الفصل الأول

فضاءات ونتائج أساسية

ندخل في هذا الفصل فضاءات لا بد من الإلمام بها قبل التطرق إلى مفهوم التوزيعات. كما نقدم نتائج تعيننا مستقبلا في إثبات عديد المبرهنات.

1- فضاءات أساسية

نقدم في البداية بعض الرموز التي سنستخدمها لاحقا :

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. نسمى α دليلا متعدّدا.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. نسمي $|\alpha|$ طول α.
- نضع : $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} .. x_n^{\alpha_n}$ لكل $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.
- إذا كان α و β دليلين متعددين فإن لدينا التكافؤ :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad : \quad \alpha_i \leq \beta_i \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq \beta .$$

- نضع : $\alpha ! = \alpha_1 ! .. \alpha_n !$ لكل $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

- لدينا العلاقة التالية التي تعمّم مثيلتها المعروفة في $\mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (x+y)^\alpha = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta$$
$$= \sum_{\beta \le \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} y^\beta .$$

- نعبّر عن الاشتقاق الجزئي بـ:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha f = D^\alpha f \quad \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots = \partial_{x_n}^{\alpha_n} f .$$

- يكتب قانون ليبنيتز Leibniz[1] الخاص باشتقاق جداء دالتين، على الشكل:

$$D^\alpha (f.g) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f.D^\beta g .$$

نتناول الآن بعض الفضاءات التي تهمّنا في تقديم التوزيعات.

ليكن Ω جزءا مفتوحا غير خال من $\mathbb{R}^n$.

نرمز بـ $C^\infty(\Omega)$ أو بـ $E(\Omega)$ لفضاء الدوال المعرفة على Ω القابلة للاشتقاق لانهائيا على Ω.

كما نرمز بـ $D(\Omega)$ أو بـ $C_0^\infty(\Omega)$ لفضاء الدوال المتراصة الحوامل support على Ω المنتمية إلى الفضاء $C^\infty(\Omega)$. تسمى عناصر هذا الفضاء "دوالّ اختبارية" Test functions.

ليكن K متراصا محتوى في Ω. نرمز بـ $D_K(\Omega)$ للفضاء :

$$D_K(\Omega) = \{ u \in D(\Omega) \ : \ \mathrm{supp}\, u \subset K \}$$

[1] غوتفريد ليبنيتز (1646- 1716) فيلسوف ورجل أعمال ورياضي ألماني.

حيث يرمز $\operatorname{supp}u$ لحامل الدالة u.

ليكن $m \in \mathbb{N}$. نرمز بـ $D^m(\Omega)$ للفضاء :

$$D^m(\Omega)=\left\{u \in C^m(\Omega)\ :\ \operatorname{supp}u \subset K\right\}.$$

سؤال: ما هي الطبولوجيا، المناسبة لدراسة التوزيعات، التي سنعرّفها على الفضاء $D(\Omega)$؟

إنها طبولوجيا صعبة التقديم لأنها تتطلب إدخال العديد من المفاهيم المرتبطة بأنصاف النظيمات (يقال أيضا نصف معيار) semi-norm. وعليه نكتفي بإبراز مفهوم التقارب وفق هذه الطبولوجيا، إذ إن ذلك يكفي لسدّ حاجتنا في هذا الكتاب.

تعريف **1.1** (التقارب في $D(\Omega)$)

نقول عن متتالية دوال اختبارية (f_m) إنها متقاربة نحو f في $D(\Omega)$ إذا وجد متراص K محتوى في Ω بحيث يكون :

1) $f_m \in D_K(\Omega)$ لكل عدد طبيعي m و $f \in D_K(\Omega)$ ،

2) $D^\alpha f_m$ متقاربة بانتظام على K نحو $D^\alpha f$ ، وذلك مهما كان $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ، أي :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \lim_{m \to +\infty} \sup_{x \in K}\left|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)\right| = 0.$$

2- نتائج أساسية

سنحتاج أحيانا إلى استخدام النتيجة التالية:

مبرهنة 1.2

ليكن $T : D(\Omega) \to \mathbb{C}$ تطبيقا خطيا من $D(\Omega)$ نحو مجموعة الأعداد المركبة. يكون T مستمرا (متصلا) إذا وفقط إذا كان:
لكل متتالية (f_m) متقاربة نحو f في $D(\Omega)$ فإن المتتالية المركبة $T(f_m)$ تتقارب نحو العدد $T(f)$.

