |
| Lax-Milgram Lemma | 2/7 | توطئة لاكس- ميلغرام |
| Duality | -5/2 -1/2<br>-1/7 -1/6<br>3/7 | ثنوية |
| Convolution product | 1/4 -2/1 | جداء التزاوج |
| Product of a function by a distribution | 4/2 | جداء دالة في توزيع |
| Tensorial product | | جداء موْتري |
| Resolvant of $A$ | 1/9 | حالّة $A$ |
| Support | 1/1 | حامل |
| Support of a distribution | 5/2 | حامل توزيع |
| Fundamental solution | 5/4 | حل أساسي |
| Weak solution | 3/7 | حل ضعيف |
| Test function | 2/5 -1/1 | دالة اختبارية |
| Rapidly decreasing function | 2/5 | دالة سريعة التناقص |
| Gamma function | 5/4 | دالة غاما |
| Caratheodory function | 2/8 | دالة كرثيودورية |
| Heaviside function | -3/4 -3/2<br>5/4 | دالة هيفسايد |

| | | |
|---|---|---|
| Self-Ajoint | 3/9 | ذاتية القرين |
| Order of a distribution | 1/2 | رتبة توزيع |
| Pseudo-monotone | 1/8 | شبه الرتابة |
| Dirichlet condition – Neumann condition | 3/7 | شرط دريشلت - شرط نِيُومان |
| Bilinear form | 2/7 | شكل ثنائي الخطية |
| Yosida Regularizers | 1/9 | صاقلات يوشيدا |
| Regularity | 2/9 -2/6 | صقالة (ملوسة) |
| Weak form | 2/8 -3/7 | صيغة ضعيفة |
| Truncation method of Stampacchia | 4/9 -4/7 | طريقة البتر لستانباكيا |
| Compactness method | 2/8 | طريقة التراص |
| Monotonicity method | 1/8 | طريقة الرتابة |
| Faedo-Galerkin method | 1/10 | طريقة فادو- غليركين |
| Sobolev embedding | 4 -9 -2/6 | غمس (احتواء) سوبولاف |
| Compact embedding | 2/8 | غمس متراص |
| Sobolev space | 1/6 -1/3 | فضاء سوبولاف |
| Fréchet space | 3/1 | فضاء فريشيه |
| Green formula | 5/4 | قانون غرين |
| Coercivity | -3/7 -2/7<br>-1/8 -4/7<br>2/10 | قسرية |
| Radon measure | 1/2 | قياس رادون |
| Cauchy-Lipschitz-Picard | 1/9 | كوشي- ليبشيتز- بيكار |

| | | |
|---|---|---|
| Maximum principle | -1/9 -4/7 4/9 | مبدأ الأعظمية |
| Uniform boundedness principle or Banach-Steinhaus theorem | 4/2 -3/1 | مبدأ المحدودية المنتظمة أو مبرهنة بناخ- شتاينهاوس |
| Fixed point theorem | -2/7 -1/7 2/8 -1/8 | مبرهنة النقطة الثابتة |
| Riesz representation theorem | 1/7 | مبرهنة تمثيل ريتز |
| Stampacchia' s theorem | 2/7 | مبرهنة ستانباكيا |
| Fubini's theorem | 1/5 | مبرهنة فوبيني |
| Dominated convergence theorem | 2/8 -2/2 | مبرهنة لوبيغ (التقارب المسقوف أو المهيمن) |
| Hille-Yosida Theorem | 5/9 -1/9 | مبرهنة هيل- يوشيدا |
| Truncation sequence | 2/1 | متتالية باترة |
| Sequence of mollifiers | 2/1 | متتالية صاقلة |
| Exhaustive sequence | 2/4 -2/1 | متتالية معمقة (مستفيضة) |
| Variational inequality | 3/7 | متراجحة تغيراتية |
| Convolutive sets | 1/4 | مجموعات متزاوجة |
| Boundedness | 1/8 | محدودية |
| Approximative problem | 1/8 | مسألة تقريبية |
| Variational Problems | 2/7 | مسائل تغيراتية |
| Derivative of a distribution | 3/2 | مشتق توزيع |
| Parabolic equations | 4/9 | معادلات مكافئية |
| Wave equation | 5/9 | معادلة الأمواج |
| Heat Equation | 4/9 | معادلة الحرارة |

