الفصل الثاني

الاحتمـــال

(٢ ـ ١) التجارب العشوائية

نـواجـه في معظم ميـادين النشـاط العلمي وفي الحيـاة العمليـة اليـوميـة تجارب ومشاهدات وظـواهر يمكن أن تتكرر عددا كبيرا مـن المرات تحت ظروف متشابهة. وفي كل مـرة نهتم بنتائج هـذه التجارب والمشاهـدات التي يمكن أن تكون كميـة، فنسجل نتيجة كل مشاهدة على شكل عدد. أو قد تأخذ شكلا كيفيا فنسجل صفة معينة كأن نلاحظ مثلا لونا أو نسجل وقوع أو عدم وقوع حادثة أو ظاهرة بعينها متصلة بكل تجربة من التجـارب التي نتابعهـا. ويمكننا، بصـورة عـامة، تعـريف التجربـة على الشكل التالي.

تعريف التجربة

التجربة هي كل عملية تودي إلى ملاحظة «مشاهدة» أو قياس.

ونذكر على سبيل المثال:

(١) عند تكرار رمي حجر نرد عادي نحصل في كل مرة على أحد الأوجه:

ويمكن أن نصطلح على تسجيل العـدد 1 نتيجة للتجربة إذا ظهـر الوجه الذي نقشت عليه نقطـة واحدة وتسجيـل العدد 2 إذا ظهـر الوجـه الـذي نقشت عليه نقطتـان، وهكذا. وسنحصل في كل مرة نرمي فيها الحجر على أحد الأعداد

1,2,3,4,5,6,

(٢) عند قياس طول ووزن مجموعة من الأشخاص لكل منهم العمر والجنس نفسيهما فإننا نعبر عن كل ملاحظة بزوج من الأعداد (x,y) فترمز x لقياس الطول و y لقياس الوزن .

(٣) إذا أخذنا عينة من الانتاج اليومي لمصنع من الفولاذ وقسنا في كل قطعة ؛ القساوة ، المقاومة ، نسبة الفحم فستتألف كل ملاحظة من ثلاثة أعداد .

(٤) إذا تابعنا بشكل دوري منتظم سعر سلعتين معاشيتين ، الحليب والبيض ، مثلا ، فسنعبر عن كل ملاحظة في زوج من الأعداد .

(٥) إذا كنا نتابع جنس كل طفل يولد في منطقة معينة فإننا سنحصل على نتيجة وصفية : ذكر أو أنثى ، ويمكن أن نصطلح على التعبير عن هاتين النتيجتين الممكنتين بالرقم 1 أو الرقم 0 ونسجل 1 إذا كان المولود ذكرا و0 إذا كان المولود أنثى .

ونلاحظ في مثل هذه التجارب أن الملاحظات التي نحصل عليها من تكرار للتجربة إلى آخر تعاني تذبذبا عشوائيا لا يخضع لأ ي صيغ أو قوانين معروفة . وبصرف النظر عن العناية القصوى التي نبذلها في كل حالة للتحكم بظروف التجربة ومحاولة إخضاعها لإرادة المجرب ، فإن النتائج المتعاقبة ستتغير بشكل غير منتظم من ملاحظة لأخرى ، وبصورة تحجب قدرتنا على التنبؤ بالنتيجة سلفا . ونقول في مثل هذه الحالات إننا نقوم بسلسلة من التجارب العشوائية .

وعلى الوجه الآخر، قد نكون في بعض الحالات على درجة كافية من المعرفة الدقيقة بالقوانين التي تتحكم بالظاهرة المدروسة ، تبرر لنا التنبؤ الدقيق سلفا بما ستكون عليه نتائج تجربتنا . فإذا كانت التجربة ، مثلا ، هي ملاحظة عدد مرات الكسوف الشمسي التي يمكن ملاحظتها من مرصد معين في كل عام ، فإننا لا نتردد في القيام بالتنبؤ بهذا العدد ، اعتمادا على جداول وحسابات فلكية . وإذا كنا في صدد ملاحظة وتسجيل شدة التيار في دائرة كهربائية ، فإننا نستخدم القانون الفيزيائي المعروف :

$$\vartheta = mi$$

حيث ϑ فرق الجهد بين قطبي الدائرة مقاسا بالفولط ، و m المقاومة مقاسة بالأوم، و i شدة التيار مقاسة بالأمبير. وهو يسمح لنا بوصف ظاهرة فيزيائية وصفا دقيقا، فنقول مثلا إن دائرة كهربائية، فرق الجهد بين قطبيها 150 فولط، ومقاومتها الكلية 50 أوم، ستكون شدة التيار فيها 3 أمبير. ويبرز نوع مشابه في كل حالة تتوفر لنا فيها معرفة القوانين التي تتحكم بالظاهرة التي ندرسها من جهة، وتكون هذه القوانين، من جهة أخرى، على درجة من البساطة بحيث نتمكن من تطبيقها عمليا.

والخاصة المميزة للتجارب العشوائية هي التذبذب غير المنتظم في نتيجة التجربة من تكرار إلى آخر، وبالنسبة إلى تجربة عشوائية يجب أن يكون في مقدورنا تحديد مجموعة كل النتائج التي يمكن أن يسفر عنها تنفيذ التجربة مرة واحدة، إلا أنه لا يمكن التنبؤ سلفا بالنتيجة التي سنحصل عليها من بين تلك المجموعة من النتائج الممكنة.

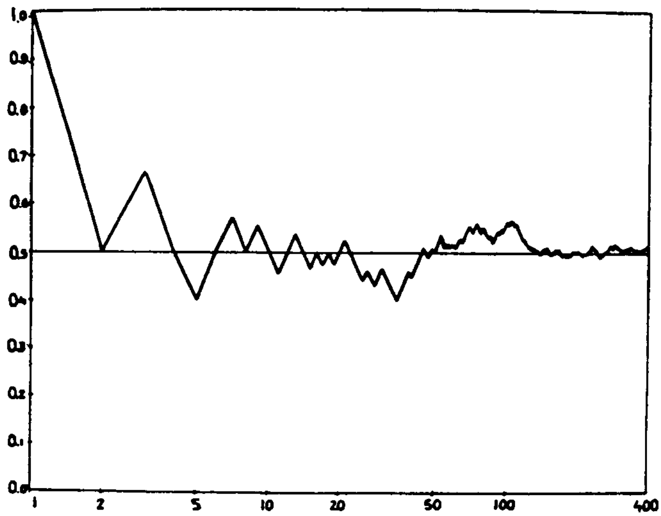
وسنرى الآن أنه في وسط هذا التذبذب غير المنتظم الذي تتصف به التجارب العشوائية، يبدو لنا خيط من الأمل، يتمثل في ظاهرة نزوع نحو الانتظام على المدى البعيد.

(٢ ـ ٢) الانتظام الإحصائي

رأينا أنه لا يمكننا التنبؤ بنتيجة تجربة بمفردها عند القيام بسلسلة من التجارب العشوائية، وأن النتائج المتتابعة لتكرار التجربة تحت الشروط نفسها تخضع لتذبذبات عشوائية غير منتظمة، إلا أننا عندما تحول اهتمامنا من التجارب واحدة فأخرى، إلى مجمل السلسلة من التجارب التي أجريناها ككل، فإن الأمر يختلف كليا، وتبدو لنا ظاهرة مهمة جدا، نعبر عنها على الشكل التالي: بالرغم من السلوك غير المنتظم للنتائج مفردة، فإن معدل هذه النتائج في سلسلة طويلة من التجارب يُظهر انتظاما مدهشا.

ولإيضاح الفكرة، نأخذ تجربة قذف قطعة نقود، وسنرمز بـ H لوجه الصورة، وبـT لوجه الكتابة. إذا كررنا التجربة 20 مرة، مثلا، ورأينا أن وجه الـ T قد ظهر في 12 منها، قلنا إن التكرار النسبي لحادثة ظهور الوجه T هو 12/20

وبصورة عامة، إذا كررنا التجربة N مرة وظهر وجه ال H في n منها فإن التكرار النسبي لظهور وجه ال H هو n/N . ويوضح الشكل (٢ ــ ١) كيف يتغير التكرار النسبي n/N مع قيم متزايدة لعدد التكرارات N. وكما نرى على الشكل يتذبذب التكرار النسبي بشدة من أجل قيم صغيرة لـ N. ولكن هذا التذبذب يصبح أضعف فأضعف مع زيادة N. ويثير هذا الشكل الانطباع بأنه إذا أمكن زيادة العدد N بلا حدود، أي أمكن تكرار التجربة تحت الشروط نفسها بلا تناه، فإن التكرار النسبي سيسعى إلى نهاية قريبة جدا من النصف.



