الفصل الخامس

التوزيع الطبيعي

(٥ ـ ١) مقدمة

رأينـــا في الفقــرة (٣ ـ ٥) أن المتغيرات العشـــوائية المستمـرة تولـد فضاء عينـة مستمــرا، بمعنى أن نقاطــه تكـون متراصـة بعضهـا إلى بعض كنقـاط محور موجـه. وبالتــالي فإنها، بالإضـافة إلى كـونها لا نهائية في عـددهـا، غير قابلـة للعد. وكأمثلـة تقليدية على متغيرات عشـوائية مستمرة، نذكر أطـوال البشر وأوزانهم، وأخطاء القياس في تجربة مخبريـة، وعمـر مصباح كهربائي، إلخ. كما رأينا في تلك الفقـرة أنه للحصول على نمـوذج احتمالي لمتغير عشوائي مستمـر، X، نبدأ بـاختيار منحن مستمـر يمثل ما سمينـاه بـدالة الكثـافـة الاحتمـالية، وأن مثل هـذه الدالة، ولنرمز لها بـ $f(x)$، يجب أن تحقق شرطين:

١ ـ $f(x) \geq 0$، مهما يكن x،

٢ ـ المساحة تحت $f(x)$ تساوي الواحد تماما.

وعنـدئـذ يكـون احتمال أي حـادثة عددية مثل $a < X < b$، حيث a، b عـددان محددان، هـو المســاحة تحت منحنى الكثـافـة فـوق الفترة (a, b) مـــن محور السينات. وكنتيجة لذلك نجد أن احتمال أن يفترض المتغير X قيمة معينة، a مثلا، أي $P(X = a)$، هو المساحـة تحت المنحنى فوق النقطة a، وهي صفر. وهكـذا فإن مثل

هذا الحل لمشكلة إيجاد نموذج احتمالي لفضاء عينة مستمر يحتم علينا القول إن احتمال أن يكون لمتغير عشوائي مستمر قيمة معينة هو احتمال يساوي الصفر. وهذا تعبير واقعي عن استحالة توصل الإنسان إلى أجهزة قياس دقيقة بصورة مطلقة.

وبينما تتخذ منحنيات الكثافة أشكالا مختلفة نلاحظ أن عددا كبيرا من المتغيرات العشوائية التي نواجهها في حياتنا العامة لها منحني كثافة، أو منحني تكرار، له تقريبا شكل الجرس، أو، كما نعبر عن ذلك إحصائيا، له بصورة تقريبية شكل منحني التكرار الطبيعي، أو شكل التوزيع الطبيعي.

وبصورة عامة لنفرض أننا لاحظنا، في مجتمع القياسات لظاهرة معينة، ميلا واضحا إلى التناظر والاعتدال، بمعنى أن القياسات المتطرفة التي تمثل فرط زيادة أو فرط نقصان، هي قياسات نادرة. ويزداد تكرار ظهور القياس في ذلك المجتمع كلما اقتربت قيمة القياس من المتوسط. فالقيمة المتوسطة في المجتمع والقيم المجاورة لها هي القياسات الأكثر تواترا، بينما تكون القياسات البعيدة عن المتوسط زيادة أو نقصانا نادرة الظهور. وبعبارة أخرى، لنفرض أن الوسطية والاعتدال هي السائدة في مجتمع القياسات لظاهرة معينة، فعندئذ نقول إن النموذج الاحتمالي المناسب لهذه الظاهرة هو نموذج «التوزيع الطبيعي». وقد برزت تسمية «الطبيعي» في القرن الثامن عشر في سياق نظرية «أخطاء القياسات» عندما وجد أنه في تجربة يسير كل شيء فيها سيرا طبيعيا (normally)، ستكون أخطاء القياسات خاضعة للتوزيع الاحتمالي الذي يتخذ منحنى الكثافة فيه شكل الجرس (أو شكل منحنى جاوس). وتجدر هنا ملاحظة أنه عندما تتوافر كفاءة المجرب ومقدرته على إجراء القياسات بصورة سليمة، وتتوافر إلى جانب ذلك سلامة الأجهزة المستخدمة، وسلامة الظروف التي تتم تحتها التجربة، فإن الأخطاء ستتذبذب بصورة قريبة من التناظر بين أخطاء بالزيادة وأخطاء بالنقصان، وستكون الأخطاء الفاحشة بالزيادة أو بالنقصان نادرة، بينما تتمركز معظم نتائج القياسات حول القيمة الحقيقية، التي تشكل المتوسط، وقريبا منها. وينبغي ألا تملي التسمية أي شكل من أشكال خصوصية هذا التوزيع لعلوم الطبيعة، فهو يلعب، في

الواقع، دورا أعم من ذلك بكثير وأوسع، وهو بين التوزيعات الاحتمالية، بمختلف أنواعها ومسمياتها، علم بارز، إليه تستند، بصورة رئيسة، العديد من الطرق الإحصائية، وبدونه تضيق الحلبة الواسعة لتطبيقات الإحصاء في الحياة المعاصرة. وسنجد فيما يسمى «نظرية النهاية المركزية» أن مجموع عدد كبير من المركَبات العشوائية، هو دائما متغير عشوائي ينزع، تحت شروط عامة جدا، إلى الخضوع للتوزيع الطبيعي، وذلك بصرف النظر عن طبائع تلك المركبات العشوائية التي تمثل كل منها متغيرا عشوائيا له توزيعه الاحتمالي الخاص. وقد رأينا في الفصل الثاني أن المعايير الإحصائية المهمة يعبر عنها بدلالة مجموع متغيرات، فمثلا، $n\bar{x} = \sum_{1}^{n} x_i$ و $(n-1)\,S^2 = \sum_{1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$، كما رأينا في الفصل الرابع أن عدد النجاحات، X، في تجربة ثنائية ما هو إلا مجموع عينة حجمها n مأخوذة من مجتمع بيرنوللي. وهذا يشير بوضوح إلى الأهمية الخاصة لهذا التوزيع في مباحث الإحصاء.

(٥ ـ ٢) دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي

تعرف دالة الكثافة الإحتمالية للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad \begin{array}{l} -\infty < x + \infty \\ -\infty < \mu < +\infty \\ 0 < \sigma < +\infty \end{array}$$

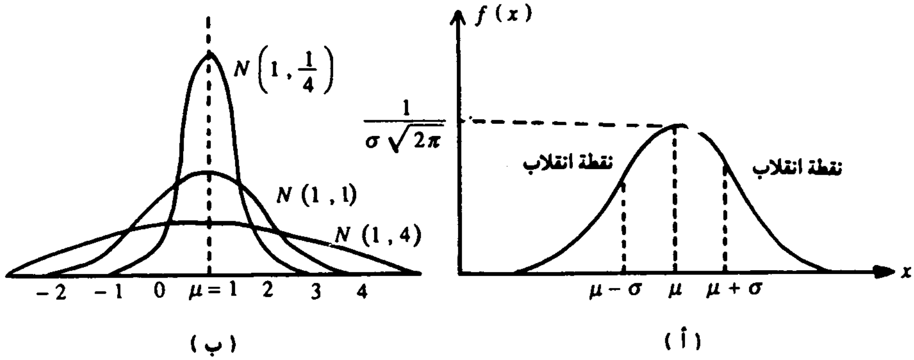
وهي دالة منحن له شكل الجرس (انظر الشكل ٥ ـ ١ (أ)) حيث:

π عدد ثابت يساوي تقريبا 3.1416 ،

e عدد ثابت يساوي تقريبا 2.7183 ،

μ عدد ثابت يمكن أن يكون أي عدد حقيقي،

σ عدد ثابت يمكن أن يكون أي عدد حقيقي موجب.



شكل (٥ ـ ١)

والدالة أعلاه لا تحدد منحنيا واحدا بعينه و إنها تحدد الشكل العام لعائلة من المنحنيات. إذ كلما حددنا لـ μ قيمة ولـ σ قيمة نحصل على منحن محدد تمامـا. ولذلك يسمى كل من الثابتين μ ، σ مَعلمة.

ويمكن البرهان على أن المعلمة μ تمثل متوسط التوزيع الاحتمالي، أي $E(X) = \mu$، وأن المعلمة σ تمثل الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي، أي $V(X) = \sigma^2$. وللمنحنيات الطبيعية المختلفـة متوسطات مختلفـة، وانحرافـات معيارية مختلفـة، إلا أن المتوسط μ والانحراف المعياري σ لمنحن طبيعي معين محددان تمام التحديـد وثابتان. وهكـذا نجد أن تحديد قيمة لـ μ وقيمة لـ σ يحدد تماما منحنيـا، وعلى العكس كل منحن من عـائلة المنحنيات الطبيعية (منحنيات جاوس أو المنحنيـات على شكل جرس) تحدد تماما قيمة لـ μ وقيمة لـ σ. وهذا يلقي بعض الضـوء على سبب تسمية μ و σ مَعلمات. ويُبرهَن في الحساب التكاملي أن المساحة تحت المنحنى

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

يساوي $\sigma\sqrt{2\pi}$ تماما. وبالتالي فإن المساحة تحت المنحنى الطبيعي $f(x)$، كما عرفناه أعلاه تساوي الواحد تماما.

ونلاحظ أن المنحني متنـاظر حول المستقيم $X = \mu$ الموازي للمحور الرأسي. لأن الدالة f تأخذ القيمة نفسها في نقطتين متناظرتين بالنسبة إلى النقطة $x = \mu$، فلو حسبنا، مثلا، $f(\mu + a)$ و $f(\mu - a)$ لوجدنا:

$$f(\mu + a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu + a - \mu}{\sigma}\right]^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2}}$$

$$f(\mu - a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\mu - a - \mu}{\sigma}\right]^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma^2}}$$

فالنقطة $x = \mu$ على المحور الأفقي هي النقطة التي يتمركز عندها التوزيع $(E(X) = \mu)$ ، وينتشر على جانبيها بصورة متناظرة.

ومن دراستك السابقة للدالة الرأسية e^{-t} ، مثلا، تذكر أنه إذا كان الأس t موجبا دوما، كما هو الحال في الدالة $f(x)$ هنا حيث $t = \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ ، فإن أكبر قيمة لـ e^{-t} تساوي الواحد، وهي القيمة الموافقة لـ $t = 0$ ، (في مثالنا $x = \mu$) . وتتناقص قيمة e^{-t} مع تزايد t وتنتهي إلى الصفر (أي تتقارب إلى المحور الأفقي) عندما تزداد t إلى اللانهاية.

وهكذا فإن دالة الكثافة $f(x)$ تبلغ نهايتها العظمى عند $x = \mu$ وتكون قيمتها عندئذ :

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

وللمنحنى $f(x)$ نقطتا إنقلاب عند $x = \mu + \sigma$ و $x = \mu - \sigma$ (أنظر الشكل ٥ ـ ١ (أ)) . لنتصور في الشكل ٥ ـ ١(أ) أن المنحنى عبارة عن سلك رفيع وشديد المرونة. فإذا ضغطنا على القمة سينتشر السلك انتشارا أوسع على جانبي μ ، أي يأخذ شكلا أكثر انبساطا باعتبار أن المساحة تحت السلك يجب أن تبقى دائما ثابتة ومساوية للواحد. وإذا رفعنا القمة إلى أعلى فسيقل انبساط المنحنى ويتضاءل انتشاره على جانبي μ . ونرى في الشكل ٥ ـ ١(ب) تمثيلا يوضح الفكرة. وقد استخدم الرمز $N(\mu, \sigma^2)$ للدلالة على توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2، وهكذا يعني $N\left(1, \frac{1}{4}\right)$ توزيعا طبيعيا متوسطه $\mu = 1$ وتباينه $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ ، وللمنحنيات الثلاثة في الشكل (٥ ـ ١) ب المتوسط نفسه وهو 1 . وعندما ارتفعت قمة المنحنى $N(1, 1)$ تضاءل انتشاره على جانبي المتوسط $\mu = 1$ وبالتالي قل σ^2 من 1 إلى $\frac{1}{4}$ ، وعلى العكس عندما انخفضت قمة المنحنى، اتسع

انتشاره على جانبي μ وازداد تباينه من 1 إلى 4 . ولو عدنا إلى قيمة $f(x)$ العظمى وهي $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ لتبين لنا أن القيم الصغيرة لـ σ تعني قمة مرتفعة، أي توزيعا أقل انتشارا حول متوسطه، وأن القيم الكبيرة لـ σ تعني قمة منخفضة، أي توزيعا أكثر انتشارا على جانبي المتوسط . ولما كان التباين، كما نعلم من الفصلين الثاني والرابع، مقياسا لمدى انتشار التوزيع على جانبي المتوسط، فإن هذه الملاحظة توضح أن σ^2 يمثل تباين التوزيع الأمر الذي ذكرناه منذ قليل كنتيجة يمكن إثباتها رياضيا باستخدام الحساب التكاملي وبطرق تعتبر فوق مستوى هذا الكتاب .

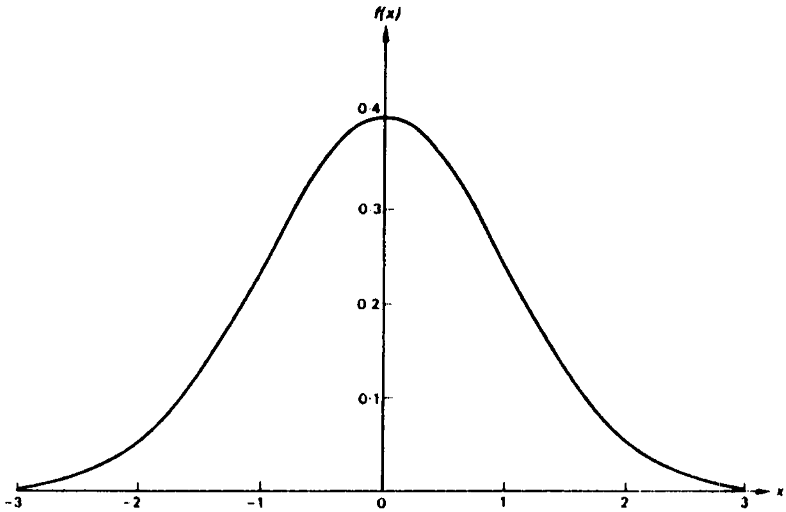
ومن بين أسرة المنحنيات الطبيعية :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad \begin{array}{l} -\infty < x + \infty \\ -\infty < \mu < +\infty \\ 0 < \sigma < +\infty \end{array}$$

سنختار منحنيا خاصا هو ذلك المنحنى الذي يكون متوسطه $\mu = 0$ وانحرافه المعياري $\sigma = 1$. وتمييزا لهذا المنحنى، الذي سيلعب دورا هاما في تطبيقات التوزيع الطبيعي سنطلق عليه اسم المنحنى الطبيعي المعياري . وإذا استخدمنا الحرف Z للمتغير الطبيعي المعياري فستصبح معادلة المنحنى أعلاه بعد وضع $\mu = 0$ ، $\sigma = 1$ على الشكل

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad ; \quad -\infty < Z < +\infty \, .$$

ونجد في الشكل (٥ ـ ٢) الرسم البياني لهذا المنحنى . وتجدر ملاحظة أنه متناظر بالنسبة إلى المحور الرأسي . وما دامت المساحة تحت المنحنى بكامله من $Z = -\infty$ إلى $Z = +\infty$ هي الواحد تماما فالمساحة على اليمين من $Z = 0$ تساوي المساحة على اليسار من $Z = 0$ وكل منهما تساوي النصف .



شكل (٥ ـ ٢) المنحنى الطبيعي المعياري

تمارين (٥ ـ ١)

١) اكتب دالة الكثافة للتوزيع الطبيعي مفترضا القيم التالية للمتوسط والتباين:

أ ـ المتوسط يساوي 3 ، والتباين يساوي 4 .

ب ـ المتوسط يساوي 0 ، والتباين يساوي 5 .

جـ ـ المتوسط يساوي 2−، والتباين يساوي 1 .

د ـ المتوسط يساوي 6− ، والتباين يساوي 10 .

حدد في كل حالة أين تقع قمة المنحنى وحاول أن تخطط رسما تقريبيا له .

٢) متغير عشوائي X دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{18}x^2} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty .$$

ما متوسطه و انحرافه المعياري؟

٣) متغير عشوائي X دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = c\, e^{-\frac{(x-4)^2}{6}} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty .$$

ما قيمة c ؟

(٥ ـ ٣) المساحات تحت منحنى الكثافة الطبيعي

ذكرنا أن معادلة منحنى الكثافة الطبيعي، كما وردت في مستهل الفقرة السابقة، لا تمثل منحنيا واحدا، بل عائلة من المنحنيات لا حصر ولا عد لأعضائها. ووضع جدول للمساحات خاص بكل منها أمر غير ممكن. وسنجد الآن أنه يمكن وضع جدول واحد كاف لحساب المساحات تحت أي منحنى كثافة طبيعي. وأسهل طريقة لتحقيق ذلك هي أن نحسب المساحات الواقعة ضمن عدد محدد من الانحرافات المعيارية على جانبي المتوسط. وبما أن المنحنى متناظر يمكن التبسيط بإقامة جدول للمساحات تحت المنحنى بين μ والنقاط x الواقعة على اليمين من μ. وإذا فرضنا نقطة x أكبر من μ فإن المسافة بين x و μ هي $x - \mu$، وإذاعبرنا عنها بدلالة الانحراف المعياري σ، ولنفرض أنها تساوي Z مرة الانحراف المعياري σ، فيمكننا أن نكتب $x - \mu = Z\sigma$، وإذا قسنا المسافات على محور الفواصل بوحدة قياس تساوي σ (وعندها يكون $\sigma = 1$ حكما) فإن قيمة المسافة $x - \mu$ مقيسة بالوحدة الجديدة تصبح Z أي تساوي $\frac{x-\mu}{\sigma}$. وهكذا نكتب المتغير الجديد Z بدلالة المتغير X على الشكل:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

ونلاحظ أنه يوافق كل قيمة لـX قيمة واحدة لـZ والعكس بالعكس. وأن Z ليس إلا القيمة المعيارية لـ X. وفي الواقع، لو حسبنا $E(Z)$ و $V(Z)$ لوجدنا:

$$E(Z) = E\left[\frac{1}{\sigma}\,(X-\mu)\right] = \frac{1}{\sigma}\; E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\,[\,E(X) - \mu\,] = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{1}{\sigma} \times - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\quad V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 .$$

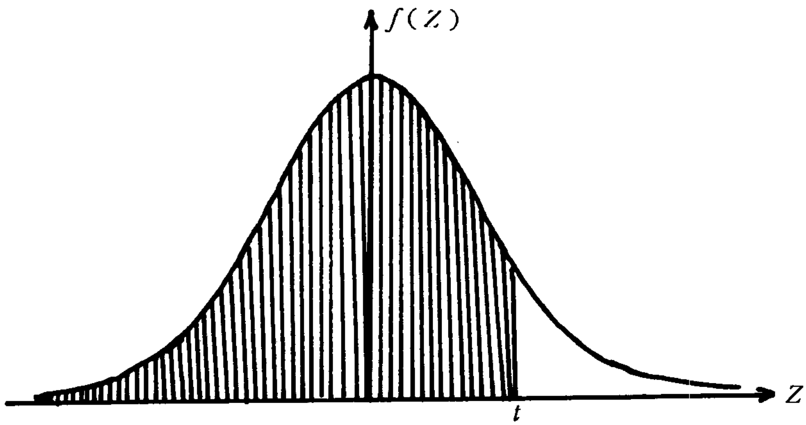
أي أن للمتغير Z متوسطا يساوي الصفر وانحرافا معياريا يساوي الواحد، ويمكن البرهان على أن التوزيع الاحتمالي لـZ هو التوزيع الطبيعي. وبذلك يكون

منحنى الكثـافة الموافق لـ Z عضـوا في أسرة المنحنيـات الطبيعيـة ، وبـالـذات ذلك العضو المقابل لـ $\mu = 0$ و $\sigma = 1$. وهو بالضبط منحنى الكثافـة المذكور في ختام الفقرة (٥ ـ ٢) :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad ; \quad -\infty < Z < +\infty .$$

وربما أصبح واضحا الآن سبب تسمية هذا المنحنى بالمنحنى الطبيعي المعياري .

ويقـدم جدول التـوزيع الطبيعي في الملحق ، المسـاحات تحت هـذا المنحنى إلى اليسار من نقطة معينة $Z = t$. ونقصد المساحة المظللة في الشكل (٥ ـ ٣) .



شكل (٥ ـ ٣) دالة التوزيع المتجمع للمتغير الطبيعي المعياري Z

وبالعودة إلى جدول التـوزيع الطبيعي المشار إليه في الملحق ، نلاحظ أن قيم Z في الجدول تبدأ مـن الصفر بفاصـل قدره 0.01 بين كل قيمـة والقيمة التي تليهـا . وهكذا تكون كل قيمـة لـ Z معطاة بـرقمين عشريين . ويتضمن العمـود الأول قيما لـ Z بفاصل يساوي 0.1 من قيمة إلى القيمة التي تليها . وتشكل هذه القيم عناوين لسطور الجدول ، إذ نبدأ بالسطر 0 يليه السطر 0.1 ، فالسطر 0.2 ، وهكذا حتى نصل إلى السطر 3.4 . أما المنزلـة العشرية الثانيـة من قيمة Z فهي معطـاة في السطـر الأفقي الأول من الجدول ، وتشكل عناوين لأعمـدة الجدول ، بدءا من العمود الثاني حتى العمـود الأخير ، وهكذا

نجد العمود 0.00 يليه العمود 0.01 ، يليه العمود 0.02 ، وهكذا حتى نصل إلى العمود 0.09 وهو العمود الأخير. وكل عدد في صلب الجدول، وهو ملتقى سطر مع عمود، يمثل المساحة تحت منحنى الكثافة المعياري و إلى اليسار من قيمة Z التي يحددها عنوان السطر حتى الرقم العشري الأول ويستكمل عنوان العمود رقمها العشري الثاني. وهكذا فإن العدد 0.8212 الواقع في ملتقى السطر 0.9 مع العمود 0.02 ، يمثل المساحة تحت منحنى الكثافة الواقعة إلى اليسار من $Z = 0.92$ ، أي المساحة تحت المنحنى وفوق الفترة الممتدة بين $-\infty$ والنقطة 0.92 من المحور Z . وعلى العكس، إذا أردنا المساحة الواقعة إلى اليسار من $Z = 1.96$ ، مثلا، ندخل الجدول وفق السطر 1.9 والعمود 0.06 فنجد عند ملتقاهما العدد 0.9750 وهو المساحة المطلوبة. وإذا كانت قيمة Z معطاة بأكثر من رقمين عشريين فإننا نحصرها بين قيمتين مذكورتين في الجدول ثم نقوم بعملية تناسب طردي، (عملية استيفاء).

والأسئلة الوجيهة التي تطرح نفسها هنا هي:

١ ــ إذ يقتصر الجدول على القيم الموجبة لــ Z ، ما العمل لو كانت القيمة المعطاة لـ Z سالبة؟

٢ ـ ما العمل لو كان المطلوب هو المساحة إلى اليمين من قيمة لـ Z سالبة أو موجبة؟

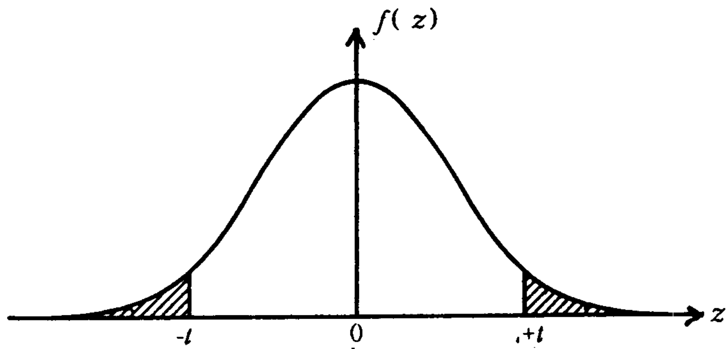
٣ ـ ما العمل لو كان المطلوب هو المساحة بين أي قيمتين لـ Z ؟

وللإجابة عن هذه التساؤلات نعود إلى التعريف في (٣ ـ ٦ ـ ٢) لدالة التوزيع المتجمع، ونكتب: المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري الواقعة إلى اليسار من النقطة $t = F(t) = P(Z \leq t)$

وتتمتع هذه الدالة $F(t)$ بالخاصة المهمة التالية:

$$F(-t) = 1 - F(t)$$

وهي نتيجة مباشرة لتناظر المنحنى الطبيعي المعياري بالنسبة إلى المحور الرأسي. إذ لو نظرنا إلى الشكل (٥ ـ ٤) لوجدنا أن $F(-t)$ يساوي المنطقة I المظللة على اليسار من



شكل (٥ ـ ٤)

$Z = -t$. وأن $F(t)$ هي مجموع المنطقـة المظللة في أقصى اليسار والمنطقـة غير المظللة في الوسط . و $1 - F(t)$ يساوي بوضـوح المنطقة المظللة في أقصى اليمين ، وبما أن المنطقتين المظللتين متساويتان بحكم التناظر فإن $F(-t) = 1 - F(t)$. ولإيجاد $F(-t)$ يكفي إذن حساب $F(t)$ من الجدول الموصوف أعلاه ، حيث t موجبة ، ثم نطرح القيمة الناتجة من 1 وهذا يجيب عن السؤال الأول .

ومن خاصة الحادثتين المتتامتين ، $P(A) = 1 - p(\bar{A})$ ، نجد مباشرة أن :

$$P(Z > t) = 1 - P(Z \leq t) = 1 - F(t)$$

وهذا يجيب عن السؤال الثاني .

وللإجابة عن السؤال الثالث ، لنفرض أن المطلوب هو حساب

$$P(a < Z \leq b)$$

فمن الواضح أنـه يمكن التعبير عن الحادثة $(Z \leq b)$ كإتحاد حـادثتين منفصلتين على الشكل

$$(Z \leq b) = (Z \leq a) \cup (a < Z \leq b)$$

ومنه :

$$P(Z \leq b) = P(Z \leq a) + P(a \leq Z \leq b)$$

أي :

$$F(b) = F(a) + P(a < Z \leq b)$$

أو

$$P(a < Z \leq b) = F(b) - F(a)$$

وبما أن الاحتمال الموافق لنقطة في التوزيعات المستمرة يساوي الصفر فيمكن كتابة

$$P(a \leq Z < b) = P(a < Z \leq b) = P(a \leq Z \leq b) = P(a < Z < b)$$

مثال (٥ ـ ١)

احسب $P(Z \leq 1.35)$ ، $P(Z > 0.5)$ ، $P(Z < -1.79)$ ، $P(Z \geq -0.68)$ ، $P(1 < Z < 3.27)$ ، $P(-0.1 < Z < 2.5)$ ، $P(-1.85 < Z < -0.16)$.

الحل

$$P(Z \leq 1.35) = F(1.35) = 0.09115$$

(ندخل الجدول وفق السطر 1.3 والعمود (0.05) .

$$P(Z > 0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

(ندخل الجدول وفق السطر 0.5 والعمود 0.00) .

$$P(Z < -1.79) = F(-1.79) = 1 - F(1.79) = 1 - 0.9633 = 0.0367$$

(ندخل الجدول وفق السطر 1.7 والعمود 0.09) .

$$P(Z \geq -0.68) = 1 - P(Z < -0.68) = 1 - F(-0.68)$$
$$= 1 - [1 - F(0.68)] = F(0.68) = 0.7517$$

(ندخل الجدول وفق السطر 0.6 والعمود 0.08) .

$$P(1 < Z < 3.27) = F(3.27) - F(1)$$
$$= 0.9995 - 0.8413 = 0.1582$$

$$P(-0.1 < Z < 2.5) = F(2.5) - F(-0.1)$$
$$= F(2.5) - [1 - F(0.1)]$$
$$= F(2.5) + F(0.1) - 1$$
$$= 0.9938 + 0.5398 - 1 = 1.5336 - 1 = 0.5336$$

$$P(-1.85 < Z < -0.16) = F(-0.16) - F(-1.85)$$
$$= [1 - F(0.16)] + [1 - F(1.85)]$$
$$= 2 - F(0.16) - F(1.85)$$
$$= 2 - 0.5636 - 0.9678 = 2 - 1.5314 = 0.4686$$

لاحظ أننا نعود إلى الجدول عندما يكون المطلوب $F(t)$ حيث t عدد موجب .

مثال (٥ ـ ٢)

احسب c بحيث يكون

$P(Z \le c) = 0.8264$ ، $P(Z < c) = 0.2981$ ، $P(Z > c) = 0.9292$ ،

$P(-c < Z < c) = 0.9500$ $P(-c < Z < c) = 0.90$.

الحل

$$P(Z \le c) = F(c) = 0.8264$$

والعدد c هو قيمة Z في جدول التوزيع الطبيعي المعياري التي يقع إلى اليسار منها مساحة تساوي 0.8264 . ونبحث في صلب الجدول عن هذه القيمة لنجدها بالذات وعندئذ نحدد قيمة Z المطلوبة من السطر والعمود الموافقين ، أو نحصرها بين عددين في الجدول ثم نستنتج قيمة Z المطلوبة بعملية تناسب طردي (استيفاء) . وفي حالتنا هنا نجد أن 0.8264 واقع في السطر 0.9 والعمود 0.04 وتكون القيمة c المطلوبة 0.94 .

$$P(Z < c) = 0.2981 \Leftrightarrow F(c) = 0.2981$$

وإذا كانت قيمة $F(c)$ أصغر من 0.5 فمن الواضح أن c ستكون سالبة . ولكن الجدول لا يحوي القيم السالبة لـZ . وفي مثل هذه الحالة نأخذ :

$$F(-c) = 1 - F(c) = 1 - 0.2981 = 0.7019$$

ونبحث في صلب الجدول عن 0.7019 فنجده في السطر 0.5 والعمود 0.03 وتكون $-c = 0.53$ أو $c = -0.53$.

$$P(Z > c) = 0.9292 \Leftrightarrow 1 - F(c) = 0.9292$$

أي

$$F(-c) = 0.9292 \Leftrightarrow -c = 1.47 \Leftrightarrow c = -1.47$$

$$P(-c < Z < c) = 0.95 \Leftrightarrow F(c) - F(-c) = 0.95$$

ومنه

$$F(c) - [1 - F(c)] = 0.95$$
$$2F(c) = 1.95,\ F(c) = 0.975,\ c = 1.96.$$
$$P(-c < Z < c) = 0.90 \Leftrightarrow 2F(c) = 1.90$$

أي

$$F(c) = 0.95$$

ولدينا من الجدول

0.9495 تقابل $Z = 1.64$

0.9505 تقابل $Z = 1.65$

ومنه

تزايد المساحة	تزايد Z
0.001	0.01
0.0005	?