ملاحظة

تعدّ هذه المبرهنة حالة خاصة من النتيجة التالية: ليكن m عددا طبيعيا. إن استمرار تطبيق خطي $T : D^m(\Omega) \to \mathbb{C}$ يكافئ قيام أحد الشرطين (المتكافئين) :

1) لكل متتالية دوال (f_i) متقاربة نحو f في $D^m(\Omega)$ فإن المتتالية المركبة $T(f_i)$ تتقارب نحو العدد $T(f)$.

2) لكل متراص $K \subset \Omega$ فإن الاقتصار $T_{|D^m(\Omega)}$ مستمر.

سؤال: هل هناك دوال (غير الدالة الصفرية) تنتمي إلى الفضاء $D(\Omega)$؟

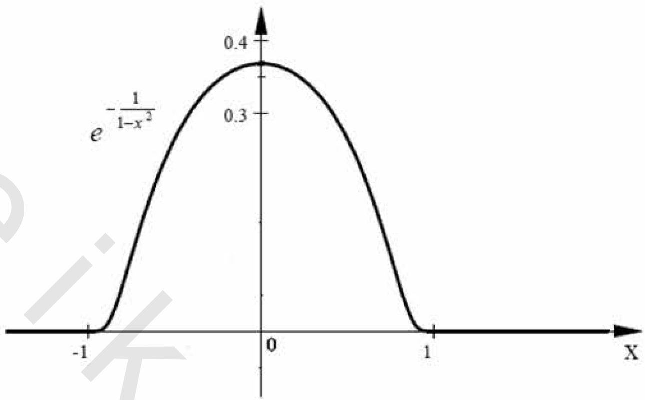
نعم طبعا! وإلا ما الفائدة من إنشاء فضاء خال؟! إليك إثبات أن الفضاء $D(\Omega)$ غير خال: لتكن الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & x\in \left]-1,1\right[,\\ 0, & x\notin \left]-1,1\right[. \end{cases}$$

تمرين : تأكد من أن هذه الدالة تنتمي فعلا إلى $D(\mathbb{R})$.

لاحظ أنه إن أردت الحصول على مثيل هذه الدالة في $\mathbb{R}^n$ فيكفيك استبدال x في الطرف الأيمن بـ : $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ ، أي:

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\|<1,\\ 0, & \|x\|\ge 1.\end{cases}$$



قد تعتقد أنه لا يوجد عنصر آخر في فضاء الدوال الاختبارية عدا الذي أوردناه آنفا. نترك لك مهلة للتفكير ... وستجد الجواب بعد حين!

تعريف 2.2 (المتتالية الصاقلة Sequence of mollifiers)

نقول عن متتالية دوال (f_j) من $D(\mathbb{R}^n)$ إنها متتالية صاقلة إذا تمتعت بالخواص الثلاث التالية لكل عدد طبيعي j :

1) $f_j \ge 0$،

2) $\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = 1$،

3) $\operatorname{supp} f_j \subset B(0,\varepsilon_j)$ ، حيث تشير $B(0,\varepsilon_j)$ للكرة المتمركزة في 0 وذات نصف القطر ε_j ، مع العلم أن ε_j يؤول إلى الصفر بمآل j إلى $+\infty$.

ملاحظة

مجموعة المتتاليات الصاقلة ليست خالية. لنثبت ذلك. خذ أي دالة φ من $D(\mathbb{R}^n)$ (مثلا الدالة φ المعرفة آنفا) وضع :

$$f = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx}.$$

لدينا: $\operatorname{supp} f \subset B(0,1)$.

لتكن الآن متتالية أعداد حقيقية موجبة (ε_j) تؤول إلى الصفر (مثلا $\varepsilon_j = \frac{1}{j+1}$). نضع :

$$f_j(x) = \frac{1}{\varepsilon_j^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon_j}\right).$$

عندئذ نتأكد بسهولة (تمرين) من قيام الشروط الواردة في التعريف السابق، وذلك لكل j ، أي :

$$f_j \geq 0 \quad \text{وَ} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = 1 \quad \text{وَ} \quad \operatorname{supp} f_j \subset B(0,\varepsilon_j).$$

وهكذا نرى أنه كلما كانت لدينا دالة موجبة f تحقق : $f \in D(\mathbb{R}^n)$ وَ $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$ وَ $\operatorname{supp} f \subset B(0,1)$ فإن جماعة الدوال المعرفة بـ :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

تنتمي إلى $D(\mathbb{R}^n)$ وتتمتع بخواص المتتاليات الصاقلة. تسمى هذه الجماعة أحيانا "تقريب الوحدة" "Approximation of unity".