شكل (٢ ـ ١)

والخبرة التجريبية تشير، على وجه العموم، إلى أن التكرارات النسبية تسعى إلى الاستقرار، عادة، بعد سلسلة طويلة من المشاهدات العشوائية المتكررة التي تجري تحت شروط منتظمة. ونظرة فاحصة عن كثب إلى الحالات التي يبدو فيها وكأن مثل هذا النزوع إلى الا ستقرار غير صحيح، ستزيح الستار عن نقص أكيد في انتظام الشروط التي نكرر تحتها التجربة. وهذا يدفعنا إلى القول إنه إذا أمكن الاستمرار في سلسلة لا نهاية لها من التكرارات لتجربة عشوائية E ، مثلا، وسجلنا في كل تكرار وقوع أو عدم وقوع حادثة E ، مثلا، مرتبطة بهذه التجربة، وراقبنا تطور قيمة التكرار النسبي لوقوع الحادثة E ، فسنرى أنه يسعى، بصورة عامة، إلى قيمة مثالية محددة. وبالطبع فإنه لا

يمكننا برهان صحة أو عدم صحة هذه المقولة، طالما أنه لا يمكننا أصلا القيام بسلسلة من التكرارات لا نهاية لها. إلا أن التجارب تؤيد، بصورة عامة، المقولة التالية الأقل دقة، وهي أنه يمكننا أن ننسب إلى كل حادثة E مرتبطة بتجربة عشوائية F، عددا p، حتى إذا قمنا بسلسلة طويلة من التكرارات للتجربة يصبح التكرار النسبي لوقوع الحادثة E مساويا تقريبا لـ p. وهذه هي الصيغة النموذجية للانتظام الإحصائي الذي يشكل الأساس التجريبي لنظرية الإحصاء.

(٢ ـ ٣) هدف النظرية الرياضية

عندما نكتشف في مجموعة من الظواهر التي يتطرق إليها النشاط الإنساني، عن طريق الملاحظة والتجربة، دلالات كافية على نوع من الانتظام، فإن هذا يدفعنا إلى بلورة نظرية رياضية لمثل هذه الظواهر تشكل النموذج الرياضي أو القالب الذي يحتوي على الحقائق العملية كافة المستوحاة من معطيات الملاحظة والتجربة.

وعندئذ تكون نقطة البداية هي أن نختار أكثر حقائق هذا الانتظام بساطة وجوهرية ونصوغها، على شكل مبسط من جهة ومجرد ومثالي من جهة أخرى، كموضوعات رياضية تشكل المسلمات أو البديهيات التي نبني عليها نظرية رياضية، ونعتبرها في مستوى الحقائق المسلم بها سلفا، ثم نستنتج انطلاقا من هذه المسلمات موضوعات أخرى لا نحتاج في عملية استخلاصها إلى غير المنطق الرياضي المجرد، ودون أية حاجة إلى العودة إلى معطيات الملاحظة والتجربة. ويشكل مثل هذا البناء الذي نستخدم فيه الاستنتاج المنطقي وحده، والذي يتعاظم يوما بعد يوم من خلال جهود البحث والاستقصاء، ما يسمى بالنظرية الرياضية.

وكل موضوعة صحيحة تماما من وجهة النظر الرياضية طالما استنتجناها بصورة منطقية من المسلمات. إن النقاط والمستقيمات والمستويات الخ. التي ترد في علوم الهندسة البحتة هي تجريدات ذهنية لا وجود لها في الواقع. والنظرية البحتة تنتمي بشكل كامل إلى دائرة الأفكار المجردة، وتعالج أشياء وموضوعات مجردة ومعرفة تماما

بالخواص الممنوحة لها من قبل المسلمات. وعلى سبيل المثال، فالموضوعة الإقليدية بأن مجموع زوايا المثلث يساوي π راديان هي موضوعة صحيحة تماما في صورة مجردة ذهنية للمثلث كما تعرفه الهندسة البحتة. ولكن هذا لا يعني أن مجموع زوايا مثلث واقعي، أو مثلث نرسمه على الورق، يساوي π تماما.

وعلى أية حال، يمكن اختبار قضايا معينة من نظرية رياضية عمليا. إذ يمكن، مثلا، مقارنة الموضوعة المتعلقة بمجموع زوايا مثلث بقياس حقيقي لمجموع زوايا مثلث واقعي، وإذا حققت الاختبارات المتتالية، وإلى درجة كافية ومرضية من الدقة، توافقا بين النظري والواقعي، قلنا إن هناك نوعا من التشابه بين النظرية الرياضية وبناء العالم الواقعي. ونتوقع فوق هذا أن مثل هذا التوافق سيبقى قائما ومستمرا في المستقبل، سواء فيما تم اختباره، أو فيما لم يتعرض بعد لامتحان الواقع. ونسمح لأنفسنا بالسير على هدى مثل هذا التوقع. وتستمد النظرية قيمتها العملية مما يتوفر لنا من أدلة على التوافق الدقيق والدائم بينها وبين حقائق العالم الواقعي.

والحساب الاحتمالي هو النظرية التي تشكل النموذج الرياضي للظواهر التي تتصف بالانتظام الإحصائي. وسنقدم في هذا الفصل طريقة لبناء النظرية الاحتمالية باعتبارها نظرية رياضية، وذلك في حالة بسيطة وممتعة هي في متناول الطالب المبتدىء في دراسة الإحصاء والاحتمال وهي حالة فضاء عينة منته.

(٢ ـ ٤) فضاء العينة و الحادثة

نفترض دائما أننا قادرون على تحديد كل النتائج التي يمكن أن تسفر عنها التجربة العشوائية لو أننا نفذناها مرة واحدة. وسنطلق على مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة مصطلح «فضاء عينة». وسيمثل كل عنصر من هذه المجموعة (أي كل نتيجة ممكنة للتجربة) نقطة في فضاء العينة أو اختصارا «نقطة عينة». ومن البديهي أنه يمكن التعبير عن أي حادثة تتصل بالتجربة بدلالة نقاط العينة (أي بدلالة النتائج الممكنة للتجربة). وسنرمز لفضاء عينة بـ S.

تعريف فضاء العينة

فضاء العينة هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة .

تعريف الحادثة

الحادثة هي مجموعة جزئية من فضاء عينة .

ويتضح من هذين التعريفين أننا لن نتحدث أبدا عن الاحتمالات إلا في علاقتها مع فضاء عينة معطى (أي في علاقتها بتجربة عشوائية معينة). وأن كل ما يمكن أن نسميه «حادثة» في نظرية الاحتمال يجب أن يكون مجموعة جزئية من فضاء عينة. لقد أصبح لكلمة «الحادثة» الآن معنى جديد يضاف إلى المعاني اللغوية التي نعرفها سابقا. فهي الآن مصطلح رياضي شأنها شأن المستقيم والسطح في الهندسة والمتجه والقوة في الميكانيكا والدالة والسلسلة في التحليل والزمرة والحلقة في الجبر إلى آخره. الحادثة ببساطة هي كائن رياضي مقترن على الدوام باحتمال .

ولغايات التوضيح وتيسير الفهم سيكون مفيدا أحيانا رسم مصور بياني يسمى مصور ڤن لفضاء عينة S، وذلك بتمثيل كل نقطة عينة كنقطة هندسية ثم إحاطتها بخط مغلق .

مثال (٢ ـ ١)

التجربة هي قذف حجر نرد وملاحظة عدد النقاط المنقوشة على الوجه الظاهر.

ولكتابة فضاء العينة نجيب على السؤال التالي :

إذا قذفنا حجر النرد مرة واحدة فماذا يمكن أن تكون النتيجة؟

والجواب واضح فالنتيجة إما أن تكون 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 . ويكون :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