| | | |
|---|---|---|
| One-dimensional heat equation | 4/9 | معادلة الحرارة في بعد واحد |
| Convolution equation | 5/5 -5/4 | معادلة تزاوجية |
| Partial Differential equation | 3/6 | معادلة تفاضلية جزئية |
| Laplace equation | -2/3 -1/3 -5/5 -5/4 3/6 | معادلة لابلاس |
| Differential operator | 3/6 -2/3 | مؤثر تفاضلي |
| Self-adjoint operator | 3/9 | مؤثر ذاتي قرين (قرين الذات) |
| Monotone operator | 1/8 | مؤثر رتيب |
| Symmetric operator | 3/9 | مؤثر متناظر |
| $p$ - Laplacian operator | 2/8 | مؤثر من نوع $p$ - لابلاس |
| Hemi-continuity | 1/10 -1/8 | نصف الاستمرار |
| Semi-norm | -3/1 -1/1 -1/6 -1/2 2/10 | نصف نظيم/ نصف معيار |
| Elliptic theory | 5/9 | نظرية ناقصية |

## المراجع


1. Adams Robert A. & Fournier John J.F. : *Sobolev Spaces*, Second Edition, Pure and Applied Mathematics, Volume 140, Academic Press, 2003.
2. Al-Gwaiz : M. Abdulrahman : *Theory of Distributions*, Marcel Dekker, New York, 1992.
3. Ben Al-Ashhar Ali M., *Dictionary of Mathematics*, English-French-Arabic, Academia, 1995.
4. Bony Jean- Michel : *Théorie des Distributions et Analyse de Fourier*, Éd. Ecole Polytechnique, Paris, 2001.
5. Brézis Haïm : *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, First Edition, Springer, 2010.
6. Brézis Haïm : *Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contraction dans les Espaces de Hilbert*, First Edition, North Holland, 1973.
7. Brézis Haïm : *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Second Edition, Dunod, Paris, 1999.

8. Chipot Michel : *Elements of Nonlinear Analysis*, First Edition, Birkhauser, Advanced Texts, 2000.

9. Evans Lawrence C. : *Partial Differential Equations, Second Edition*, Graduate Studies In Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, 2010.

10. Friedlander F.G. & Joshi M. : *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge University Press, 1999.

11. Haroske Dorothee D. & Triebel Hans : *Distributions, Sobolev Spaces, Elliptic Equations*, European Math. Society, 2008.

12. Khoan, Vo-Khac : *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles*, T. I & II, Vuibert, Paris, 1972.

13. Lacroix-Sonrier, Marie-Thérèse : *Distributions, Espaces de Sobolev, Applications*, First Edition, Ellipses Marketing, Paris, 1999.

14. Leoni, Giovanni: *A First Course in Sobolev Spaces*, First Edition, American Mathematical Society, 2009.

15. Lions Jacques-Louis : *Quelques Méthodes de Résolution des problèmes aux limites Non Linéaires*, Dunod, Second Edition, Paris, 2002.

16. Lucquin Brigitte : *Equations aux Dérivées Partielles et leurs Approximations*, First Edition, Ellipses Marketing, 2004.

17. McOwen Robert C. : *Partial Differential Equations Methods & Applications*, Second Edition, Printice Hall, 2003.

18. O'Neil Peter V. : *Beginning Partial Differential Equations*, First Edition, Wiley Interscience Publication, 1999.

19. Renardy Michael & Rogers, Robert C. : *An Introduction to Partial Differential Equations*, First Edition, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, 1992.

20. Roubicek Thomas : *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*, First Edition, Birkhauser, 2005.

21. Samhan Marouf, Abouammah Abdulrahman & Al-Thukair Fawzi : *Dictionary of Mathematical Terms, English-Arabic* Academic Publishing and Press, King Saud University, 2003.

22. Strichartz Robert S. : *A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, CRC Press, 1994.

23. Suhubi Erdogan: *Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

24. Tartar Luc : *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Springer, Berlin, 2007.

25. Zemanian A.H. : *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions with Applications*, Dover Publications, 2010.

26. Zheng Songmu : *Nonlinear Evolution Equations*, First Edition, Chapman & Hall / CRC Monographs and Surveys, in Pure and Applied Mathematics, 2004.

27. Zuily Claude : *Problems in Distributions and Partial Differential Equations*, North-Holland, Amesterdam, 1988.

28. بريزيس هايم: التحليل الدالي: دراسة وتحليل، ترجمة اليغفوري عبدالسلام، شعلال سامية، مسعودي سليم، الطبعة الأولى، العبيكان للنشر والتوزيع، المملكة العربية السعودية، 2010.