سؤال: ما سبب هذه التسمية ("تقريب الوحدة")؟

عندما تكون f وَ g دالتين "ملائمتين" (أي تحققان شروطا معيّنة) يمكننا تعريف ما يسمى بجداء التزاوج (المسمى أيضا جداء اللف، وجداء الطي، وجداء الالتفاف) Convolution product، $f*g$ ، المعطى بـ:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy .$$

لدينا المبرهنة التالية :

مبرهنة 3.2

لتكن (φ_j) متتالية صاقلة و f دالة قابلة للمكاملة محليا على $\mathbb{R}^n$.

عندئذ تحقق المتتالية $f_j = \varphi_j * f$ (المسماة متتالية مصقولة لـ f):

1) لكل j : $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) إذا كان $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ فإن : $f_j \xrightarrow{C^\infty(\mathbb{R}^n)} f$، وهذا يعني $\lim\limits_{j \to +\infty} \sup\limits_{x \in K, |\alpha| \le m} \left| D^\alpha f_j(x) - D^\alpha f(x) \right| = 0$ مهما كان المتراص K ، ومهما كان العدد الطبيعي m.

3) إذا كان $f \in D(\mathbb{R}^n)$ فإن :

$$f_j \xrightarrow{D(\mathbb{R}^n)} f .$$

4) إذا كان $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ و $1 \le p < +\infty$ فإن :

$$f_j \xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)} f$$

حيث يرمز $L^p(\mathbb{R}^n)$ لفضاء لوبيغ Lebesgue[2] المعروف.

وكأن لدينا في كل حالة من حالات التقارب الثلاث الأخيرة تقاربا من الشكل :

$$\varphi_j * f \longrightarrow \delta * f$$

حيث يمثل δ عنصر الوحدة (العنصر الحيادي) بالنسبة لعملية جداء التزاوج.

سنرى ما هو هذا العنصر δ في الفصل الثاني!

[2] هنري لوبيغ (1875- 1941) رياضي فرنسي.

نستعرض فيما يلي بعض المبرهنات التي نستعين بها من حين إلى آخر.

مبرهنة 4.2 (المتتاليات المعمقة أو المستفيضة Exhaustive sequence)

> ليكن Ω جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^n$. توجد دوما متتالية "معمّقة" من المتراصات (K_j) اتحادها يساوي Ω، أي متتالية متراصات (K_j) تحقق :
>
> 1) لكل عدد طبيعي j : $K_j \subset\subset K_{j+1}$ أي $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$
>
> حيث يرمز $\mathring{K}_j$ لداخلية K_j (أي أكبر جزء مفتوح من K_j).
>
> 2) $\Omega = \bigcup_j K_j$.

البرهان

❖ أولا : إذا كان $\Omega = \mathbb{R}^n$ فيكفي اعتبار $K_j = B(0, j)$ حيث ترمز $B(0, j)$ إلى الكرة المتمركزة في 0 وذات نصف القطر j.

❖ ثانيا : إذا كان $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ فإننا نضع لكل عدد طبيعي $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_j = B(0, j) \cap A_j \qquad \text{وَ} \qquad A_j = \left\{ x \in \Omega, \quad d(x, \complement_{\mathbb{R}^n}\Omega) > \frac{1}{j} \right\}$$

حيث يشير $d(x, \complement_{\mathbb{R}^n}\Omega)$ للمسافة الفاصلة بين العنصر x ومتممة Ω في $\mathbb{R}^n$. ثم نلاحظ أن المجموعات $(A_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ و $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ تتمتع بالخواص التالية التي يمكن التأكد منها بسهولة لكل عدد طبيعي $j \in \mathbb{N}^*$:

- A_j مجموعة مفتوحة (فهي صورة عكسية لمفتوح عبر تطبيق مستمر) وكذلك Ω_j.
- $A_j \subset A_{j+1}$.
- $\overline{\Omega_j} \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega$. لاحظ أن :

$$\overline{\Omega_j} = \overline{B(0, j) \cap A_j} \subset \overline{B(0, j)} \cap \overline{A_j} \subset B(0, j+1) \cap A_{j+1} = \Omega_{j+1}.$$

- $\overline{\Omega_j}$ متراص (لأنه محتوى في $\overline{B(0, j)}$).