وبعض الحوادث التي يمكن إيرادها هي ، على سبيل المثال لا الحصر،

١ ـ الحصول على عدد زوجي ، ولنرمز لهذه الحادثة بـ A ،

٢ ـ الحصول على عدد أكبر من 4، ولنرمز لهذه الحادثة بـ B ،

٣ ـ ملاحظة العدد 1 ، ولنرمز لهذه الحادثة بـ E_1 ،

٤ ـ ملاحظة العدد 2 ، ولنرمز لهذه الحادثة بـ E_2 ،

٥ ـ ملاحظة العدد 3 ، ولنرمز لهذه الحادثة بـ E_3 ،

٦ ـ ملاحظة العدد 4 ، ولنرمز لهذه الحادثة بـ E_4 ،

٧ ـ ملاحظة العدد 5، ولنرمز لهذه الحادثة بـ E_5 ،

٨ ـ ملاحظة العدد 6 ، ولنرمز لهذه الحادثة بـ E_6 ،

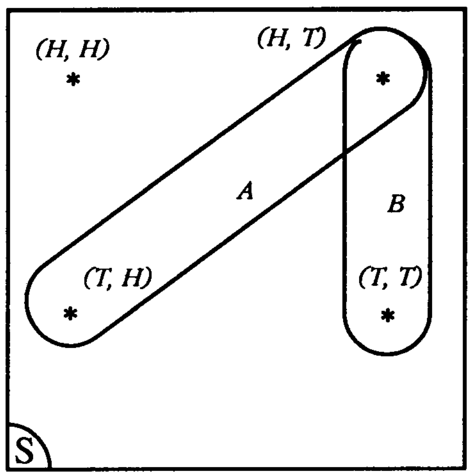
ونلاحظ الفرق بين الحادثتين A و B من جهة والحوادث E_1 ، E_2 ، E_3 ، E_4 ، E_5 ، E_6 من جهة أخرى. فستقع الحادثة A إذا وقعت أي من الحوادث E_2 ، E_4 ، E_6 ، أي عندما نلاحظ 2 أو 4 أو 6 وهكذا يمكن تفكيك الحادثة A إلى مجموعة من الحوادث الأبسط ، ونقصد E_2 ، E_4 ، E_6 . وكذلك ستقع الحادثة B إذا وقعت أي من الحوادث E_5 أو E_6 ويمكن النظر إليها كمجموعة من الحوادث الأبسط. وفي المقابل نلاحظ أنه من المستحيل تفكيك أي من الحوادث E_1 ، E_2 ، E_3 ، E_4 ، E_5 ، E_6 ، أي التعبير عن أي منها بدلالة حوادث أبسط. وهكذا تسمى الحوادث E_1 ، E_2 ، E_3 ، E_4 ، E_5 ، E_6 ، حوادث بسيطة (أو حوادث ابتدائية) وحوادث مثل A ، B حوادث مركبة.

وتبدو بوضوح خاصة مهمة من خواص الحوادث البسيطة وهي أن تنفيذ التجربة يؤدي إلى واحدة وواحدة فقط من الحوادث البسيطة ، فعندما نقذف حجر النرد سنحصل حتما على 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ، ولا يمكن أن نلاحظ في الوقت نفسه أكثر من واحدة من هذه الحوادث البسيطة.

وبصورة عامة ، كل نقطة عينة بمفردها من فضاء عينة S هي بالطبع مجموعة جزئية من S ، أي حادثة ، ومثل هذه الحوادث سنسميها دائما حوادث بسيطة أو حوادث ابتدائية.

وبما أن $S \subset \phi$ و $S \subseteq S$ فإن تعريف الحادثة ينطبق أيضا على المجموعة الخالية ϕوعلى فضاء العينة S . وتسمى ϕالحادثة المستحيلة و S الحادثة الأكيدة. ومن الواضح أنه يمكن التعبير عن أي حادثة غير مستحيلة (غير الحادثة ϕ) بدلالة حوادث بسيطة.

مثال (٢ ـ ٢)



شكل (٢ ـ ٢). مصوّر ڤن لتجربة قذف قطعة نقود مرتين.

التجربة هي قذف قطعة نقود مرتين متتاليتين وتسجيل النتيجة.

ا) اكتب فضاء العينة

ب) ارسم مصور ڤن

ج) عبّر عن كل من الحوادث التالية بدلالة نقاط العينّة.

A : الحصول على وجه الـ H مرة واحدة.

B : الحصول على وجه الـ T في القذفة الثانية،

C : الحصول على وجه الـ H مرة واحدة على الأقل،

D : الحصول على وجه الـ H مرة واحدة على الأكثر،

E : الحصول على وجه الـ H مرة واحدة على الأقل وعلى وجه الـ T مرتين.

الحـــــل

فضاء العينة هو مجموعة كل النتائج الممكنة عند تنفيذ التجربة مرة واحدة. أي للحصول على فضاء العينة اسأل نفسك السؤال التالي: لو أنني قذفت قطعة نقود مرتين فما هي النتائج التي يمكن أن أحصل عليها؟

ونرمز للنتائج عادة باختصار مستخدمين الرمزين H و T في أزواج مرتبة حيث يرمز الحرف الأول لنتيجة القذفة الأولى والحرف الثاني لنتيجة القذفة الثانية.

والنتائج الممكنة هي:
(H, H) أي وجه الـ H من القذفة الأولى و H من القذفة الثانية،
(T, H) أي وجه الـ T من القذفة الأولى و H من القذفة الثانية،
(H, T) أي وجه الـ H من القذفة الأولى و T من القذفة الثانية،
(T, T) أي وجه الـ T من القذفة الأولى و T من القذفة الثانية،
ويكون فضاء العينة:

$$S = \{(H, H), (T, H), (H, T), (T, T)\}$$

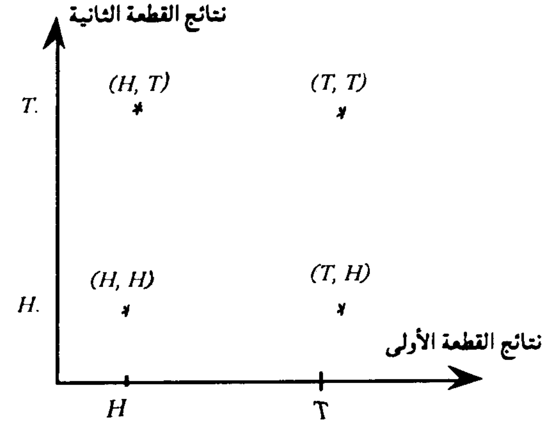
وهذا يكافىء قولنا:

القذفة الأولى يمكن أن تسفر عن H أو T نضعهما في وضع رأسي فوق بعضهما ونضع إشارة استفهام في الموضع الثاني المخصص لنتيجة القذفة الثانية ثم نستعيض عن إشارات الاستفهام مرة بـ H ومرة بـ T لنجد:

$$(H, H), (H, T)$$
$$(T, H), (T, T)$$

أو يمكن تمثيل نتائج القذفة الأولى على محور السينات ونتائج القذفة الثانية على محور الصادات ثم تحديد فضاء العينة المطلوب كبيان لحاصل الجداء الديكارتي للمجموعة (H, T) في نفسها، (انظر الشكل ٢ ـ ٣).

ولكتابة حادثة بدلالة نقاط العينة، أي كمجموعة جزئية من S، نلاحظ أن وصف الحادثة يتضمن شروطا أو مواصفات معينة. ووفقا لهذه الشروط سنجد، بالنسبة إلى كل نقطة عينة، أنها إما أن تحقق هذه الشروط أو المواصفات، وبالتالي تنتمي إلى



شكل (٢ ـ ٣) تمثيل فضاء العينة بيانيا

الحادثة، أو أنها لا تحقق الشروط المطلوبة وبالتالي لا تنتمي إلى الحادثة. وفي الحادثة A نجد أنها تتضمن كل زوج مرتب في S يحوي الرمز H مرة واحدة (لا أكثر ولا أقل). وهكذا نكتب:

$$A = \{(H, T), (T, H)\}$$

أما (H, H) و (T, T) فلا تنتميان إلى A لأنهما لا تحققان شروطها، ولو أننا نفذنا التجربة وحصلنا على نقطة عينة (نتيجة ممكنة) تنتمي إلى A، أي حصلنا على (H, T) أو (T, H)، فسنقول عندئذ إن A قد وقعت. ولو حصلنا على نتيجة أو نقطة عينة لا تنتمي إلى A فسنقول إن الحادثة A لم تقع. وبالطريقة نفسها نجد أن:

$$B = \{(H, T), (T, T)\}$$

$$C = \{(H, H), (T, H), (H, T)\}$$

$$D = \{(T, H), (H, T) (T, T)\}$$

$$E = \{\ \} = \emptyset$$

لاحظ أنه لا توجد أي نقطة عينة محققة لشروط E فهي حادثة غير ممكنة أو مستحيلة.

ونلاحظ أنه لو كانت التجربة قذف قطعة نقود ثلاث مرات فإن الرسم البياني سيحتاج إلى ثلاثة محاور ويصبح تطبيق طريقة الرسم معقدا. ومع أربع قذفات لا تعود

طريقـة الرسم البيـاني مجدية. ولكن الطـريقة المذكورة أولا تبقى صـالحة للتطبيق. ففي تجربة ثلاث قـذفات يكون عدد النتـائج الممكنة $8 = 2^3$. ونحصل عليها بكتـابة النتائج الأربع من أجل قذفتين، وتكرارها مرة مع إضافة H ثم أخرى مع إضافة T. وفي تجربة أربع قذفات نكـرر النتائج الثماني لثلاث قذفات مـرة مع إضافة H ومرة مع إضـافة T لنحصل على النتائج الست عشرة الممكنة في هذه الحالة، وهكذا . . .

مثال (٢ ـ ٣)

التجربة هي قذف حجر نرد مرتين.

ا ـ اكتب فضاء العينة،

ب ـ عبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة.

A: الحصول على مجموع يساوي 7 ،

B: الفرق بين العددين الناتجين يساوي بالقيمة المطلقة 1.

C: الحصول على مجموع يساوي 9 على الأقل،

D: الحصول على 1 في القذفة الأولى،

E: الحصول على جداء يساوي 6 على الأكثر،

F: الحصول على مجموع أقل من 2.