التزايد المطلوب في Z = $\dfrac{0.0005 \times 0.01}{0.001} = 0.005$

وتكون قيمة Z المطلوبة هي

$$1.64 + 0.005 = 1.645$$

وسنصطلح على كتابة Z_α لتعني قيمة المتغير الطبيعي المعياري التي يقع إلى اليمين منها مساحة تساوي α. أي أن $F(Z_\alpha) = 1 - \alpha$. وبهذا المعنى يكون :

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}) = F(Z_{\alpha/2}) - F(-Z_{\alpha/2})$$

$$= 2F(Z_{\alpha/2}) - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$$

وعلى سبيل المثال :

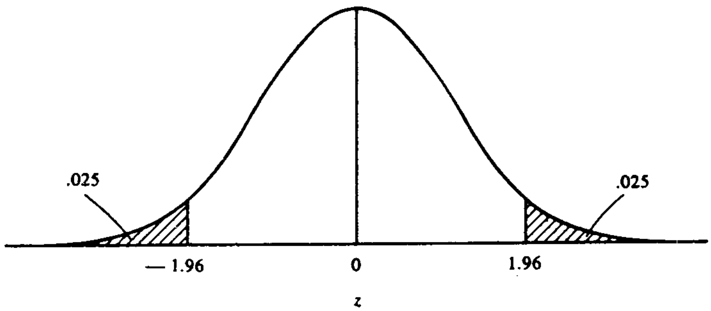
$Z_{.025}$ هي قيمة Z التي تحصر إلى اليمين منها مساحة تساوي 0.025. ويكون

$$P(-Z_{0.025} < Z < Z_{0.025}) = 0.95$$

وقد رأينا في المثال السابق أن

$$Z_{0.025} = 1.96$$

(أنظر الشكل ٥ ـ ٥).



شكل (٥ ـ ٥)

لقد تعلمنا حتى الآن كيف نحسب احتمالات حوادث معبرا عنها بدلالة المتغير المعياري Z ، وذلك بالاستفادة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. ولكن كيف نستفيد من هذا الجدول نفسه لحساب احتمالات حوادث معبر عنها بدلالة متغير طبيعي غير معياري، X ، مثلا؟ بالطبع لا يمكننا حساب مثل هذه الاحتمالات إلا إذا حددنا منحنى الكثافة للمتغير X تحديدا تاما. أي علمنا متوسطه μ وانحرافه المعياري σ. وعند معرفة قيمة μ وقيمة σ يصبح الأمر في غاية السهولة، إذ نقوم بمعايرة X ، أي نكتب:

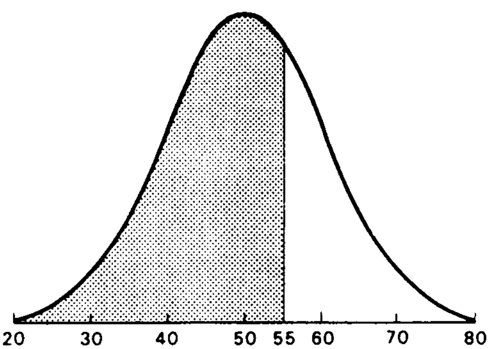
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ونحول العبارة الاحتمالية بدلالة X إلى عبارة احتمالية مكافئة بدلالة Z ، ثم نعود إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، الذي تدرَّبنا لتونا على كيفية استخدامه، لحساب المطلوب وفيما يلي توضيح عملي للفكرة.

يقدم اختصاصي في علم النفس نصائح حول أفضل المهن أو الوظائف المناسبة لفتى. ولهذه الغاية يقدم للفتى عددا من الاختبارات. أحدها، مثلا، اختبار يهدف إلى قياس مهارات التحدث أو المهارات الشفهية. لنفرض أن درجة الفتى في هذا

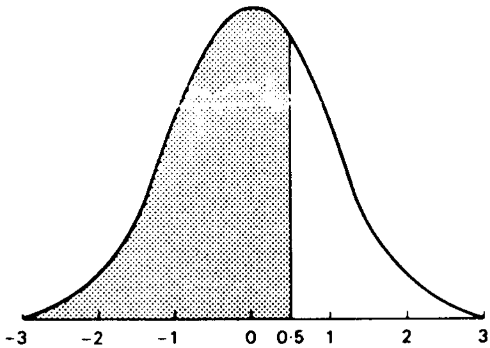
الاختبار كانت 55 . فهذا الرقم لذاته ليس له أي مدلول بالنسبة إلينا. إلا أن الاختصاصي النفسي يعلم توزيع درجات هذا الاختبار بالنسبة للرجال في المجتمع بصورة عامة. فمثل هذه الاختبارات قد استخدمت في الماضي على نطاق واسع وقدمت لعينة تمثيلية كبيرة من الرجال والنساء. وبالنسبة إلى الرجال تتوزع درجات هذا الاختبار، بصورة تقريبية، وفق التوزيع $N(50, 10^2)$. (في الواقع يتعمد مصممو هذه الاختبارات وضعها بحيث تتوزع الدرجات الناتجة عنها طبيعيا، على وجه التقريب). وتوزيع هذه الدرجات مع درجة الفتى مبينة في الشكل (٥ ـ ٦). وما يهم الاختصاصي النفسي حقا هو كيف يمكن مقارنة هذا الرجل مع بقية الرجال في المجتمع. ويمكن تلخيص هذه المقارنة بسهولة من خلال النسبة المئوية للرجال الذين يتوقع حصولهم على درجات في هذا الاختبار أسوأ من 55 وللحصول على هذه النسبة نحسب المساحة تحت منحنى الكثافة للتوزيع $N(50, 100)$ الواقعة إلى اليسار من النقطة 55 وبمعايرة الدرجة 55 تأخذ القيمة :

$$Z = \frac{55 - 50}{10} = 0.5$$



شكل (٥ ـ ٦) : التوزيع $N(50, 100)$ لدرجات اختبار المهارة الشفهية، والمساحة المظللة هي احتمال الحصول على درجة أقل من 55 .

والمساحة المطلوبة هي إذا المساحة الواقعة إلى اليسار من النقطة 0.5 تحت منحنى الكثافة الطبيعي المعياري والمبينة في الشكل (٥ ـ ٧). وهي تساوي من الجدول ١ في



شكل (٥ ـ ٧) درجة الاختبار بعد معايرتها.

الملحق 0.6915 . وهكذا نستنتج أن 69% من المجتمع يتوقع حصولهم على درجة أسوأ، و 31% من المجتمع يتوقع حصولهم على درجة أفضل وهذا يحدد بوضوح موقعه النسبي من الآخرين.

ولو فرضنا أن درجة هذا الشاب كانت 40 في اختبار لقياس المهارات الحسابية. وهذا الاختبار مصمم بدوره بحيث يكون توزيع الدرجات الناتجة عنه $N(50, 100)$. وبمعايرة هذه الدرجة نجد أنها تصبح في سلم القياس المعياري:

$$Z = \frac{40 - 50}{10} = -1$$

وبالعودة إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن

$$F(Z) = F(-1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

وهكذا نتوقع أن ينال 16% فقط من المجتمع درجات أسوأ، وأن ينال 84% درجات أفضل.

وبصورة عامة، تسمى معايرة متغير طبيعي X توزيعه $N(\mu, \sigma^2)$ ، أي التحويل من X إلى المتغير الطبيعي Z وفق العلاقة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

تعبيرا عن قيمة المتغير X وفق سلم القياس المعياري. وهو سلم قياس يعتبر μ مبدأ للقياسات، ويعتبر الانحراف المعياري σ وحدة قياس. وعندما لا نهتم بقيمة X لذاتها بل بموقع X النسبي من المتوسط μ، فإن القيمة Z توضح لنا بالضبط هذا الموقع النسبي ومنطوق العبارة الجبرية $X - \mu = Z\sigma$، هو أن موقع X يحيد عن النقطة μ بمقدار Z مرة الانحراف المعياري.

مثال (٥ ـ ٣)

إذا كانت درجات حاصل الذكاء تتوزع طبيعيا بمتوسط يساوي 100 وانحراف معياري يساوي 15، فما نسبة الناس ذوي درجة ذكاء:

ا ـ فوق 125، تحت 80، بين 70 و 130؟

الحل

لنرمز لدرجة حاصل الذكاء بـ X، فلدينا بالفرض أن توزيع X هو $N(100, 152)$. والمطلوب

أ ـ

$$P(X > 125) = 1 - F\left(\frac{125 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{125 - 100}{15}\right)$$
$$= 1 - F(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

والنسبة المطلوبة هي 4.75%.

ب ـ

$$P(X < 80) = F\left(\frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{80 - 100}{15}\right)$$
$$= F(-1.33) = 1 - F(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

والنسبة المطلوبة هي 9.18%.

جـ ـ

$$P(70 < X < 130) = F\left(\frac{130 - \mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{70 - \mu}{\sigma}\right)$$
$$= F\left(\frac{130 - 100}{15}\right) - F\left(\frac{70 - 100}{15}\right) = F(2) - F(-2)$$
$$= 2F(2) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 1.9544 - 1 = 0.9544$$

والنسبة المطلوبة هي 95.44%.

وكثيرا ما نستخدم علاقة المعايرة، $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ، بطريقة عكسية. فنحن نعرف أو نحدد سلفا قيمة Z ، أي القياس المطلوب على السلم المعياري، ونريد القياس المقابل له على السلم الأصلي (قبل المعايرة). فلنفرض، مثلا، أن لدى مدير شركة وظيفة شاغرة، وهو لا يقبل مرشحين لهذه الوظيفة إلا إذا كانوا في مهاراتهم الحسابية من الربع الأعلى في المجتمع. ولترجمة رغبته هذه بدلالة الدرجة الدنيا التي ينبغي أن ينالها المرشح في اختبار المهارات الحسابية، نقوم بما يلي، مفترضين أن درجات الاختبار تتبع التوزيع $N(50, 100)$. نحدد من عبارة «المرشح من الربع الأعلى في المجتمع في مهاراته الحسابية» قيمة Z ، وذلك لأن هذه العبارة مكافئة للمعادلة $F(Z) = 0.75$ ، ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد، باستخدام الاستيفاء، أن

$$Z = 0.67 + \left(\frac{14}{31}\right)(0.01) = 0.6745$$

وبالتالي

$$X = \mu + Z\sigma = 50 + 10\,(0.6745) = 56.745$$

وبالتدوير إلى أقرب عدد صحيح، نستنتج أن الدرجة المطلوبة هي 57 وهكذا لا يقبل طلب متقدم لهذه الوظيفة إلا إذا كانت درجته في اختبار المهارات الحسابية 57 أو أكثر.

مثال (٥ ـ ٤)

بالإشارة إلى المثال (٥ ـ ٣) وتوزيع درجات حاصل الذكاء. لنفرض أن الحكومة تقدم تعليما خاصا للخمسة في المائة الأدنى في حاصل ذكائهم. وتقدم تعليما جامعيا للسبعة في المائة الأعلى في حاصل ذكائهم. أوجد القيم المعيارية Z المقابلة لهذه النسب ثم استنتج الحدود الفاصلة في درجات حاصل الذكاء لأولئك الذين يتطلبون تعليما خاصا، ولأولئك الذين يدخلون الجامعات.

الحل

لنفرض أن القيمة المعيارية المقابلة لنسبة جماعة التعليم الخاص هي a ، والمقابلة لنسبة جماعة التعليم الجامعي هي b فعندئذ :

$P(Z \leq a) = 0.05,\ F(a) = 0.05,\ F(-a) = 0.95,\ -a = 1.645,\ a = -1.645.$

$P(Z > b) = 0.07;\ 1 - F(b) = 0.07,\ F(b) = 0.93$

$b = 1.47 + 8(0.01)/14 = 1.47 + 0.0057 = 1.4757$

ويكون الحد الأعلى لدرجة حاصل الذكـاء لأولئك الذين يتطلبون تعليما خاصا ، مقربا إلى أقرب عدد صحيح هو:

$$X = \mu + a\sigma = 100 + 15(-1.645) = 75$$

والحد الأدنى لدرجة حاصل الذكاء لأولئك الذين يدخلون الجامعات، مقربا إلى أقرب عدد صحيح، هو:

$$X = \mu + b\sigma = 100 + 15(1.4757) = 122$$

مثال (٥ ـ ٥)

إذا كـــان X متغيرا طبيعيـــا متوسطـــه $\mu = 56$ وانحرافـه المعيـاري $\sigma = 3$ ، فاحسب $P(X \leq 60.5)$ ،$P(X > 65)$ ،$P(53 < X < 59)$.

الحل

$$P(X \leq 60.5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{60.5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{60.5-56}{3}\right)$$
$$= F\left(\frac{60.5-56}{3}\right) = F(1.5) = 0.9332\ .$$

و

$$P(X > 65) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{65-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{65-56}{3}\right)$$
$$= 1 - F\left(\frac{65-56}{3}\right) = 1 - F(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

و

$$P(53 < X < 59) = F\left(\frac{59-56}{3}\right) - F\left(\frac{53-56}{3}\right)$$
$$= F(1) - F(-1) = 2F(1) - 1$$
$$= 2(0.8413) - 1 = 1.6826 - 1 = 0.6826\ .$$

مثال (٥ ـ ٦)

ليكن X متغيرا عشوائيـا يتوزع وفق التـوزيع الطبيعي بمتوسـط يساوي 2 وتباين يساوي 16 . والمطلوب حساب احتمالات الحوادث العددية التالية :

$P(X < 3)$ ،$P(X > 1)$ ،$P(-1 < X < 35)$.

الحل

$$P(X<3)=F\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=F\left(\frac{3-2}{4}\right)$$
$$=F(0.25)=0.5987\,.$$
$$P(X>1)=1-F\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)=1-F\left(\frac{1-2}{4}\right)$$
$$=1-F(-0.25)=F(0.25)=0.5987$$
$$P(-1<X<3.5)=F\left(\frac{3.5-\mu}{\sigma}\right)-F\left(\frac{-1-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=F\left(\frac{3.5-2}{4}\right)-F\left(\frac{-1-2}{4}\right)$$
$$=F(0.375)-F(-0.75)$$
$$=F(0.375)-[1-F(0.75)]$$
$$=F(0.375)+F(0.75)-1$$

ولحساب $F(0.375)$ نأخذ منتصف الطريق بين $F(0.37)$ و $F(0.38)$ ، أي منتصف الطريق بين 0.6443 و 0.648 وهو إلى أربعة أرقام عشرية 0.6462 . وهكذا يكون

$$P(-1<X<3.5)=0.6462+0.7734-1=0.4196$$

مثال (٥ ـ ٧)

في عملية تعبئة آلية لعبوات السكر، من المفترض أن تضع الآلة في كل عبوة 2 كغ من السكر. وبالطبع يتغير ما تضعه الآلة من عبوة إلى أخرى بشكل عشوائي. إذا افترضنا أن ما تضعه الآلة بالفعل هو متغير $N(\mu,\sigma^2)$.

أ ـ تشير السجلات السابقة للإنتاج إلى أن $\sigma = 0.2$ ، وإلى أن احتمال أن تتضمن عبوة أقل من 2 كغ هو 0.01 . أوجد قيمة μ التي تعمل الآلة وفقا لها. (أي القيمة المتوسطة لما تضعه هذه الآلة في العبوة الواحدة على المدى الطويل.)

ب ـ إذا قمنا بعملية تحسين لعمل الآلة تتوخى تخفيض σ (أي انتاج عبوات أكثر تجانسا من حيث الوزن) مع بقاء μ كما هو . كم يجب أن تكون قيمة σ بحيث نطمئن إلى أن احتمال عبوة بأقل مما ينبغي من السكر هو 0.001 ؟

الحل

أ ـ لنرمز بـ X لوزن السكر الفعلي في العبوة . والمطلوب هو حساب μ علما أن

$$P(X < 2) = 0.01$$

و $\sigma = 0.02$. ولكن

$$P(X < 2) = F\left(\frac{2-\mu}{0.02}\right) = 0.01$$

أو

$$F\left(\frac{\mu-2}{0.02}\right) = 0.99$$

ومن الجدول نجد أن :

$$\frac{\mu-2}{0.02} = 2.33$$

أو

$$\mu = 0.02\,(2.33) + 2 = 2.047$$

ب ـ إذا اشتغلت الآلة وفقا لـ $\mu = 2.047$ فعندئذ يكون X متغيرا $N(2.047, \sigma^2)$.

ونريد قيمة σ بحيث يكون :

$$P(X < 2) = 0.001$$

ولكن الآن :

$$P(X < 2) = F\left(\frac{2-2.047}{\sigma}\right)$$

إذا نريد σ بحيث يكون

$$F\left(\frac{-0.047}{\sigma}\right) = 0.001$$

أو

$$F\left(\frac{0.047}{\sigma}\right) = 0.999$$

ومن الجدول نجد :

$$\frac{0.047}{\sigma} = 3.09$$

أي أن

$$\sigma = \frac{0.047}{3.09} = 0.015$$

مثال (٥ ـ ٨)

مفترضا أن طول الذكر البالغ X، مقاسا بالسنتمتر، هو متغير $N(175, 56.25)$. كيف يحـدد مهنـدس ارتفاع أبواب الغرف في فيلا يقوم بتصميمها بحيث لا يضطر أكثر من 2% من الرجال إلى طأطأة رؤوسهم عند الدخول أو الخروج؟

الحل

لنفرض أن ارتفاع الباب a سم فيكون المطلوب تحديد قيمة a بحيث يكون :

$$P(X > a) \leq 0.02$$

ولكن

$$P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F\left(\frac{a - 175}{7.5}\right) \leq 0.02$$

وبالتالي يكون

$$F\left(\frac{a - 175}{7.5}\right) \geq 0.98$$

ومن الجدول نجد أن :

$$\frac{a - 175}{7.5} \geq 2.057$$

وهكذا يكون :

$$a \geq 175 + 2.057\,(7.5) = 190.43$$

أي أن ارتفاع الباب ينبغي أن يكون 190.5 سم على الأقل .

تمارين (٥ ـ ٢)

١) بـاستخـدام جدول التـوزيع الطبيعي أحسب الاحتمالات التـاليـة، حيث Z المتغير الطبيعي المعياري $N(0, 1)$.

$P(Z \leq 1.2)$، $P(-0.9 < Z < 0)$، $P(0.3 < Z < 1.56)$، $P(|Z| < 0.2)$، $P(-1.3 < Z < 1.74)$، $P(Z > -0.75)$، $P(Z \leq -0.32)$.

٢) أوجد المساحة تحت منحنى كثافة التوزيع الطبيبي المعياري الواقعة :

أ ـ إلى اليسار من 1 ،

ب ـ إلى اليسار من 2 ،

جـ ـ بين 1 و 2 ،

د ـ إلى اليمين من 0.5 – ،

هـ ـ إلى اليسار من 1– ،

و ـ بين 1– و 1+ .

٣) أوجد العدد c بحيث يكون :

أ ـ $P(Z < c) = 0.8643$ ،

ب ـ $P(Z < c) = 0.2266$ ،

جـ ـ $P(Z \geq -c) = 0.6554$ ،

د ـ $P(Z < c) = 0.05$

هـ ـ $P(-c < Z < c) = 0.90$ ،

و ـ $P(-c < Z < c) = 0.95$ ،

ز ـ $P(-c < Z < c) = 0.99$.

٤) إذا رمزنا بـ Z_α لقيمة المتغير الطبيعي المعياري Z التي تحصر إلى اليمين منها مساحة تساوي α ، فاحسب $Z_{0.005}$ ، $Z_{0.025}$، $Z_{0.05}$، $Z_{0.02}$، $Z_{0.01}$، $Z_{0.10}$.

٥) متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي $N(16, 7)$ ، احسب $P(|X - 16| > 3)$.

٦) متغير عشوائي X يتبع التوزيع $N(50, 25)$ ، احسب :
$P(X > 62)$، $P(|X - 50| < 8)$، $P(X = 60)$، $P(|X - 40| > 5)$.

٧) تتوزع معدلات مجتمع كبير من طلبة الكليات تقريبا وفق التوزيع $N(2.4, 0.64)$. ما نسبة الطلاب الذين تتجاوز معدلاتهم 3.0 ؟ (المعدل التام هو 4) .

٨) بالإشارة إلى المسألة السابقـة إذا شطبت أسماء الطلاب الذين تقل معدلاتهم عن 1.9 فكم ستبلغ نسبة الأسماء المشطوبة؟

٩) متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي. إذا كان $E(X^2) = 68$ و $P(X < 10) = 0.8413$ فاحسب μ و σ^2.

١٠) يتوزع عمر نوع من الغسالات مقدرا بالسنوات وفق التوزيع الطبيعي $N(3.1, 1.2)$. إذا كانت الغسالات مكفولة لمدة سنة، فما هي نسبة الغسالات المباعة التي سيضطر المصنع إلى استبدالها بغسالة جديدة؟

١١) وجدنا أن الفترة الزمنية الضرورية لإتمام اختبار ذكاء مخصص لطلبة الكليات تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 دقيقة وانحراف معياري يساوي 12 دقيقة. كيف يجب تحديد زمن الاختبار إذا أردنا إتاحة وقت كاف لإتمام الاختبار لـ 90% من الطلاب المتقدمين؟

١٢) نظمت آلة لتقديم شراب مرطب بحيث تضع، في المتوسط، μ أونزة في الكأس الواحدة. إذا كان ما تضعه بالفعل في الكأس الواحدة متغيرا طبيعيا بانحراف معياري $\sigma = 0.3$ أونزة. فما القيمة التي ينبغي تحديدها لـ μ بحيث تفيض الكؤوس ذات السعة 8 أونزة بنسبة 1% فقط؟

١٣) وزن بيضة الدجاج بالغرام يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(60, 225)$. وتصنّف البيضة «صغيرة» إذا قل وزنها عن 45 غراما، إذا رغبت أن يصنف باقي البيض بالتساوي بين عادي وكبير، إقترح الوزن الذي يفصل بين هذين الصنفين مقربا إلى أقرب غرام.

١٤) تتوزع أوزان قوالب الصابون في مصنع طبيعيا. وفي الأسبوع الماضي كان وزن $6\frac{2}{3}\%$ من القوالب المصنوعة أقل من 90.5 غراما بينما زاد وزن 4% من القوالب على 100.25 غراما. والمطلوب:

أ ـ أوجد متوسط وتباين توزيع وزن القالب، والنسبة المئوية للقوالب التي يتوقع أن تزن أقل من 88 غراما.

ب ـ إذا خفضنا تباين الوزن بنسبة الثلث فما هي النسبة المئوية من إنتاج الأسبوع القادم التي تتوقع أن يقل وزنها عن 88 غراما . مفترضا أن المتوسط لم يتغير؟

١٥) يقدر أن 1400 راكبا ممن يبدلون قطارهم في محطة معينة يهدفون بصورة منتظمة إلى اللحاق بقطار الخامسة والنصف مساء ، وأن 50 راكبا يصلون قبل الساعة الخامسة وعشرين دقيقة مساء، موعد فتح البوابة الخاصة بهذا القطار، وأن 70 راكبا يفوتهم القطار عند التزامه التام بموعد المغادرة . مفترضا أن زمن وصول الراكب إلى المحطة متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي، أحسب متوسط هذا التوزيع وتباينه . ومن ثم قدر:

ا ـ موعد فتح البوابة بحيث لا يزيد عدد المنتظرين أمامها على عشرين راكبا .

ب ـ عدد المستبدلين الذين سيفوتهم القطار في يوم يغادر فيه (على غير المتوقع) قبل الوقت المحدد بدقيقتين .

١٦) يغادر رجل منزله كل صباح الساعة السابعة كي يصل إلى عمله في الساعة الثامنة . وقد وجد خلال فترة طويلة أنه يتأخر عن عمله بنسبة مرة في كل أربعين مرة . وبدأ يغادر المنزل في الساعة السادسة وخمس وخمسين دقيقة فوجد خلال فترة مماثلة أنه يتأخر مرة في كل مائة مرة . بفرض أن الزمن الذي تستغرقه الرحلة يتوزع طبيعيا كيف ينبغي أن يحدد موعد المغادرة بحيث لا يتأخر أكثر من مرة كل ما ئتي مرة؟

١٧) في كتاب معين يمكن اعتبار عدد الكلمات في الصفحة الواحدة متغيرا طبيعيا ، على وجه التقريب، بمتوسط 800 كلمة وانحراف معياري 50 كلمة . إذا اخترت عشوائيا ثلاث صفحات فما احتمال ألا تتضمن أي منها ما بين 830 إلى 845 كلمة؟

١٨) في بلد معين، متوسط طول الذكر البالغ 170 سم بانحراف معياري 10 سم، ومتوسط طول الأنثى البالغة 160 سم بانحراف معياري 8 سم ، وبالنسبة لكل

مـن الجنسين يعتبر التوزيـع الطبيعي نموذجا منـاسبا لوصف تغير الطول. بفرض أن الطول ليس من العـوامل التي تؤخـذ في الاعتبـار عنـد اختيار الزوجة أو الزوج. أحسب احتمـال أن زوجـا وزوجته اخترناهما عشـوائيا سيكـون كل منهما أطول من 164 سم.

١٩) في بستـان للبرتقال متـوسط وزن الثمـرة 19.3 أونزة بـانحراف معيـاري 2.3 أونزة. مفترضا أن وزن الثمرة متغير يتبع التوزيع الطبيعي، أحسب:

ا ـ نسبة الثمار التي يقل وزنها عن 18 أونزة.

ب ـ نسبة الثمار التي لا يقل وزنها عن 20 أونزة.

جـ ـ نسبة الثمار التي يتراوح وزنها بين 18.5 و 20.5 أونزة.

د ـ الوزن الذي سيقل عنه 15% من الثمار.

هـ ـ الوزن الذي سيزيد عليه 25% من الثمار.

٢٠) ملاحظة عدد كبير من السيارات عند نقطة محددة من طريق عام بينت لنا أن السرع تتوزع طبيعيا. إذا علمت أن سرعة 90% من السيارات تقل عن 124.3 كم/ سا، وأن سرعة 5% فقط من السيـــارات تقل عن 101 كم/ س. حـدد السرعة المتـوسطة μ والانحراف المعياري σ.

٢١) من المفترض أن يكون قطـر كريات معدنيـة تنتجها شركة صناعيـة مساويا 2 مم. ولكن الكريات ستكون مقبولـة إذا تراوحت أقطارها بين 1.90 مم و 2.10 مم. وقد لوحظ في دفعـة إنتاج كبيرة أن 2.5% منها مرفوض لأنـه أكبر مما يمكن التساهل فيه وأن 2.5% منها مرفوض لأنه أصغر مما يمكن التساهل فيه. حدد، بصورة تقريبية، ما ستصبحه نسبتا الرفض إذا غيرنا حدود التساهل إلى 1.95 مم و 2.15 مم.

٢٢) تتوزع درجات امتحان وفق التوزيع الطبيعي $N(50, 100)$، ونرغب في إعادة النظر في سلم الدرجات بحيث تكـون درجة النجاح 40 ونسبة الناجحين 70%، ودرجة

التفوق 70 ونسبة المتفوقين 20% . أحسب الدرجة الجديدة لمتقدم للامتحان كانت درجته الأصلية 60 .

٢٣) يمكن تصنيف البيض إلى عادي إذا كان الوزن أقل من 46 غراما ، ومتوسط إذا كان الوزن بين 46 و 56 غراما ، وكبير إذا كان الوزن أكبر من 56 غراما . لنفرض أن البيض الذي تضعه سلالة معينة من الدجاج يتوزع ، من حيث وزن البيضة ، وفق التوزيع الطبيعي $N(50, 25)$. أحسب نسبة كل صنف من الأصناف الثلاثة . وإذا كانت أسعار البيع للبيضة الواحدة من الأصناف الثلاثة هي ، على الترتيب ، 4 هللة ، 5 هللة،6 هللة . وكانت كلفة الإنتاج 4 هللة لكل بيضة ، فما الربح المتوقع للبيضة الواحدة؟

وبالنسبة لسلالة أخرى من الدجاج فإنها تضع بيضا يتبع ، من حيث الوزن ، التوزيع الطبيعي $N(52, 25)$. إلا أنه يستهلك أكثر من الطعام مما يرفع كلفة البيضة إلى 4.5 هللة . ما الربح المتوقع للبيضة الواحدة في هذه السلالة؟

٢٤) لنفرض أن مقاس الحذاء لذكر بالغ هو عدد صحيح k يرتبط بطول القدم، y ، مقاسا بالبوصة بالعبارة التالية : «حذاء مقاسه k سيكون مناسبا لقدم طولها يتراوح بين $0.5k + 5.5$ و $0.5k + 6$ ؛ حيث $k = 5, 6, \ldots, 14$ » . ويمكن اعتبار y ، طول قدم ذكر بالغ ، متغيرا يتبع التوزيع الطبيعي $N(10.2, 1.21)$.

ا ـ ما النسبة من مجتمع الذكور البالغين التي تتطلب حذاء مقاسه أكبر من 14؟

ب ـ ما المقاس الأكثر تواترا وما نسبة أولئك الذين يطلبون هذا المقاس؟

٢٥) حدود التساهل في طول قطعة مصنعة هي 10.00 ± 0.05 مم . وتُفحص كل قطعة يجري إنتاجها لرؤية ما إذا كانت تحقق هذه الحدود أم لا . والتوزيع الاحتمالي لطول القطعة هو التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 10.01 مم وانحراف معياري 0.04 مم . وكلفة إنتاج القطعة 10 ريالات . وجميع القطع التي لا يقع طولها ضمن حدود

التساهل تهمل وتعتبر خسارة للشركة المصنعة. ولتخفيض حجم الخسارة يمكن:

ا ـ إزالة الانحياز في عمل الآلة وجعل متوسط التوزيع $\mu = 10$ وذلك بكلفة إضافية قدرها 4 ريالات لكل قطعة.

ب ـ تخفيض الانحراف المعياري إلى 0.03 وذلك بكلفة إضافية قدرها ريالان لكل قطعة.

جـ ـ القيام بالإجرائين (ا) و (ب) معا لقاء كلفة إضافية 6 ريالات للقطعة الواحدة. إذا كنت تعمل في قسم الإحصاء في هذه الشركة فبأي الإجراءات الثلاثة المذكورة تنصح؟

٢٦) تقضي مواصفات الإنتاج لعبوات نوع معين من الحلويات أن وزن كل عبوة يجب أن يقع بين 140 غ و 160 غ. إذا كان وزن العبوة يتوزع طبيعيا بتباين يساوي 4غ^{٢}. كيف تحدد متوسط التوزيع الذي ينبغي أن تهدف إليه الشركة المنتجة ولماذا؟

٢٧) يستخدم أحد المصانع 2000 مصباح كهربائي للإضاءة. وعمر المصباح الكهربائي مقاسا بالساعات يتبع التوزيع الطبيعي $N(550, 2500)$. وحرصا على وجود عدد قليل من المصابيح المحترقة خلال أوقات الإنتاج يستبدل المصنع المصابيح جميعها كل فترة وبصورة دورية. كيف ينبغي تحديد طول فترة الاستبدال لكي لا يوجد في المصنع في أي وقت أكثر من 20 مصباحا محروقا؟

ومع نوع أفضل من المصابيح حيث يتوزع عمر المصباح وفق التوزيع الطبيعي $N(600, 1600)$ تتغير فترة الاستبدال إلى 500 ساعة، بين أن عدد المصابيح المحترقة في المصنع في أي وقت سينخفض عندئذ إلى حوالي 12 مصباحا.

٢٨) مبيعات بقال من سلعة معينة كل أسبوعين هي متغير يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 200 كغ وتباين يساوي 225 كغ. أوجد احتمال أن تكون مبيعاته من هذه السلعة خلال أسبوعين أقل من 185 كغ، وعندما يطلب مزيدا من هذه

السلعة تأخذ عملية تسليم البضاعة المطلوبة فترة أسبوعين. حدد إلى أقرب كيلوغرام المخزون الذي ينبغي تأمينه من هذه السلعة عند إعادة طلبها بحيث يكون البقال مطمئنا باحتمال 0.95 إلى أن هذه السلعة لن تنفذ قبل وصول الطلب.