ولذا يكفي وضع $K_j=\overline{\Omega_j}$ لأن ذلك يعطي $K_j\subset\mathring{K}_{j+1}$ ، إضافة إلى المساواة $\Omega=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\overline{\Omega_j}$ (تأكد من ذلك).□

ملاحظة

تؤدي صحة هذه المبرهنة إلى وجود متتالية "معمقة" من المفتوحات، أي متتالية مفتوحات (Ω_j) تحقق الشروط :

1) الملاصقة $\overline{\Omega}_j$ متراصة لكل عدد طبيعي j ،

2) $\overline{\Omega}_j\subset\Omega_{j+1}$ لكل عدد طبيعي j ،

3) $\Omega=\bigcup_j\Omega_j$.

يكفي وضع $\Omega_j=\mathring{K}_j$ في المبرهنة السابقة. لاحظ حينئذ أن $\overline{\Omega}_j$ متراص وأن $\overline{\Omega}_j\subset K_j\subset\mathring{K}_{j+1}=\Omega_{j+1}$.

تمرين

ليكن K متراصا في جزء مفتوح $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. ولتكن (K_j) متتالية معمّقة من المتراصات اتحادها Ω.

أثبت وجود عنصر K_{j_0} من هذه المتتالية بحيث $K\subset K_{j_0}$. (إرشاد : لاحظ أن $K\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathring{K}_j$ ، وهذا يعني أن $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathring{K}_j$ تغطية مفتوحة للمتراص K).

مبرهنة **5.2** (توطئة أورشون Urysohn[3])

ليكن K و F جزأين غير متقاطعين من $\mathbb{R}^n$. نفرض أن K متراص وأن F مغلق. عندئذ يوجد $f\in D(\mathbb{R}^n)$ يتمتع بالخواص الثلاث التالية:

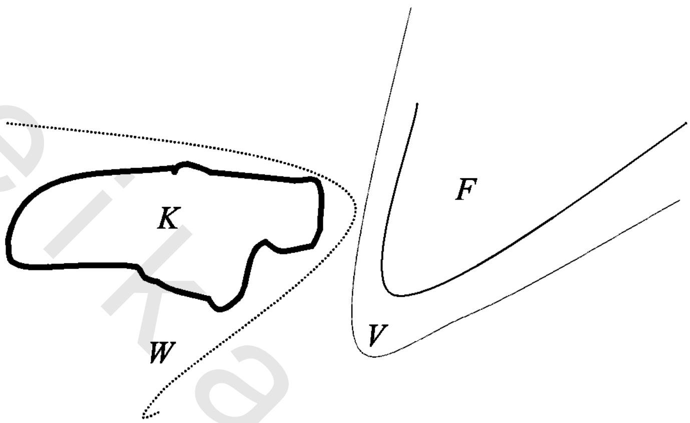
---

[3] بول أورشون (1898- 1924) رياضي روسي مات غرقًا.

1) $0 \le f \le 1$ ،

2) $f = 0$ في جوار V لـ F ،

3) $f = 1$ في جوار W لـ K.



سؤال: ما المانع في المبرهنة السابقة أن يكون $0 = f$ في جوار لـ K و$1 = f$ في جوار لـ F؟

نتيجة 6.2

ليكن Ω جزءا مفتوحا من $\mathbb{R}^n$ و K متراصا من Ω. عندئذ يوجد $f \in D(\mathbb{R}^n)$ بحيث:

1) $0 \le f \le 1$ ،

2) $f = 1$ في جوار (يمكن اختياره متراصا) لـ K.

البرهان

نضع $F = \complement_{\mathbb{R}^n}\Omega$ ونعتبر متتالية معمّقة من المتراصات (K_j) اتحادها يساوي Ω. يوجد K_{j_0} بحيث $K \subset K_{j_0} \subset \mathring{K}_{j_0+1} \subset K_{j_0+1}$. بتطبيق المبرهنة السابقة على F و K_{j_0+1} يتبيّن وجود φ من $D(\mathbb{R}^n)$ وجوار V لـ F بحيث :