جـ ـ عبر بكلمات عن كل من الحوادث الممثلة بـالمجموعات الجزئيـة التاليـة من نقاط العينة:

$G = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

$H = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3)\}$

$I = \{(5,1), (1, 5), (6, 2), (2, 6)\}$

$J = \{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)\}$

$K = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4,2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

د ـ لو نفـذنا التجربة وحصلنـا على النتيجة $(1, 1)$، حدد وقـوع أو عدم وقـوع كل من الحوادث المذكورة في ب و جـ.

الحـــــل

ا ـ فضاء العينة هو الحاصل الديكارتي للمجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ في نفسها، وهو كما في الجدول (٢ـ١).

جدول (٢ ـ ١) . فضاء العينة لقذف حجر نرد مرتين

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

حيث يرمز الزوج المرتب (x, y) إلى أن النتيجة كانت x من القذفة الأولى و y من القذفة الثانية . وكان يمكن التعبير عن هذه النتائج الست وثلاثين على الشكل التالي :

$S = \{(x, y) :$ x و y عددان صحيحان بين 0 و 7 $\}$

وبدلا مـن الجـدول (٢ ـ ١) كـان يمكن رسم بيـان الحاصل الديكـارتي واعتماده تمثيلا لفضـاء العينـة . ويتم ذلك كما في الشكل (٢ ــ ٤) حيث تتمثل كل زوج مـرتب (كل نقطة عينة) مـن الأزواج الستة وثلاثين المذكورة في الجدول (٢ ــ ١) بنقطة في المستوى، إحداثيهـا السيني هـو العدد الأول من الـزوج المرتب، وإحداثيهـا الصادي هـو العدد الثاني .

ب ـ

$A = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$

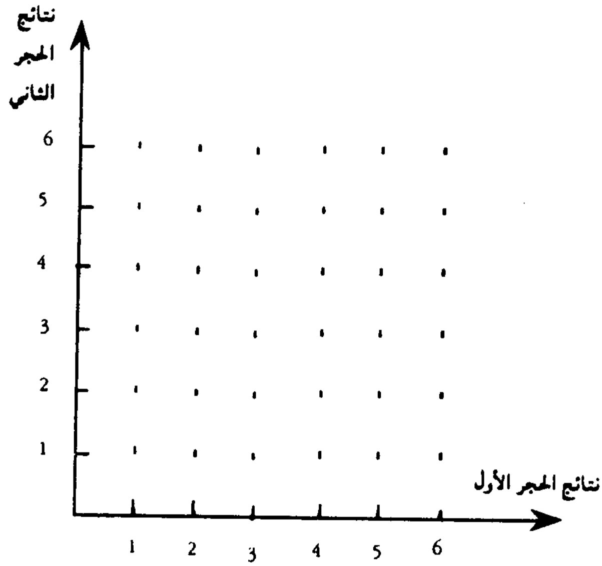
$B = \{(2,1), (1,2), (3,2), (2,3), (4,3), (3,4), (5,4), (4,5), (6,5), (5,6)$

$C = \{(6,3), (5,4), (4,5), (3,6), (6,4), (5,5), (4,6), (6,5), (5,6), (6,6)\}$

$D = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

$E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2),$
$(4,1), (5,1), (6,1)\}$

$F = \{\ \} = \phi$



شكل (٢ ـ ٤) تمثيل بياني لفضاء العينة في تجربة قذف حجر نرد مرتين

جـ ـ

G : الحصول على العدد نفسه في القذفتين،
H : الحصول على مجموع يساوي 4 على الأكثر،
I : الفرق بين العددين الناتجين يساوي بالقيمة المطلقة 4،
J : الحصول على 4 في القذفة الثانية،
K : الحصول على عددين زوجيين.

د ـ تقع الحادثة أو لا تقع وفقا لما إذا كانت نقطة العينة (1,1) تنتمي أو لا تنتمي إلى الحادثة، أو ما إذا كانت النتيجة «واحد من القذفة الأولى وواحد من القذفة الثانية» تحقق شروط ومواصفات الحادثة. وهكذا نجد أن:

A لم تقع لأن المجموع الناتج (وهو 2) لا يساوي 7،
B لم تقع لأن الفرق بين العددين الناتجين (وهو صفر) لا يساوي 1 بالقيمة المطلقة،
C لم تقع لأن المجموع أقل من 9،

D وقعت لأن القذفة الأولى أنتجت 1 ،

E وقعت لأن جداء العددين الناتجين لا يزيد على 6،

F لم تقع بالطبع لأنها مستحيلة ،

G وقعت لأن $(1,1) \in G$،

H وقعت لأن $(1,1) \in H$،

I لم تقع لأن $(1,1) \notin I$،

J لم تقع لأن $(1,1) \notin J$،

K لم تقع لأن $(1,1) \notin K$،

مثال (٢ ـ ٤)

في عملية استطلاع لنسبة المؤيدين لقضية معينة قوبل شخصان ، إذا كانت إجابة كل منهما هي إما «مع» وسنرمز لها بـ 1 أو «حيادي» وسنرمز لها بـ 0 ، أو «ضد» وسنرمز لها بـ -1.

ا ـ اكتب فضاء العينة لهذه التجربة وارسمه بيانيا متخذا المحور الأفقي لإجابة الشخص الذي قوبل أولا، والمحور الرأسي لإجابة الشخص الآخر.

ب ـ عبر كلاميا عن كل من الحوادث الممثلة بالمجموعات التالية من نقاط العينة :

$$A = \{(1, 1), (1, 0), (1, -1)\}$$

$$B = \{-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}$$

$$C = \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1), (0, 0)\}$$

جـ ـ عبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة :

U : الشخص الثاني ضد القضية ،

T : واحد منهما على الأقل ضد القضية ،

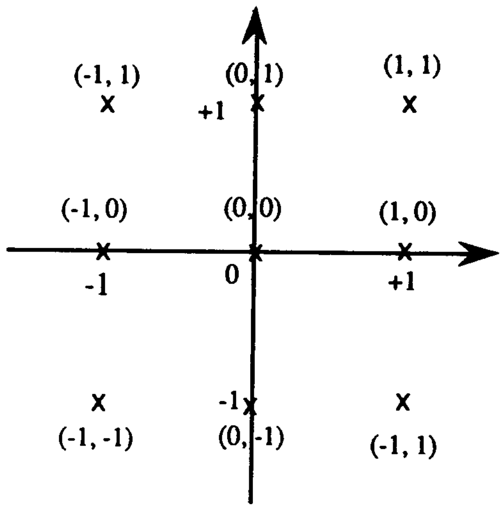
V : أحدهما مع القضية والآخر ضدها .

الحـــل

ا ـ فضاء العينة هو الجداء الديكارتي للمجموعة $\{-1,0,1\}$ في نفسها . أي

$$S = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, -1)\}$$

والرسم كما في الشكل المقابل



ب ـ

A : حادثة أن الشخص الأول مع القضية ،

B : حادثة أن للشخصين الموقف نفسه ،

C : حادثة أن واحدا منهما على الأقل حيادي .

جـ ـ

$U = \{(-1, -1), (0, -1), (1, -1)\}$

$T = \{(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1), (1, -1)$

$V = \{(-1, 1), (1, -1)\}$

مثال (٢ ـ ٥)

التجربة هي قذف قطعة نقود حتى يظهر وجه الـ H لأول مرة . اكتب فضاء العينة .

الحـــل

يتضمن فضاء العينة عددا غير محدود من النقاط نلاحظ بوضوح أنها كما يلي :

$H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, \ldots\ldots$

فقد لا نحتاج إلا إلى قذفة واحدة حتى يظهر وجه ال H وتنتهي التجربة، وقد نحتاج إلى قذفتين حتى يظهر وجه الـ H للمرة الأولى أو إلى ثلاث قذفات، أو إلى أربع، الخ . . .

مثال (٢ ـ ٦)

التجربة هي اختيار أسرة بصورة عشوائية وتسجيل عمر الزوج x ثم عمر الزوجة y. اكتب فضاء العينة وعبر عن حادثة «الزوج أكبر سنا من الزوجة».