(٥ ـ ٤) خواص التوزيع الطبيعي وبعض التطبيقات*

اصطلحنا على كتابة $N(\mu, \sigma^2)$ لتعني توزيعا طبيعيا بمتوسط يساوي μ وتباين يساوي σ^2. وهكذا نكتب، على سبيل المثال: X متغير $N(8, 4)$ لتعني أن X متغير يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 8 وتباين يساوي 4. وفيما يلي بعض خواص التوزيع الطبيعي:

١ ـ ليكن X وY متغيرين مستقلين $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $N(\mu_2, \sigma_2^2)$، على الترتيب. فعندئذ يكون مجموعهما $X + Y$، ولنرمز له بـU، متغيرا $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. أي متغيرا طبيعيا أيضا بمتوسط يساوي مجموع المتوسطين وتباين يساوي مجموع التباينين.

٢ ـ وبصورة أعم إذا كان X وY متغيرين مستقلين $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $N(\mu_2, \sigma_2^2)$، على الترتيب فإن المتغير $U = aX + bY + c$، حيث a، b، c أية أعداد حقيقية، هو بدوره متغير طبيعي متوسطه، حسب خواص التوقع:

$$E(U) = E(aX + bY + c) = a\,E(X) + b\,E(Y) + c$$
$$= a\,\mu_1 + b\,\mu_2 + c$$

وتباينه حسب خواص التباين:

$$V(U) = V(aX + bY + c) = V(aX + bY) = V(aX) + V(bY)$$
$$= a^2\,V(X) + b^2\,V(Y)$$
$$= a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$$

* للقراءة فقط.

ونكتب باختصار:

إذا كان X و Y متغيرين مستقلين $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ، $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ وكانت a ، b ، c أية أعداد ثابتة فإن $U = aX + bY + c$ يكون متغيرا

$$N\left(a\,\mu_1 + b\,\mu_2 + c,\ a^2\,\sigma_1^2 + b\,\sigma_2^2\right)$$

وعلى سبيل المثال إذا كان X متغيرا $N(15, 2)$ و Y متغيرا $N(-7, 4)$ فإن $U = 2X - 3Y + 1$ وهو متغير طبيعي متوسطه يساوي

$$2\,(15) - 3\,(-7) + 1 = 52$$

وتباينه

$$2^2\,(2) + (-3)^2\,(4) = 44$$

أي أن U متغير $N(52, 44)$.

٣ ـ ويمكن بوضوح تعميم الخاصة ٢ إلى أكثر من متغيرين ، لتصبح في الحالة الخاصة التالية ، وهي في حد ذاتها بالغة الأهمية ، كما يلي :

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات مستقلة وكل منها $N(\mu, \sigma^2)$ ، [أي إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من $N(\mu, \sigma^2)$] فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$ يكون متغيرا $N(n\mu,\ n\sigma^2)$ ،

ويكون

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$$ متغيرا $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

وتجدر ملاحظة أنه بالرغم من أن المتغير الطبيعي يتحول بين $-\infty$ و $+\infty$ ، إلا أنه يمكن استخدامه استخداما مقبولا تماما لوصف متغير، X ، موجب بطبيعته . وذلك

شريطة أن يكـون $P(X \leq 0)$ عـددا صغيرا جدا يمكن إهمالـه. أي أننا نتجـاوز المقولـة الدقيقة بأن $P(X \leq 0) = 0$ ، وتعني استحالة أن يكون X سالبا إلى مقولة ، تقريبية وعملية في آن واحد، تكتفـي بالتأكيـد على أن احتمال أن يكون X سالبا هـو احتمال قريب من الصفر. وبما أن

$$p(X \leq 0) = F\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{-\mu}{\sigma}\right)$$

وأن σ موجب، فإن $P(X \leq 0)$ سيكون مهملا إذا كان μ كبيرا بالمقارنة مع σ .

وعلى سبيل المثال، إذا كان $\mu = 4.5\sigma$ فإن $P(X \leq 0)$ يكون أقل من 0.000005 ، وهو صغير إلى الحد الذي يجعله غير ذي بال في التطبيقات العملية.

مثال (٥ ـ ٩)

إذا كانت X ، Y ، T متغيرات مستقلة $N(2, 1)$ ، $N(3, 2)$ ، $N(4, 3)$ ، على الترتيب، فاحسب:

أ ـ $P(1 < X < 3)$ ،

ب ـ $P(X \leq Y)$ ،

جـ ـ $P(3X - 2Y > 1)$ ،

د ـ $P(X + Y < 2T - 4)$ ،

الحـــــل

أ ـ
$$P(1 < X < 3) = F(3-2) - F(1-2) = F(1) - F(-1)$$
$$= 2F(1) - 1 = 0.6826$$

ب ـ
$$P(X \leq Y) = P(X - Y \leq 0)$$

ولكن $X - Y$ متغير $N(-1, 3)$ وفق الخاصة ٢ . وبالتالي يكون

$$P(X \leq Y) = P(X - Y \leq 0) = F\left(\frac{0-(-1)}{\sqrt{3}}\right) = F(0.577) = 0.718$$

جـ ـ وفق الخاصة ٢ نجد أن $3X-2Y$ متغير $N(0, 17)$ وهكذا نجد :

$$P(3X-2Y>1)=1-P(3X-2Y\le 1)=1-F\left(\frac{1-0}{\sqrt{17}}\right)$$
$$=1-F(0.243)=0.404$$

د ـ ووفق الخاصة ٣ يكون $X+2Y-2T$ متغيرا $N(-3, 15)$ ، وبالتالي :

$$P(X+Y\le 2T-4)=P(X+Y-2T\le -4)=F\left(\frac{-4-(-3)}{\sqrt{15}}\right)$$
$$=1-F\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)=1-F(0.258)=0.398\ .$$

مثال (٥ ـ ١٠)

يتم إنتاج مسامير البرشام التي تستخدم لبرشمة صفيحة معدنية بطريقة تسمح لنا بوصف قطر المسمار X كمتغير $N(3; 0.04)$. وبطريقة مستقلة يجري إنتاج صفائح معدنية ذات ثقوب دائرية يمكن اعتبار قطر الثقب Y متغيرا $N(3.2, 0.01)$. (القياس في الحالتين بالسنتمتر) .

ا ـ ما هو احتمال أن يناسب المسمار ثقب الصفيحة؟

ب ـ إذا اخترنا أربعة أزواج (مسمار ـ صفيحة) فما هو احتمال أن يكون زوجان منهما، على الأقل، متناسبين؟

الحل

ا ـ X و Y متغيران طبيعيان مستقلان . واحتمال تناسب المسمار مع الثقب هو:

$$P(X<Y)=P(X-Y<0)$$

ولكن $X-Y$ متغير $N(-0.2, 0.05)$ ، وبالتالي :

$$P(X-Y<0)=F\left(\frac{0-(-0.2)}{\sqrt{0.05}}\right)=F(0.894)=0.814$$

ب ـ يمكننا اعتبار إنتاج مسمار وصفيحة تكرارا لتجربة ثنائية احتمال النجاح فيها $p=0.814$ ، $n=4$ ، وإذا رمزنا بـ U لعدد الأزواج المتناسبة ، يصبح المطلوب :

$$P(U \geq 2) = 1 - P(U=0) - P(U=1)$$
$$= 1 - (0.186)^4 - 4\,(0.814)\,(0.186)^3 = 0.978\,.$$

مثال (٥ ـ ١١)

$$P(|\bar{X} - \mu| > 2) = P(\bar{X} - \mu > 2) + P(\bar{X} - \mu < -2) \leq 0.025$$

أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي فيه $\mu = 10$ و $\sigma = 20$ ، ما هي أصغر قيمة ممكنة لـ n بحيث لا يزيد عن 0.025 احتمال أن يتجاوز الفرق بين متوسطي العينة والمجتمع المقدار 2 ؟

الحل

ليكن $\bar{X}$ متوسط العينة. نعلم من الخاصة ٣ أن $\bar{X}$ متغير $N\left(10, \frac{400}{n}\right)$. والمطلوب تحديد حجم العينة n بحيث يكون، $P(|\bar{X} - \mu| > 2) \leq 0.025$ ولكن الحادثة $|\bar{X} - \mu| > 2$ تعني إما $\bar{X} - \mu > 2$ أو $X - \mu < -2$ ، وبالتالي :

$$P(|\bar{X} - \mu| > 2) = P(\bar{X} - \mu > 2) + P(\bar{X} - \mu < -2) \leq 0.025$$

أو

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{20/\sqrt{n}} > \frac{2}{20/\sqrt{n}}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{20/\sqrt{n}} < \frac{-2}{20/\sqrt{n}}\right) \leq 0.025$$

أو

$$1 - F\left(\frac{2\sqrt{n}}{20}\right) + F\left(\frac{-2\sqrt{n}}{20}\right) \leq 0.025$$

أو

$$2 - 2F\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) \leq 0.025$$

$$F\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) \geq 0.9875$$

ونجد من الجدول أن

$$\frac{\sqrt{n}}{10} \geq 2.24$$

$$\sqrt{n} \geq 22.4 \Leftrightarrow n \geq 501.76$$

أي أن حجم العينة ينبغي ألا يقل عن 502 .

مثال (٥ ـ ١٢)

ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي $N(100, 25)$. أحسب $P(|\bar{X} - 100| > 1)$ ، إذا كان :

ا ـ $\bar{X}$ متوسط عينة حجمها $n = 25$ ،

ب ـ $\bar{X}$ متوسط عينة حجمها $n = 100$.

الحل

ا ـ بالاستناد إلى الخاصة ٣ نعلم أن $\bar{X}$ متغير يتبع التوزيع الطبيعي $N(100, 1)$ ويكون

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - 100| > 1) &= P(\bar{X} - 100 > 1) + P(\bar{X} - 100 < -1) \\ &= 1 - F(1) + F(-1) \\ &= 1 - F(1) + [1 - F(1)] = 2 - 2F(1) \\ &= 2 - 2 \times 0.8413 = 0.3174 \end{aligned}$$

ب ـ $\bar{X}$ يتبع الآن التوزيع الطبيعي $N(100, 0.25)$ ومنه :

$$\begin{aligned} P(|\bar{X} - 100| > 1) &= P\left(\frac{\bar{X} - 100}{0.5} > \frac{1}{0.5}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - 100}{0.5} < \frac{-1}{0.5}\right) \\ &= 1 - F(2) + F(-2) \\ &= 2[1 - F(2)] = 0.0456 \end{aligned}$$

تمارين (٥ ـ ٣)

١) في المثال (٥ ـ ١٢) ، كم يجب أن يكون حجم العينة n ليصبح :

ا ـ $P(|\bar{X} - 100| > 0.5) \leq 0.01$ ،

ب ـ $P(|\bar{X} - 100| > 0.5) \leq 0.001$.

٢) إذا افترضنا أن الدرجـات في امتحان عام تتوزع ، على وجـه التقريب ، وفق التوزيع الطبيعي $N\,(72,\ 100)$ ففي مجمـوعـة عشـوائية تتضمن مـائة طـالب ممن أدوا هـذا الامتحان ، ما احتمال أن يختلف متوسط درجاتهم عن 72 بأكثر من 3 درجات؟

٣) ما أصغر حجم عينة ينبغي أخذها من مجتمع طبيعي فيه $\mu = 10$ و $\sigma = 20$ ، كي لا يزيد احتمال تجاوز متوسط العينة لضعف متوسط المجتمع عن 0.025 ؟

٤) إذا كـان X ، Y و Z ثـلاثة متغيرات مستقلـة وتوزيعـاتهـا ، على الترتيب ، $N(2, 2)$ ، $N(3, 3)$ ، $N(4, 4)$ ، فاحسب :

أ ـ $P(1 \le X \le 4)$ ،

ب ـ $P(X - 2 \le 4)$ ،

جـ ـ $P(2X + Y \ge 5)$ ،

د ـ $P(Z + 2 \le 4X - Y \le +3)$ ،

هـ ـ $P(X \ge Y,\ Z - 3 > 0)$.

٥) يتوزع المتغيران المستقلان X و Y وفق $N(\mu, \sigma^2)$ و $N(2\mu, 2\sigma^2)$ ، على الترتيب .

ا ـ إذا كان $\sigma = 3$ و $P(X + 2Y \le 10)$ فاحسب μ .

ب ـ إذا كان $\mu = 0$ و $P(4X - Y < 3) = 0.4$ فاحسب σ .

جـ ـ إذا كان $P(|2X - Y| > 10) = 0.05$ و $P(Y \le s) = 0.9$ فاحسب μ و σ .

٦) يتـوزع طـول نصف قـطر دولاب صغير ينتجــه مصنـع معين وفق التوزيع الطبيعي $N(1, 0.0001)$ (القياس بالسنتيمتر) . ويتم إنتاج الـدواليب بصورة مستقلة ثم تجمع عقب ظهـورها في خط الإنتـاج أزواجا . ونعتبر أن الـزوج من الدواليب مُـرض إذا اختلف نصفا القطرين للدولابين بأقل من 0.03 سم .

ا ـ ما نسبة الأزواج المرضية من الدواليب ؟

ب ـ من بين خمسة أزواج ما احتمال أن يكون أحدها على الأقل غير مُرض ؟

جـ ـ إلى أي حد ينبغي تخفيض الانحراف المعياري لطريقة الإنتاج كي تصبح نسبة الأزواج المرضية 99% ؟

٧) وجد طبيب يعمل في عيادة أن الأوقات التي تستغرقها استشارات المرضى مستقلة بعضها عن بعض، وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 5 دقائق وانحراف معياري 1.5 دقيقة. ويقابل مرضاه، على التتالي، بدون فواصل زمنية بين مريضين، مبتدئا عمله الساعة العاشرة صباحا. ما الموعد الذي ينبغي للمريض العاشر أن يرتبه مع سيارة أجرة بحيث يطمئن باحتمال 99% أن السيارة سوف لا تنتظره ؟ وإذا كان الطبيب سيقابل 22 مريضا قبل انصرافه، فما احتمال مغادرته للعيادة قبل الساعة 12 ظهرا ؟

٨) عمر قطعة إلكترونية مقاسا بالساعات يتوزع وفق التوزيع الطبيعي، لنفرض أن 92.5% من هذه القطع يتجاوز عمرها 2160 ساعة و 3.92% يتجاوز عمرها 17040 ساعة .

ا ـ أحسب متوسط التوزيع وانحرافه المعياري .

ب ـ إذا أخذنا عينة من 100 قطعة ~~فا~~حسب احتمال أن يكون متوسط العمر في العينة :

(i) أكبر من 10000 ساعة ،

(ii) أقل من 8000 ساعة .

(iii) واقعا بين 8000 و 10000 ساعة .

٩) الأجر الأسبوعي بالريال الذي تدفعه شركة إلى عمالها يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي $N(200, 324)$.

أ ـ أحسب احتمال ألا يختلف متوسط الأجر الأسبوعي لعينة عشوائية من 9 عمال عن متوسط المجتمع 200 بأكثر من 12 ريالا.

ب ـ كم يجب أن يكون حجم العينة حتى لا يختلف متوسطها عن متوسط المجتمع بأكثر من ستة ريالات إلا بنسبة بسيطة لا تتجاوز 10% ؟

١٠) على مدير شركة أن يقابل 20 مرشحا لوظيفة. ويعلم من تجربته السابقة أن وقت المقابلة مقاسا بالدقيقة يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(10, 9)$. ويبدأ مقابلاته الساعة التاسعة صباحا. في أي وقت ينبغي له أن يطلب فنجان القهوة ويرتاح لمدة ربع ساعة إذا أراد أن يكون مطمئنا باحتمال 99% إلى أنه قد انتهى في ذلك الوقت من مقابلة 50% من المرشحين؟ وما احتمال أن ينتهي من كل المقابلات عند الساعة الواحدة بعد الظهر؟

١١) يتوزع وزن أمتعة المسافر جوا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 20 كغ وانحراف معياري 5 كغ . ويتسع نوع معين من الطائرات لـ 100 راكب. ما هو احتمال أن يتجاوز الوزن الكلي لأمتعة المسافرين 2150 كغ؟

١٢) عمر صمام كهربائي مقاس بالساعة يتبع التوزيع الطبيعي $N(200, \sigma^2)$. إذا اشترى شخص عشر صمامات وأراد باحتمال 0.95 ألا يقل متوسط عمر الصمامات العشرة عن 190 ساعة، فما هي أكبر قيمة يمكن أن يأخذها الانحراف المعياري σ؟

١٣) بالإشارة إلى التمرين رقم ٢٨ من مجموعة التمارين (٥ ـ ٢)، لنفرض أن خمس بقالات متجاورة متضامنة بالنسبة إلى توفير تلك السلعة للزبائن. وأن مبيعاتها خلال أسبوعين من تلك السلعة مستقلة بعضها عن بعض وأن كلا منها تتبع

التوزيع الطبيعي بمتوسطات هي 200 ، 240 ، 180 ، 260 ، و 320 كغ ، وتباينات هي ، على الترتيب ، 225 ، 240 ، 225 ، 265 ، 270 كغ . اكتب متوسط وتباين الطلب على السلعة خلال أسبوعين ، وحدد إلى ثلاثة أرقام معنوية المستوى الإجمالي لمخزونها من تلك السلعة الذي ينبغي توفره عند طلب بضاعة جديدة بحيث يكون احتمال عدم نفاذها 0.99 .

احسب احتمال أن يتجاوز مجموع مبيعات البقالات الخمس من تلك السلعة خلال عشرة أسابيع 6200 كغ .

١٤) مصنع مربيات يضع في كل عبوة ثماني علب من ثمانية أنواع مختلفة . والمفروض أن تزن كل علبة 50 غراما . ولكن عمليا يتبع وزن كل علبة التوزيع الطبيعي N (52, 1.21) ، وبصورة مستقلة من نوع إلى آخر.

أ - ما نسبة العلب التي تزن أقل من 50 غراما؟

ب - ما نسبة العبوات التي تقل عن 400 غراما؟

جـ - ما احتمال أن تزن واحدة أو أكثر من العلب ضمن عبوة أقل من 50 غراما ؟

د - كم ينبغي أن يكون الانحراف المعياري لوزن العلبة إذا أردنا لـ 99% من العبوات أن تزن أكثر من 400 غراما؟

١٥) أوزان الأشخاص الذين يستخدمون مصعدا معينا تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 150 ليبرة وانحراف معياري 20 ليبرة . والحد الأعلى المسموح لحمولة المصعد هو 650 ليبرة .

ا - بصورة عشوائية ، يجتمع أربعة أشخاص في المصعد . ما هو احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟

ب - بصورة عشوائية يوجد شخص واحد في المصعد ومعه أمتعة تزن ثلاثة أمثال

وزنه، ما هو احتمال تجاوز الحمولة القصوى؟
فسر أي اختلاف بين جوابيك في (ا) و (ب).

(٥ ـ ٥) نظرية النهاية المركزية

تعرض نظرية النهاية المركزية، وتحت شروط عامة جدا، أن كلا من مجموع ومتوسط عينة عشوائية، مسحوبة من مجتمع ما، يمتلك عند تكرار هذه العينات عددا كبيرا من المرات، توزيعا له، على وجه التقريب، شكل الجرس. وربما كان من الأفضل إيضاح هذه العبارة بمثال.

لنعتبر المجتمع المتولد عن قذف حجر نرد عددا كبيرا جدا من المرات. وقد رأينا توزيعه في المثال (٣ ـ ٦). لنسحب عينة من خمسة قياسات، $n = 5$، من المجتمع وذلك بقذف حجر النرد خمس مرات وتسجيل الملاحظات الخمس الناتجة. ثم نحسب مجموع هذه الملاحظات الخمس Σx_i ومتوسطها $\bar{x}$، ويبين الجدول (٥ ـ ١) نتائج تكرار هذه العملية مائتي مرة. كما يبين الشكل (٥ ـ ٨) المدرج التكراري للقيم المائتين لـ $\bar{x}$ (أو Σx_i). وتنبغي ملاحظة النتيجة المهمة التالية:

بالرغم من أن التوزيع الاحتمالي لـ X له شكل أفقي تماما، إلا أن المدرج التكراري لمائتين من قيم $\bar{X}$ (وهو يقدم صورة أولية عن شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير $\bar{X}$ أو للمتغير ΣX_i) يتخذ شكلا مقببا قريبا من شكل الجرس، وكلما زاد حجم العينات المسحوبة عن خمسة اعتدل شكل المضلع التكراري ليقترب أكثر فأكثر من شكل التوزيع الطبيعي. وبعبارة أخرى، لو أننا أخذنا $n = 10$ في مثالنا، أي لو أننا قذفنا حجر النرد عشر مرات بدلا من خمس، ثم سجلنا نتائج مائتي عينة من هذا الحجم، ورسمنا المدرج التكراري للقيم المائتين لـ $\bar{X}$، فمن المتوقع الحصول على

شكل أكثر قربا من شكل الجرس . ولا بد من ملاحظة أنه للحصول على فكرة أدق عن شكل التـوزيع الإحتمالي لـ $\bar{x}$ نحتاج ، نظـريـا ، إلى عدد لا نهائي من العينـات ، أو لنقل ، بصـورة عمليـة ، إننا نحتـاج إلى عـدد من العينـات أكبر بكثير من المائتين التي تضمنتهـا التجربـة هنـا . ومع ذلك فإن الشكل الـذي تقدمـه العينـات المائتان كـاف

جدول (٥ ـ ١) : مئتا عينة من مجتمع قذف حجر نرد

رقم العينة	قياسات العينة	Σx_i	$\bar{x}$	رقم العينة	قياسات العينة	Σx_i	$\bar{x}$
1	3,1,6,4,1	15	3.0	33	6,3,5,4,5	23	4.6
2	4,6,6,5,2	23	4.6	34	6,5,3,3,3	20	4.0
3	5,5,2,5,2	19	3.8	35	2,6,2,6,3	19	3.8
4	4,4,5,2,2	17	3.4	36	2,2,1,6,6	17	3.4
5	2,3,6,3,3	17	3.4	37	4,3,2,5,4	18	3.6
6	6,6,2,5,4	23	4.6	38	5,1,2,5,6	19	3.8
7	6,3,3,2,6	20	4.0	39	5,5,2,5,6	23	4.6
8	3,1,5,1,5	15	3.0	40	5,6,6,5,2	24	4.8
9	6,2,5,5,4	22	4.4	41	3,1,6,3,6	19	3.8
10	6,5,6,6,6	29	5.8	42	1,6,2,6,1	17	3.4
11	6,6,1,1,2	16	3.2	43	3,2,3,4,6	18	3.6
12	1,4,1,4,6	16	3.2	44	3,2,5,1,6	17	3.4
13	4,6,3,5,5	23	4.6	45	4,6,5,3,2	20	4.0
14	4,3,3,4,5	19	3.8	46	6,2,5,4,5	22	4.4
15	4,6,2,3,1	16	3.2	47	6,1,1,2,5	15	3.0
16	1,4,3,4,5	17	3.4	48	1,1,5,5,2	14	2.8
17	3,4,3,1,4	15	3.0	49	2,2,3,3,4	14	2.8
18	3,3,3,6,4	19	3.8	50	5,4,2,2,1	14	2.8
19	6,3,4,4,6	21	4.2	51	3,5,1,5,3	17	3.4
20	5,4,2,2,6	19	3.8	52	5,2,3,3,2	15	3.0
21	4,5,5,2,2	18	3.6	53	4,1,5,2,6	18	3.6
22	1,5,2,3,1	12	2.4	54	5,4,4,2,4	19	3.8
23	3,5,6,5,3	22	4.4	55	4,5,2,1,4	16	3.2
24	5,3,6,4,3	21	4.2	56	4,5,6,3,1	19	3.8
25	6,2,3,2,5	18	3.6	57	3,5,5,1,4	18	3.6
26	5,4,5,1,6	21	4.2	58	6,6,5,3,4	24	4.8
27	4,1,6,2,6	19	3.8	59	6,3,2,5,4	20	4.0
28	6,6,6,2,2	22	4.4	60	4,6,5,1,1	17	3.4
29	3,4,2,1,5	15	3.0	61	5,1,1,2,2	11	2.2
30	1,2,2,3,3	11	2.2	62	2,6,2,2,3	15	3.0
31	6,5,1,6,2	20	4.0	63	2,4,4,1,1	12	2.4
32	6,3,1,2,5	17	3.4	64	3,1,2,2,2	10	2.0

تابع جدول (٥ ـ ١)

$\bar{x}$	Σx_i	قياسات العينة	رقم العينة	$\bar{x}$	Σx_i	قياسات العينة	رقم العينة
2.8	14	5,2,5,1,1	107	3.0	15	3,4,1,1,6	65
2.6	13	3,3,4,1,2	108	4.8	24	6,2,5,5,6	66
2.8	14	3,1,4,3,3	109	3.0	15	3,1,1,4,6	67
3.2	16	5,2,6,1,2	110	4.0	20	3,2,6,5,4	68
2.6	13	1,2,6,3,1	111	3.8	19	6,4,1,5,3	69
3.0	15	4,6,2,2,1	112	3.4	17	3,2,2,6,4	70
3.4	17	4,4,4,1,4	113	2.8	14	5,4,1,2,2	71
3.4	17	3,3,6,3,2	114	3.2	16	1,4,2,4,5	72
3.6	18	2,1,5,4,6	115	3.0	15	1,6,1,5,2	73
4.4	22	6,6,4,2,4	116	2.6	13	3,1,1,4,4	74
2.4	12	3,2,2,1,4	117	4.2	21	1,5,6,5,4	75
2.8	14	3,2,2,4,3	118	4.4	22	4,1,6,6,5	76
2.8	14	5,3,1,1,4	119	4.2	21	2,4,6,4,5	77
3.4	17	6,1,3,3,4	120	3.4	17	6,2,2,6,1	78
3.2	16	3,3,6,3,1	121	2.6	13	5,1,2,4,1	79
2.8	14	5,2,2,2,3	122	4.0	20	6,1,6,1,6	80
2.6	13	3,2,6,1,1	123	4.4	22	6,5,5,5,1	81
4.4	22	5,1,6,5,5	124	3.6	18	5,3,3,1,6	82
3.8	19	5,1,2,6,5	125	4.4	22	3,6,4,5,4	83
3.4	17	2,3,6,3,3	126	3.2	16	3,4,4,2,3	84
3.0	15	4,3,2,1,5	127	3.6	18	2,5,6,1,4	85
3.6	18	4,5,5,1,3	128	1.6	8	2,1,2,2,1	86
3.8	19	6,3,4,5,1	129	3.4	17	2,4,3,3,5	87
2.4	12	1,6,2,2,1	130	3.2	16	1,2,2,6,5	88
2.4	12	3,1,1,2,5	131	3.6	18	4,3,5,3,3	89
3.4	17	5,4,1,2,5	132	2.8	14	4,6,1,1,2	90
3.8	19	3,2,6,6,2	133	2.0	10	4,2,1,1,2	91
4.0	20	3,4,5,5,3	134	3.2	16	3,3,4,4,2	92
4.4	22	3,5,5,5,4	135	3.6	18	4,1,4,5,4	93
3.8	19	6,2,5,5,1	136	3.2	16	4,1,2,6,3	94
2.6	13	2,3,2,4,2	137	2.8	14	1,1,6,1,5	95
3.4	17	6,1,4,1,5	138	3.2	16	3,2,5,1,5	96
4.6	23	5,6,1,6,5	139	4.6	23	5,2,4,6,6	97
3.6	18	2,2,6,2,6	140	3.6	18	3,3,6,5,1	98
2.6	13	1,3,2,4,3	141	4.2	21	4,4,5,2,6	99
4.8	24	6,4,4,5,5	142	3.2	16	4,2,4,4,2	100
3.2	16	3,1,6,2,4	143	3.4	17	4,5,5,2,1	101
2.4	12	2,1,1,6,2	144	3.4	17	2,5,5,3,2	102
3.8	19	4,4,1,5,5	145	2.8	14	2,3,3,1,5	103
2.8	14	2,4,5,1,2	146	2.6	13	1,5,2,3,2	104
2.8	14	5,1,3,2,3	147	2.8	14	3,4,2,2,3	105
3.6	18	3,2,2,5,6	148	3.4	17	5,3,2,3,4	106

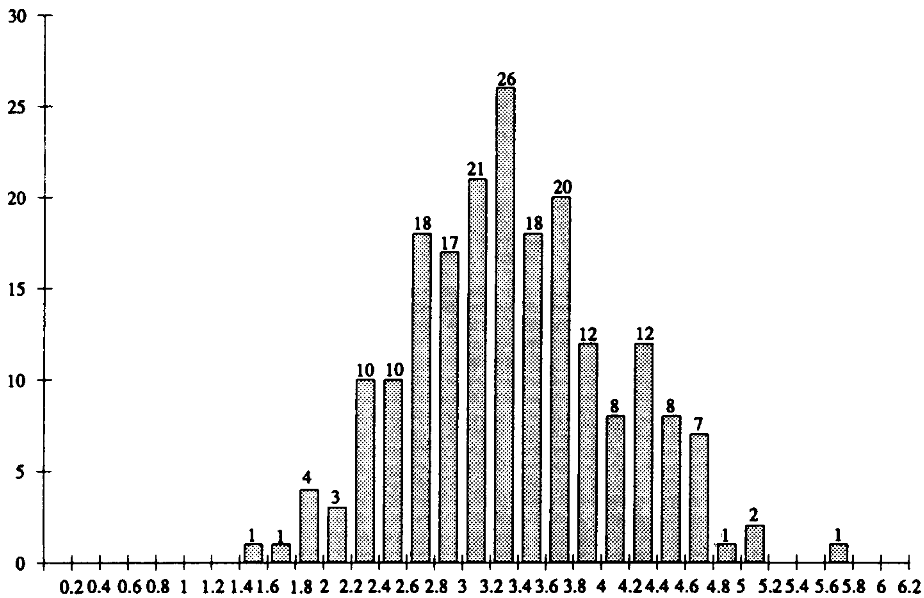
تابع جدول (٥ ـ ١)

رقم العينة	قياسات العينة	Σx_i	$\bar{x}$	رقم العينة	قياسات العينة	Σx_i	$\bar{x}$
149	1,3,6,1,3	14	2.8	175	2,4,2,2,2	12	2.4
150	6,3,1,4,6	20	3.8	176	4,6,6,6,2	24	4.8
151	3,6,6,1,3	19	3.8	177	3,6,5,4,4	22	4.4
152	3,5,2,6,2	18	3.6	178	2,3,4,4,3	16	3.2
153	3,1,2,2,5	13	2.6	179	2,6,5,3,5	21	4.2
154	4,6,4,3,3	20	4.0	180	6,3,5,2,1	17	3.4
155	1,4,2,4,3	14	2.8	181	4,3,2,2,1	12	2.4
156	5,5,4,6,4	24	4.8	182	3,5,2,2,3	15	3.0
157	4,1,4,4,3	16	3.2	183	4,3,6,1,2	16	3.2
158	3,2,1,5,5	16	3.2	184	5,5,1,6,2	19	3.8
159	5,6,1,3,5	20	4.0	185	6,2,3,3,2	16	3.2
160	2,5,6,3,3	19	3.8	186	1,4,4,4,2	15	3.0
161	1,4,2,5,3	15	3.0	187	5,6,3,6,4	24	4.8
162	4,2,4,3,5	18	3.6	188	5,1,3,5,3	17	3.4
163	1,2,5,2,6	16	3.2	189	4,4,1,3,5	17	3.4
164	1,1,3,5,2	12	2.4	190	5,3,1,2,4	15	3.0
165	3,5,3,4,5	20	4.0	191	1,1,1,6,1	10	2.0
166	3,1,2,2,4	12	2.4	192	4,5,4,4,6	23	4.6
167	2,4,3,5,2	16	3.2	193	5,2,6,6,6	25	5.0
168	2,6,3,5,3	19	3.8	194	5,6,5,5,5	26	5.2
169	5,4,3,1,1	14	2.8	195	6,5,1,6,4	22	4.4
170	6,2,6,6,6	26	5.2	196	4,2,3,4,6	21	4.2
171	1,5,5,1,1	13	2.6	197	5,2,4,2,2	15	3.0
172	3,5,5,3,1	17	3.4	198	2,3,3,3,6	18	3.6
173	1,2,2,3,1	9	1.8	199	6,1,4,5,2	18	3.6
174	2,1,4,1,2	10	2.0	200	2,3,1,1,4	11	2.2

لتوضيح الفكرة الأساسية التي تتضمنها نظرية النهاية المركزية، والتي نعرضها في العبارة المبسطة التالية :

(٥ ـ ٥ ـ ١) الفكرة الأساسية لنظرية النهاية المركزية

إذا سحبنا عينات عشوائيـة حجم كل منها n ، من مجتمع متـوسطه μ وانحرافه المعياري σ محدودان، فإن توزيع متـوسط العينة $\bar{x}$ يتطابق تقريبـا مع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي μ وانحراف معياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. وستزداد دقة التقريب كلما ازداد n .