$0\le\varphi\le1$ وَ $\varphi_{|V}=0$ وَ φ تساوي 1 في جوار لـ K_{j_0+1}. ومن ثمّ فإن $\varphi\in D(\Omega)$ وَ $\varphi=1$ على K_{j_0+1} الذي يمثل جوارا متراصا لـ K.□

تعريف- مبرهنة 7.2 (المتتاليات الباترة Truncation sequence)

ليكن Ω مفتوحا من $\mathbb{R}^n$. نعتبر متتالية معمّقة (Ω_j) من المجموعات المفتوحات اتحادها Ω. نقول عن متتالية (f_j) من $D(\mathbb{R}^n)$ إنها متتالية باترة على Ω إذا تحقق الشرطان التاليان لكل j :

1) $0\le f_j\le1$،

2) $f_j=1$ في جوار لـ $\overline{\Omega}_j$.

هذه المتتالية موجودة دوما، أي أن كل جزء مفتوح من $\mathbb{R}^n$ يقبل متتالية باترة.

البرهان

المتتالية المعمّقة (Ω_j) موجودة حسب المبرهنة 4.2 وملاحظتها. نطبّق بعد ذلك النتيجة 6.2 على $\overline{\Omega}_j$. واصل البرهان. □

توطئة 8.2

ليكن K متراصا محتوى في اتحاد عدد منته N من المفتوحات $(\Omega_i)_{i=1,\dots,N}$. عندئذ توجد متراصات $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ بحيث:

$K_i\subset\Omega_i$ لكل $i=1,\dots,N$ و $K\subset\bigcup_{i=1}^{N}K_i$.

البرهان

نعلم أنه توجد متتالية معمّقة من المفتوحات $(M_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ تغطي Ω_i وذلك لكل عدد طبيعي $i=1,\dots,N$. ومن ثمّ : $K\subset\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\bigcup_{\substack{i=1,\dots,N\\ j\in\mathbb{N}}}M_{ij}$. ولما

كان K متراصا فإنه يوجد عدد منته من المجموعات $(M_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ تغطي المتراص K. نرمز لهذه التغطية بـ $(A_l)_{l=1,\ldots,p}$. لاحظ أن كل $\overline{A_l}$ متراص لأنه يساوي عنصر M_{i_0,j_0} من $(M_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$. ومن ثمّ $\overline{A_l}=\overline{M_{i_0,j_0}}\subset\Omega_{i_0}$ مع العلم أن $\overline{M_{i_0,j_0}}$ متراص لأن $(M_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ متتالية معمقة من المفتوحات.

المطلوب إنهاء البرهان (لاحظ تداخل عناصر المتتالية $(M_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ لكل $i=1,\ldots,N$ ، وأن المجموعة الخالية متراصة في $\mathbb{R}^n$).□

مبرهنة **9.2** (تجزئة الوحدة Partition of unity)

ليكن K متراصا محتوى في اتحاد عدد منتهٍ من المفتوحات $(\Omega_j)_{j=1,\ldots,N}$.

عندئذ توجد دوال $(f_j)_{j=1,\ldots,N}$ تحقق الشروط الثلاثة:

1) $f_j\in D(\Omega_j)$ ،
2) $0\le f_j\le 1$ ،
3) $\sum_{j=1}^{N} f_j=1$ بجوار K.

البرهان

يعتمد هذا البرهان على التوطئة السابقة وتوطئة أورشون (المبرهنة 5.2). يأتي من التوطئة السابقة وجود متراصات $(K_j)_{j=1,\ldots,N}$ تحقق :

$$\begin{cases} K_j\subset\Omega_j, & \forall j=1,\ldots,N, \\ K\subset\bigcup_{j=1}^{N}K_j. \end{cases}$$

ومن ثمّ نستنتج بالاستناد إلى توطئة أورشون (مطبقّة على $\Omega_j\supset K_j$) وجود دوالّ $(\psi_j)_{j=1,\ldots,N}$ بحيث :

$$\psi_j\in D(\Omega_j) \text{ و } 0\le\psi_j\le 1 \text{ و } \psi_j=1 \text{ على جوار } K'_j \text{ لـ } K_j$$