الحـــل

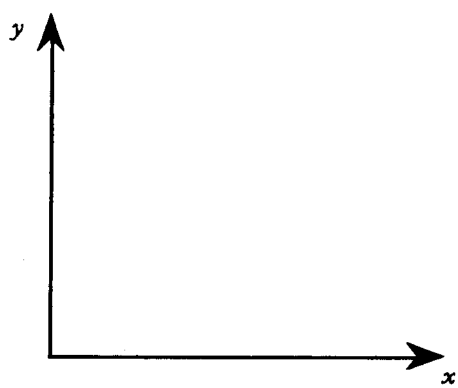
العمر هو قياس زمني يمثل نقطة على محور الزمن ويمكن وصفه بصورة عامة أنه عدد حقيقي موجب، أي ينتمي إلى R^+ حيث يرمز R^+ لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة. ويمكن التعبير عن فضاء العينة بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x, y) حيث x و y عددان حقيقيان موجبان [انظر شكل (٢ ـ ٥)].

$$S = \{(x, y): x, y \in R^+\}$$

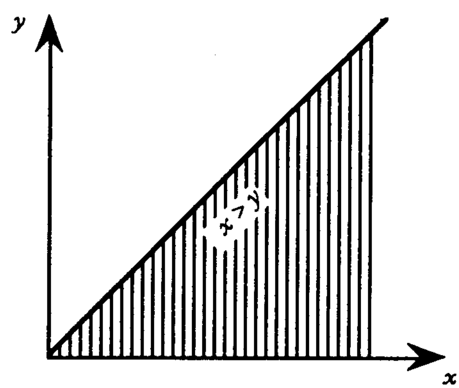
وبيانيا نجد أن S هو مجموعة نقاط الربع الأول من مستوى الإحداثيات. وإذا رمزنا لحادثة «الزوج أكبر سنا من الزوجة» بـ A فتكون :

$$A = \{(x, y): x > y;\ x, y \in R^+\}$$

وبيانيا تتضمن الحادثة A كافة نقاط الربع الأول من مستوى الإحداثيات الواقعة تحت منصّف الربع الأول [انظر الشكل (٢ ـ ٦)].



شكل (٢ ـ ٥) فضاء العينة



شكل (٢ ـ ٦) الحادثة A

ومن الواضح أن فضاء العينة S كما حددناه في المثال (٢ ـ ٦) يتضمن من النقاط أكثر بكثير مما يمكن أن نواجهه بالفعل في الواقع العملي. إذ يمتد عمر كل من الزوج والزوجة بين عددين مألوفين ولا يمتد عمليا بين الصفر واللانهاية، وقد يبدو في الأمر بعض الغرابة إلا أنها في الواقع غرابة مقبولة ولابد منها لأنها تتفادى، من جهة، ما هو أشد غرابة، لا بل معضلة تفوق قدرتنا. ولا تقدم، من جهة أخرى، أذى لبناء النظرية الاحتمالية بل تجعل هذا البناء أكثر يسرا وسهولة، ولإيضاح المعضلة التي نواجهها عند محاولة تحديد حد أدنى وحد أعلى لعمر الزوج، مثلا، يكفي أن نتساءل: هل يمكن الادعاء أن عمر الزوج يمكن أن يكون 150 عاما، مثلا، ولكنه لا يمكن أن يكون 150 وثانية واحدة؟ وهل يمكن الادعاء بأن عمر الزوجة يمكن أن يكون عشر سنوات إلا أنه لا يمكن أن يكون عشر سنوات ناقصا ثانيتين؟

وبصورة عامة نقول إنه عند تحديد فضاء عينة لا ضير في أن يتضمن فضاء العينة من النقاط أكثر مما ينبغي عمليا. إلا أنه لا يجوز أبدا أن يتضمن أقل مما ينبغي عمليا. أي لا يجوز أن نغفل ذكر أو شمول أي نتيجة ممكنة عمليا. وعندما نصف العمر بأنه عدد حقيقي موجب نكون مطمئنين إلى أننا لم نغفل أي نتيجة ممكنة إذ لا يمكن أن يكون العمر سالبا. وفي الوقت نفسه نتفادى تحديد حد أدنى وحد أعلى للعمر، فالله وحده سبحانه وتعالى يعلم، ولا يحيط مخلوق بشيء من علمه إلا بما شاء.

(٢ ـ ٥) جبر الحوادث

عرفنا الحادثة كمجموعة جزئية من فضاء عينة، أي مجموعة عناصرها نقاط عينة أو نتائج ممكنة لتجربة عشوائية. وكل ما يعرفه الطالب عن عمليات الاتحاد والتقاطع والفرق مطبقة على المجموعات، وعن الخواص المختلفة لهذه العمليات، ينسحب تماما على الحوادث بعد أن نضع كلمة «حادثة» بدلا من كلمة مجموعة. وسنستعرض في هذه الفقرة، على سبيل التذكير، هذه العمليات بلغة الحوادث ونقاط العينة.

(٢ ـ ٥ ـ ١) اتحاد حادثتين

اتحاد حادثتين A، B هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى A أو إلى B (أو إليهما معا). ونرمز له بـ $A \cup B$.

ونلاحظ في هذا التعريف أن شرط انتماء نقطة عينة إلى الاتحاد $A \cup B$ هو أن تنتمي هذه النقطة إلى إحدى الحادثتين دون الأخرى أو أن تنتمي إليهما معا، ولا تكون النقطة خارج الاتحاد إلا إذا كانت لا تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B. وهكذا تكون كل نقطة من الاتحاد منتمية إلى واحدة من الحادثتين **على الأقل**، مما يقترح التعريف التالي للاتحاد وهو أيسر وأكثر كفاءة.

(٢ ـ ٥ ـ ٢) اتحاد حادثتين (تعريف آخر)

اتحاد حادثتين هو **حادثة** تتضمن جميع نقاط العينة التي تنتمي إلى واحدة منها على الأقل.

وتتضح كفاءة هذه الصياغة لتعريف الاتحاد من صلاحيته للتعبير عن اتحاد ثلاث حوادث أو أكثر، وفي الحقيقة للتعبير عن اتحاد أي عدد من الحوادث حتى ولو كان لانهائيا فنقول:

(٢ ـ ٥ ـ ٣) اتحاد عدة حوادث

اتحاد n من الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هو **حادثة** تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى واحدة منها على الأقل: ونرمز له بـ

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots, \cup A_n$$

(٢ ـ ٥ ـ ٤) تقاطع حادثتين

تقاطع حادثتين A و B هو **حادثة** تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إليهما معا. ونرمز له بـ $A \cap B$.

(٢ ـ ٥ ـ ٥) تقاطع عدة حوادث

تقاطع n من الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هو **حادثة** تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إليها جميعا. ونرمز له بـ

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots, \cap A_n$$

(٢ ـ ٥ ـ ٦) الفرق بين حادثتين

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة تتضمن كل نقاط العينة التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B. ونرمز له بـ $A - B$.

(٢ ـ ٥ ـ ٧) تتمـة حادثة

تتمية حادثة A هي حادثة تتضمن كل نقـاط فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. ونرمز لها بـ $\bar{A}$ (أو A^c).

ونـلاحظ أن $\bar{A}$ هـي نفي A، ونعبر عنهـا أحيـانـا بقول «ليس A». كما نلاحظ أن $\bar{A} = S - A$ ، أي الفرق بين فضاء العينة S و A. ومن الواضـح أن الفـرق بين حادثتين A و B هو $A \cap \bar{B}$ ، أي A و ليس B. وذلك من عبارة تعريف الفرق.

(٢ ـ ٥ ـ ٨) الحادثتان المنفصلتان

نقـول إن الحـادثتين منفصلتان إذا كـان تقـاطعهما خاليا، أي $A \cap B = \varnothing$ وتسمى الحادثتان عندئذ متنافيتين.

وهكذا يعنـي تنافي حادثتين أنـه لا يمكن وقوعهما معـا. وهذا واضح مـن عدم وجود أية نقطة عينة مشتركة بينهما. أي أنه لا تـوجد أي نتيجة للتجربة يمكن أن تؤدي إلى تحقق (وقوع) A و B معا. وبعبـارة أخرى، ينفي وقـوع واحدة منهما إمكانيـة وقوع الأخرى في الوقت نفسه.

(٢ ـ ٥ ـ ٩) تجزئة فضاء عينة

نقول إن الحوادث غير المستحيلة (غير الخالية) B_1، B_2، . . . ، B_k تشكل تجزئة لفضاء عينة S إذا حققت الشرطين التاليين:

١) $B_i \cap B_j = \varnothing$ ، $i \neq j$

أي أن الحوادث B_1، B_2، . . . ، B_k متنافيـة مثنى مثنى. (لا يمكن وقوع أي اثنتين منها في وقت واحد).

٢) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S$

أي أن اتحاد الحوادث B_1 ، B_2 ، . . . ، B_k هو فضـاء العينة S . (لابد أن تقع واحـدة منهـا) ونعبر أحيانـا عن مثل هـذه الحوادث بقـولنـا إنها متنافيـة فيما بينهـا ومُستنفِذة . وبعبارة أخرى ، تقع واحدة منها فقط ولابد أن تقع واحدة .

تمارين (٢ ـ ١)

١) نقذف حجر نرد وقطعـة نقود ، اكتب فضاء العينة S وحدد نقـاط العينة في كل من الحوادث التالية :

A : ظهور عدد زوجي على حجر النرد ،

B : ظهور وجه الـ H على قطعة النقود ،

C : ظهور وجه الـ H على قطعة النقود وعدد أقل من 3 على حجر النرد ،

D : ظهور وجه الـ T على قطعة النقود وعدد لا يقل عن 3 على حجر النرد ،

E : الحصول على A و B ،

F : الحصول على B أو D ،

G : الحصول على واحدة على الأقل من الحوادث A ، C ، D .