شكل (٥ ـ ٨) مدرج التكرار لمتوسطات العينات المائتين المسحوبة من مجتمع قذف حجر النرد

ويمكن إعادة صياغة النظرية لتتفق مع $\sum_{1}^{n} X_i$ بدلا من $\bar{X}$. فنقول إن توزيع $\sum_{1}^{n} X_i$ يسعى أيضا إلى أن يصبح طبيعيا بمتوسط يساوي $n\mu$ وانحراف معياري $\sigma\sqrt{n}$ ، وذلك عندما يصبح n كبيرا جدا .

وتبدو أهمية نظرية النهاية المركزية من زاويتين، فهي توضح أولا نزوع العديد من المتغيرات العشوائية إلى أن يكون توزيعها، بصورة تقريبية، هو التوزيع الطبيعي. إذ يمكن، مثلا، أن نتصور طول الإنسان حصيلة عدد كبير من المؤثرات العشوائية، مثل طول الأب، وطول الأم، والمورثات (وعددها كبير) ، ونشاط الغدة أو الغدد ذات العلاقة بالطول، والبيئة أو المحيط بأنواعه، والتغذية، إلخ. وإذا كانت آثار هذه العوامل، تضاف بعضها إلى بعض، لتنتج واقعا معينا بالنسبة إلى طول الإنسان فعندئذ

يمكن اعتبار الطول كحصيلة لعدد كبير من المتغيرات العشوائية. وهكذا تنطبق نظرية النهاية المركزية، ويكون توزيع متغير الطول هو، على وجه التقربب، التوزيع الطبيعي، وذلك بصرف النظر عن توزيع أي من المتغيرات العشوائية التي تؤثر في تحديد الطول. وهذه بالطبع محاولة للتعليل، ليس أكثر، إذ أن ما يجري في الواقع غير معروف لنا بصورة دقيقة، ولكن ما يمكن قوله، على كل حال، هو إن نظرية النهاية المركزية توضح سبب وجود العديد من المتغيرات العشوائية التي نصادفها في حياتنا العامة، والتي نعتبر أن توزيعها الاحتمالي هو التوزيع الطبيعي.

ومن زاوية أخرى نجد أن العطاء الأكثر أهمية لنظرية النهاية المركزية، يتعلق بمسألة الاستقراء الاحصائي. فالعديد من الإحصاءات التي تستخدم للقيام باستقراءات حول معلمات توزيع (وهي تمثل خصائص مهمة لمجتمع القياسات) مثل p، احتمال النجاح في التوزيع الثنائي، أو μ متوسط التوزيع الطبيعي إلخ. هذه الإحصاءات تأخذ شكل مجموع لقياسات العينة أو متوسط هذه القياسات. وإذا كان الحال كذلك، وكانت n كبيرة بكفاية، فيمكننا اعتبار التوزيع الطبيعي تقريبا جيدا للتوزيع الاحتمالي لذلك الإحصاء. وهو ما تمس الحاجة إليه عند القيام بأي استقراء إحصائي. وسنجد في الفقرات القادمة العديد من الاستخدامات المفيدة للغاية لنظرية النهاية المركزية.

والسؤال الذي يفرض نفسه هنا، هو: كم يجب أن يبلغ حجم العينة n حتى يصبح التقريب الناشيء عن تطبيق نظرية نهاية المركزية تقريبا جيدا من وجهة النظر العملية؟

ولسوء الحظ لا يوجد جواب عام ومحدد تماما لهذا السؤال. ويتعلق الأمر بالتوزيع الاحتمالي الموافق للمجتمع الذي جاءت منه العينة، وبالغاية من استخدام التقريب،

وهكذا. وغالبا ما يكون لكل حالة حكمها، معتمدين، بصورة رئيسة، على الخبرة السابقة والتجربة. ونشعر بكثير من الراحة عند النظر إلى مثال قذف حجر النرد المذكور أعلاه، فقد لاحظنا أن المدرج التكراري للقيم الـ 200 لـ $\bar{X}$ قريب من شكل الجرس بالرغم من أن حجم العينة الذي استخدمناه لم يتعد الخمس، وبالرغم من أن التوزيع الذي تأتي منه العينات هو خط أفقي (انظر الشكل (٣ ـ ٣)) وبعيد جدا عن شكل الجرس. وبصورة عامة، يمكن القول إنه كلما كانت درجة التناظر في التوزيع الذي نعاينه عالية كان التقريب جيدا حتى في عينات صغيرة الحجم.

تمارين (٥ ـ ٤)

١) بالإشارة إلى التمرين ١١ من مجموعة التمارين (٣ ـ ١)، لنفرض أن الشخص يقوم بـ 250 رحلة في السنة إلى عمله. وليكن $\bar{Y}$ متوسط عدد الإشارات الحمر التي يواجهها في الرحلة الواحدة، احسب $E(\bar{Y})$ ، $V(\bar{Y})$، ثم احسب $P(\bar{Y} \geq 1.5)$

٢) في مدينة معينة 1/3 الأسر ليس لديها سيارة، و 1/3 الأسر لديها سيارة واحدة، و 1/6 الأسر لديها سيارتان، و 1/12 من الأسر لديها ثلاث سيارات، و 1/12 من الأسر لديها أربع سيارات، ليكن X عدد السيارات للأسرة الواحدة:

أ ـ احسب $E(X)$ ، $V(X)$.

ب ـ احسب $E(\bar{X})$ ، $V(\bar{X})$ حيث $\bar{X}$ متوسط عينة عشوائية من 100 أسرة.

جـ ـ إذا كان لكل سيارة خمس عجلات فما المتوسط والانحراف المعياري لعدد العجلات للأسرة الواحدة.

د ـ احسب بصورة تقريبية $P(\bar{X} < 1)$.

٣) تذبح مضافة عربية كل يوم 1 ، 2 ، 3 ، أو 4 خراف باحتمالات هي، على الترتيب، 0.4 ، 0.3 ، 0.2 ، 0.1. ما هو الحد الأدنى لعدد الخراف التي ستلبي باحتمال لا يقل

عن 0.99 حاجة المضافة من الذبائح لفترة 120 يوما؟ (نفترض أن حاجة المضافة في يوم مستقلة عن حاجتها في يوم آخر).

٤) متوسط الوزن في قطيع ضخم من الخراف هو 8.2 كغ بتباين يساوي 4.84 كغ٢ . ما احتمال أن يقع متوسط الوزن في عينة عشوائية من 80 خروفا بين 8.3 و 8.4 كغ؟

(٥ ـ ٦) تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي

رأينا في الفصل السابق عدة تطبيقات للتوزيع الثنائي إقتضت جميعها حساب احتمال أن يأخذ X ، وهو عدد النجاحات من بين n تكرارا، قيمة معينة أو يقع ضمن فترة معينة، وقد اقتصرنا هناك على أمثلة تكون n صغيرة فيها، وذلك بسبب مشقة الحسابات عندما تكون n كبيرة. ولنفرض، مثلا، أننا في حاجة لحساب احتمال وقوع X ضمن فترة معينة ، حيث $n = 1000$ ، فمع أن مثل هذا العمل ليس مستحيلا، إلا أنه ممتنع إلى الحد الذي نريد معه تجنب الغوص في الحسابات. وتقدم نظرية النهاية المركزية حلا لهذه المشكلة. ذلك لأنه يمكن النظر إلى عدد النجاحات X كمجموع يحقق شروط نظرية النهاية المركزية. فإذا اصطلحنا على أن يوافق النتيجة S (أو النجاح) العدد 1 ويوافق النتيجة F (أو الفشل) العدد صفر. فعندئذ تكون نتائج التكرارات المستقلة لـ n عبارة عن متتالية من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، حيث يأخذ كل X_i إما القيمة 1 أو القيمة صفر. ويكون عدد النجاحات X هو بالضبط عدد مرات ورود الـ 1 في تلك المتتالية أو مجموعها. أي أن

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

وبما أن كل X_i يتوزع وفق التوزيع الثنائي النقطي أو توزيع بيرنوللي، [انظر مطلع الفقرة (٤ ـ ٢) ونهاية الفقرة (٤ ـ ٧)] فتصبح نتائج التكرارات المستقلة الـ n وهي

$X_1 , X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع بيرنوللي ، ويصبح X مجموع هذه العينة . ووفقا لنظرية النهاية المركزية يكون التوزيع التقريبي لـ X ، في حالة n كبيرة بكفاية ، هو التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي $n\,p$ وتباين يساوي $n\,p\,q$.وبالتالي يمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري لحساب احتمالات تتعلق بالمتغير X ، ولكن بصورة تقريبية .

مثال (٥ ـ ١٣)

لنأخذ التوزيع الثنائي في حالة $n = 10$ ، $p = 1/2$. وعندئذ يكون $\mu = np = 5$ و$\sigma = \sqrt{npq} = 1.58$ احسب $p(2 \le X \le 4)$ باستخدام التوزيع الثنائي أولا ثم باستخدام التوزيع الطبيعي لحساب قيمة تقريبية .

الحل

$$P(2 \le X \le 4) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.3662$$

وهذا الاحتمال هو مجموع مساحات المستطيلات المقامة فوق 2 و 3 و 4 في المدرج الاحتمالي (انظر الشكل (٥ ـ ٩)) وإذا اعتبرنا X كأنه، على وجه التقريب، متغير $N(5, 2.5)$ ، فإن نظرة سريعة إلى الشكل (٥ ـ ٩) ستوضح أن المساحة تحت منحنى الكثافة الطبيعي من 2 إلى 4 تهمل النصف الأيسر من مساحة المستطيل المقام فوق 2 ، والنصف الأيمن من مساحة المستطيل المقام فوق 4 ، وأن التقريب سيكون أفضل لو أخذنا بدلا من $P(2 \le X \le 4)$ ، العبارة $P(2 - 1/2 \le X \le 4 + 1/2)$. ولكن:

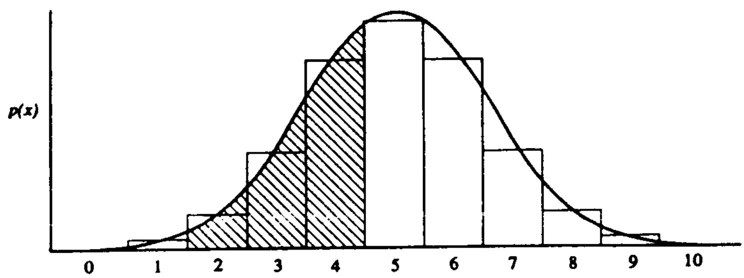
$$P(1.5 \le X \le 4.5) = F\left(\frac{4.5 - 5}{1.58}\right) - F\left(\frac{1.5 - 5}{1.58}\right)$$

$$= F(-0.316) - F(-2.215)$$

$$= 1 - F(0.316) - [1 - F(2.215)]$$

$$= F(2.215) - F(0.316) = 0.9866 - 0.6240$$

$$= 0.3626$$



شكل (٥ ـ ٩) تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي

والقيمة الناتجة صحيحة إلى رقمين عشريين بالرغم من أن n لا تتجاوز العشرة. ويعود الفضل في جودة التقريب هنا إلى تناظر التوزيع الثنائي في حالة $p = 0.5$ ، وإلى تعديل فترة تغير X ، مأخوذا كمتغير طبيعي مستمر، بحيث تغطي تماما المستطيلات الموافقة للحادثة التي نحسب احتمالها. وتسمى إضافة أو طرح 1/2 ، عملية تصحيح من أجل الاستمرار.

وعندما يكون n صغيرا و p قريبا من الصفر، أو قريبا من الواحد، فإن شكل المدرج الاحتمالي سيكون ملتويا بشدة (أي تتجمع معظم المساحة إلى جانب $X = 0$ أو إلى جانب $X = n$ ، على الترتيب) وبالتالي سيكون بعيدا جدا عن وضع التناظر. وفي مثل هذه الحالات سيكون التقريب سيئا ما لم تكن n كبيرة بكفاية.

مثال (٥ ـ ١٤)

موثوقية قطعة إلكترونية هي احتمال أن نختار واحدة من كومة إنتاج فنجدها تؤدي المهمة التي صممت من أجلها. أحسب احتمال أن نجد ما لا يقل عن 27 قطعة لا تعمل من بين عينة عشوائية تتضمن 1000 قطعة وذلك تحت الفرض بأن الموثوقية هي 0.98.

الحـــل

المسألـة هي مسألة تـوزيع ثنائي فكل قطعـة تختارها إمـا أن تعمل أو لا تعمل. وإذا اعتبرنـا نتيجـة «القطعـة لا تعمل» نجـاحـا، يكـون $p = 0.02$ ويكون المطلـوب حساب:

$$P(X \geq 27) = \sum_{x=27}^{1000} \binom{1000}{27} (0.02)^{x} (0.98)^{1000-x}$$

والحساب الدقيق لهذه النتيجة يتطلب جهدا كبيرا. وبـاستخدام تقريب التوزيع الطبيعي نحسب المسـاحـة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين من $X = 26.5$ (لاحظ أنه ينبغي استخدام $X = 26.5$ بدلا من $X = 27$ بحيث تشمل المستطيل الاحتمالي المقـام فوق النقطة $X = 27$). وذلك بـاعتبـار أن X يتبع على وجـه التقـريب، التـوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي

$$\mu = np = 1000 \times 0.02 = 20$$

وانحراف معياري

$$\sigma = \sqrt{n\ p\ q} = \sqrt{1000 \times 0.02 \times 0.98} = 4.43$$

وهكذا نجد قيمة تقريبية للاحتمال المطلوب:

$$\begin{aligned} P(X \geq 26.5) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{26.5-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{26.5-20}{4.43}\right) = P(Z > 1.4) \\ &= 1 - F(1.4) = 1 - 0.9292 = 0.0708 \end{aligned}$$

مثال (٥ ـ ١٥)

اختبرنا لقاحـا جديدا ضد الزكام. وقـد أعطي اللقاح لمائة شخص، وروقبوا من حيث إصابتهم بالزكـام لمدة سنة. وقد نجا 68 منهم من الإصابة بالـزكام. ولنفرض أننا

نعلم من معلومات سابقة أن احتمال عدم الإصابة بالزكام هي بصورة طبيعية وبدون استخدام اللقاح 0.5 . أية نتائج يمكنك استخلاصها من هذه التجربة حول فعالية اللقاح؟

الحــــل

لنحسب احتمال نجاة 68أو أكثر من الإصابة بالزكام تحت الفرض بأن $p = 0.5$ ، أي أن اللقاح لم يكن له أي تأثير، فنجد باستخدام التقريب الطبيعي :

$$\mu = n\,p = 100\,(0.5) = 50\ ;\ \sigma = \sqrt{50 \times 0.5} = 5\ ,$$
$$P(X \geq 68) = P\left(Z \geq \frac{67.5 - 50}{5}\right) = 1 - F\,(3.5) = 0.0002$$

لقد قمنا بالحسابات مفترضين أن اللقاح غير فعال، وأن العدد 68 الذي حصلنا عليه، وهو أكبر من المتوقع تحت هذا الفرض، كان محض مصادفة. ولكن الاحتمال الناتج صغير جدا، وهو يعني ، عمليا، أنه لو كان ما افترضناه صحيحا وكررنا التجربة نفسها عددا كبيرا جدا من المرات فإننا سنجد نتيجة كالنتيجة التي حصلنا عليها، أو أفضل، في تجربتين من كل عشرة آلاف تجربة، وهذا يثير الكثير من الريبة في صحة ما افترضناه، ويدعو إلى الاعتراف بفعالية اللقاح في الوقاية من الزكام.

مثال (٥ ـ ١٦)

يتضمن امتحان خمسين سؤالا من النوع متعدد الاختيارات، ولكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة، واحد منها فقط هو الجواب الصحيح؛ ولكي ينجح الطالب لا بد له من الإجابة بصورة صحيحة على عشرين سؤالا على الأقل.

ا ـ احسب احتمال نجاح طالب غير مؤهل يختار جوابه عن كل سؤال عشوائيا.

ب ـ مع بقاء عدد الأسئلة ودرجة النجاح كما هي، كم يجب أن يكون عدد

الاختيارات المطروحة أمـام كل سؤال ليصبح احتمال نجاح طالب يختار جـوابه عشوائيا أقل من 0.01؟

جـ ـ في حال وجود اختيـارين فقط ، كم يجب أن تكون درجة النجاح بحيث لا يزيد احتمال نجاح طالب يختار جوابه عشوائيا على الواحد في المائة؟

الحل

ا ـ ليكـن X عـدد الأجوبـة الصحيحـة ، فلدينـا $p = 1/3$ ، $n = 50$ ، والمطلوب $P(X \geq 20)$. وباستخدام التقريب الطبيعي نجد :

$$\mu = np = 50 \times \frac{1}{3} = \frac{50}{3} \;,\; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$$

$$P(X \geq 20) \approx P\left(Z \geq \frac{19.5 - \frac{50}{3}}{\frac{10}{3}}\right) = 1 - F(0.85) = 1 - 0.8023$$
$$= 0.198$$

ب ـ

$$P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{19.5 - 50p}{\sqrt{50\,p(1-p)}}\right) \leq 0.01$$

$$F\left(\frac{19.5 - 50\,p}{\sqrt{50P\,(1-p)}}\right) \geq 0.99$$

$$\frac{19.5 - 50\,p}{\sqrt{50\,p(1-p)}} \geq 2.33$$

والمطلوب قيمة p التي تحقق هـذه المتباينة وتجعـل المقدار $19.5 - 50p$ موجبا كما ينبغي أن يكون . وبتربيع الطرفين والإصلاح نجد :

$$2771.45\,p2 - 2221.45\,p + 380.25 \geq 0$$

وهذه تتحقـق إذا كان $p > 0.55$ أو $p < 0.248$. ولكن قيـم p الأكبر مـن 0.55 مرفـوضة لأنها تجعل $19.5 - 50p$ سـالبا . وبما أن عـدد الاختيارات هـو بالضرورة عـدد

صحيح فعلينا أخذ أول نسبة تقل عن 0.248 ويكون جداؤها بعدد صحيح مساويا للواحد تماما. والنسبة المطلوبة هي إذا 0.2 ، وهذا يعني أن عدد الاختيارات المطروحة أمام كل سؤال ينبغي أن تكون خمسة.

جـ ـ المطلوب تحديد عدد صحيح a يحقق المتباينة التالية:

$$P(X \geq a) \leq 0.01$$

حيث $n = 50$ ، $p = 1/2$ ، وبالتالي $\mu = 25$ ، $\sigma = \sqrt{12.5} = 3.54$.

$$P(X \geq a) \approx P\left(Z \geq \frac{a - \frac{1}{2} - 25}{3.54}\right) \leq 0.01$$

أي

$$F\left(\frac{a - 25.5}{3.54}\right) \geq 0.99$$

$$\frac{a - 25.5}{3.54} \geq 2.33 \Leftrightarrow a = 34 \; .$$

تمارين (٥ ـ ٥)

١) عند تصالب حبتي بازيلاء لكل منها زوج من المورثات (أحمر، أبيض) يُتوقَّع أن تكون زهور ربع النسل بيضاء. إذا فحصنا 64 نبتة ناتجة عن مثل هذا التصالب فما احتمال أن نجد 16 منها بالضبط ذات زهور بيض؟

٢) نسبة القطع غير الصالحة التي تنتجها آلة هي 20% . أحسب بصورة تقريبية احتمال أن تتضمن عينة عشوائية من 400 قطعة من إنتاج هذه الآلة أكثر من 96 قطعة غير صالحة؟

٣) نقذف حجر نرد 300 مرة، ونعتبر الحصول على 1 أو 2 «نجاحا». استخدم تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي لحساب احتمال ألا يحيد عدد النجاحات عن 100 بأكثر من 15 .

٤) في بلدة كبيرة يعطي نصف الناخبين، عادة، أصواتهم للمرشح A . ويسأل كل من 20 باحثا إحصائيا عينة عشوائية من 16 من الناخبين عن المرشح المفضل. استخدم جدول التوزيع الطبيعي لحساب تقريبي لعدد الباحثين الذين تتوقع أن يفيدوا بأن أقل من 6 من عينتهم فضلوا المرشح A .

٥) يزرع رجل في حديقة منزله بذور زهور يقال أن 60% منها ينبت. إذا زرع 60 بذرة فما احتمال أن ينبت منها 15 بذرة أو أقل؟

٦) لتعيين مشرف على آلة حاسبة الكترونية تتطلب إحدى الشركات من المرشحين اجتياز اختبار كتابي. وتتألف ورقة الامتحان من 100 سؤال متعدد الاختيارات، ولكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة أحدها فقط صحيح. والنجاح في الاختبار يقتضي الإجابة الصحيحة على 40 سؤالا، على الأقل. والمطلوب

ا ـ احتمال نجاح متقدم يختار الجواب على كل سؤال عشوائيا؟

ب ـ أكبر عدد من الأسئلة ينبغي أن تتضمنها ورقة الامتحان إذا أردنا لاحتمال نجاح متقدم يختار أجوبته عشوائيا أن لا يتجاوز الـ 1% ؟

٧) 25% من تلاميذ مدرسة لم يكن في سجلهم خلال عام دراسي بأكمله أي يوم غياب بسبب المرض. وفي الصف السادس من هذه المدرسة يوجد 120 تلميذا. أوجد عددا r بحيث يكون احتمال أقل من r تلميذ صف سادس بدون أي يوم غياب مرضي يساوي 0.01 أعرض الفرضيات التي اعتمدت عليها؟

٨) إذا كان 55% من الناخبين في مدينة كبيرة يؤيدون قضية فما احتمال أن تظهر عينة عشوائية من 100 ناخب من هذه المدينة أغلبية لصالح القضية؟

٩) احتمال أن نستكمل بنجاح سلسلة من العمليات في تجربة معينة هو 0.44 . إذا بدأنا 65 من مثل هــذه التجـارب بصـورة تضمن استقــلال كل تجربـة عن غيرهــا من التجارب، فما احتمال أن نستكمل بنجاح أقل من 25 منها؟ بين أنه إذا كان احتمال النجاح 0.04 فقط فإن احتمال أربع نجاحات على الأقل هو حوالي 1/4 ؟

١٠) بـالإشارة إلى التمـرين ١٥ من مجموعـة التمارين (٣ ـ ١) هل يمكنك الآن إعطـاء جواب تقريبي؟

١١) بالإشارة إلى التمرين ١٦ من مجموعـة التمارين (٣ ـ ١)، هل يمكن إعطاء جواب تقريبي؟

(٥ ـ ٧) فترة ثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معروف

ذكرنا عبر هذا الكتاب أن الإحصاء يهدف إلى التنبؤ أو اتخاذ قرار حول خاصة من خصائص مجتمع اعتمادا على المعلومات المتيسرة من عينة نأخذها من هذا المجتمع. وكما يـوحي عنـوان الفقــرة فإن المجتمع الـذي ينبغي دراستـه هـو مجتمـع يخضع للتـوزيع الطبيعي، أو مجتمع موصوف رياضيا بنمـوذج هو النموذج الطبيعي. وأن الخاصة التي تهمنا من خصائص هذا المجتمع هي متوسطه μ ، مثلا، مع افتراض لأن تباينه معروف ويساوي σ^2 . وما نريـده هنا هو تحديد فترة، أي تحديـد عددين حقيقيين، نستطيع أن نقول، بثقة عالية، إن المتوسط يقع بينهما.

لنأخـذ عينـة عشوائيـة حجمهـا n مـن هـذا المجتمـع، ولنرمــز لمقاديرهـا بـ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ولمتوسطها بـ $\bar{X}$. فكما رأينا في الفقرة [٥ ـ ٤ (الخاصة ٣)]، يتوزع $\bar{X}$ وفق التوزيع الطبيعي $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. ومعـرفة التوزيع الاحتمالي لـ $\bar{X}$ يعني بـالنسبة لنا

الشيء الكثير، إذ نستطيع تقديم وصف رياضي لمجتمع القياسات الموافق لـ $\bar{X}$ ، أي للقيم كافة التي يمكن أن يأخذها المتوسط $\bar{X}$ لو أننا قمنا بأخذ عدد هائل من العينات المختلفة ذات الحجم n من هذا المجتمع. وسيسمح لنا هذا التوزيع بالإجابة بيسر وسهولة على أسئلة هامة من النوع: ما نسبة العينات التي يتجاوز متوسطها قيمة محددة؟ أو يقل عن قيمة محددة؟ أو يقع بين عددين محددين؟ الخ. وبصورة عامة، يمكننا اعتمادا على معلوماتنا من الفقرة (٦ ـ ٣) أن نكتب:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

و

$$P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

وهذا يكافىء:

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

أو

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{n}\right) = 1 - \alpha$$

وفي هذه العبارة يمكن معرفة $Z_{\alpha/2}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري حالما نحدد قيمة α ، و σ معروف، و n حجم العينة محدد سلفا. وإذا أمعنا النظر، سنجد منطوق هذه العبارة قبل أخذ العينة كالتالي:

إن نسبة $100\ (1 - \alpha)\%$ من العينات ذات الحجم n التي يمكن أخذها من هذا المجتمع ستؤدي إلى قيمة لـ $\bar{X}$ بحيث تتضمن الفترة التي تبدأ بالعدد $\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ وتنتهي بالعدد $\bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ القيمة الصحيحة لمتوسط المجتمع μ . ويسمى $\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حد الثقة الأدنى و $\bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حد الثقة الأعلى.

وتيسيرا للفهم، ولتشكيل تصور محسوس للفكرة التي نطرحها هنا، دعنا نحدد قيمة لـα، ولتكن 0.05، وعندئذ $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$. ويكون $1 - \alpha = 0.95$. وتصبح المقولة التي تشكل منطوق العبارة الاحتمالية أعلاه كالتالي:

إن نسبة 95% من العينات ذات الحجم n التي يمكن أخذها من هذا المجتمع ستؤدي إلى قيمة لـ $\bar{X}$ بحيث تتضمن الفترة

$$\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

القيمة الصحيحة لمتوسط المجتمع μ .

وعندما نأخذ العينة سنحصل على قيمة محددة $\bar{x}$ للمتغير العشوائي $\bar{X}$ ، وسنجد فترة معرفة تماما هي الفترة الممتدة بين العدد $\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ والعدد $\bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ، وهذه الفترة إما أن تتضمن القيمة الصحيحة μ أو لا تتضمنها وليس هناك خيار ثالث. لم يعد هناك احتمالات للموقف، فقد أطلقنا طلقة على الهدف (أخذنا عينة وحددنا فترة ثقة) والنتيجة هي حتما واحدة من اثنتين فإما أننا أصبنا الهدف (الفترة تغطي μ) أو أننا لم نصبه (الفترة لا تغطي μ). وبما أننا نعلم قبل أخذ العينة أن نسبة عالية من العينات، (95% منها) تصيب الهدف، فستتولد عندنا ثقة عالية بأن العينة التي حصلنا عليها قد أصابت فعلا، مما يقترح تسمية النسبة العالية تلك «معامل ثقة». فنقول إن الفترة الناتجة هي فترة ثقة تتضمن μ بمعامل ثقة يبلغ 95%. والله سبحانه وتعالى وحده يعلم ما إذا كانت العينة التي حصلنا عليها حسنة الطالع (من بين الـ 95% التي تغطي القيمة الصحيحة للمتوسط μ) أم أنها سيئة الطالع (من بين الـ 5% التي يجانبها الصواب، إذ لا تغطي الفترة الناشئة عنها القيمة الصحيحة للمتوسط μ) .

وبالطبع يمكن أن نكون أشد تحفظا فنأخذ $\alpha = 0.01$ ويكون معامل الثقة $100\,(1 - \alpha) = 99\%$. ومن الطبيعي أن تكون الفترة التي نحصل عليها في هذه الحالة

أطول من سابقتها المقابلة لمعامل ثقة 95% . كما يمكن، على الوجه الآخر، أن نكون أقل تحفظا فنأخذ $\alpha = 0.10$ ، ويكون معامل الثقة 90% لفترة تمتاز بأنها أقصر من سابقتيها .

مثال (٥ ـ ١٧)

يمثل البيان الإحصائي التالي إنتاج عشر شجيرات من الطماطم مقاسا بالكيلوغرام .

2.3, 2.6, 2.2, 3.1, 4.0, 1.9, 2.7, 1.9, 3.3, 3.0

ونعلم أن قياسات الإنتاج في مجتمع شجيرات الطماطم يوصف بتوزيع طبيعي تباينه $\sigma^2 = 0.36$. أحسب 90% ، 95% ، و 99% فترة ثقة لمتوسط الإنتاج μ .

الحل

متوسط العينة $\bar{x}$ هو:

$$\bar{x} = \frac{2.3 + 2.6 + \ldots + 3.0}{10} = 2.7$$

90% فترة ثقة :

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.05} = 1.645 \text{ ، } \alpha/2 = 0.05 \text{ ، } \alpha = 0.10 \text{ ، } 1 - \alpha = 0.9$$

وتكون الفترة المطلوبة :

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7 \pm 1.645 \frac{\sqrt{0.36}}{\sqrt{10}} = 2.7 \pm 0.31 = (2.39, 3.01)$$

95% فترة ثقة :

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96 \text{ ، } \alpha/2 = 0.025 \text{ ، } \alpha = 0.05 \text{ ، } 1 - \alpha = 0.95$$

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7 \pm 1.96 \frac{0.6}{3.16} = 2.7 \pm 0.37 = (2.33, 3.07)$$

99% فترة ثقة :

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.005} = 2.58 \text{ ، } \alpha/2 = 0.05 \text{ ، } \alpha = 0.10 \text{ ،} 1 - \alpha = 0.99$$

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.7 \pm 2.58 \frac{0.6}{3.16} = 2.7 \pm 0.49 = (2.21\,,\,3.19)$$

لاحظ أن فترة الثقة تتسع مع ازدياد معامل الثقة .