وذلك مهما كان j المحصور بين 1 و N. وبالتالي يوجد جوار V (مثلا $V=\bigcup_{j=1}^{N} K'_j$) بحيث :

$$\forall x\in V,\quad \sum_{j=1}^{N}\psi_j(x)>0.$$

ومن جهة أخرى، توجد دالة θ تنتمي إلى $D(V)$ بحيث تكون مساوية لـ 1 في جوار W لـ K (حسب توطئة أورشون). نضع الآن :

$$\psi_0(x)=1-\theta(x)=\begin{cases}1, & x\in \complement_{\mathbb{R}^n}V,\\ 0, & x\in W,\end{cases}$$

$$\forall j=1,\dots,N,\qquad \varphi_j=\frac{\psi_j}{\sum_{j=0}^{N}\psi_j}\in D(\Omega_j).$$

بعد ذلك يسهل التأكد من قيام الخاصيتين :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \sum_{j=0}^{N}\psi_j(x)>0,$$

$$\forall x\in W,\quad \sum_{j=1}^{N}\varphi_j\quad \frac{\sum_{j=1}^{N}\psi_j}{\sum_{j=0}^{N}\psi_j}=1.$$

ومنه المطلوب. □

هناك نص آخر لتجزئة الوحدة أعمّ من السابق، وهو :

تعريف- مبرهنة 10.2 (تجزئة الوحدة المعمّمة)

❖ لتكن $(U_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحة لمفتوح $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ (حيث I مجموعة كيفية، يمكنها أن تكون غير قابلة للعد).

نسمي تجزئة للوحدة من الصنف C^∞ متعلقة بالتغطية $(U_i)_{i\in I}$ لـ Ω كل جماعة دوال $(g_i)_{i\in I}$ تتمتع بالخواص التالية :

1) $g_i \in D(U_i)$ لكل دليل i ينتمي إلى I ،

2) $0 \le g_i \le 1$ لكل دليل i ينتمي إلى I ،

3) لكل متراص $K \subset \Omega$ فكل الدوال $(g_i)_{i\in I}$ منعدمة على K باستثناء عدد منته منها ،

4) $\forall x \in \Omega, \quad \sum_{i\in I} g_i(x) = 1$

❖ ليكن مفتوح $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و $(U_i)_{i\in I}$ تغطية مفتوحة له. توجد دوما تجزئة للوحدة من الصنف C^∞ متعلقة بالتغطية $(U_i)_{i\in I}$ لـ Ω.

ملاحظة

إن الشرط $\sum_{i\in I} g_i(x) = 1$ الوارد ضمن الخواص المطلوبة في تعريف تجزئة الوحدة لا يحتاج إلى إثبات وجود المجموع، ذلك أن الخاصية الثالثة تنص على أن القيم $(g_i(x))_{i\in I}$ منعدمة باستثناء عدد منته منها. ومن ثمّ فالمجموع المعتبر في $\sum_{i\in I} g_i(x) = 1$ مجموع عدد منته من الحدود لكل $x\in \Omega$.

3- فضاءات فريشيه[4]

نستعرض هنا بإيجاز تعريف فضاءات فريشيه لأنها عِماد طبولوجيا فضاء الدوال الاختبارية $D(\Omega)$.

[4] موريس فريشيه (1878- 1973).رياضي فرنسي.

تعريف 1.3

ليكن E فضاء خطيا (يقال أيضا شعاعيا أو متجهيا) على مجموعة الأعداد الحقيقية أو المركبة، التي نرمز إليها بـ IK.

1) نقول عن تطبيق p من E نحو $\mathbb{R}$ إنه نصف نظيم (semi-norm) إذا حقق الشرطين:

$$\forall \lambda \in IK, \quad \forall x \in E, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$$
$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

2) نسمي فضاء محدّبا محليًا كل فضاء خطي طبولوجي عنصره 0 يتمتع بأساس جوارات محدّبة.

3) نسمي فضاء محدبّا محليا وقابلا لمسافة كل فضاء خطي مزوّد بمتتالية أنصاف نظيمات (p_j) متزايدة (أي $(\forall x \in E, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad p_j \leq p_{j+1}$ بحيث:

$$(\forall j \in \mathbb{N}, \quad p_j(f) = 0) \quad \Leftrightarrow \quad f = 0.$$

ملاحظة

لاحظ أنه يمكن الحصول على متتالية أنصاف نظيمات متزايدة (q_j) انطلاقا من أية متتالية أنصاف نظيمات (p_j) إذ يكفي أن نضع $q_j = \sum_{k \leq j} p_k$.

سؤال: ما الفائدة من ذكر وجود متتالية أنصاف نظيمات في التعريف الثالث؟

الجواب: هذه المتتالية هي التي نعرّف بها طبولوجيا على الفضاء الخطي المعتبر فيصبح فضاء خطيا طبولوجيا.