من بين الحوادث $\bar{A}$ ، B ، C أي الأزواج متنافية؟

٢) قذفنا قطعة نقود ثلاث مرات. اكتب فضاء العينة S ، وعبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة :

A : ظهور وجه الـ H في القذفة الثانية ،

B : ظهور وجه الـ H مرتان على الأقل ،

C : عدد مرات ظهور وجه الـ H أكبر من عدد مرات ظهور وجه الـ T .

D : وقوع A و $\bar{B}$ ،

E : وقوع A أو C .

٣) اخترنا بذرتين من علبة تتضمن خمس بذور. اثنتان منها تنتجان زهورا بيضاء واثنتان تنتجان زهورا حمراء وواحدة تنتج زهورا زرقاء. اكتب فضاء العينة S .

٤) في الصندوق I كرتان بيضاوان وكـرة سوداء، وفي الصندوق II كرة بيضاء وكـرة سوداء اخترنا عشوائيا كرة من الصندوق I وخلطناها مع كرات الصندوق II ثم سحبنا منه كرة اكتب فضاء العينة .

٥) نسجل عدد مرات طي سلك نحاسي قبل أن ينقطع . ما هو فضاء العينة .

٦) في خط إنتاج صناعي نسجل عدد القطع التي فحصناها قبل العثور على أول قطعة غير صالحة. ما هو فضاء العينة؟

٧) تقدم شركـة خدمـات نقل بين مطاريـن متجاورين، ولـديها لهذا الغرض طـائرتان مروحيتان تقومان برحلاتهما كل ساعة وعلى مدى الساعات الأربع وعشرين من كل يوم. تحمل الكبرى منهما أربعة ركاب بينما تتسع الصغرى لثلاثة فقط .

ا ـ باستخدام محور إحداثيات بحيث تمثل (x, y) حادثة أنه عند إقلاع الطائرتين في تمام ساعة معينـة كانت الكبرى تقل x راكبا بينما يـوجد y راكبـا على متن الصغرى. ارسم جميع نقاط العينة .

ب ـ صف بكلمات كلا من الحوادث التالية :

$$A = \{(2, 3), (3, 2), (3, 3)\ (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$T = \{(0, 0), (1,1), (2, 2),(3, 3)\},$$

$$R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

$$V = \{(0, 3), (1, 2), (2,1), (3, 0)\}$$

جـ ـ اكتب نقاط العينـة التي تنتمي إلى كل من المجموعـات الجزئية التـالية من فضاء العينة وصف بكلمات الحوادث التي تمثلها :

$A \cap T$ ، $T \cup R$ ، $A \cap R$ ، $A \cup V$

د ـ أي الأزواج التالية من المجموعات الجزئية يمثل حادثتين متنافيتين؟

V و A ، R وA ، VوT ، TوR

٨) اخترنـا عشوائيـا أسرة من مدينـة كبيرة ولتكن R حـادثة أن الأسرة تمتلك الشقـة التي تسكنها، T حادثـة أن الأسرة لديها أطفـال، و V حـادثة أن الأسرة تمتلك سيـارة .

بالإشـارة إلى مخطط فن المقابل أذكر (مستخـدما رقم المنطقـة) المنطقة أو المركب من المناطق التي تمثل الحوادث التالية :

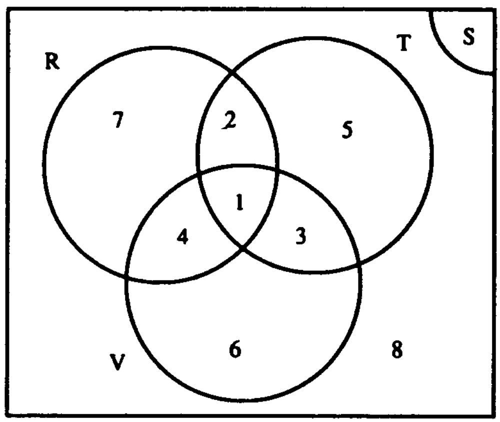
A : الأسرة تمتلك الشقة ولديها أطفال ولا تمتلك سيارة .

B : الأسرة تمتلك الشقة وليس لديها أطفال ولا تمتلك سيارة .

C : الأسرة لا تمتلك الشقة وتملك سيارة .

D : الأسرة لديها أطفال .

E : الأسرة لا تمتلك الشقة وليس لديها أطفال ولا تمتلك سيارة .



٩) بالإشارة إلى التمرين السابق صف بكلمات الحوادث الممثلة بالمناطق التالية :

ا ـ كل منطقـة من المناطق الثماني على حـده . (هل تشكل الحوادث الثماني تجزئة لـ S؟)

ب ـ المنطقة 1 والمنطقة 2 ،

جـ ـ المنطقة 3 والمنطقة 5 ،

د ـ المناطق 3 و 5 و 6 ،

هـ ـ المناطق 1 و 2 و 4 و 7 ،

و ـ المناطق 4 و 6 و 7 و 8 .

١٠) بالاشارة إلى التمرين ٩ عبر عن كل من الحوادث المطلوبة رمزيا بدلالة R ، T ، V .

١١) في المثال (٢ ـ ٢) اكتب الحوادث التالية :

$\bar{A} \cup \bar{B}$ ، $\overline{A \cap B}$ ، $A - B$ ، $A \cup D$ ، $C \cap D$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$.

١٢) في المثال (٢ ـ ٣) اكتب الحوادث التالية :

$\overline{B \cup D}, \bar{B} \cup \bar{D}, \bar{A}, A \cap D, B - D, \quad B \dot{\cup} D, A \cap B$

$A \cap C \cap D, \quad A \cup B \cup D,$

١٣) في المثال (٢ ـ ٤) اكتب الحوادث التالية :

$\bar{T} \cup \bar{B}, \; T \cap B, \; T \cup A, \; \bar{T} \cap \bar{A}, \; U \cap V, \; \bar{T}$

هل B و V متنافيتان؟

ملاحظة

مـن الأمثلـة المختـلفة التي استعرضناهـا عن فضاءات العينة نلاحظ أنها إما أن تحوي عددا محدودا (منتهيـا) من نقاط العينة، مثل الفضاءات المذكـورة في الأمثلة (٢ ـ ١)، (٢ ـ ٢) و (٢ ـ ٣). أو فضاءات تتضمن ما لا نهايـة له من نقاط العينة، إلا أنها لا نهاية قابلـة للعد، ونقصد بقابلية العـد أنه يمكن إقامة تقـابل بين نقاط العينة وبين مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1, 2, 3, \ldots\}$، ومن الواضح أن وجـود هذا التقـابل يعني أننا نستطيع عدّ عناصر الفضاء S، فنقول هذا عنصر أول يليـه عنصر ثان ثم ثالث ثم رابع وهكذا. . . وهـو ما نشاهده في المثـال (٢ ـ ٤). ولكن في المثـال (٢ ـ ٥) نجـد فضاء يتضمن ما لا نهايـة له من النقاط، إلا أنها لا نهاية غير قـابلة للعد. فالعمـر هو قياس زمني يمثل نقطة على محور إحداثي اتخذناه محورا للزمن. ونقاط محور مرصوفة إلى جانب بعضها بصورة متصلـة لا انقطاع فيها ولا فجوات. وسـواء على كامل المحور أو على أي فترة منه $[a, b]$ ، لا يمكن الإجابة على السؤال التـالي: ما العدد أو القياس الذي يلي العدد a مباشرة؟ ومهما حاولنا أخذ عدد قريب من a فسيبقى بينه وبين a ما لا يحصى ولا يعد من القياسات. أي لو أخذنا a عددا أول في محاولة للعد فإنـه يستحيل علينا تحديد العدد الثـاني. وهكذا نضع اليد على خـاصة مميـزة لهذا النوع من اللانهايـات فنقول إنها لانهاية غير قابلـة للعدّ. ويسمى فضاء العينـة فضاء منفصلا إذا كـانت مجموعة نقـاطه منتهية أو لانهائية قابلـة للعد. ويسمى فضاء متصلا إذا كانت مجموعـة نقاطه لانهائية غير

قابلة للعد. وسنحصل على فضاء متصل من كل تجربة نستخدم فيها، للحصول على النتيجة، جهازا للقياس. وسنحصل على فضاء منفصل في كل تجربة نلجأ فيها، للحصول على النتيجة، إلى عملية تعداد. وستقتصر دراسة الاحتمال في هذا الفصل على فضاءات منتهية أي فضاءات منفصلة تتضمن عددا محدودا من النقاط وسنسميه فضاء منتهيا .