في هذا المثـال نخرج، مثـلا، بالتقديـر التالي: «بمعـامل ثقة 95% يقع متـوسط الإنتاج μ بين 2.33 كغ و 3.07 كغ. ولكن هب أننا اتفقنا على اعتبار منتصف الفترة قيمة تقديرية أو تقديرا لـ μ، فهذا شيء منطقي تماما إذ نقول إن متوسط العينة $\bar{X} = 2.7$ هو تقديرنـا لمتوسط المجتمع الذي جاءت منه العينـة، ولكن الاكتفاء بذلك لا يضيف أي جديد إلى ما هـو معروف تاريخيا، إذ يلجأ كل خبير يريـد القيام بعملية تخمين إلى أخذ عينة تمثل المجتمع، في رأيـه، تمثيلا جيدا، ثم يأخـذ معلومات العينة ليعممهـا بصورة مباشرة على المجتمع. وكأن العينة هي صـورة مصغرة للمجتمع، وليس علينا إلا تكبير هذه الصورة حتى نحصل على صورة المجتمع. ولكن ماذا عن الخطأ في هذا التقدير؟ لو رجعنا إلى العبارة الاحتمالية في مطلع الفقرة وهي:

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

لوجدنا أنها مكافئة للعبارة:

$$P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| < Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

و $|\bar{X} - \mu|$ يمثل الخطأ المطلق للتقدير، فهو القيمـة المطلقة لحيدان التقدير عن الشيء المراد تقديره. والعبارة الإحتمالية تقول إنه باحتمال يبلغ $(1 - \alpha)$ لا يتجاوز الخطأ في هذا التقديـر المقدار $\pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، وفي المثال السابق يمكن القـول، مثلا، إنه في 95% من العينات الممكنـة سوف لا يحيد متـوسط العينة عن متـوسط المجتمع بأكثر من 0.37 كغ زيادة أو نقصـانا.وبعبـارة أخرى، سوف لا يتعـدى الخطأ في تقديـرنا إلا فيما

ندر، القيمــة 0.37 كغ زيـادة أو نقصـانـا . وسنطلق على المقـدار $Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ، مع شيء من التجـاوز، اسم «الحد الأعلى لخطأ التقـديـر» ، فهـو في حقيقة أمـره حـد أعلى تقريبي لخطأ التقدير. وسنرمز له بالرمز e ، ونكتب :

$$e= Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ولو سألنا الخبير التقليدي عن الخطأ في تقديره لعجز عن الإجابة إذ ليس لديه أية وسيلـة تسمح لـه بـذلك . وبينما يعتمد الخبير التقليـدي إعتمادا كليـا على العينـة التي أخذها فإن الإحصـائي اليوم لا يعتمد على العينة إلا كجزء من صـورة متكاملة تتضمن إلى جانب العينة المأخوذة العينات كافة التي كان يمكن الحصول عليها لو أنه كرر تجربة أخذ العينـة عددا هائلا من المرات . وهـو ما يسمى بتوزيع المعـاينة ، ممثلا هنـا بتوزيع المتوسط $\bar{X}$. وهذه هي الإضافة الجديدة لعلـم الإحصاء في مسألة كهذه . (انظر الفقرة (٥ ـ ٧) والفقرة (٥ ـ ٩)) .

ويتضح من عبارة e أنـه يمكننـا التحكم في حجم الخطأ من خـلال التحكم في حجم العينة n ، فالمقدار e يتناسب عكسا مع الجذر التربيعي لحجم العينـة . ولو أردنا تخفيض e إلى نصف مـا هو عليـه لاحتجنا إلى زيادة حجـم العينة إلى أربعـة أضعاف . وبـالطبع يمكننا قبل تنفيـذ البحث الإحصـائي ، أي قبل أخذ العينـة ، تصميم حجم العينة n بصورة تتناسب مـع مقدار الخطأ الذي يمكن التساهل فيـه . وسنوضح الفكرة بمثال .

مثال (٥ ـ ١٨)

بالإشـارة إلى المثال السـابق (٥ ـ ١٧)، لنفرض أننـا نريد تقـدير متـوسط إنتاج شجيرة الطماطم μ بحيث لا يزيد الخطأ عن 0.2 كغ إلا باحتمال زهيد لا يتجاوز الواحد في المائة . فكم يجب أن يكون حجم العينة؟

الحل

الحد الأعلى للخطأ e يساوي 0.2 ،

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.005} = 2.58 \qquad \alpha = 0.01$$

$$e = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \frac{0.6}{\sqrt{n}} \le 0.2$$

ومنه :

$$0.2\sqrt{n} \ge 1.548$$

$$\sqrt{n} \ge 7.74 \ , \ n \ge 59.9$$

أي أن حجم العينة يجب أن لا يقل عن 60 .

تمارين (٥ ـ ٦)

١) بفرض عينات عشوائية من مجتمعات طبيعية تباينها معروف ، أوجد فترات ثقة للقيمة الحقيقية μ لمتوسط المجتمع بمعامل الثقة المبين في كل حالة :

ا ـ $n = 9$ ، $\bar{X} = 4$ ، $\sigma^2 = 16$ ، معامل الثقة 90% .

ب ـ $n = 100$ ، $\bar{X} = 29$ ، $\sigma^2 = 49$ ، معامل الثقة 95% .

جـ ـ $n = 64$ ، $\bar{X} = 4$ ، $\sigma^2 = 100$ ، معامل الثقة 99% .

٢) مجتمع طبيعي انحرافه المعياري $\sigma = 0.75$. كم يجب أن يكون حجم عينة مأخوذة من هذا المجتمع كي لا يزيد الحد الأعلى للخطأ عن 0.4 ، وذلك باحتمال 0.95 ؟

٣) نعلم أن الخطأ المرتكب في قياس طول ، عند استخدام جهاز لقياس الأطوال ، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي ، بمتوسط يساوي الصفر ، وانحراف معياري 1 مم .

ا ـ أحسب احتمال أن يقل الخطأ عند استخدام الجهاز لمرة واحدة عن 0.5 مم .

ب ـ إذا استخدم الجهاز بصورة مستقلة 9 مرات لقياس طول معين ، فاحسب احتمال أن يقع متوسط القياسات التسعة في حدود 0.5 مم من القيمة الحقيقية للطول .

٤) مجتمع طبيعي انحرافه المعياري $\sigma = 0.75$ ، كم يجب أن يكون حجم عينة مأخوذة من هذا المجتمع كي لا يزيد الحد الأعلى للخطأ عن 0.4 ، وذلك باحتمال 0.95 ؟

٥) يريد إحصائي تحديد متوسط الأجر اليومي لمستخدمي مهنة معينة. ويريد باحتمال 0.95 حدا أقصى للخطأ قدره 9 ريالات. ومن دراسات مماثلة أخرى يعلم أن بإمكانه افتراض مجتمع طبيعي انحرافه المعياري $\sqrt{650}$ ريالا. ما هو حجم العينة التي ينبغي أن يخطط للحصول عليها؟

٦) إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع طبيعي هو $\sigma = 5$. ما هو حجم العينة التي ينبغي أخذها حتى نطمئن باحتمال قدره 0.95 إلى عدم اختلاف متوسط العينة عن متوسط المجتمع بأكثر من الواحد؟

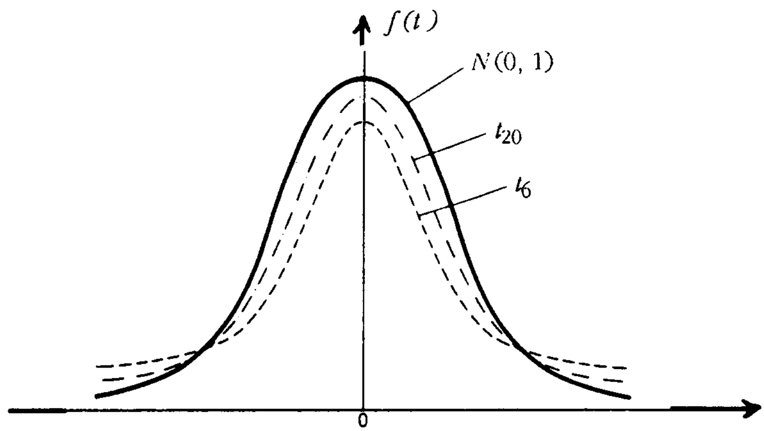
(٥ ـ ٨) فترة ثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه غير معروف وحجم العينة صغير

لو تتبعنا المناقشة في الفقرة السابقة لوجدنا أنه لا بد من تعويض σ ، التي افترضناها معروفة هناك، بتقدير لها من العينة. والتقدير الذي تمليه البداهة هو اعتماد s ، الانحراف المعياري للعينة، كتقدير لـ σ ، الانحراف المعياري للمجتمع الذي جاءت منه العينة. وهكذا يأخذ المقدار $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ ، الذي يتبع تماما التوزيع الطبيعي المعياري، الصيغة:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

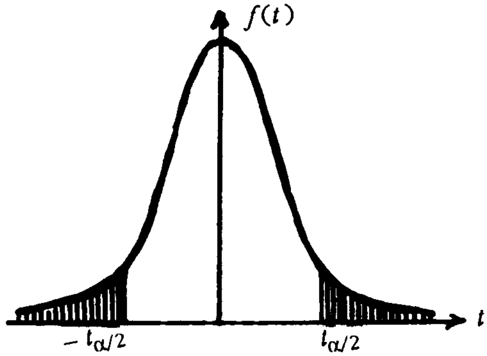
والمتغير الجديد الذي رمزنا له بـ t يحوي مركبة عشوائية في البسط هي $\bar{x}$ ومركبه عشوائية في المقام هي s. ولم يعد توزيعه هو التوزيع الطبيعي المعياري. وقد تمكن «ستيودنت» ، وهو لقب لكاتب إحصائي كان ينشر أبحاثه بتوقيع «ستيودنت»، أن

يشتق العبارة المضبوطة لتوزيع t ويسمى هذا التوزيع في كتب الإحصاء المختلفة «التوزيع t»، أو توزيع «ستيودنت». وفي الشكل (٥ ــ ١٠) نجد أمثلة من منحنيات الكثافة لهذا التوزيع. فهو متناظر حول المحور الرأسي، شأنه في ذلك شأن منحنى الكثافة الطبيعي المعياري. ويعتمد المنحنى على حجم العينة n ونصطلح على تسمية المقدار $n-1$، «عدد درجات الحرية» ونرمز له بـ ν (حرف يوناني ينطق نو). والجدول ٢ في الملحق يعطي القيمة الموجبة لـ t التي يقع إلى اليسار منها $(1-\alpha)$ من المساحة الكلية تحت المنحنى وذلك من أجل قيم مختلفة لـ α و ν. وسنرمز بـ $t_\alpha(n-1)$ للدلالة على قيمة المتغير t في صلب الجدول الواقعة في ملتقى السطر $n-1$ والعمود الذي عنوانه $1-\alpha$. وعلى سبيل المثال، لإيجاد $t_{0.025}(14)$، ندخل الجدول وفق السطر 14 ونتحرك حتى نصل إلى العمود الذي عنوانه 0.975 لنجد القيمة 2.145.



شكل (٥ ـ ١٠) أشكال مقارنة للتوزيعين t_6، t_{20} والتوزيع $N(0, 1)$.

وإذا أخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ حيث μ و σ^2 غير معروفين، وكالعادة رمزنا بـ $\bar{x}$ و s لمتوسط العينة وانحرافها المعياري فيمكننا إستنادا إلى تناظر التوزيع t (انظر الشكل (٥ ـ ١١)) كتابة:



شكل (٥ ـ ١١)

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

أو

$$P\left(\frac{-S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1) < \bar{X}-\mu < \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

أو

$$P\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

وتكون فترة الثقة للمتوسط μ بمعامل ثقة $100(1-\alpha)\%$ هي $\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1)\ ,\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{\alpha/2}(n-1)\right)$. ولوضع فترة ثقة نحسب إذا $\bar{X}$ و S من العينة وقيمة $t_{\alpha/2}(n-1)$ من جدول التوزيع t ثم نعوض.

مثال (٥ ـ ١٩)

قسنا ارتفاع خمس عشرة شجيرة باذنجان بعد فترة من زرعها فكان متوسط الإرتفاع 83 سم بانحراف معياري 5.8 سم. ضع 95% فترة ثقة لمتوسط الارتفاع في المجتمع الذي اخترنا منه الشجيرات الخمس عشرة في العينة، مفترضا أن ارتفاع الشجيرة في المجتمع يخضع للتوزيع الطبيعي.

الحل

حـــدا الثقـــة همـــا $\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{0.025}\,(14)$. ومـن جـدول التوزيع t نجـــد $t_{0.025}\,(14) = 2.145$ ، لاحظ أنه لـو كان σ معروفا لكان هذا العدد 1.96 فقط)، وتكون فترة الثقة بمعامل 95% هي :

$$83 \pm 2.145 \times 5.8 / \sqrt{15}$$

أي من 79.8 سم إلى 86.2 سم .

وكلما ازداد حجم العينة أصبح S تقديرا أفضل لـ σ وبالتالي اقتربت قيم t من قيم المتغير الطبيعي المعياري Z الموافقة لها. ولو نظرنـا في السطور الأخيرة في جدول التوزيع t (السطور التـي تلي السطر 30) لوجـدنا أن الفـروق بين قيم t وقيم Z المقابلـة لها تصبح صغيرة، وفي السطر الأخير من الجدول حيث كتب حـذاءه الرمز "∞" تتطابق قيم t مع قيم Z المقابلة .

مثال (٥ ـ ٢٠)

وضعت عينـة من 12 فأرا تجريبيـا على نظام تغـذية معين خـلال الأشهر الثـلاثة الأولى من حياتها وقيست الزيادة في وزن كل فأر بالغرام فكانت كما يلي :

55, 62, 54, 58, 65, 64, 60, 62, 59, 67, 62, 61

والمطلوب وضع فترة ثقة بمعامل ثقة 90% لمتوسط الزيادة في الوزن خلال الأشهر الثلاثة الأولى من حياة مجتمع الفئـران الذي جاءت منـه العينة، علما أنه يمكن اعتبـار التوزيع الطبيعي توزيعا مناسبا لمتغير زيادة الوزن خلال الأشهر الثلاثة الأولى.

الحل

نحسب متوسط العينة وانحرافها المعياري فنجد $\bar{X} = 60.75$ ، $S = 3.84$ ، ولدينا $1 - \alpha = 0.90$ ، $\alpha = 0.10$ ، $\alpha/2 = 0.05$ ، ومن جدول التوزيع t نجد :

$$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.05}(11) = 1.796$$

بالتعويض نجد فترة الثقة المطلوبة :

$$60.75 \pm \frac{3.84}{\sqrt{12}} \times 1.796 = 60.75 \pm 1.99$$

أي من 58.76غ إلى 62.74غ .

تمارين (٥ ـ ٧)

١) في ستة اختبارات لتجميع وتركيب قطع آلية معينة ، استغرق وقت التجميع والتركيب 13 ، 14 ، 12 ، 16 ، 13 ، و 11 دقيقة . مفترضـا أن زمن التجميع والتركيب يتبع التوزيع الطبيعي ، ضع فترة ثقة لمتـوسط الزمن الحقيقي للتجميع والتركيب بمعامل ثقة 99% .

٢) عينـة عشوائيـة من 30 درجـة من درجات اختبـار للـذكـاء أعطي لطلاب المرحلـة الثانوية ، أنتجـت متوسطا قدره 423 وإنحرافا معيـاريا $S = 68$. أوجـد فترة ثقـة لمتوسط المجتمع بمعامل ثقة 95% ، مفترضـا أن درجات الاختبـار في المجتمع تتبع التوزيع الطبيعي .

٣) وجد طبيب أسنان في فحصه الدوري لستة طلاب ابتدائي أنهم احتاجوا إلى 2 ، 3 ، 6 ، 0 ، 4 ، و 3 عمليات حشوة .

ا ـ إذا استخدم الطبيب متوسط هذه العينة كتقـدير لمتوسط المجتمع الذي جاءت منه العينـة فماذا يمكنه أن يقـول باحتمال 0.95 عن الحد الأعلى للخطأ الـذي ارتكبه؟

ب ـ ضع فترة ثقة لمتوسط المجتمع بمعامل ثقة 95% .

جـ ـ ما الفرض الذي استندت إليه في حساباتك؟

٤) أحد الثوابت الفيزيائية المهمة هو e/m نسبة شحنة الكهروب (الإلكترون) إلى كتلته. وفي تجربة فيزيائية لقياس هذا الثابت أعيدت، بصورة مستقلة، 12 مرة، كانت النتائج التالية:

$$1.7604 \times 10^7 , 1.7638 \times 10^7 , 1.7609 \times 10^7$$
$$1.7563 \times 10^7 , 1.7556 \times 10^7 , 1.7582 \times 10^7$$
$$1.7526 \times 10^7 , 1.7663 \times 10^7 , 1.7624 \times 10^7$$
$$1.7620 \times 10^7 , 1.7605 \times 10^7 , 1.7621 \times 10^7$$

ا - ما تقديرك للقيمة الحقيقة لـ e/m ؟ وما هو الحد الأعلى لخطأ هذا التقدير باحتمال 0.95 ؟

ب - ضع فترة ثقة لقيمة e/m بمعامل ثقة 99% .

٥) تأتي مادة غذائية من مصنع معين في علب مكتوب عليها «الوزن الصافي 38 أونزة». وقد وجد أن الوزن الذي تحتويه كل من عينة عشوائية من 6 علب كان كما يلي:

34.06, 39.65, 34.75, 40.00, 39.50, 34.25

ضع فترة ثقة لمتوسط محتوى العلبة من إنتاج المصنع من تلك المادة الغذائية، وذلك بمعامل ثقة 98% .

(٥ - ٩) فترة الثقة لمتوسط مجتمع في حالة عينات كبيرة الحجم

لا نفترض هنا أن المجتمع الذي نأخذ منه العينة مجتمع طبيعي، ولكننا نفترض أن حجم العينة n كبير إلى الحد الذي يسمح بالاستفادة من نظرية النهاية المركزية، واعتبار توزيع $\bar{X}$ ، متوسط العينة، مطابقا تقريبا للتوزيع الطبيعي. وبالتالي تطبيق ما جاء في الفقرة (٥ - ٧) بحذافيره. فإذا كان تباين المجتمع σ^2 معروفا كانت فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ ، بمعامل ثقة $100\ (1 - \mu)\%$ هي

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث تؤخذ قيمة $Z_{\alpha/2}$ من جدول التـوزيع الطبيعي المعياري. وإذا كـان التباين σ^2 غير معروف، وغالبا ما يكون الأمر كذلك في التطبيقات العملية، فإن تباين العينة S^2 يشكل تقديرا جيدا لـ σ^2، نظرا لكبر حجـم العينة، مما يسمح بتعـويض S بدلا من σ في فترة الثقة لتصبح:

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

وكما رأينا في الفقـرة (٥ ـ ٧) نعتبر متـوسط العينة $\bar{X}$ تقـديرا لمتـوسط المجتمع μ ويكون الحد الأعلى التقريبي لخطأ التقدير:

$$e= Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وفي حالة σ غير معروف نعوض عن σ بـ S لنجد:

$$e= Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبما أن معامل الثقة الأكثر استخدامـا في التطبيقات العملية هو المعامل 0.95 أو 95% .
فقد جرت العادة على كتابة الحد الأعلى التقريبي لخطأ التقدير على الشكل:

$$e= 1.96\ \sigma_{\bar{X}} = 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث نعني بـــ $\sigma_{\bar{X}}$ الانحراف المعياري لمتـوسط العينة $\bar{X}$، وهـو وفقا لنظـرية النهـاية المركزيـة $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. وبما أن النتائج تقـريبية، علي أي حال، فقـد جرت العـادة أيضا على استخدام 2 بدلا من 1.96 ، تسهيلا للحسابات، وهكذا نكتب:

$$e= 2\sigma_{\bar{X}} = 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

أو في حالة σ غير معروف:

$$e= 2\frac{S}{\sqrt{n}}$$

ويجدر التنويه بخطأ شائع بالنسبة إلى المبتـدئين، ينبغي الانتباه إليه، وهو استخدام 2σ كحد أعلى تقريبي للخطأ بدلا من $2\sigma_{\bar{X}}$.

مثال (٥ ـ ٢١)

لنفرض أننا نرغب في تقدير متوسط الإنتاج اليومي في شركة للصناعات الكيميائية. وقد سجلنا الإنتاج اليومي لفترة $n = 60$ يوما فكان متوسط هذه العينة وانحرافها المعياري بالأطنان:

$$S = 23 \quad , \bar{X} = 941$$

والمطلوب تقدير μ متوسط الإنتاج اليومي في هذه الشركة.

الحل

التقدير الأفضل هو $\mu = 941$ طنا في اليوم. وحدود الخطأ بالزيادة أو النقصان في هذا التقدير هي:

$$\pm 2\frac{S}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2(23)}{\sqrt{60}} = 5.94$$

(تذكر أننا عندما نستخدم العدد 2 يكون معامل الثقة 95%). وهكذا نقول، بمعامل ثقة 95%، إن التقدير 941 هو في حدود 5.94 طنا، زيادة أو نقصانا، من القيمة الحقيقية لمتوسط الإنتاج.

مثال (٥ ـ ٢٢)

نعلم أن عمر مركبة معينة من دائرة كهربائية يتبع توزيعا احتماليا ملتويا. أخذنا عينة عشوائية من 250 من هذه المركبات فكان متوسط العمر فيها 840 ساعة بانحراف معياري $S = 21.98$ ساعة. أوجد فترة ثقة تقريبية لمتوسط العمر في مجتمع إنتاج هذه المركبات، مستخدما معامل ثقة 95%.

الحل

فترة الثقة المطلوبة هي:

$$\bar{X} \pm 2\frac{S}{\sqrt{n}}$$

أي

$$840 \pm 2\,\frac{21.98}{\sqrt{250}} = 840 \pm 2.78$$

وهكذا نقـدر بمعامـل ثقة 95% أن متوسـط العمـر في مجتمع إنتاج هـذه المركبات واقع بين 837.2 و 842.8 ساعة .

مثال (٥ ـ ٢٣)

نريد تقدير μ متوسط الطول في إنتاج مصنع للبراغـي في حدود خطأ لا يزيد عن 1/2 مم إلا باحتمال لا يتجـاوز الخمسة في المائة . فكم يجب أن يكـون حجم العينة علما بأننا نعرف من سجلات الإنتاج السابقة أن الانحراف المعياري للطول يساوي 1.2 مم؟

الحـــل

$$e = Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\,\frac{1.2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$

ومنه

$$\sqrt{n} \geq 2\,(1.96)(1.2) = 4.704$$

$$n \geq 22.1$$

أي أن حجم العينة يجب ألا يقل عن 23 .

تمارين (٥ ـ ٨)

١) من المعروف أن عمر أحـد عناصر دائرة كهربائيـة يتبع توزيعا احتماليا ملتـويا . وقد وجدنا أن متوسط العمـر في عينة عشوائية من 300 عنصرا يساوي 920 ساعة بتباين يساوي 483 ساعة^2 . ضع فترة ثقـة تقـريبية لمتـوسط العمـر الحقيقي لهذا العنصر مستخدما معامل ثقة 95% .

٢) في عينة عشوائية من 100 كيس تفاح كتب عليه «الوزن الصافي 1 كغ» وجدنا أن متوسط الوزن 1002 غراما بتباين يساوي 144 غ^{2} . ضع فترة ثقة تقريبية لمتوسط وزن التفاح الحقيقي ضمن الكيس الواحد وذلك بمعامل ثقة 90% .

٣) عينة عشوائية من 60 مخزنا أظهرت أن متوسط سعر الحليب $\bar{X} = 77.3$ سنتا للكيلوغرام، بانحراف معياري 4.2 سنتا. أوجد فترة ثقة لمتوسط سعر الحليب بمعامل ثقة 95% .

٤) مالك سيارة يريد أن يعرف المتوسط الأسبوعي للمسافة التي يسيرها مقاسة بالميل. وقد سجل المسافات التي قطعها في 52 أسبوعا متتاليا ووجد متوسطها 176 ميلا في الأسبوع، بانحراف معياري 96 ميلا. ضع فترة ثقة لمتوسط ما يقطعه في الأسبوع بمعامل 95% .

٥) يرغب مستشفى في تقدير عدد الأيام التي يحتاجها علاج مرضى يقع سنهم بين 25 و 34 سنة. وقد وجدت إدارة المستشفى أن متوسط عدد أيام الإقامة لعينة عشوائية من 500 مريض من هذه الفترة من العمر، يساوي 5.4 يوما بانحراف معياري 1.3 يوما. ضع فترة ثقة لمتوسط الإقامة في المستشفى لمجتمع المرضى الذي جاءت منه العينة، وذلك بمعامل ثقة 99% .

٦) لنفرض أن تباين مجتمع $\sigma^2 = 100$ ، وبمعامل ثقة 95% نريد أن يكون تقديرنا $\bar{x}$ في حدود 2.5 وحدة قياس من μ المتوسط الحقيقي للمجتمع. كم يجب أن يكون حجم العينة؟

٧) فيما يلي جدول التوزيع التكراري للعمر عند الزواج، لأقرب سنة، لـ 175 رجلا:

مركز الفئة	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	57.5	62.5
التكرار	28	28	43	18	9	4	2	1	0	2

ا ـ أحسب متوسط العمر عند الزواج وانحرافه المعياري .

ب ـ إذا افترضنا أن هذه الأعمار عينة عشوائية من مجتمع كبير. فاحسب بمعامل ثقة 95% فترة ثقة لمتوسط العمر عند الزواج في ذلك المجتمع .

٨) في تجربة لبنج جديد، أعطي لمائة فأر وقيس زمن الانتعاش لكل منها إلى أقرب عشر من الدقيقة، فكانت النتائج كما يلي :

45.0	58.2	55.1	52.5	61.7	52.9	70.4	62.5	71.3	50.1
84.9	60.9	35.4	64.3	75.7	48.5	41.3	53.8	66.8	37.4
32.4	50.7	82.3	71.8	66.4	49.7	51.7	56.0	88.8	64.7
77.9	41.4	52.7	53.4	57.9	51.7	55.6	44.1	85.4	67.3
87.3	52.5	46.7	48.3	60.1	66.0	77.3	46.5	54.3	52.6
53.1	67.9	55.9	64.2	68.0	48.2	41.2	56.3	79.4	80.9
58.7	49.0	51.2	70.2	54.0	74.6	51.9	42.6	95.4	51.9
83.5	70.4	76.7	47.0	55.9	43.8	49.1	60.0	38.3	44.3
63.5	45.4	57.3	54.5	73.9	64.1	80.6	68.8	73.5	84.0
65.9	58.3	59.6	59.1	46.7	51.3	44.5	54.2	63.8	56.9

والمطلوب تقدير متوسط زمن الانتعاش في المجتمع الذي جاءت منه العينة وإعطاء حد أعلى لخطأ التقدير باحتمال 0.99 .

كم فأرا تحتاج كي يكون خطأ التقدير 1 تقريبا؟

(٥ ـ ١٠) فترة الثقة لنسبة

لنفرض أن صنفا معينا A يوجد في مجتمع كبير بنسبة تساوي π . إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها n من هذا المجتمع، وعرفنا النجاح بأنه الحصول على عنصر من الصنف A ، فإن احتمال النجاح عند كل سحب هو، عمليا، π . ونسبة النجاح في

العينة هي عدد عناصر الصنف A ولنرمز لها بـ X (أي عدد النجاحات) مقسوما على حجم العينة n . وإذا رمزنا لنسبة الصنف A في العينة بـ p فإن :

$$p = \frac{X}{n}$$

وعندما ناقشنا تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي في الفقرة (٥ ـ ٦) وجدنا أنه يمكن اعتبار عدد النجاحات X مجموع عينة، وبالتالي تكون النسبة p هي متوسط العينة. وكما أن تطبيق نظرية النهاية المركزية على X يسمح لنا بالقول إن X يتوزع تقريبا وفق التوزيع الطبيعي $N(n\pi\,,\, n\pi(1-\pi))$ ، فإن تطبيق نظرية النهاية المركزية على المتوسط p يسمح لنا بالقول إن للنسبة p (نسبة النجاح في العينة) توزيعا مطابقا تقريبا للتوزيع الطبيعي $N\left(\pi\,,\, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$ ، حيث :

$$E(p) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}\, E(X) = \frac{n\pi}{n} = \pi$$

$$V(p) = V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\, V(X) = \frac{n\pi(1-\pi)}{n^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

وذلك كله شريطة أن يكون n كبيرا (مثلا أكبر من 30 في حالة قيمة لـ π ليست قريبة من الصفر أو قريبة من الواحد). وهذه النتيجة تسمح لنا بوضع فترة ثقة للنسبة π على الشكل التالي بمعامل ثقة $100(1-\mu)\%$:

$$p \pm Z_{\alpha/2}\, \sigma_p = p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

حيث σ_p تعني الانحراف المعياري للنسبة p . ووجود π المجهولة في هذه العبارة يمنع من تطبيقها. ويمكننا الاستعاضة عن π ، نسبة النجاح في المجتمع، بتقدير لها هو p ، نسبة النجاح في العينة. (تماما كما عوضنا عن σ بـ S في الفقرة السابقة). وتصبح فترة الثقة لـ π كما يلي :

$$p \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

ومن أجل معـامل ثقة 95% يمكن اعتبـار $Z_{\alpha/2}$ مساويـا لـ 2 بـدلا من 1.96 ، تسهيـلا للحساب . وهكذا نكتب فترة الثقة لـ π ، بمعامل ثقة 95% كما يلي :

$$p-2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le \pi \le p+2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

مثال (٥ ـ ٢٤)

مـن بين 300 أسـرة اخترنـاها من بلدة كبيرة وجدنا 123 أسرة تمتلك تلفازا ملونا . ضـع فترة ثقـة لنسبـة الأسر التي تمتلك تلفـازا ملونـا في مجمل البلـدة . وذلك بمعامل ثقة 95% .

الحل

لدينا $n = 300$ ، $p=\frac{123}{300}=0.41$

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{0.41\times 0.59}{300}}=\sqrt{0.00080633}=0.0284$$

وهكذا تكون فترة الثقة المطلوبة كما يلي :

$$0.41 \pm 2\,(0.0284) = 0.41 \pm 0.057$$

أي أن π واقعة بين 0.353 و 0.467 أو أن ما بين 35.3% إلى 46.7% من الأسر في هذه البلدة تمتلك تلفازا ملونا .

مثال (٥ ـ ٢٥)

تضمنت عينة من 250 من طلبة الجامعة 30 طالبا أعسر (يستخدم اليد اليسرى) . أعط فترة ثقة تقريبية بمعامل ثقة 95% لنسبة الطلاب العسر في الجامعة؟

الحل

$n = 250$ ، $p=\frac{30}{250}=0.12$

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{250}} = \sqrt{0.0004224} = 0.021$$

وتكون فترة الثقة المطلوبة :

$$0.12 \pm 2\,(0.021) = 0.12 \pm 0.042$$

أي أن ما بين 7.8% إلى 16.2% من طلبة الجامعة يستخدمون اليد اليسري .

تمارين (٥ ـ ٩)

١) اختبرنا نوعا جديدا من مصابيح آلات التصوير لتقدير p ، احتمال أن ينتج المصباح الإضاءة اللازمة وفي الوقت المناسب . ووجدنا من بين 1000 مصباح أن 920 قد عملت وفقا للمواصفات المطلوبة . والمطلوب :

ا ـ تقدير p ووضع حد لخطأ التقدير (باحتمال 0.95) .

ب ـ وضع فترة ثقة للقيمة الحقيقية p بمعامل ثقة 99% .

٢) اختبرنا عينة عشوائية من 400 صماما خاصا بأجهزة الراديو، فوجدنا من بينها 40 صماما عاطلا عن العمل . ضع فترة ثقة للنسبة الحقيقية للصمامات العاطلة في مجتمع الصمامات المنتجة من هذا النوع ، مستخدما معامل ثقة 90% .

٣) حضر كيميائي مبيدا يهدف عند تطبيقه على نوع معين من الحشرات ، إلى قتل 60% منها فكم يجب أن يكون حجم العينة المستخدمة ، إذا رغب في أن يطمئن باحتمال 0.95 إلى أنه في حدود 0.02 من النسبة الحقيقية التي يهدف إليها من الحشرات الهالكة؟

٤) كم ناخبا يجب أن تضم عينة جمعناها لتقدير نسبة الناخبين الذين يفضلون مرشحا معينا ، إذا رغبنا في أن يكون التقدير صحيحا في حدود 0.005 ؟ ولنفرض أن النسبة الحقيقية ينبغي أن تقع في جوار الـ 0.5 .