نتيجة 2.3

لتكن (α_j) متتالية أعداد حقيقية موجبة بحيث تكون السلسلة $\sum_{j\in\mathbb{N}}\alpha_j$ متقاربة. وليكن E فضاء محدّبا محليا وقابلا لمسافة. نرمز بـ(p_j) لأنصاف النظيمات المزوّد بها هذا الفضاء. إن التطبيق $d:E\times E\to\mathbb{R}^+$ المعرّف بالعلاقة التالية مسافةٌ على E :

$$\forall (f,g)\in E^2,\qquad d(f,g)=\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j\min\big(1,p_j(f-g)\big).$$

البرهان

إن افتراض $d(f,g)=\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j\min\big(1,p_j(f-g)\big)=0$ يؤدي إلى :

$$\forall j\in\mathbb{N},\quad \min\big(1,p_j(f-g)\big)=0$$

لأن كل حدود السلسلة $\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_j\min\big(1,p_j(f-g)\big)$ موجبة. ومنه :

$$\forall j\in\mathbb{N},\quad p_j(f-g)=0.$$

وهذا يعني، حسب الفرع الثالث، من التعريف السابق أن $f=g$.

من السهل التأكد من بقية خواص النظيم. □

ملاحظة

يمكن إثبات أن استبدال متتالية الأعداد الحقيقية (α_j) بمتتالية موجبة أخرى يعطي مسافة مكافئة للمسافة d.

والأمر كذلك عندما نستبدل متتالية أنصاف النظيمات (p_j) بمتتالية أخرى (q_j) مكافئة لها، أي بحيث

$$\begin{cases}\forall j\in\mathbb{N},\ \exists k\in\mathbb{N},\ \exists C>0: p_j\le C\,q_k,\\ \forall j\in\mathbb{N},\ \exists k\in\mathbb{N},\ \exists C'>0: q_j\le C'.p_k.\end{cases}$$

تعريف **3.3** (فضاء فريشيه)

نقول عن فضاء محدّب محليا وقابل لمسافة ومزوّد بالطبولوجيا المعرفة بالمسافة d (الواردة في النتيجة 2.3) إنه فضاء فريشيه إن كان فضاءً تاما.

تمرين

أثبت تكافؤ القضيتين الآتيتين :

أ) (x_n) متتالية متقاربة في فضاء فريشيه نحو x.

ب) $\forall j \in \mathbb{N}, \quad \lim_n p_j(x_n - x) = 0$.

حيث ترمز (p_j) لأنصاف النظيمات المزود بها فضاء فريشيه.

إرشاد : لإثبات أن العلاقة :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \lim_n p_j(x_n - x) = 0$$

تستلزم : $\lim_n \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \min\left(1, p_j(x_n - x)\right) = 0$ نكتب أن السلسلة $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j$ متقاربة : ليكن $\varepsilon > 0$. يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث $\sum_{j \geq n_0} \alpha_j < \varepsilon$. ومنه :

$$\sum_{j \geq n_0} \alpha_j \min\left(1, p_j(x_n - x)\right) < \varepsilon .$$

ولدينا حسب الفرض :

$$\forall j = 1, \ldots, n_0 - 1, \ \exists n_j \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_j, \quad p_j(x_n - x) < \varepsilon .$$

أتمم الحل.

مثال

الفضاء $D_K(\Omega)$ المزوّد بأنصاف النظيمات (p_j) المعرفة بـ:

$$p_j(f) = \sup_{x \in K, \ |\alpha| \leq j} \left| D^\alpha f(x) \right|$$

فضاء فريشيه، (لاحظ أن p_j يمثل هنا نظيما وليس فقط نصف نظيم!).

دعنا نتأكد من أن $D_K(\Omega)$ فضاء تام. إن كانت المتتالية $(f_i)_i$ كوشية في $D_K(\Omega)$ فهذا يعني أن :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad p_j(f_i - f_k) \xrightarrow{i,k\to+\infty} 0$$

أي :

$$\sup_{x\in K,\ |\alpha|\le j} \left| D^\alpha f_i(x) - D^\alpha f_k(x) \right| \xrightarrow{i,k\to+\infty} 0.$$

وبالتالي فإن المتتالية $(D^\alpha f_i)_i$ متقاربة بانتظام على K، وذلك لكل دليل متعدد α. ومن ثمّ نستنتج أن $D^\alpha f_i \xrightarrow{i\to+\infty} D^\alpha f$ لما $f_i \xrightarrow{i\to+\infty} f$.