(٢-٦)* أسرة الحوادث - الحقل

تسمى المجموعة التي تكون عناصرها مجموعات صفا أو أسرة. وبدلا من أن نقول مجموعة من المجموعات نقول صفا من المجموعات. إذا عناصر صف أو أسرة هي دائما مجموعات. ولو كتبنا الصف أو الأسرة $\mathscr{A}$ على الشكل :

$$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$$

فيجب أن نفهم من هذا أن A_1، A_2، الخ. هي مجموعات من العناصر. وبما أن كل حادثة عبارة عن مجموعة نقاط عينة فسنتحدث عن صف من الحوادث أو أسرة من الحوادث

(٢-٦-١) الحقل

نقول إن أسرة من الحوادث $\mathscr{A}$ تشكل حقلا إذا تحقق الشرطان التاليان :

(١) الأسرة $\mathscr{A}$ مغلقة تحت عملية الاتحاد. (أي أن اتحاد أي حادثتين تنتميان إلى $\mathscr{A}$ هو حادثة تنتمي إلى $\mathscr{A}$ أيضا). وتكتب رمزيا

$$B \in \mathscr{A}\ ,\ A \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$$

مهما تكن A وB من $\mathscr{A}$.

(٢) الأسرة $\mathscr{A}$ مغلقة تحت عملية التتام (أخذ التتمة)..(أي أنه إذا كانت A تنتمي إلى $\mathscr{A}$ فإن $\bar{A}$ تنتمي بدورها إلى $\mathscr{A}$). ونكتب رمزيا

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathscr{A}$$

مهما تكن A من $\mathscr{A}$.

---

* للقراءة فقط .

ويمكن البرهان، بسهولة، أن أي حقل من الحوادث يكون مغلقا تحت عملية التقاطع أي أنه إذا كان $A \in \mathscr{A}$ و $B \in \mathscr{A}$ فإن $A \cap B \in \mathscr{A}$. مهما تكن A و B من $\mathscr{A}$.
ذلك لأن الاستخدام المتتالي لشرطي تعريف الحقل يسمح لنا بالقول:

لتكن A و B أي حادثتين من $\mathscr{A}$ فعندئذ،

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathscr{A}$$

$$B \in \mathscr{A} \Rightarrow \bar{B} \in \mathscr{A}$$

ولكن،

$$\bar{A} \in \mathscr{A} \text{ و } \bar{B} \in \mathscr{A} \Rightarrow (\bar{A} \cup \bar{B}) \in \mathscr{A} \Rightarrow \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \in \mathscr{A}\text{،}$$

وبما أن

$$\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} = (A \cap B)$$

حسب قانون دي مورغان، فنجد المطلوب.

مثال (٢ ـ ٧)

بالعودة إلى المثال (٢ ـ ٢).

ا ـ اكتب أسرة كافة المجموعات الجزئية من S وتحقّق أنها تشكل حقلا من الحوادث.

ب ـ اكتب أسرة جزئية أو أكثر من أسرة الحوادث المذكورة في ا تحقّق شروط الحقل، أي تشكل بدورها حقولا من الحوادث.

الحـــل

ا ـ لنرمز بـ $\mathscr{A}$ لأسرة كل المجموعات الجزية في S فنجد:

$$\mathscr{A} = \{\phi, \{(H, H)\}, \{(T, H)\}, \{(H, T)\}, \{(T, T)\}, \{(H, H), (T, H)\}, \{(H, H), (H, T)\}, \{(H, H), (T, T)\}, \{(T, H), (H, T)\}, \{(T, H), (T, T)\}, \{(H, T), (T, T)\}, \{(H, H), (T, H), (H, T)\}, \{(H, H), (T, H), (T, T)\} \{(H, H), (H, T), (T, T)\}, \{(T, H), (H, T), (T, T)\}, S\}$$

ومن السهل التحقق من أن اتحاد أي حادثتين من الحوادث الست عشرة التي تتضمنها الأسرة $\mathscr{A}$ ينتمي بدوره إلى $\mathscr{A}$.

ب ـ لنأخذ الأسرة الجزئية $\{\phi, S\}$ فهي تشكل حقلا لأن $\bar{S} = \phi,\ \bar{\phi} = S,$ $\phi \cup S = S$ وشرطا الحقل متحققان.

لنأخذ الآن الأسرة الجزئية التالية ولنرمز لها بـ $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F} = \{\Phi, \{(H, H)\}, \{(H, T)\}, \{(H, H), (H, T)\}, \{(H, T), (T, H), (T, T)\} \{(H, H), (T,H), (T,T)\}, \{(T,H), (T,T)\}, S\}$$

وهي تتضمن ثماني حوادث فقط من $\mathscr{A}$. ومن السهل التحقق من أن اتحاد أي حادثتين من $\mathscr{F}$ ينتمي إلى $\mathscr{F}$. وأن تتمة أي حادثة في $\mathscr{F}$ تنتمي إلى $\mathscr{F}$. فالأسرة $\mathscr{F}$ تشكل حقلا من الحوادث. ويمكن كتابة أسر جزئية أخرى تشكل حقولا. (حاول أن تكتب واحدة).

ملاحظات

١ ـ أسرة كل المجموعات الجزئية من فضاء عينة S. وهي أوسع أسرة حوادث يمكن تشكيلها من S، هي دائما حقل.

٢ ـ كل حقل لابد أن يتضمن فضاء العينة S كأحد عناصره، فهو عندما يتضمن أي حادثة A غير S لابد أن يتضمن تتمة A ، ويتضمن بالتالي $A \cup \bar{A} = S$.

٣ ـ كل حقل لابد أن يتضمن Φ فهو إذ يتضمن S بالضرورة، كما وجدنا في ٢، لابد أن يتضمن تتمة S أي ϕ.

٤ ـ بصورة عامة، يتضمن كل حقل من الحوادث الحادثة المستحيلة Φ والحادثة الأكيدة S . ولو اقتصر الأمر عليهما معا فإنهما يشكلان دائما حقلا. أي أنه من أجل أي فضاء عينة S فإن الأسرة $\{\phi, S\}$ تشكل حقلا.

٥ ـ من أجل أي فضاء عينة S يمكن أن نكتب حقلا أو أكثر من الحوادث فى S .

(٢ ـ ٦ ـ ٢) الفضاء الاحتمالي

الفضاء الاحتمالي هو ثلاثية $(S, \mathscr{F}, P)$ حيث S فضاء عينة أو الحادثة الأكيدة، $\mathscr{F}$ أسرة من الحوادث في S، P دالة عددية معرفة على الأسرة $\mathscr{F}$ وتحدد لكل حادثة A من الأسرة $\mathscr{F}$ عددا حقيقيا يسمى احتمالها، ونرمز له بـ $P(A)$.

ملاحظـات

١ ـ مسلمات الاحتمال هي حقائق أو أحكام نسلم بصحتها أو بمشروعيتها دون الحاجة إلى برهان. وتشكل الأساس الذي يقوم عليه بناء النظرية الاحتمالية كنظرية رياضية. وتتناول هذه المسلمات الأسرة $\mathcal{F}$ والدالة P. ومعظم الكتاب يقتصرون عند عرض المسلمات على الخواص التي يجب أن تتمتع بها الدالة P، وهو ما سنقوم به في الفقرة القادمة. وتبقى المسلمة المتعلقة بـ $\mathcal{F}$ وكأنها أمر متعارف عليه ضمنا، وسنعلق عليها ونشرح مضمونها هنا في سياق هذه الملاحظات.

هذه المسلمة تقول ببساطة إن الأسرة $\mathcal{F}$ في أي فضاء احتمالي هي حقل. وفي إطار هذه المسلمة فقط يجوز لنا القول إن اتحاد حادثتين هو بدوره حادثة، وأن تتمة حادثة هي الأخرى حادثة، وأن تقاطع حادثتين هو حادثة وهو بالضبط ما تضمنته صياغة التعاريف الواردة في الفقرة (٣ ـ ٥).

٢ ـ يمكن النظر إلى الدالة P وكأنها آلة مصممة من أجل عناصر $\mathcal{F}$ على وجه التحديد. وعندما ندخل في هذه الآلة عنصرا من $\mathcal{F}$ (أي حادثة) فإنها تخرج لنا عددا هو الاحتمال الموافق.

$$A \longrightarrow \boxed{\quad P \quad} \longrightarrow P(A)$$

٣ ـ لدراسة نوع من الظواهر العشوائية احتماليا يكفي تحديد الفضاء الاحتمالي $(S, \mathcal{F}, P)$ الموافق لهذا النوع من الظواهر. وهدف النظرية الاحتمالية هو إقامة مثل هذا الفضاء. ومع تحديد هذا الفضاء يصبح كل ما يهمنا أو يجوز لنا التحدث عن احتماله هو عناصر $\mathcal{F}$. والآلة P مصممة خصيصا لعناصر $\mathcal{F}$ هذه، ولها جميعا دون استثناء وهي تستكمل المهمة المطلوبة فتقدم لنا من أجل كل عنصر من $\mathcal{F}$ (أي من أجل كل حادثة) الاحتمال المقابل.