الملاحق

الملحق الأول

مراجعة في بعض المعلومات الرياضية المفيدة

١ ـ حول خاصية التجانس في عملية الجمع

لكي نستطيع جمع كميتين أو مقدارين لابـد أن تكـون وحـدة القيـاس نفسهـا للمقـدارين وجمع 10سم و 5م غير ممكـن. ولـو ادعينـا جـدلاً أن المجمـوع الناتج 15 فلا يمكــن القول إن ال 15 هـذه هي 15 سم ولا 15م. إذا 15 مـاذا؟ في الواقع لا معنى للعـدد 15 في هـذه الحالـة. ولكن لو اتخذنـا وحدة قيـاس مشتركـة، وقلنا إن 500 سـم = 5م، أو 10 سـم=0.1م، فـالجمـع يصبح ممكنـا، والجواب هـو 500سم+10سم=510سم، أو 5م +0.1م = 5.1م. ولو سألت شخصا، ما مجموع 5 كتب و 7 أقلام؟ فأجاب 12، فإنه سيشعر بالعجز والخطأ عندما تطلب منه تحديد 12 ماذا؟ إذ لا يستطيع أن يقول 12 كتابا ولا 12 قلما. وسيعود يدرك أن 5 كتب و 7 أقلام هي 5 كتب و7 أقلام، ولا يمكن التعبير عنهما في رقم واحد.

وهذه الحقيقـة البسيطة هي خـاصة أسـاسية في الجمع بصرف النظـر عن طبيعة عمليـة الجمع. ففي الجبر لا نجمع إلا الحدود المتشـابهة. و $5x^2y$ مضافـا إليها $7x^2y$ يسـاوي $12x^2y$. تماما كأننا نقول 5 كتب و7 كتب تصبح 12 كتابا. ولكن $5x^2y$ مضافا إليها $7xy$ هي $5x^2y$ و $7xy$، تماما كأننـا نقول 5 كتب و 7 أقلام، ولا يمكــن جمعهما في حد واحــد، لأنهما غير متشـابهين. وكـذلك الأمــر، يمكــن جمع $F(0.5)$ و $3F(0.5)$

لنجد $4F(0.5)$، حيث $F(0.5)$ تعني قيمة دالة F عند النقطـــة 0.5. ويمكن جمع $3\sqrt{2}$ و $5\sqrt{2}$ لنجد $8\sqrt{2}$ أما $F(0.5) + 3F(1)$، أو $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$، فستبقى كـل منهما كما وردت دون تغيير.

وتبقى الفكرة نفسهـا في الكسور العادية (الأعداد النسبيـة). فمقام الكسر يعني أننا قسمنا الواحد الصحيح إلى عدد من الأجـزاء المتساوية يساوي المقام. والبسط يعني أننا أخذنا من هـذه الأجزاء عددا يساوي البسط. و $3/4$ تعني ثلاثة أرباع. أي قسمنا الواحـد الصحيح إلى أربعة أجزاء متسـاوية وأخـذنا منها ثـلاثة أجزاء. ومقلـوب مقام الكسر يُعتبر بمثابة وحدة قياس أو شيء، والبسط يمثل عدد مـا لدينا من هذه الوحدة أو هـذا الشيء. و $9/5$ تعني تسع مـرات المقـدار $1/5$ أو تسع أخماس وهكــذا. . . ولجمع كسرين عاديين لابد إذا من توحيد المقامات حتى يصبح الجمع ممكنا ولجمع $3/4$ و $9/5$ نحـول الكسرين بحيث يكـون لهما المقـام نفسه. ومن خـواص الكسر أو العـدد النسبي نعرف أن قيمتـه لا تتغير إذا ضربنا البسط والمقام بالعـدد نفسه، وقيمة $3/4$ هي نفس قيمة $15/20$، وقيمة $9/5$ هي نفس قيمة $36/20$. إذا

$$\frac{3}{4} + \frac{9}{5} = \frac{15}{20} + \frac{36}{20} = \frac{15+36}{20} = \frac{51}{20}\ .$$

لأن $15/20$ هـي 15 مـرة الـ $1/20$، و $36/20$ هي 36 مرة الـ $1/20$. ومجموعهما هو $15 + 36 = 51$ مرة الـ $1/20$، أو $51/20$.

ولا تـوجـد مشكلـة في ضرب كسرين عـاديين فالجواب هـو كسر بسطـه جـداء البسطين ومقامه جداء المقامين.

$$\frac{3}{4} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{20}$$

وبصورة عامة:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

وينطبق على الطرح ما ينطبق على الجمع. وطرح عدد b من عدد a، أي $a - b$، هو جمع العدد السالب $(-b)$ إلى العدد a، أي $a + (-b)$. (تذكر أننـا نقرأ في اللغات

الأجنبيـة من اليسار إلى اليمين). وكـذلك ينطبق على التقسيم مـا ينطبق على الضرب. وقسمة a على b ما هي إلا ضرب a بمقلوب b، $a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ولتقسيـم كسر عادي على كسر عادي آخر نضرب الأول في مقلوب الثاني. وهكذا يكون:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

وعلى سبيل المثال:

$$\frac{3}{4} \div \frac{9}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{15}{36}$$

ولحساب كسر من عدد معين نضرب هذا الكسر بالعدد. ولحساب ثلث الستة، مثلا، نضرب 6 بـ 1/3 فنجد

$$\frac{1}{3} \times 6 = \frac{1}{3} \times \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$$

ولو أردت حساب خمسة أسباع الثلاثين تكتب ببساطة:

$$\frac{5}{7} \times 30 = \frac{5}{7} \times \frac{30}{1} = \frac{150}{7}$$

٢ ـ النسب المئوية

يتألف العـــدد العشري من جـــزئين، أحــدهما صحيح يقـع على اليســـار من الفاصلـة، والآخـر عشري يقع على اليمين من الفاصلـة. وعلى سبيل المثال، 921.534 فيه جـزء صحيح هو 921 وجزء عشري هـو 0.534. (تذكـر في الكتب الانجليزيـة وما شابهـا أن النقطـة مكتوبــة بين رقمين تعني فاصلـة عشريــة، وأنها بين رمزيـن تعني إشـــارة ضرب، و $a \cdot b$ تعني $a \times b$.) ولا تتغير قيمـــة العدد إذا أضفنـا مزيـــدا من الأصفار على اليمين من الجزء العشري، أو على اليسار من الجزء الصحيح، 921.534 = 0921.534000 وكما أن للجـزء الصحيح منـازل (أو مـراتب) هي منـزلة الآحـاد ومنـزلـة العشرات ومنزلـة المئات . . . الخ فكـذلك للجزء العشري منـازل تبدأ بمنـزلة الجزء من عشرة، تليها منـزلة الجزء من مـائة، تليها منـزلة الجزء من ألف، وهكـذا. ونلاحظ أن الرقم يختلف مدلولـه من منزلة إلى أخرى. فالخمسة نكتبهـا في منزلة الآحاد تعني خمس

مرات الواحـد الصحيح، وهي في منزلة العشرات تعني خمس عشرات أي 50، وهي في منزلة المئات تعني خمس مئات أي 500. وكذلك في الجـزء العشري، نجـد أن للرقم نفسه مدلـول يختلف باختـلاف المـنزلة التي يشغـلها. فالخمسة بعـد الفاصلة مباشرة، أي في مـنزلة الجزء من عشرة، تعـني خمسة أجزاء من عشرة أي 5/10 ، وهي في منزلة الجزء من مائة تعـني خمسة أجـزاء من مائة أي 5/100 ، وفي منـزلة الجـزء من ألف تعني خمسة أجزاء من ألف أي 5/1000 ، وهكذا. واصطلاح 921.534 يعني $9 \times 10^2 + 2 \times 10 + 1 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$ أي

$$9 \times 100 + 2 \times 10 + 1 \times 1 + 5 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$$

ولو أردنا التعبير عن هذا المجموع كلاميا لقلنا:

واحد وعشرتـان وتسع مئات بـالإضافة إلى خمسـة أعشار وثـلاثة أجـزاء من مائة وأربعـة أجـزاء من ألف. وبـالطبع سيكـون مـن الأيسر بكثير أن نصطلح على القـول تسعمائة وواحد وعشرون فاصلة خمسمائة وأربع وثلاثون، ونكتب 921.534.

ونلاحظ أيضـا أن كل منزلة في العـدد العشري هي عشرة أمثال تلك التي تقع إلى اليمين منها مباشرة. فالمائة هـي عشر عشرات، والعشرة عشر وحدات، والواحد عشرة أجزاء من عشرة، والجزء من عشرة هو عشرة أجزاء من مائة، وهكذا. ولذلك يطلق على هذا النظـام في الترقيم اسم «النظام العشري». وهـذا يوضح أن ضرب عـدد على شكل كسر عشري بمضاعفـات العشرة، أو قسمته على مضاعفـات العشرة، لا يحتاج إلا إلى إزاحة الفاصلة في اتجاه اليمين عند الضرب، أو في اتجاه اليسـار عند القسمة، عددا من المنـازل يساوي عـدد الأصفـار في مضاعف العشرة. وعلى سبيل المثـال لضرب 20.604 بعشرة نأخذ الفاصلة منـزلة واحدة إلى اليمين فنجد 206.04؛ ولقسمته على عشرة نأخذ الفاصلـة منزلة واحدة إلى اليسـار فنجد 2.0604. وفي الحالـة الأولى أصبح كل جـزء من عشرة واحدا $(1/10 \times 10 = 1)$ أي أن منزلـة الجزء من عشرة أصبحت هي منزلـة الآحاد، ولذلك أزحنـا الفاصلـة منزلـة واحدة إلى اليمين. وفي الحالـة الثانية أصبـح كل واحد صحيح جزءا من عشرة $(1/10 = 10 \div 1)$ ، أي أن منزلة الآحاد أصبحت منزلة الجزء من عشرة، ولذلك أزحنا الفاصلة منزلة واحـدة إلى اليسار. وكقاعدة عامة، عند الضرب بـ

10^n نأخذ الفاصلة إلى اليمين n منزلة، وعند القسمة على 10^n (أي الضرب بـ 10^{-n}) نأخذ الفاصلة إلى اليسار n منزلة.

والآن كيف نعبر عن عدد عشري في شكل نسبة مئوية؟

النسبة المئوية تعني النسبة إلى مائة، أي عدد نسبي مقامه يساوي 100. وخمسون في المائة تعني 50/100، وخمس وستون بالمائة تعني 65/100، ونصف بالمائة تعني 0.5/100 أي 5/1000. وللتعبير عن عدد عشري في صيغة نسبة مئوية نضرب العدد العشري بمائة فنحصل على العدد المطلوب، ونضيف إلى قراءته عندئذ كلمتي «في المائة».

مثال (١)

عبر عن الأعداد التالية في شكل نسبة مئوية:

0.75، 0.3، 1.21، 0.05، 0.052، .0003، 21.3، 0.3254.

الحل

الأجوبة المطلوبة هي على الترتيب: 75 في المائة؛ 30 بالمائة؛ 121 في المائة؛ 5 في المائة؛ 5.2 في المائة (ونقرؤها خمس واثنان من عشرة في المائة)؛ 0.03 في المائة (ونقرؤها ثلاثة من مائة في المائة)؛ 2130 في المائة، 32.54 في المائة (ونقرؤها اثنان وثلاثون وأربع وخمسون من المائة في المائة).

ولجمع الأعداد العشرية نرتب المنازل المتشابهة تحت بعضها تماما. وبالتالي تقع الفواصل تحت بعضها البعض تماما. ثم نجمع جمعا عاديا ونضع الفاصلة عندما نصل إلى موقع الفاصلة.

٣ ـ التناسب

إذا كانت المقادير a، b، c، d بحيث يكون

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

قلنا إنها متناسبة. وتسمى العلاقة بينها تناسبا طرفاه a و d ووسطاه c و b. ومن أهم خواص التناسب:

أ ـ $a \times d = b \times c$، (جداء الطرفين = جداء الوسطين).

ب ـ $$\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{d \pm c}$$

جـ ـ $$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

د ـ $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

مثال (٢)

الأعداد 2، 3، 4، 6 متناسبة. اكتب التناسب وتحقق من الخواص المذكورة أعلاه.

الحل

الأول والرابع هما الطرفان والثاني والثالث (الواردين في الوسط) هما الوسطان.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

ومن الواضح أن

أ ـ $2 \times 6 = 3 \times 4$

ب ـ $$\frac{2}{2 + 3} = \frac{4}{4 + 6}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$$

و $$\frac{2}{3 - 2} = \frac{4}{6 - 4}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

جـ ـ $$\frac{2 + 3}{3} = \frac{4 + 6}{6}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$$

و

$$\frac{2-3}{3} = \frac{4-6}{6}$$

$$-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$$

د-

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9}$$

مثال (٣)

صندوق يتضمن 5 كرات سود، و 6 كرات بيض. ما نسبة الكرات السود إلى الكرات البيض؟ وما نسبة الكرات البيض في الصندوق؟

الحل

نسبة الكرات السود إلى الكرات البيض هي 5/6.

نسبة الكرات البيض في الصندوق هي نسبة عدد الكرات البيض إلى مجموع عدد الكرات في الصندوق أي

$$\frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$$

مثال (٤)

في صندوق 15 كرة بعضها أبيض والآخر أسود. إذا كانت الكرات تتوزع بين اللونين الأبيض والأسود بنسبة 2:1 فاحسب عدد الكرات من كل لون.

الحل

مجموع الحصص 3=2+1

ويكون 1/3 الكرات أبيض و 2/3 الكرات أسود.

عدد الكرات البيض = $15 \times 1/3 = 5$

عدد الكرات السود = $15 \times 2/3 = 10$

مثال (٥)

قسمنا ستة آلاف ريال بين ثلاثة أشخاص بنسبة 1:3:2 فما هي حصة كل منهم؟

الحـــل

مجموع الحصص 6=2+3+1

مقدار الحصة الواحدة 1000 = 6000/6

وتكون حصة الأول= $2 \times 2000 = 2000$ ريال

حصة الثاني = $3 \times 1000 = 3000$ ريال

حصة الثالث = $1 \times 1000 = 1000$ ريال .

أو نقول إن حصة الأول تشكل 2/6 من المبلغ وحصة الثاني 3/6 من المبلغ وحصة الثالث 1/6 من المبلغ . أي أن :

حصة الأول = $2/6 \times 6000 = 2000$ ريال

حصة الثاني = $3/6 \times 6000 = 3000$ ريال

حصة الثالث = $1/6 \times 6000 = 1000$ ريال

٤ ـ العمليات الأساسية في المجموعات وقانونا دي مورغان

الاحتـــــــواء

نقول إن المجموعة A محتواة في المجموعة B، ونكتب $A \subset B$ ، إذا كـان كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي أيضا إلى B.

وفي حـال وجـود عنصر واحـد على الأقل ينتمي إلى B ولا ينتمي إلى A نسمي A مجموعة جزئية فعلية من B. ومن الواضح أن كل مجمـوعة محتواة في نفسها، ونـرمز لهذه الحقيقة بكتابة $A \subseteq A$.

المجموعتان المتساويتان

نقول إن المجموعتين A و B متساويتان إذا كانت $A \subset B$ و $B \subset A$. الشرط الأول $A \subset B$ يقتضي أن كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي أيضا إلى B، والشرط الثاني $B \subset A$ يقتضي أن كل عنصر ينتمي إلى B ينتمي أيضا إلى A. وهذا يعني بوضوح تطابق عناصر المجموعتين.

اتحاد مجموعتين

اتحاد مجموعتين A، B هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى واحدة منهما على الأقل. ونرمز له بـ $A \cup B$.

تقاطع مجموعتين

تقاطع مجموعتين A، B هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إليهما معا. ونرمز له بـ $A \cap B$.

ومن الواضح أنه يمكن التعبير عن انتماء عنصر إلى $A \cup B$ بقولنا إنه ينتمي إلى A أو B. ويمكن التعبير عن انتماء عنصر إلى $A \cap B$ بقولنا إنه ينتمي إلى A و B وإذا لم يكن هناك أي عنصر مشترك بين A و B كان تقاطعهما خاليا. ونرمز للمجموعة الخالية بـ ϕ. ومن الواضح أن المجموعة الخالية ϕ محتواة في أي مجموعة أخرى ($\phi \subset A$ حيث A أي مجموعة غير خالية).

المجموعتان المنفصلتان

إذا كان تقاطع المجموعتين A، B خاليا، أي $A \cap B = \phi$، قلنا إن المجموعتين منفصلتان.

الفرق بين مجموعتين

الفرق بين مجموعتين A، B، ونرمز له بـ $A-B$ (أو A/B) هو مجموعة تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B.

مكملة مجموعة

مكملة مجموعة A هي مجموعة تتضمن كافة عناصر المجموعة الشاملة التي لا تنتمي إلى A. ونرمز لها بـ $\bar{A}$ (أو A^c).

ومن الواضح أن $\bar{A}$ تشكل نفي A. ولذلك نقرؤها أحيانا «ليس A» . ومكملة مجموعة A ليست إلا الفرق بين المجموعة الشاملة، ولنرمز لها بـS، وبين A، أي أن $\bar{A} = S - A$. وهذا بالاضافة إلى نص التعريف (٢ـ ٥ ـ ٧) يوضحان أنه يمكن التعبير عن الفرق بين مجموعتين A ، B كتقاطع بين A ومكملة B. وهكذا نكتب :

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

قانونا دي مورغان

ومن الخواص المهمة لعمليتي الاتحاد والتقاطع أن كلا منهما تتوزع على الأخرى بمعنى أن :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

و

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

وأن

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

و

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

وتسمى العلاقتان الأخيرتان «قانوني دي مورغان» . وتقول الأولى منهما إن مكملة اتحاد مجموعتين هي تقاطع مكملتيهما . وتقول الثانية إن مكملة تقاطع مجموعتين هي اتحاد مكملتيهما . وتسهيلا لحفظ هاتين العلاقتين نلاحظ أنه للانتقال من الطرف الأيسر إلى الطرف الأيمن في كل منهما نتبع القاعدة التالية :

نقلب اتجاه الرمز الفاصل بين المجموعتين (إذا كانت الفتحة إلى الأعلى تصبح إلى الأسفل والعكس) ثم نستعيض عن كل مجموعة بمكملتها .

مثال (٦)

لتكن المجموعة الشاملة مجموعة الحروف في الكلمات أبجد، هوز، حطي.

ولنرمز لها بـ S. ولتكن $A=$ {أ، ب، هـ، د، ط}

$B=$ {أ، هـ، ز، جـ، ط، ي}

$S=$ {أ، ب، جـ، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي}

i) هل A محتواة في B؟

ii) أكتب $A\cup B$، $A\cap B$، $A-B$، $B-A$، $\bar{A}$، $\bar{B}$.

iii) اكتب $A\cap\bar{B}$ وقارنها مع $A-B$، واكتب $B\cap\bar{A}$ وقارنها مع $B-A$.

iv) لنعرف المجموعة $C=$ {أ، و}. تحقق من قانوني التوزيع.

v) اكتب $\overline{A\cup B}$، $\bar{A}\cap\bar{B}$، $\overline{A\cap B}$، $\bar{A}\cup\bar{B}$، ثم تحقق من صحة قانوني دي مورغان.

الحل

i) A غير محتواة في B لوجود عنصر د ينتمي إلى A ولكنه لا ينتمي إلى B.

$A \ni$ د ولكن $B \not\ni$ د

ii) $A\cup B=$ {أ، ب، هـ، د، ط، ز، جـ، ي}

لكتابة اتحاد A، B نكتب عناصر A ثم نضيف إليها عناصر B ما لم تكن ذُكرت سابقا، لأنه عند التعبير عن مجموعة، لا نكرر ذكر أي عنصر من عناصرها.

$A\cap B=$ {أ، هـ، ط}

ولكتابة تقاطع A، B نستعرض عناصر A واحدا فآخر ونضع في $A\cap B$ ما نجده منها واردا في B.

$A-B=$ {ب، د}

وللحصول على $A-B$ نلغي من عناصر A كل ما كان منها مشتركا مع B. وبصورة مماثلة نجد:

$B-A=$ {ز، جـ، ي}

$\bar{A} = S - A =$ { أ، ب، هـ، د، ط } - { أ، ب، جـ، د، هـ، و، ز، ح، ط، ي }
= { جـ، و، ز، ح، ي }

ولكتابة $\bar{A}$ نلغي عناصر A من المجموعة الشاملة ونأخذ كل ما تبقى منها.
وبصورة مماثلة نجد:

$\bar{B} =$ { ب، د، و، ح }

(iii

$A \cap \bar{B} =$ { ب، د } $= A - B$

$B \cap \bar{A} =$ { ز، جـ، ي } $= B - A$

iv) نحسب الطرف الأيمن فنجد

$B \cup C =$ { أ، هـ، ز، جـ، ط، ي، و }

$A \cap (B \cup C) =$ { أ، ب، هـ، د، ط } $\cap$ { أ، هـ، ز، جـ، ط، ي، و }
= { أ، هـ، ط }

نحسب الطرف الأيسر فنجد

$A \cap C =$ { أ }

$(A \cap B) \cup (A \cap C) =$ { أ، هـ، ط }

وهو يساوي الطرف الأيمن.

v) بالعودة إلى النتائج في ب نجد:

$\overline{A \cup B} =$ { أ، ب، هـ، د، ط، ز، جـ، ي }^{c} = { و، ح }

$\bar{A} \cap \bar{B} =$ { جـ، و، ز، ح، ي } $\cap$ { ب، د، و، ح } = { و، ح } $=(A \cup B)^c$

مما يحقق قانون دي مورغان الأول.

ولدينا أيضا:

$\overline{A \cap B} =$ { أ، هـ، ط }^{c} = { ب، جـ، د، و، ز، ح، ي }

و

$\bar{A} \cup \bar{B} =$ { جـ، و، ز، ح، ي } $\cup$ { ب، د، و، ح }

$\bar{A} \cup \bar{B} =$ { ب، د، و، ح، جـ، ز، ي }$^c = \overline{A \cap B}$

مما يحقق قانون دي مورغان الثاني.

حاصل الضرب الديكارتي

الحاصل الديكارتي لمجموعتين A، B هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التي يمكن تشكيلها بأخذ العنصر الأول من A والعنصر الثاني من B.ونرمز له عادة بـ$A\times B$.

مثال (٧)

لدينا $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{1,2,3\}$. اكتب الحاصل الديكارتي $A\times B$.

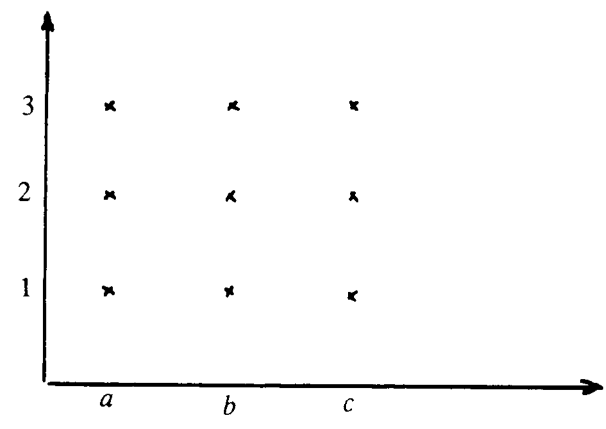
الحـــل

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$$

ونلاحظ أنه إذا كـان عدد عناصر A مساويا n وعد د عنـاصر B مساويا m فإن عدد عناصر الحاصـل الديكارتي $A\times B$ يساوي $n\times m$. ويمكن تمثيل كل زوج مـرتب بنقطـة في المستوى الاحـداثي، حيث يشكل العنصر الأول من الـزوج المرتب الاحـداثي السيني للنقطـة ويمثل العنصر الثاني الاحداثـي الصادي لها. ونحصل عنـدئذ على ما يسمى «بيان الحاصل الديكارتي».

مثال (٨)

ارسم بيان الحاصل الديكارتي للمجموعتين A، B في المثال (٧).



شكل (١): بيان الحاصل الديكارتي $A\times B$.

٥ ـ التطبيق والصورة العكسية

تعريف التطبيق

التطبيق f المعرف على مجموعة A إلى مجموعة B هو توافق يقابل بموجبه كل عنصر من A عنصر واحد وواحد فقط من B . ونكتب رمزيا

$$A \xrightarrow{f} B$$

وتسمى المجموعة A مجال التطبيق (أو ساحة التطبيق) وتسمى المجموعة B المجال المصاحب. ونكتب $f(a) = b$ للدلالة على أن العنصر a من المجال A يوافقه العنصر b من المجال المصاحب B . ونقول إن b هو صورة a وفق التطبيق f .

مثال (٩)

في المثال (٧) عرف تطبيق f_1، f_2 على A إلى B .

الحل

أي قاعدة توافق يقترن بموجبها كل عنصر من A بعنصر واحد من B تشكل تطبيقا. وعلى سبيل المثال يمكننا تعريف f_1 كما يلي:

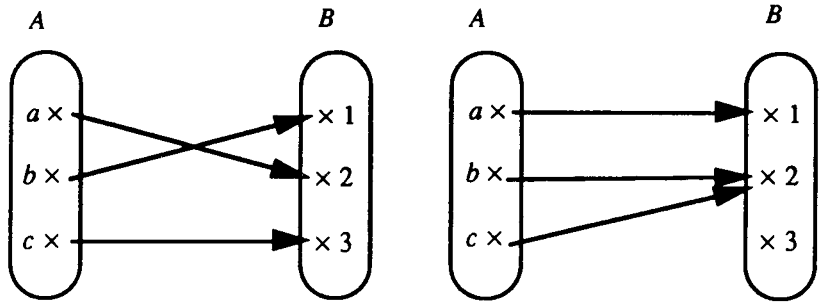
$$f_1 = \{(a,2), (b,1), (c,3)\}$$

وتقول قاعدة التوافق أو التطبيق الذي رمزنا له بـ f_1 إن العنصر a من A يقابله أو يوافقه العنصر 2 من B؛ والعنصر b من A يوافقه العنصر 1 من B؛ وأخيرا يوافق العنصر c من A العنصر 3 من B . أو أن صورة a وفق f_1 هي 2 وصورة b هي 1 وصورة c هي 3.
ويمكن تعريف تطبيق آخر f_2 كما يلي:

$$f_2 = \{(a,1), (b,2), (c,2)\}$$

ونلاحظ أن شرطي التعريف محققان. فلكل من عناصر A الثلاثة عنصر مقابل واحد من B. هنا a يقابله 1؛ و b يقابله 2؛ و c يقابله 2 أيضا. أي أن 1 هي صورة لـ a و 2 صورة لكل من b و c . أما 3 فليست صورة لأي عنصر من A .

ويمكن توضيح التطبيق بمخطط سهمي ينطلق فيه من كل عنصر من المجال سهم واحد ينتهي بالعنصر المقابل (بصورته) من المجال المصاحب. وفي الشكل (٢) نجد المخطط السهمي لكل من f_1 وf_2 في المثال (٥).



المخطط السهمي للتطبيق f_1 المخطط السهمي للتطبيق f_2

شكل (٢)

وتجدر ملاحظة أن التطبيق هو مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتكرر فيها أبدا العنصر الأول. وتشكل العناصر الأولى مجتمعة مجموعة المجال دون زيادة أو نقصان. وعلى المخطط السهمي نقول إنه ينطلق من كل عنصر من عناصر المجال سهم واحد وواحد فقط.

تعريف الصورة العكسية

الصورة العكسية لعنصر d، مثلا، من المجال المصاحب، هي مجموعة عناصر المجال التي صورتها وفق f هي d. (أي مجموعة عناصر المجال التي انطلق منها سهم إلى d) ونرمز لها بـ $f^{-1}(d)$.

مثال (١٠)

في المثال السابق اكتب الصورة العكسية لكل عنصر من عناصر B وفق f_1^{-1} ووفق f_2^{-1}.

الحل

$$f_1^{-1}(3) = c \ , \ f_1^{-1}(2) = a \ , \ f_1^{-1}(1) = b$$

ونلاحظ أن f_1^{-1} يمثل بدوره تطبيقا من B إلى A **يسمى التطبيق المعاكس. ولا يصح هذا إلا عندما يكون f تقابلا.** أي الحالة التي يكون فيها كل عنصر من B صورة لعنصر واحد وواحد فقط من A وبصورة مماثلة نجد أن

$$f_2^{-1}(2) = \{ b, \ c\} \ , \ f_2^{-1}(1) = a$$

ونلاحظ أن الصورة العكسية للعنصر 2 من B هو مجموعة مؤلفة من عنصرين b، c من عناصر A ذلك لأن 2 هي صورة لكل من b و c وفق f_2. أما $f_2^{-1}(3)$ فهي خالية ونكتب $f_2^{-1}(3) = \phi$، ولا يمثل f_2^{-1} تطبيقا لأنه لا يحقق شرطي التعريف، إذ يقابل العنصر 2 من B عنصران من A هي b و c، وكذلك لا صورة للعنصر 3 من B.

تعريف الدالة العددية

إذا عُرّف تطبيق f من مجموعة جزئية من R، مجموعة الأعداد الحقيقية، إلى مجموعة جزئية أخرى منها، فإننا نسمي مثل هذا التطبيق دالة عددية ذات متغير حقيقي. وكثيرا ما نهمل عند تعريف دالة عددية، المجال والمجال المصاحب، ونعطي فقط قاعدة الربط بشكل علاقة رياضية، $y = f(x)$، ونعتبر في هذه الحالة أن مجال الدالة هو أوسع مجموعة جزئية من R يمكننا أن نُجري عليها العمليات الداخلة في القاعدة f. ويسمى المجال في هذه الحالة مجموعة التعريف أو ساحة التعريف ويسمى المجال المصاحب مدى الدالة.

٦ ـ رمز المجموع Σ وخواصه

تستخدم العلوم الرياضية ومختلف العلوم التجريبية الرموز للدلالة على مقادير أو مسميات وأشياء من طبائع مختلفة. فمثلا نرمز لمقدار أو لقياس عددي بـ x، ونرمز لمجموعة بـ A. ونرمز لعنصر من مجموعة بـ a، الخ. وفي بحث أو دراسة معينة ينبغي أن نستخدم رموزا مختلفة للدلالة على قياسات أو أشياء مختلفة، وذلك تجنبا للالتباس. وفي دراسة فيزيائية، مثلا، لو رمزنا لشدة التيار بـ x، فيجب المحافظة على هذا الرمز في الدراسة بأكملها. وحيثما وردت x ضمن هذه الدراسة فإنها تعني شدة التيار. وقد

نحتاج في دراسة واحـدة إلى عدد هائل من الرمـوز، وربما ما لا نهاية له مـن الرموز، ولا يمكن لحروف أبجدية أو حروف مختلف الأبجديـات المعروفة في العالم أن تفي بالحاجة. ولذلك نلجأ إلى استخدام الحرف نفسه x، مثلا، عددا هائلا من المرات دون أن نقع في التبـاس، وذلك بإضـافـة دليل رقمي تحت الحرف، فنكتب x_1 و x_2، مثلا، كـرمزين مختلفين. ومع أننـا استخدمنـا هنا الحرف الأبجـدي نفسه، إلا أننـا ميزنـا بين x وآخر بالدليل 1 ملحقا بـالأول وبدليل آخـر ملحقا بالثـاني ونقرؤه x واحد، x اثنان، الخ. ويفتح لنـا استخـدام الحرف مع دليل رقمـي ملحق بـه آفـاقـا واسعـة، بحيث يمكن استخدام الحرف x نفسه عددا لانهائيا من المرات، لنكتب، مثلا، المتوالية اللانهائية من المقادير:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \quad , \ldots$$

يسمى x_n الحد العام للمتواليـة. وعندما يتغير n متخذا عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3,\ldots\}$، كقيم لـه نحصل على متواليـة لانهائية مـن المقاديـر لكل منها رمـز مختلف. ولم نستخدم فيها إلا حرفا واحدا من حروف الأبجدية هو x. ويمكن أن نكتب متوالية أخرى

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \quad , \ldots$$

ومتوالية أخرى

$$z_1, z_2, \ldots, z_n \quad , \ldots$$

وهكذا.