وهكذا وجدنا عنصرا f ينتمي إلى $D_K(\Omega)$ يحقق :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad p_j(f_i - f) \xrightarrow{i\to+\infty} 0,$$

وهي العلاقة التي تثبت تقارب المتتالية $(f_i)_i$ حسب التمرين السابق. وبذلك يكون الفضاء $D_K(\Omega)$ تاما.

ننهي هذا الفصل بمبرهنة تدعى "مبدأ المحدودية المنتظمة" Uniform boundedness principle أو مبرهنة بناخ- شتاينهاوس، وهي من أشهر مبرهنات التحليل الدالي، ولها استعمالاتها في نظرية التوزيعات.

مبرهنة **4.3** (بناخ - شتاينهاوس [5]Banach & [6]Steinhaus)

ليكن E فضاءً فريشيا و F فضاء محدّبا محليا وقابلا لمسافة. ولتكن $L_n : E\to F$ متتالية تطبيقات خطية مستمرة. نفرض، لكل $f\in E$ ، أن المتتالية $L_n(f)$ متقاربة في F نحو عنصر نرمز له بـ $L(f)$. عندئذ:

---

[5] ستيفان بناخ (1892- 1945).رياضي بولندي.

[6] هيغو شتاينهاوس (1887- 1972). رياضي بولندي.

1) يكون التطبيق $L:E\to F$ الذي يلحق $f\in E$ بـ $L(f)$ خطيا ومستمرا.

2) لدينا الاستلزام : $f_n \xrightarrow{E} f \Leftarrow L_n(f_n)\xrightarrow{F} L(f)$.

4- تمارين

تمرين 1

تأكد من أن $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$\psi(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & :t>0 \\ 0 & :t\le 0 \end{cases}$$

من الصنف $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

استنتج أن $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ المعرف بـ :

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & ,|x|<1, \\ 0 & ,|x|\ge 1 \end{cases}$$

ينتمي إلى $D(\mathbb{R}^n)$ حيث يرمز $|.|$ للنظيم الأقليدي؛ وكذلك عناصر المتتالية $\varphi_j(x)=j\,\dfrac{\varphi(jx)}{\varphi(0)}$. ارسم بيانات بعض مثل هذه الدوال عندما يكون $n=1$.

تمرين 2

أثبت أن الدالة $\varphi_{a,r}$ المعرفة بـ :

$$\varphi_{a,r}(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{r^2-|x-a|^2}} & ,|x-a|<r, \\ 0 & :|x-a|\ge r, \end{cases}$$

حيث $r>0$ و $a\in\mathbb{R}^n$، تنتمي إلى $D(\mathbb{R}^n)$ مع تعيين حاملها.

تمرين 3

لتكن الدالة φ المعرفة في التمرين 1.

1) هـل المتتاليتـان (f_n) و (g_n) المواليتان متقاربتـان في $D(\mathbb{R})$:

$f_n(x) = \frac{\varphi(x)}{n}$ و $g_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{n})$ ؟

2) نعتبر المتتالية (φ_n) المعرفة بـ : $\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx)$ حيث $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة في $D(\mathbb{R})$.

3) أدرس التقـارب في $D(\mathbb{R})$ للمتتاليـة $(\psi_n)_{k\in\mathbb{N}^*}$ المعرفـة بـ :

$\psi_n(x) = (n \quad 1)^{\mp k}\varphi(nx)$.

تمرين 4

ليكن K متراصا من $\mathbb{R}^n$ ، و $\varepsilon > 0$. أثبت وجود دالة $\varphi_\varepsilon \in D(\mathbb{R}^n)$ تحقق:

أ) $\varphi_\varepsilon \geq 0$ ،

ب) $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ لكل $x \in K$ ،

جـ) $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset \bigcup_{x\in K} B(0,\varepsilon)$.

تمرين 5

لتكن $(K_j)_{j=1,\dots,p}$ متراصات في $\mathbb{R}^n$ ، ولتكن $(f_j)_{j=1,\dots,p}$ دوالًّ من الصنف $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. أثبت وجود $f \in D(\mathbb{R}^n)$ بحيث : $f(x) = f_j(x)$ بجوار كل K_j.

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