لنفرض الآن أننا نريد التعبير عن مجمـوع ستة مقادير هي x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6. فمن الطبيعي كتابة:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

وسنتفق الآن على التعبير عن هذا المجموع بصورة مختصرة فنكتب:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i$$

ونقرؤها «مجموع x_i من $i = 1$ إلى $i = 6$». ونستخدم هنا الحرف اليوناني الكبير $\sum$، ويسمى «سيجما»، ليـدل على كلمة «مجموع». والـدليل i يسمى «متغير الجمع» وهـو

يتغير هنا من $i = 1$ إلى $i = 6$. ويسمى x_i «الحد العام». وللحصـول على الحد الأول في المجموع نضع $i = 1$ في الحد العام، وفي الحد الثـاني نضع $i = 2$. وهكذا. وتفصل بين الحدود المختلفة إشارة + بالطبع مادمنا نعبر عن مجموع عدد من المقادير.

مثال (١١)

أ ـ اكتب بالتفصيل ما تعنيه الرموز:

$$\sum_{t=1}^{3} t x_t^t \quad , \quad \sum_{j=1}^{4} j(j-1) \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} i(y_i - 1) \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} x^i$$

ب ـ استخدم إشارة المجموع $\sum$ للتعبير عن كل من المجاميع التالية :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + x_5 y_5$$

الحـــل

أ ـ

$$\sum_{i=1}^{5} x^i = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} i(y_i - 1) = (y_1 - 1) + 2(y_2 - 1) + 3(y_3 - 1)$$

$$\sum_{j=1}^{4} j(j-1) = 1(1-1) + 2(2-1) + 3(3-1) + 4(4-1) \ ,$$

$$\sum_{t=1}^{3} t x_t^t = x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3$$

ب ـ

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{5} y^i \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} x_i$$

وتنبغي ملاحظـة أن الشيء الوحيد من عبارة الحد العام الـذي يتغير من حد إلى آخـر من حدود المجمـوع هـو متغير الجمع i. وبهذا المعنى يمكن اعتبـار أي كميـة لا

تتضمن متغير الجمع في حكم الثابتة. ويمكن أن يرد متغير الجمع دليلا أو معاملا أو قوة أو مقدارا قائما بذاته الخ.

خواص رمز المجموع Σ

الخاصة الأولى

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

وهو واضح من كون:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} cx_i &= cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n \\ &= c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} x_i\end{aligned}$$

الخاصة الثانية

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i$$

وهو واضح أيضا من الخاصتين التبديلية والتجميعية لعملية جمع الأعداد الحقيقية. فلدينا

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i + z_i) &= (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) + \ldots + (x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i\end{aligned}$$

الخاصة الثالثة

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

وهذا واضح من حقيقة أن الحد العام c لا يتضمن متغير الجمع i، فهو ثابت من حد إلى آخر. أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n \text{ مرة}} = nc$$

مثال (١٢)

تطبيقا لخواص الرمز $\sum$ يمكن كتابة ما يلي :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + c)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + 2cx_i + c^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2cx_i + + \sum_{i=1}^{n} c^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2c \sum_{i=1}^{n} x_i + nc^2 .$$

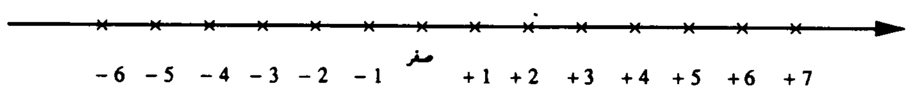
ونجد أيضا :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 3y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 6x_i y_i + 9y_i^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 6x_i y_i + 9 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 6 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 9 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

٧ ـ محور الأعداد الحقيقية ـ الانسحاب وتغيير سلّم القياس

يمكن تمثيل الأعداد كنقاط على مستقيم موجه نسميه محورا. ولهذا الغرض نرسم مستقيما كما في الشكل (٣)، نتخذ عليه اتجاها موجبا إلى اليمين، ثم نحدد عليه نقطة تدعى عادة مبدأ الفصول، وتقابل العدد «صفر» وتقع الأعداد الموجبة إلى اليمين من مبدأ الفصول والأعداد السالبة إلى اليسار منه. ومع تبني طول معين ليمثل وحدة قياس (السنتمتر، مثلا، كما في الشكل (٣)) تصبح كل نقطة من المحور ممثلة لعدد حقيقي واحد هو عدد وحدات القياس التي تفصل بينها وبين مبدأ الفصول مسبوقا بإشارة موجبة إذا كانت النقطة إلى اليمين من مبدأ الفصول. أما إذا وقعت النقطة إلى اليسار

من مبدأ الفصول فـالعدد الحقيقي الذي تمثله هـو عدد وحدات القياس الفـاصلة بينها وبين المبدأ مسبوقا بإشـارة سالبة. وبالعكس كل عدد حقيقي تقـابله نقطة واحدة على هذا المحور. وبذلك نستكمل تمثيل مجموعـة الأعداد الحقيقية هندسيا، ويسمى المحور المدرج النـاتج محور الأعـداد الحقيقية. ونـلاحظ أن تحديـد المحـور، في الشكل (٣)، كمحـور للأعـداد الحقيقية قـد اسُتكمل بعد تحديـد اتجاه عليه واتخاذ نقطـة من نقاطـه كمبدأ للفصول وتبني السنتمتر كوحدة للقياس.



شكل (٣): محور الأعداد الحقيقية

ولو أننـا أضفنا إلى كل عـدد المقدار 2 فإن النقطـة التي تمثل العدد «صفـر»، أي تشكل مبدأ الفصول في الشكل (٣)، ستصبح ممثلة للعدد 2، والنقطة التي تمثل العدد 2- ستصبح ممثلة للعدد «صفر»، أي مبدأ الفصـول الجديد، والنقطة التي تمثل العدد 4 ستصبح ممثلـة للعدد 6، وهكذا. . . ويبـدو بوضـوح أن هذا التغيير في تمثيـل النقاط للأعـداد يكافىء تماما انسحابـا إلى اليمين بمقدار وحدتي قيـاس. فكأن النقطة 2 - قد زحفت لتحتل موقع نقطـة الأصل. وفي المقابل، لو طرحنا مـن كل عدد المقدار 2 (أي أضفنا إلى كل عدد 2-) فإن النقطة التي كـانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد «صفر» (نقطة الأصل)، والنقطة التي كـانت تمثل الصفر (نقطة الأصل) ستصبح ممثلة للعدد 2-، وقس على ذلك. وهـذه التغييرات في تمثيل النقـاط لـلأعداد تكـافىء تمامـا انسحابا إلى اليسار بمقدار 2.

وبصورة عامة، نقول إن إضافة أو طرح عدد ثابت b، مثلا، إلى كل عدد يكافىء انسحاب التدريج بكامله مسافة b وحدة قياس إلى اليمين، إذا كان b موجبا، ومسافة b - وحدة قياس إلى اليسار إذا كان b سالبا. وإن إضافة أو طرح عدد ثابت تبدو وكأنها تغيير في اختيار نقطة الأصل.

لنفرض الآن أن لدينا مجمـوعة من القياسات {2, 3, 4, 5} فهي تحتل مـواقع معينة على محـور الأعـداد في الشكـل (٣)، ولو أضفنـا إلى كـل منهـا العدد 4 فإنها ستصبح

{6, 7, 8, 9} وتحتل مواقع جديدة في الشكل (٣) هي المواقع الناتجة عن انسحاب المواقع الأساسية بمقدار 4 وحدات قياس إلى اليمين. وإضافة العدد 4 - (أي طرح العدد 4) إلى كل منها يؤدي إلى انسحابها يسارا بمقدار 4. ونلاحظ أن المواقع النسبية للقياسات الأربعة من بعضها البعض لم تتغير بعد عملية الانسحاب.

لنضرب الآن كل عدد بالمقدار 2، مثلا، فالنقطة التي تمثل العدد صفر ستبقى في مكانها بدون تغيير، ولكن النقطة التي كانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد 4، والنقطة التي تمثل 4 - ستصبح الآن ممثلة للعدد 8 -، وهكذا. . . وهذه التغييرات في تمثيل النقاط للأعداد هي بالضبط ما سنحصل عليه لو أننا غيرنا وحدة القياس من السنتمتر إلى نصف السنتمتر (أي ضربنا وحدة القياس بـ 1/2). إذ لو اتخذنا نصف النستمتر وحدة لقياس المسافة في الشكل (٣) لكانت النقطة التي تمثل العدد 1 حاليا ممثلة للعدد 2، ولكانت النقطة الممثلة للعدد 3 - حاليا ممثلة للعدد 6 -، وهكذا. . . وفي المقابل لو أننا قسمنا كل عدد على 2 (أي ضربنا كل عدد بـ 1/2) فإن النقطة التي كانت تمثل العدد 2 ستصبح الآن ممثلة للعدد 1، والنقطة التي كانت تمثل العدد 4 - ستصبح الآن ممثلة للعدد 2 -، وهكذا. . . وهذه التغييرات في تمثيل النقاط للأعداد تكافىء تماما ما سنحصل عليه لو أننا غيرنا وحدة القياس إلى 2 سنتمتر بدلا من السنتمتر الواحد (أي ضربنا وحدة القياس بـ 2). وفي الحالتين نقول إننا غيرنا سلّم القياس.

وبصورة عامة، نقول إن ضرب كل عدد بمقدار ثابت موجب a يكافىء تغيير سلّم القياس بضرب وحدة القياس بـ $1/a$ (تصغيراً لها إذا كان a أكبر من الواحد وتكبيراً لها إذا كان a أصغر من الواحد). وتسمى عملية الضرب بعدد موجب عملية تغيير في سلّم القياس.

لنعد إلى مجموعة القياسات {2, 3, 4, 5} فإذا ضربنا كلا منها بـ 2 فإنها ستحتل مواقع جديدة هي النقاط المقابلة لـ {4, 6, 8, 10} وتجدر ملاحظة أن المواقع النسبية للقياسات الأربعة بعضها من بعض قد تغيرت الآن. فتغيير سلم القياس يغير من المواقع النسبية لجملة من القياسات بعضها من بعض، ولكن عملية الانسحاب لا تؤثر في تلك المواقع النسبية.

ولو افترضنا الآن أن الرمز x يمثل عددا دارجا على محور الأعداد فإن إجراء التحويل من x إلى y وفق العلاقة:

$$y = x + b$$

هو تعبير جبري عن عملية انسحاب بمقدار b . وإجراء التحويل من x إلى y وفق العلاقة:

$$y = ax$$

هو تعبير جبري عن عملية تغيير في سلم القياس. ومن الواضح الآن أن إجراء تحويل من x إلى y وفق العلاقة:

$$y = ax + b$$

تعني القيام بعملية تغيير في سلم القياس (الضرب بمقدار a) ثم القيام بعملية انسحاب للنقاط الناتجة بمقدار b.

مثال (١٣)

لدينا الأعداد

9200, 8200, 7200, 6200, 5200, 4200, 3200, 2200, 1200

إذا حولنا وفقا للعلاقة:

$$y = \frac{x - 5100}{1000} = \frac{1}{1000}\ x - \frac{5200}{1000} = 0.001\ x - 5.2$$

فإن الأعداد المعطاة تتغير، على الترتيب، إلى:

4, 3, 2, 1, 0, − 1, − 2, − 3, − 4

مثال (١٤)

لدينا الأعداد

0.011, 0.012, 0.013, 0.014, 0.015, 0.016, 0.017

إذا حولنا وفقا للعلاقة:

$$y = 1000x - 14$$

فإن الأعداد المعطاة تتغير، على الترتيب، إلى:

− 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3

٨ ـ أنواع القياسات

يتعامل الإنسان مع ثلاثة أنـواع من المتغيرات. وسنصطلح، بصورة عامة، على تسميـة القيم التي يفترضها متغير «قيـاسا». ومجمـوعة من القيـاسات هي، على وجـه العموم، مجموعة من القيم لمتغير أو أكثر.

والنوع الأول من المتغيرات هـو المتغير الوصفي، وهو متغير يصنف جملـة من العناصر وفق صفـات محددة، كأن نصنف السكان في مـدينة الـرياض وفقـا للصفات التالية:

سعودي، عربي غير سعودي، غير عربي

والمتغير هنا هو متغير الجنسية وهذه الصفات الثلاث هي قيمه الممكنة، إذ يأخذ بـالنسبة لكل فـرد يسكن الريـاض واحـدة وواحدة فقط من هـذه القيم الثلاث (هنـا الصفات الثـلاث). وإذا رمزنا لهذا المتغير بالـرمز x، واقتفينا جنسيـة شخص يسكن الريـاض فوجدناه «غير عـربي» قلنا إن المتغير x أخذ عنـد هذا الشخـص القيمة «غير عربي». وإذا سألنا شخصا ثانيا وثالثا ووجدناهما سعوديين نقول إن قيمة المتغير x لكل منهما هي «سعودي» وهكذا. وإحدى الصفات المميزة للمتغير الوصفي هي أن مجموعة القيم التي يأخذهـا تصنف جملة من العناصر أو الأشيـاء إلى أصناف بحيث ينتمي كل عنصر (أو شيء) منها إلى صنف واحد وواحد فقط. أو بعبارة أخرى لابد أن ينتمي كل عنصر (أو شيء) منهـا إلى صنف من تلك الأصناف ولا يمكنـه أن ينتمي إلى صنفين أو أكثر في آن واحد. وهكذا تجزىء قيم المتغير الوصفي جملة من العناصر (أو الأشياء) إلى أجزاء منفصلة بعضها عن بعض، انفصالا تاما. وفي المثال السابق لايمكن وجود مقيم في الريـاض يتصف بأنه «سعـودي» و«غير عربي». أو أنه «عـربي غير سعودي» و«غير عربي» الخ.

والنوع الثـاني من المتغيرات هو متغير تـرتيبي. والمتغير الترتيبي يتميـز بكل مـا يتميز بـه المتغير الوصفي بالاضـافة إلى توفـر نوع من الترتيب الـذي يمكن إضفاءه على

الصفات التي تشكل قيم المتغير الممكنة. فلو فرضنا، مثلا، أن متغيرا y يمثل التقدير الذي ناله طالب من طلاب فصل معين. فالقيم الممكنة لهذا المتغير هي ممتاز، جيد جدا مرتفع، جيد جدا، جيد مرتفع، جيد، مقبول مرتفع، مقبول، ضعيف. وبما أن هذه الصفات مرتبطة بمقياس كمي هو الدرجة العددية التي نالها الطالب فإن هذا يمنح ترتيبا لهذه الصفات من الأعلى إلى الأدنى أو العكس، فنقول إن أعلى هذه القيم هي صفة «ممتاز» يليها «جيد جدا مرتفع» وهكذا حتى نصل إلى أدناها وهي صفة «ضعيف».

والنوع الثالث من المتغيرات هو متغير عددي. والمتغير العددي يتميز بكل ما يتميز به المتغيران الوصفي والترتيبي، أي أنه يصنف، وُيقيم ترتيبا ولكنه بالإضافة إلى ذلك ينبئنا، في مجال الترتيب، بجواب واحد دقيق عن الفارق بين صفة أعلى وصفة أدنى، أو قيمة أعلى وقيمة أدنى. ومع معرفتنا في مثال التقديرات بأن قيمة «ممتاز» أعلى من قيمة «جيد» لو أننا سألنا ما هو الفارق بينهما تماما لما أمكن الإجابة، إذ لا نعلم أي معنى أو جواب محدد لـ «ممتاز ــ جيد». ولكننا في المتغير العددي يمكن الإجابة على مثل هذا السؤال بدقة تامة. لنصنف، مثلا، فصلا من عشرة طلاب، وفقا لمعدلاتهم العامة، ولنفرض أننا وجدنا الجدول التالي:

المعدل العام	91	87	85	73	71	60	45
عدد الطلاب	1	1	1	2	2	2	1

لنرمز للمعدل العام بالرمز Z، فالمتغير Z هو متغير عددي لأن قيمه الممكنة أعداد حقيقية. وقد صنف المتغير Z طلاب الفصل وفق معدلاتهم فظهر معنا سبعة أصناف هي «ذوو المعدل 91» ، ذوو المعدل 87» الخ. وبالطبع يمكن ترتيب الأعداد من الأكبر إلى الأصغر أو بالعكس، بالاضافة إلى أن الفرق بين أي قيمتين محسوب تماما وبدقة. والفارق بين الصنف 91 والصنف 71 هو 20 درجة. والبيانات الإحصائية التي تتضمن قياسات متغير وصفي تسمى بيانات وصفية، وتلك التي تتضمن قياسات متغير ترتيبي تسمى بيانات ترتيبية، أما التي تتضمن قياسات متغير عددي فتسمى بيانات عددية.

ويجب ألا يختلط علينا الأمر عندما نقوم بترميز بيانات وصفية أو ترتيبية وفق نظام رموز عددي معيّن، فلو رمزنا لصفة «سعودي» بالرقم 3 ولصفة «عربي غير سعودي» بالرقم 2 ولصفة «غير عربي» بالرقم1 فإن هذا لا يعني أن بيانا حصلنا عليه يتعلق بجنسيات جماعة من المقيمين في الرياض أصبح بيانا عدديا، ومع أنه سيقتصر على الأرقام 1,2,3 إلا أننا يجب أن نتذكر بأن هذه الأرقام هي رموز لصفات وصفية وأن البيان لا يزال بيانا وصفيا.

وتنقسم البيانات العددية بدورها إلى نوعين، **بيانات عددية منفصلة وبيانات عددية مستمرة**. والبيانات المنفصلة تتضمن قياسات ناتجة عن عملية عد أو تعداد. وعندما نسجل، مثلا، عدد الولادات التي تمت في مستشفى للتوليد في كل يوم من أيام شهر معين سنحصل على بيان إحصائي عددي من النوع المنفصل جميع قياساته أعداد صحيحة. وكذلك الأمر عندما نعد الكريات البيض الظاهرة على منطقة محددة من زجاجة فحص مجهري، وعدد المراجعين الذين زاروا مركزا للرعاية الأولية في يوم معين، وعدد وقوعات الزواج أو الطلاق أو الوفاة خلال فترة محددة في منطقة معينة. وعدد حوادث المرور اليومية في مدينة الرياض الخ. أما النوع الآخر من البيانات العددية وهو البيانات المستمرة فإنها تتضمن قياسات ناتجة عن استخدام جهاز للقياس مثل مسطرة أو ميزان لقياس وزن أو درجة حرارة أو ضغط الدم أو الضغط الجوي، أو اختبار (أورائز) لقياس حاصل الذكاء أو اختبار لقياس معلومات طالب في مقرر معين الخ. ويسمى المتغير العددي الذي تكون قيمه الممكنة من النوع المنفصل أي نحصل عليها بطريقة التعداد، متغيرا عدديا منفصلا، كما يسمى ذاك الذي تكون قيمه الممكنة من النوع المستمر، أي نحصل عليها باستخدام جهاز للقياس، متغيرا عدديامستمرا. ونلاحظ بسهولة أن القيم الممكنة لمتغير عددي منفصل قابلة للعد، بمعنى أنه يمكننا القول إن هذه القيمة هي القيمة الأولى الممكنة تليها القيمة كذا كقيمة ثانية، تليها القيمة كذا كقيمة ثالثة، وهكذا. ونطمئن إلى أننا عند الانتقال من قيمة إلى القيمة التي تليها لم نغفل بينهما أيا من القيم الممكنة للمتغير. فمثلا، لو رمزنا بـ x لعدد الولادات اليومية في مستشفى للتوليد، فإن القيم الممكنة لـ x هي إما صفر، أو 1 أو 2 أو 3 إلخ. ولا يمكن أن يكون هناك نصف ولادة أو ولادة ونصف إلخ. وعندما ننتقل من الصفر

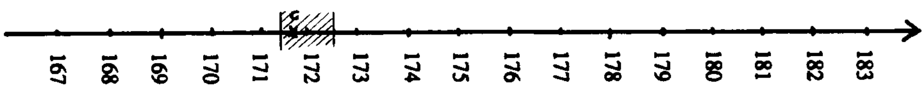
كقيمة ممكنة إلى الواحد كقيمة ممكنة تالية لها، لم نخلف وراءنا أيا من قيم x الممكنة. وإذا حاولنا تطبيق الفكرة ذاتها في مجموعة القيم الممكنة لمتغير مستمر، أي نحاول عدها، فسنجد أن ذلك مستعص. لنرمز بـy، مثلا، لطول إنسان ذكر بالغ من رعايا المملكة. فعند قياس طوله بمسطرة مدرجة مرتفعة ومناسبة، كتلك التي نجدها في المستشفيات لقياس الطول، سنجد أن طوله يكافىء نقطة على تدريج المسطرة، لنفرض أن هذه النقطة واقعة بين 171 سم و 172 سم، فطول الرجل، واقع إذا، في مكان ما بين 171 سم و 172 سم. أي أنه يمكن أن يكون أي نقطة من الفترة [171,172] من محور الأعداد الحقيقية. ولو كلف المرء نفسه بعد هذه القيم الممكنة فسيقول إن 171 سم هي قيمة ممكنة أولى ثم يتوقف عاجزا تماما عن تحديد القيمة التي تليها .إذ مهما اتخذ عددا قريبا من الـ 171 فبين الـ 171 وبين هذه القيمة، على قربها الشديد من 171، ما لا يحصى ولا يعد من القيم. ونقول إن مجموعة القيم الممكنة لمتغير مستمر هي مجموعة غير قابلة للعد. وقابلية العد هي الخاصة الرياضية التي نميز بموجبها بين النوعين من البيانات العددية، النوع المنفصل والنوع المستمر.

٩ ـ تدوير الأرقام العشرية ـ أخطاء القياسات

رأينا أن قياس طول شخص يقابل نقطة على المسطرة المدرجة التي نستخدمها في قياس الطول. وهذه النقطة من المسطرة المدرجة (نقطة من محور الأعداد) تقابل أو تمثل عددا حقيقيا هو طول الشخص. ولكن هب أن المسطرة التي نقيس بها مدّرجة بالسنتمتر، وليس فيها تدريج ميليمتر. وكل ما في الأمر أن هناك نقطة تشير إلى منتصف المسافة بين رقم والرقم الذي يليه، شكل (٤)، ولنفرض أن النقطة c على حرف المسطرة هي النقطة المقابلة لقمة رأس الشخص. فالمسطرة بما أوتيت به من دقة في التدريج تخبرنا أن طول الشخص هو عدد حقيقي واقع بين 171 سم و 172 سم إلا أنه أقرب إلى 172 سم منه إلى 171 سم (النقطة C واقعة بعد منتصف المسافة بين 171 و 172) ومن المنطقي جدا، في غياب أية معلومات أخرى، أن نصطلح على القول إن طول الشخص مقرب إلى أقرب سنتمتر هو 172سم. وكذلك النتيجة ستكون لو أن النقطة c وقعت في أي مكان من المنطقة المظللة على المحور، التي تمتد بين 171.5 سم إلى 172.5 سم. ولكن

ماذا لو وقعت c عند الـ 171.5 سم تماما أو عند الـ 172.5 تماما؟ في مثل هذه الحالة نتفق على تقريب الـ 171.5 سم إلى 172 سم، وتقريب الـ 172.5 سم إلى 173 سم . لنفرض الآن وجود تدريج ميلليمتري ، فما اصطلحنا عليه سابقا يكافىء ما يلي :

إذا كان القياس 171.5 سم أو 171.6 سم أو 171.7 سم أو 171.8 سم أو 117.9 نعتبره 172 سم وكذلك نعتبره 172 سم إذا كان القياس 172.1 سم أو 172.2 سم أو 172.3 سم أو 172.4 سم . وهذا يُملي علينا، بصورة عامة، القاعدة التالية لتدوير الأرقام العشرية :



شكل (٤)

قاعدة

لتدوير عدد عشري إلى منزلة معينة ننظر في الرقم الذي يحتل المنزلة التي تليها فإذا كان 5 أو أكثر نضيف واحدا إلى المنزلة المطلوبة ونلغي جميع الأرقام العشرية التي تليها . وإذا كان 4 أو أقل نبقي المنزلة المطلوبة كما وردت ونستغني كذلك عن جميع الأرقام العشرية التي تليها .

مثال (١٥)

كيف تصبح الأعداد التالية بعد تدويرها إلى أقرب جزء من عشرة .

181.253 ، 314.0621، 7.3198، 0.9808، 0.0532، 9.1701

الحـــل

وفقـا للقاعــدة المذكـورة أعلاه ، ننظر إلى الـرقم العشري الثاني فـإذا كان 5 أو أكـثر نضيف 1 إلى الرقــم العشري الأول (وهـو الـرقم الذي يحتــل منزلـة الجـزء مــن عشرة) وإذا كان أقل من 5، نحتفظ بالرقـم العشري الأول كما ورد. وهكذا نجد، على الترتيب، 181.3 ، 314.1، 7.3 ، 1.0 ، 0.1، 9.2.

مثال (١٦)

فيما يلي عـدد الـزيـارات التي قـام بها المرضى المراجعـون للعيـادات الخارجيـة بالمستشفيـات ومراكـز الرعايـة الصحية الأوليـة في المناطق الأربع عشرة في المملكـة لعام ١٤٠٦هـ: 11168617، 4330131، 4870214، 3028921، 2049754، 4801820، 1577160، 6374554، 6034118 ، 1479722 ، 3875879 ، 3464826 ، 2825761 ، 1793849 .

والمطلـوب التعبير عن هذا البيـان العددي بـآلاف الأشخاص ثم تـدوير الـرقم الناتج إلى أقرب ألف .

الحـــل

التعبير عن البيـان بـآلاف الأشخاص يعني أن وحـدة القيـاس أصبحت «ألف شخص» فكل ألف مراجع يشكلون جماعة واحدة تتضمن ألف شخص. وللتعبير عن هـذه الأعداد بـآلاف الأشخاص يجب أن نقسم كـل عدد على ألف. وتـدوير الأعـداد الناتجة إلى أقـرب ألف يعني تدويرهـا إلى الرقم الذي يحتل منـزلة الآحاد. وهكـذا نجد الأعداد معبرا عنها بآلاف الأشخاص كما يلي:

11168.617، 4330.131، 4870.214، 3028.921، 2049.754، 4801.820، 1577.160، 6374.554، 6034.118، 1479.722، 3875.879، 3464.826، 2825.761 ، 1793.849 .

وبعد تدويرها إلى أقرب ألف نجد:

11169، 4330، 4870، 3029، 2050، 4802، 1577، 6375، 6034، 1480، 3876، 3465، 2826، 1794.

ونلاحظ أنه من الأيسر على القارىء متابعة البيان عندما يُعطى بهذا الشكل.

وفي الوقت الذي لا تخضع فيـه قياسات بيان عـددي من النوع المنفصل لأخطاء فإن القياسات في بيان عـددي من النوع المستمر تخضع دائما لخطأ يسمى خطأ القياس. ويعـود السبب في ذلك إلى أننا نستخـدم للوصـول إلى مثل ذلك القياس جهـازا أو أداة

للقياس، ولا يمكن للإنسان أن يبتكر جهازا للقياس لا يخطىء. لقد توصل الإنسان إلى ابتكار أجهزة قياس في علوم الفيزياء والكيمياء وغيرها تقيس بدقة هائلة إلا أنها مع ذلك تخطىء. وبالطبع يضاف إلى هذا السبب أو المصدر مصادر أخرى نذكر منها أن الإنسان الذي يقيس مُعرض أيضا لارتكاب خطأ، ومهما أحسن استخدام الجهاز الذي يقيس به فسيرتكب أيضا نوعا من الخطأ.

وعندما نطلّع على بيان إحصائي عددي من النوع المستمر ينبغي أن نفهم من القياس المقدم لنا شيئين، أولهما فكرة عن مقدار الشيء المقيس وثانيهما درجة الدقة التي يتمتع بها القياس. وإذا قيل لنا إن طول شخص هو 168.7 سم فإن هذا الرقم يعطينا فكرة عن قامة الشخص ولكنه يعطينا أيضا أن دقة هذا القياس تصل إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، أي إلى أقرب ميلليمتر. وكقاعدة عامة، يكون الرقم الأخير المعطى على اليمين رقما مشكوكا في صحته. وعندما نقيس، بطريقة علمية، طول شخص ونفيد بأن طوله 168.7 سم فهذا يعني أن الطول الحقيقي لهذا الشخص واقع في مكان ما بين 168.65 سم و 168.75 سم. ولتوضيح الفكرة نقول إننا لو استخدمنا جهازا أكثر دقة لقياس الطول لأعطانا الطول صحيحا حتى منزلة الجزء من مائة، أي حتى الرقم العشري الثاني بعد الفاصلة، وفي هذه الحالة سيكون الرقم العشري الأول بعد الفاصلة صحيحا والشك لا يتطرق إلا إلى الرقم الذي يليه، ولو أن دقة الجهاز سمحت بإعطاء ثلاثة أرقام عشرية بعد الفاصلة أي بدقة تصل إلى أقرب جزء من ألف من السنتمتر، فسيكون الرقمان العشريان الأول والثاني بعد الفاصلة صحيحين ويتطرق الشك إلى الرقم العشري الثالث، وهكذا. وبصرف النظر عن مقدار هذه الأرقام (الرقم العشري الثاني والثالث والرابع الخ. بعد الفاصلة) فإن تدوير العدد الذي نحصل عليه إلى أقرب جزء من عشرة لن يعطينا 168.7 سم إلا إذا كان العدد الذي نقوم بتدويره واقعا بين 168.65 سم، و 168.749999 (ويمكن أن يتكرر الرقم 9 إلى ما لا نهاية له) وذلك وفقا لقاعدة تدوير الأرقام العشرية، ونصطلح هنا، توخيا للسهولة، أن القيمة الفعلية للقياس تقع بين 168.65 سم و 168.75 سم.

وبصورة عـامة، للوصـول إلى الحدين الأدنى والأعلى للقيمة الفعليـة لقياس من النوع المستمـر، معطى على شكل عدد صحيـح (أي مقرب إلى أقرب واحـد صحيح)، نطرح منه 0.5 فنحصل على الحد الأدنى ونضيف إليه 0.5 فنحصل على الحد الأعلى. أما إذا كان القيـاس معطى كعدد عشري فنضع صفرا بعد آخـر رقم معطى في القياس (أي آخر رقم على اليمين بعد الفاصلـة العشرية) ثم نضع الرقم 5 تحت هذا الصفر ونطرح فنحصل على الحد الأدنى ثم نجمع للحصول على الحد الأعلى. (محتفظين بـالفاصلة في موقعها تماما عند الجمع أو الطرح) ونوضح الطريقة بالمثال التالي:

مثال (١٧)

ما هو الحد الحقيقي الأدنى والأعلى لكل من القياسات التالية:

12 سم، 1517 سم، 18.4 سم، 125.05 سم، 34.70 سم، 4.3208 سم؟

الحـــل

الحدود المطلوبة هي على الترتيب:

$$\begin{array}{r} 12.0 \\ 0.5- \\ \hline 11.5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12.0 \\ 0.5+ \\ \hline 12.5 \end{array}$$

فالقياس الأول واقع فعلا بين 11.5 سم و12.5 سم:

وبصورة مماثلة نجـد أن القياس الثاني واقع فعلا بين 1516.5 سم و 1517.5 سم.
ومن أجل القياس الثالث نكتب:

$$\begin{array}{r} 18.40 \\ 0.05- \\ \hline 18.35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18.40 \\ 0.05+ \\ \hline 18.45 \end{array}$$

والقياس الثالث واقع فعلا بين 18.35 سم و 18.45 سم.

وبصورة مماثلة نكتب من أجل القياسات الثلاثة الباقية، على الترتيب،

$$\begin{array}{r} 125.050 \\ 0.005 + \\ \hline 125.055 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125.050 \\ 0.005 - \\ \hline 125.045 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34.700 \\ 0.005 + \\ \hline 34.705 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34.700 \\ 0.005 - \\ \hline 34.695 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.32080 \\ 0.00005 + \\ \hline 4.32085 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4.32080 \\ 0.00005 - \\ \hline 4.32075 \end{array}$$

وفي كل حالة إنما نطرح ونضيف، في الواقع، نصف وحدة دقة. حيث وحدة الدقة هي الواحد في منزلة الرقم المشكوك فيه .

١٠ ـ التناسب الطردي

نقول إن المتغيرين x و y متناسبان طرديا إذا بقيت نسبتهما ثابتة. أي $c = \frac{y}{x}$ ، أو $y = cx$ حيث c عدد ثابت يسمى ثابت التناسب.

لنفرض الآن أن المقدارين x و y يتغيران متناسبين طرديا. ولنفرض أن x تغير من x إلى $x + \Delta x$، وفي مقابل ذلك تغير y من y إلى $y + \Delta y$. ما هي العلاقة بين Δx تغير x و Δy تغير y؟ وللإجابة نفترض أن ثابت التناسب c ، فيكون :

$$\frac{y}{x} = c\, ,\ \frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} = c$$

ومنه

$$\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x} = \frac{y}{x}$$

ومن خواص التناسب يمكن أن نكتب:

$$\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}=\frac{-y}{-x}=\frac{(y+\Delta y)-y}{(x+\Delta x)-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أي أن $\frac{\Delta y}{\Delta x}=c$ أو $\Delta x= c\Delta x$

فالتغيران في x و y يحافظان دائما على علاقة التناسب الطردي ذاتها القائمة بين x و y . ونلجأ إلى هذه الحقيقة البسيطة في كثير من التطبيقات. فإذا علمنا مثلا أنه عندما ازدادت قيمة x بمقدار 5 ، ازدادت قيمة y بمقدار 3؛ فكم سيزداد y مقابل زيادة في x مقدارها 7؟ ولحساب المطلوب نكتب:

$$\frac{3}{5}=\frac{\Delta y}{7}$$

ومن خواص التناسب نعلم أن

$$5\times\Delta y=3\times 7$$

$$\Delta y=\frac{3\times 7}{5}=4.2$$

ونلخص عادة هذه العمليات في مخطط بسيط كما يلي:

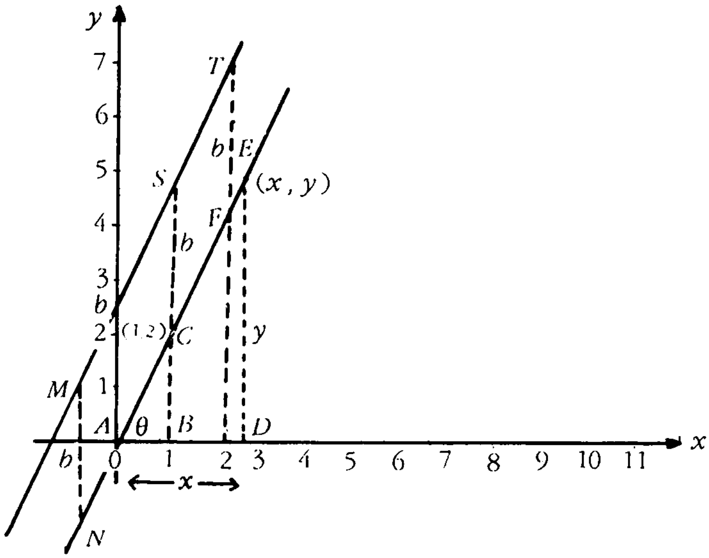
ΔX	ΔY
5	3
7	?

وتكون الزيادة المطلوبة في y مساوية $\frac{3\times 7}{5}=4.2$

١١ ـ معادلة مستقيم

لندرس أولا معادلة مستقيم يمر من مبدأ الاحداثيات. ويتحدد المستقيم تماما عند معرفة نقطتين منه. وفي حالتنا هنا نعلم سلفا أن المستقيم يمر من النقطة (0,0) وهي مبدأ الاحداثيات، فتكفي معرفة نقطة واحدة أخرى لكي يكون ممكنا تحديد معادلة المستقيم. لنفرض أن النقطة (1,2) واقعة على المستقيم فكيف نحدد معادلته؟

إذا رسمنا محورين للاحداثيـات وحددنا النقطة (1,2) ثم وصلنا بينهـا وبين المبدأ نحصل على بيان المستقيم. وعلى هذا البيان نأخذ نقطة ما، نرمز لاحداثياتها بـ x و y، وتكون المعادلة المطلوبة هي علاقة بين x و y. ومن تشابه المثلثين ABC و ADE نكتب:



شكل (٥)

أو
$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

ومنه
$$\frac{1}{x} = \frac{2}{y}$$

$$y = 2x$$

وهي ذات العلاقة التي تـربط بين مقدارين متنـاسبين طرديـا، حيث ثابت التنـاسب يساوي 2. وتنبغي ملاحظة أن ثابت التناسب 2 يمثل ظل الزاوية θ (حرف يوناني منطوقه ثيتـا) التي يصنعهـا المستقيم مـع الاتجاه الموجب لمحـور السينـات. (انظـر الشكل ٥) ويسمى ظل الزاوية θ ميل المستقيم. وكل مستقيم آخر في المستـوى ميله 2، أي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحـور السينات زاويـة تساوي زاويـة المستقيم AE، سيقطع المحور الصـادي في نقطة غير نقطـة المبدأ. لنفـرض مستقيماً MT موازيـا لـ AE ويقطع المحور

الصادي في نقطة $(b, 0)$. فما معادلته؟ يمكن الحصول على نقـاط المستقيم MT بإضافة مقدار ثابت b إلى الاحداثي الصادي للنقـاط الموافقة من المستقيم $y = 2x$، وهي النقاط التي تقع على الخط الرأسي نفسه. فإذا أضفنـا إلى الاحداثي الصادي للنقطة N مقدار b حصلنا على M وإذا أضفنا المقدار b إلى الاحداثي الصادي لكل من c و F وجدنا، على الترتيب، S و T. وهذا يعني أن معادلة المستقيم الجديد هي

y (نقطة على المستقيم الجديد) = y (نقطة على المستقيم AE) + b

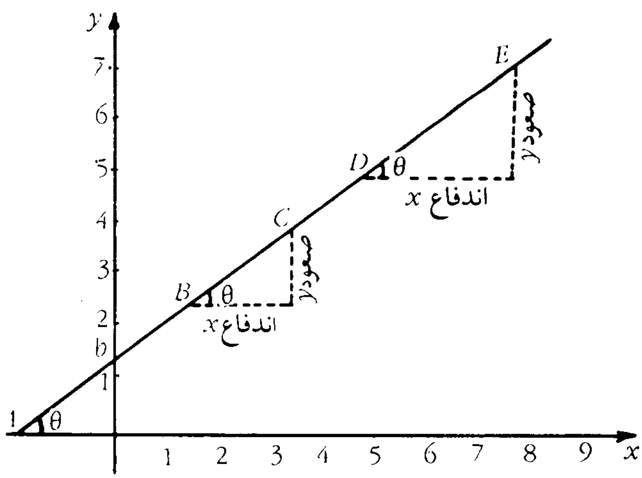
أو

$$y = 2x + b$$

وبصورة عامة نجد أن معادلة المسستقيم AE (انظر الشكل ٦) هي

$$y = (\text{ظل الزاوية } \theta)\,x + b$$

حيث b إحداثي نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات.



شكل (٦)

ولو انتقلت نقطـة على المستقيم من الوضع B إلى الوضع C فإن x سيتغير بمقدار سميناه «اندفاع x» وسيقابله تغير في y سميناه «صعود y». وكذلك عند انتقال نقطة من

الوضع D إلى الوضع E، فإن x سيتغير بمقدار سميناه «اندفاع x» وسيقابله تغير في y سميناه أيضا «صعود y». ومن خواص الشكل الهندسية نلاحظ بسهولة أن

$$\text{ثابت} = \text{ظل}\ \theta = \frac{\text{صعود}\ y}{\text{اندفاع}\ x}$$

أي أن نسبة تغير y إلى تغير x تبقى ثابتة باستمرار، في حالة مستقيم. وهي الخاصة نفسها التي رأيناها في حالة مقدارين متناسبين طرديا.

وأخيرا، إذا كانت العلاقة بين متغيرين x و y علاقة خط مستقيم قلنا إنها علاقه خطية. وبصورة عامة، معادلة أي مستقيم هي علاقة خطية وبالعكس كل علاقة خطية تمثل مستقيما.

١٢ ـ تصميم الجداول

نحتاج إلى تنظيم نتائج التجارب والمشاهدات العلمية في شكل جداول، وذلك في مختلف ميادين المعرفة. وفي أبسط الحالات نجد جدولا ثنائيا، يتضمن في كل خلية من خلاياه قياسا أو مشاهدة مرتبطة بمتغيرين، ثبتنا كلا منهما عند مستوى معين من مستوياته الممكنة. فنفرض، مثلاً، أن لمتغير x ثلاثة مستويات، سنرمز لها بـ x_1، x_2، x_3؛ وأن لمتغير آخر y أربعة مستويات، سنرمز لها بـ y_1، y_2، y_3، y_4؛ وإذا حصلنا عند كل زوج مختلف من المستويات للمتغيرين x و y على قياس أو مشاهدة، فسيتوفر لدينا اثنا عشر قياسا نضعها في جدول كما في الشكل (٧).

حيث أشير بـ × للقياس وبـــ لمجاميع السطور أو الأعمدة وبـ = للمجموع الكلي. وبصورة عامة، إذا كان عدد مستويات المتغير x مساويا لـ n ، وعدد مستويات المتغير y مساويا لـ m فإن عدد خلايا الجدول سيكون $n \times m$.

وفي حال وجود ثلاثة متغيرات x وله n من المستويات، y وله r من المستويات، و z وله q من المستويات، نحتاج إلى تصميم جدول ثلاثي يتضمن $n\,r\,q$ خلية. ونلاحظ بوضوح أننا نحتاج إلى جدول ثنائي مؤلف من $n\,r$ خلية ليستوعب المتغيرين x

x \ y	y_1	y_2	y_3	y_4	المجموع
x_1	×	×	×	×	-
x_2	×	×	×	×	-
x_3	×	×	×	×	-
المجموع	-	-	-	-	=

شكل (٧)

و y . ثم نعيد هذا الجدول q مرة وذلك عند كل مستوى من مستويات المتغير الثالث z . ولتقديم مثال عن تصميم جدول ثلاثي نفترض أن $n = 3$ ، $r = 4$ ، $q = 3$. فنجد جدولا كما في الشكل (٨) .

	Z_1			المجموع	Z_2			المجموع	Z_3			المجموع
	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
y_1	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_2	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_3	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_4	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (٨)

ومن الواضح أنه يمكن تنظيم الجدول بطريقة ثانية تستوعب فيها الجداول الثنائية المكررة مستويات Z و Y . (انظر الشكل ٩) أو بطريقة ثالثة تستوعب فيها الجداول الثنائية المكررة مستويات X و Z . (انظر الشكل ١٠).

	x_1			المجموع	x_2			المجموع	x_3			المجموع
	z_1	z_2	z_3		z_1	z_2	z_3		z_1	z_2	z_3	
y_1	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_2	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_3	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
y_4	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (٩)

	y_1			المجموع	y_2			المجموع	y_3			المجموع	y_4			المجموع
	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
z_1	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
z_2	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
z_3	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-	×	×	×	-
	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=	-	-	-	=

شكل (١٠)

وعلى سبيل المثال، لنفرض أن لدينا أربعة أنواع من الأبقار نرمز لها $C_1, C_2, C_3,$ C_4 . أخضعناها في محطة للتجارب الزراعية تابعة لكلية الزراعة، إلى ثلاثة أشكال من النظام الغذائي هي N_1, N_2, N_3 . وذلك لدراسة أثر النظام الغذائي في إنتاج الحليب اليومي بالكغ لكل من الأنواع الأربعة. وكانت النتائج كما في الجدول الثنائي التالي :

أنواع البقر / النظام الغذائي	C_1	C_2	C_3	C_4	المجموع
N_1	25	28	30	35	118
N_2	28	29	31	35	123
N_3	27	28	31	34	120
المجموع	80	85	92	104	361

وإذا فرضنا أن التجربة نفسها قد أجريت في محطة للتجارب الزراعية في أبها وذلك لدراسة أثر عامل البيئة والمناخ. إذا رمزنا لعامل البيئة بـV فلدينا هنا مستويان V_1 وترمز لبيئة المنطقة الوسطى و V_2 وترمز لبيئة المرتفعات الجنوبية الغربية من المملكة. وأن تجربة أبها أعطت النتائج التالية:

أنواع البقر / النظام الغذائي	C_1	C_2	C_3	C_4	المجموع
N_1	27	30	29	38	124
N_2	29	33	30	36	128
N_3	30	31	29	38	128
المجموع	86	94	88	112	380

فيمكن جمع هذه النتائج في جدول واحد يلخص العوامل الثلاثة N,C و V. وذلك بأشكال مختلفة، منها، على سبيل المثال، الشكل التالي:

	V_1				المجموع	V_2				المجموع
	C_1	C_2	C_3	C_4		C_1	C_2	C_3	C_4	
N_1	25	28	30	35	118	27	30	29	38	124
N_2	28	29	31	35	123	29	33	30	36	128
N_3	27	28	31	34	120	30	31	29	38	128
المجموع	80	85	92	104	361	86	94	88	112	380

أو يمكن تنظيمه على الشكل التالي :

	V_1				V_2			
	N_1	N_2	N_3	المجموع	N_1	N_2	N_3	المجموع
C_1	25	28	27	80	27	29	30	86
C_2	28	29	28	85	31	33	31	94
C_3	30	31	31	92	29	30	29	88
C_4	35	35	34	104	38	36	38	112
المجموع	118	123	120	361	124	128	128	380

كما يمكن كتابته على الشكل:

	N_1			N_2			N_3		
	V_1	V_2	المجموع	V_1	V_2	المجموع	V_1	V_2	المجموع
C_1	25	27	52	28	29	57	27	30	57
C_2	28	30	58	29	33	62	28	31	59
C_3	30	29	59	31	30	61	31	29	60
C_4	35	38	73	35	36	71	34	38	72
المجموع	118	124	242	123	128	251	120	128	248

تمرين: اقترح أشكالا أخرى.

ويمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين C و V، مثلا، بالجمع فوق مستويات العامل N فنجد:

	V_1	V_2	المجموع
C_1	80	86	166
C_2	85	94	179
C_3	92	88	180
C_4	104	112	216
المجموع	361	380	741

وكذلك يمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين C و N، مثلا، بالجمع فوق مستويات العامل V فنجد:

	N_1	N_2	N_3	المجموع
C_1	52	57	57	166
C_2	58	62	59	179
C_3	59	61	60	180
C_4	73	71	72	216
المجموع	242	251	248	741

وبصورة مماثلة يمكن كتابة جدول ثنائي يتضمن العاملين N و V .

ومن المجاميع الفرعية في الشكل (٧) يمكن تشكيل جدولين ثنائيين. فإذا أخذنا المجاميع الفرعية الواردة في وضع شاقولي نجد جدولا 3×4 يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت z و y فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير x أو جمعنا فوق مستويات X . ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي $z \times y$» ، وكذلك لو أخذنا المجاميع الفرعية الواردة في وضع أفقي نجد جدولا 3×3 يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت Z و X فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير y أو جمعنا فوق مستويات Y . ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي $z \times x$» . ولو أخذنا في الشكل (٧) المجاميع الفرعية الواردة في وضع شاقولي لوجدنا جدولا 3×4 يمثل نتائج التجربة لو أنها تضمنت x و y فقط. أي نتائج التجربة لو أننا أغفلنا المتغير Z ، أو جمعنا فوق مستويات Z . ويسمى هذا الجدول «الجدول الثنائي $x \times y$» . (ضع جداول ثنائية في مثال الأبقار تمثل $C \times V$، $N \times V$، $N \times C$).

ولتوضيح حالة أربعة متغيرات نأخذ المثال التالي. فلنفرض أن لدينا أربعة متغيرات هي x ويقع في ثلاثة مستويات؛ y ويقع في 3 مستويات؛ Z ويقع في 3 مستويات؛ T ويقع في مستويين. فعندئذ يمكن تصميم جدول $y \times x \times Z \times T$ أبعاده $4 \times 3 \times 3 \times 2$ ويتضمن 72 خلية. هي في الواقع ستة جداول كل منها 3×4 . (انظر الشكل ١١).

		Z_1			Z_2			Z_3		
		x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
T_1	y_1	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_2	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_3	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_4	×	×	×	×	×	×	×	×	×
T_2	y_1	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_2	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_3	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	y_4	×	×	×	×	×	×	×	×	×

شكل (١١)

تمارين الملحق الأول

١) قم بالعمليات الحسابية والجبرية التالية إن أمكن:

ا ـ في الفصل أربعون طالبا وخمسون مقعدا وثلاثة نوافذ. كم طالبا ومقعدا ونافذة في الفصل؟

ب ـ في الغرفة ا أربعون طالبا وخمسون مقعـدا، وفي الغرفة المجاورة ب ثلاثون طالبا وخمسة وأربعون مقعدا. ما هو عدد الطلاب وعدد المقاعد في الغرفتين معا؟

جـ ـ $3xy^2z + 0.5\,xy^2z + 1.2xy^2z - 2.2xy^2z = ?$

د ـ $5x^2yz^2 + 3xyz^2 - x^2yz = ?$

هـ ـ $5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} = ?$

و ـ $\sqrt{15} - 3\sqrt{5} = ?$

ز ـ $8\,F(3) + 3\,F(3) - 0.5\,F(3) - F(3) = ?$

ح ـ $7\,F(2) - 3\,F(1) = ?$

ط ـ $\frac{2}{3} + \frac{3}{7} - \frac{5}{21} = ?$

ك ـ $\frac{3}{32} + \frac{5}{16} + \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{13}{32} - 1 = ?$

ل ـ $0.5403 + 1.0279 + 12.03 - 3.0101 - 14.123 = ?$

٢) في صندوق ثلاث كرات حمر وخمس كرات سود وثماني كرات بيض ما هي النسبة المئوية في الصندوق لكل من الكرات الحمر والكرات السود والكرات البيض؟

٣) في الفصل 25 طالبا من طلاب كلية العلوم و 10 من طلاب الحاسب الآلي وإثنان من الهندسة وطالب من العلوم الصحية. ما هي النسبة المئوية لوجود طلاب كليات العلوم والحاسب الآلي والهندسة والعلوم الصحية في الفصل علما أن مجموع طلاب الفصل 38 طالبا؟

٤) احسب ما يلي: $12.025 \times 0.19 = ?$

$$\frac{4}{5} \times 0.61 = ? \quad ; \quad \frac{2}{9} \times \frac{7}{5} = ? \quad ; \quad \frac{7}{3} \times \frac{7}{9} = ?$$

$$130.576 \div 1.2 \quad ; \quad 0.7895 \div 0.05$$

٥) مستخدما خواص التناسب فيما يلي:

ا ـ أحسب x إذا كان $\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$

ب ـ أحسب x و y إذا كان $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ ، و $x + y = 10$.

جـ ـ في صندوق كرات بيض وسود نسبة 2 إلى 1 ، على الترتيب، أحسب عدد الكرات من كل نوع إذا علمت أن الصندوق يتضمن 12 كرة.

د ـ إذا كان $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ و $y^2 - x^2 = 32$ فاحسب x و y .

هـ ـ إذا كان $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ و $x + y + z = 30$

فاحسب x ، y ، z .

٦) $A = \{ x :$ طالب في جامعة الملك سعود $x \}$; $B = \{ y :$ طالب متزوج $y \}$
$C = \{ Z :$ طالب لا يدخن $Z \}$
عبر كلاميا عن $A \cap B$ ، $B \cap C$ ، $A \cap C$ ، $A \cap B \cap C$.

٧) أوجد $A \cup B$ في كل من الحالات التالية :

ا ـ $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{b, c, \mathrm{d}\}$

ب ـ $A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{a, b\}$

جـ ـ $A = \{\bigcirc , \bigstar\}$ ، $B = \{ + , -\}$

٨) لتكن المجموعة الشاملة S هي مجموعة سكان شبه الجزيرة العربية :
$A = \{a :$ مواطن سعودي $a\}$ ، $B = \{b :$ شخص متعلم $b\}$
$C = \{c :$ شخص مغترب $c\}$
عبر كلاميا عن المجموعات التالية :
$\bar{A}$, $A \cap B$, $\bar{B} \cap \bar{C}$, $B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $\bar{A} \cup (B \cap C)$
$B \cup \bar{B}$, $A \cup B$, $B - C$, $B - \bar{C}$.

٩) يمثل الشكل (١٢) المقابل ثلاث مجموعات X ، Y ، Z . ظلل المنطقة التي تمثل المجموعات التالية ، كل واحدة في رسم مستقل.

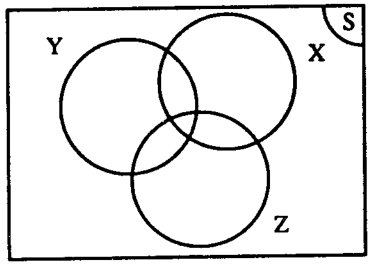
أ ـ $X \cup (Z \cup Y)$

ب ـ $(X \cup Z) \cup Y$ ، وقارن النتائج مع أ.

جـ ـ $(X \cap Y) \cap Z$

د ـ $X \cap (Y \cap Z)$ وقارن النتائج مع جـ .

هـ ـ $X \cap (Y \cup Z)$.



شكل (١٢)

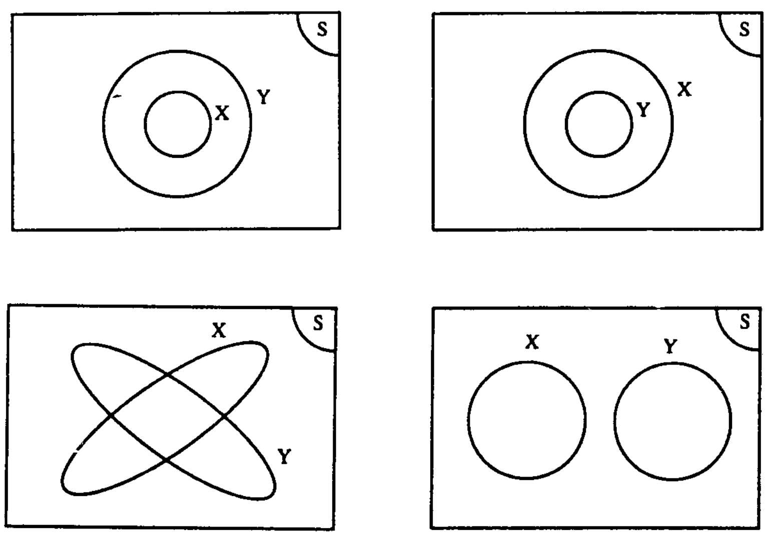
و ـ $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ وقارن الناتج مع هـ .

ز ـ $X \cup (Y \cap Z)$.

ح ـ $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ وقارن النتائج مع ز .

لخص النتائج التي حصلت عليها من هذا التمرين بالنسبة إلى قابلية توزيع عملية التقاطع على عملية الاتحاد وتوزيع عملية الاتحاد على عملية التقاطع .

١٠) ظلل $X - Y$ في كل من الأشكال التالية :



شكل (١٣)

١١) في الشكل (١٤) ، المقابل، أكتب المجموعات :

أ ـ X ،

ب ـ Y ،

جـ ـ $X \cap Y$ ،

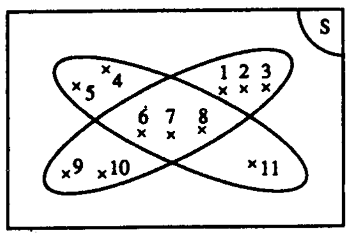
د ـ $X - Y$ ، $X - (X \cap Y)$ ،

هـ ـ $Y - X$ ، $Y - (X \cap Y)$ ،

و ـ $X \cup Y$ ،

ز ـ $(X \cup Y) - X$ ،

لاحظ أن الناتج لا يساوي Y ، متى يكون الناتج مساويا لـ Y ؟



شكل (١٤)

١٢) اكتب الجداء الديكارتي $X \times Y$ إذا كان $X = \{b, c, d\}$ ؛ $Y = \{m, n, t\}$ ، أكتب أيضا $X \times X$ و $Y \times Y$.

١٣) لتكن الدالة المعرفة بالقاعدة

$$y = \frac{2x+5}{x-3}$$

أ ـ حدد مجموعة تعريف الدالة ومداها ،

ب ـ احسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(4)$ ، $f(5)$ ، $f^{-1}(1)$ ، $f^{-1}(7)$.

١٤) التطبيق $f : Z \to Z$ حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة . معرف كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } x \text{ عددا يقبل القسمة على } 2 \\ 1 & \text{إذا كان } x \text{ لا يقبل القسمة على 2 ويقبل القسمة على } 3 \\ 2 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ما هي صور الأعداد 8- ، 6- ، 5- ، 0 ، 3 ، 7 ، 11 ، 16 ؟

١٦) لتكن الدالة العددية f المعرفة بالقاعدة :

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & x \leq 0 \quad \text{إذا كان} \\ 0 \ , & 0 < x \leq 1 \quad \text{إذا كان} \\ 1 \ , & x > 1 \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

أ ـ أحسب f (5-)، f (1/2)، f (1)، f (3)، f (1000) .

ب ـ أرسم بيان هذه الدالة وعين مداها .

١٧) لتكن الدالة العددية f المعرفة بالقاعدة :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \ , & x < -1 \quad \text{إذا كان} \\ 1 \ , & 1 < x < 2 \quad \text{إذا كان} \\ -2x+3 \ , & x > 3 \quad \text{إذا كان} \end{cases}$$

ا ـ عين مجموعة تعريف هذه الدالة (ساحة الدالة) .

ب ـ أحسب $f(-3)$ ، $f(-2)$ ، $f(3/2)$ ، $f(5)$.

جـ ـ ما هي الصورة العكسية للعدد (2-) .

د ـ أرسم بيان هذه الدالة .

١٨) أكتب بالتفصيل ما تمثله المجاميع التالية :

$$\sum_{i=2}^{6} x_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} (x_i - 2)^2 \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} (x_i + 3)\, x_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{4} f_i x_i^2$$

١٩) أكتب كلا من العبارات التالية مستخدما إشارة المجموع $\sum$:

$$y_9^2 + y_{10}^2 + y_{11}^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2 \quad , \quad x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad , \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \quad , \quad (x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + (x_3 - m)^2 \quad ,$$

$$kn_1 + kn_2 + kn_3 + kn_4 + kn_5 \quad , \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \quad ,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 - a - a^2 - a^3 \; , \quad ay_1 + a^2 y_2 + a^3 y_3 + a^4 y_4 \quad ,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \quad , \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4$$

٢٠) إذا كان $x_1 = 3$ ، $x_2 = 2$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 0$ ، $x_5 = -3$ حيث

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ و $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 23$. أحسب قيمة كل من العبارات التالية :

(i) باستخدام تعريف $\sum$ ،

(ii) تبسيط العبارة أولا مستخدما خواص $\sum$ ثم حساب القيمة .

أ ـ $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 10)$

ب ـ $\sum_{i=1}^{5} (2x_i + 3)$

جـ ـ $\sum_{i=1}^{4} (x_i + x_{i+1})$

د ـ $\sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i+1})$

هـ ـ $\sum_{i=1}^{5} (x_i - 1)(x_i + 1)$

٢١) (i) بين أن

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^2 - r^2\right] = (n+1)^2$$

(أكتب أول حدين وآخر حدين ولاحظ اختصار الحدود السالبة مع الحدود الموجبة).

(ii) بين أن

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^2 - r^2\right] = 2\sum_{r=0}^{n} r + n$$

(باستخدام خواص Σ).

(iii) من (i) و (ii) بين أن $\sum_{r=0}^{n} r = \frac{1}{2}\, n(n+1)$

٢٢) إذا كانت النقطة $(x, 11)$ واقعة على المستقيم $y = 3x + 5$ فاحسب قيمة x.

٢٣) بين أن النقاط الثلاثة $(2,5)$، $(4, 9)$، $(1, 3)$ واقعة على استقامة واحدة.

٢٤) في مسح لالتهاب الكبد الفيروسي في مدينة معينة، جرى تسجيل الحالات التي أخبر عنها من المستشفيات، ومن العيادات الطبية، ومن السلطات الصحية المحلية. ويبين الجدول التالي أعداد المرضى الموجودين في مستشفى وغير الموجودين في مستشفى، مصنفين وفقا للجنس، العمر، ولما إذا كانت الحالة من النوع HBSAG أم لا.

أكتب جداول مختصرة تبين تغير نسبة المرضى في المستشفيات مع كل من العمر، الجنس، وحالة الـ HBSAG.

HBSAG سلبي				HBSAG إيجابي				العمر بالسنوات
في مستشفى		ليس في مستشفى		في مستشفى		ليس في مستشفى		
أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	
0	0	0	0	9	25	42	43	0 - 14
7	16	10	18	20	39	39	41	15 - 29
4	18	3	17	10	21	25	48	≥ 30

٢٥) يتألف فصل الإحصــاء من 40 طالبـا. صنفوا وفق ثـلاثة متغيرات هـي الجنسية (سعودي، غير سعودي)، والسكن (يعيش في سكن الطلاب، لا يعيش في سكن الطلاب)، والكلية التي ينتسب إليها (علـوم، حاسب آلي، هندسة). إذا علمت أن:

15 طالب سعودي يسكنون في سكن الطلاب ومن العلوم؛ 5 سعوديون لا يسكنون ومن العلوم، 3 طلاب سعوديـون يسكنون في سكن الطلاب ومن الحاسب؛ 2 غير سعوديين يسكنون ومن العلوم، 4 طلاب سعوديون يسكنون في سكن الطلاب ومن الهندسة؛ 1 غير سعــودي يسكن ومن الحاسب، 1 غير سعــودي لا يسكن ومن الحاسب. فاعـرض هذه المعلومات في جـدول علما أن ربع طلاب الفصل من غير السعوديين وأن طلاب الهندسة هم حصرا من السعوديين وجميعهم يعيشون في سكن الطلاب.

الملحق الثاني

بعض الجداول الإحصائية

١ ـ جدول التوزيع الطبيعي المتجمع

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7743	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9023	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9734	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

جدول توزيع ستيودنت t المتجمع

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}\,dx$$

n \ F	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.55	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.888
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.683	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.667	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291