٤ ـ المسلمة المتعلقة بـ $\mathcal{F}$ والقائلة إن $\mathcal{F}$ حقل تقضي ضمنا ما يلي:

إذا علمنا احتمال وقوع حادثة A فيجب أن نكون قادرين على تحديد احتمال عدم

وقوعها. أليس $\bar{A}$ عنصرا من $\mathcal{F}$؟ إذا P ستقوم بمهمتها في حالة $\bar{A}$) وإذا علمنا احتمال وقوع حادثة A واحتمال وقوع حادثة أخرى B فيجب أن نكون قادرين على تحديد احتمال وقوع A أو B أي احتمال اتحادهما. (أليس $A \cup B$ منتميا إلى $\mathcal{F}$؟ إذا ستقوم الآلة P بمهمتها في حالة $A \cup B$). وكذلك الأمر بالنسبة إلى $A \cap B$.

٥ ـ من الواضح أنه مع الانتهاء من إقامة الفضاء الاحتمالي $(S, \mathcal{F}, P)$ تبقى علينا مهمة لها طابع المهارة التقنية وهي كيفية تشغيل الآلة P لحساب احتمال أي حادثة نريد الحصول على احتمالها. وستكون مهمة القواعد الاحتمالية المختلفة التي نستنبطها هي تصميم آلة P، كفؤة من جهة، وتشغيلها سهل وميسور من جهة أخرى. ويجدر التذكير مجددا أننا نتطرق هنا للفضاءات المنتهية فقط.

(٢ ـ ٧) مسلمات الاحتمال

رأينا أن التكرارات النسبية تسعى إلى الاستقرار بعد سلسلة طويلة من المشاهدات العشوائية التي تجري تحت شروط منتظمة. مما سمح لنا أن ننسب إلى كل حادثة، مرتبطة بتجربة عشوائية، عددا يسمى احتمالها، بحيث أنه عندما نقوم بسلسلة طويلة من التكرارات للتجربة، يصبح التكرار النسبي لوقوع تلك الحادثة مساويا تقريبا لاحتمالها. وقلنا إن هذه هي الصيغة النموذجية للانتظام الاحصائي الذي يشكل الأساس التجريبي لنظرية الاحصاء. كما قلنا إنه عندما نكتشف، عن طريق الملاحظة والتجربة، دلالات كافية على نوع من الانتظام في مجموعة من الظواهر. فإن هذا يدفعنا إلى بلورة نظرية رياضية لمثل هذه الظواهر، تشكل النموذج الرياضي ، أو القالب، الذي يحتوي كافة الحقائق العملية المستوحاة من معطيات الملاحظة والتجربة. وتكون نقطة البداية، عندئذ، هي اختيار أكثر حقائق هذا الانتظام بساطة وجوهرية، وصياغتها في شكل مبسط من جهة، ومجرد ومثالي من جهة أخرى، كموضوعات رياضية نسميها مسلمات، ونعتبرها في مستوى الحقائق المسلم بها سلفا. وسنعرض الآن المسلمات التي تقوم عليها نظرية الاحتمال.

المسلمات

١ ـ $P(A) \geq 0$ ، مهما تكن الحادثة A. (احتمال أي حادثة غير سالب).

٢ ـ $P(S) = 1$ ، حيث S فضاء عينة. (احتمال الحادثة الأكيدة يساوي الواحد).

٣ ـ إذا كانت A_1 ، A_2 حادثتين منفصلتين فإن:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

(احتمال وقوع واحدة منهما على الأقل يساوي مجموع احتماليهما).

تعميم المسلمة الثالثة

ويمكن تعميم المسلمة الثالثة إلى حالة n من الحوادث فنقول:

إذا كانت A_1 ، A_2 ، . . . ، A_n حوادث منفصلة مثنى مثنى فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

أو بصورة رمزية مختصرة:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) \qquad ; \qquad A_i \cap A_j = \phi \qquad ; \qquad i \neq j$$

ويطلق على المسلمة ٣ اسم الخاصة الجمعية.

والحقيقة أن هذه المسلمات مستوحاة من خواص التكرار النسبي. فإذا كررنا تجربة عشوائية N مرة وراقبنا في كل مرة وقوع أو عدم وقوع حادثة A، مثلا، ورأينا أن A قد وقعت في n من المرات قلنا إن التكرار النسبي لوقوع A كان n/N.

ومن الواضح تماما أن التكرار النسبي لا يمكن أن يكون سالبا. وعندما نقول إن الحادثة A أكيدة فإنما نقصد أن وقوعها محتم في كل مرة نكرر فيها التجربة. أي أن تكرارها النسبي هو الواحد. والمسلمتان الأولى والثانية هما تجريدان لهاتين الحقيقتين التجريبيتين، على الترتيب. وينطبق ذلك أيضا على المسلمة الثالثة. وللايضاح نأخذ المثال التالي:

أحمد طالب في كلية العلوم ـ جامعة الملك سعود يؤدي صلاة الظهر كل يوم في أقرب مسجد لمكان وجوده وقت الظهيرة. لتكن الحادثة A_1 هي أن يصلي أحمد الظهر في

مسجد المبنى ٤ ، A_2 حادثة أن يصلي أحمد الظهر في مسجد المبنى ٥ . سجلنا على مدى ثلاثين يوما تكرار وقوع كل من A_1 و A_2 ووجدنا أن A_1 وقعت عشر مرات A_2 وقعت 8 مرات . فالتكرار النسبي لوقوع A_1 كان $\frac{10}{30}$ ، والتكرار النسبي لوقوع A_2 كان $\frac{8}{30}$. ولو سألنا ما هو التكراو النسبي لحادثة أن يؤدي أحمد صلاة الظهر في المبنى ٤ أو المبنى ٥ لكان الجواب بوضوح $\frac{8}{30} + \frac{10}{30} = \frac{18}{30}$. والتكرار النسبي لوقوع إحدى الحادثتين، على الأقل هو مجموع التكرارين النسبيين لوقوع كل منهما . ونلاحظ أن صحة القاعدة تعود قطعا إلى توفر شرط أساسي هو أنه لا يمكن وقوع A_1 و A_2 في وقت واحد . وفي يوم معين لو رمزنا، مثلا ، بـ B_1 لحادثة أن أحمد زار المكتبة المركزية ، وبـ B_2 لحادثة أن أحمد زار مطعم الطلاب . ولاحظنا على مدى ثلاثين يوما أن B_1 وقعت 15 مرة وأن B_2 وقعت عشر مرات ، وأنه في خمسة أيام زار كلا من المكتبة والمطعم . فإن التكرار النسبي لوقوع «B_1 أو B_2» ، أي أن يزور أحمد المكتبة أو المطعم، ليس $\frac{25}{30} = \frac{10}{30} + \frac{15}{30}$ لأن الأيام الخمسة التي وقعت فيها كل من B_1 و B_2 حسبناها مرتين، والتكرار النسبي الصحيح هو في الحقيقة $\frac{20}{30} = \frac{5}{30} - \frac{10}{30} + \frac{15}{30}$. ولم نستطع تطبيق القاعدة هنا لأن شرط التطبيق غير متوافر، فالحادثتان B_1 ، B_2 غير منفصلتين، (وقوع إحداهما لا ينفي إمكانية وقوع الأخرى) .

(٢ ـ ٨) نتائج

بالاستناد إلى مسلمات الاحتمال يمكننا الآن برهان النتائج التالية

(٢ ـ ٨ ـ ١) إذا كانت A ، B حادثتين بحيث أن $A \subset B$ فإن ،

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

برهـــان

$$B = BA \cup B\bar{A} = A \cup B\bar{A} \quad ; \quad A \cap B\bar{A} = \phi$$

حسب المسلمة ٣

$$P(B) = P(A \cup B\bar{A}) = P(A) + P(B\bar{A})$$

ومنه :

$$P(B-A) = P(B\bar{A}) = P(B) - P(A)$$

وهو المطلوب .

نتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٢)

من أجل أي حادثتين A ، B لدينا :

أ ـ $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$

ب - $P(A\bar{B}) = P(B) - P(AB)$

برهـــان

من أجل أي حادثتين A ، B لدينا :

$$AB \subset B \quad ; \quad AB \subset A$$

والمطلوب يلي مباشرة من النتيجة السابقة .

نتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٣)

إذا كانت A ، B حادثتين وكانت $A \subset B$ فإن $P(A) \leq P(B)$.

برهـــان

لدينا من النتيجة ١ ،

$$P(B) = P(A) + P(B-A)$$

ولكن $P(B-A) \geq 0$ حسب المسلمة ١ ، أي أن $P(B)$ لا يمكن أن يكون أقل من $P(A)$ مادام يساوي $P(A)$ مضافا إليه عدد غير سالب .

يمكن التعبير عن النتيجـة (٢ ـ ٨ ـــ ٣) بقولنـا إنه كلما اتسعت الحادثـة (أي تضمنت عددا أكبر من نقاط العينة) ازداد احتمال وقوعهـا . أو بعبارة أبسط يزداد احتمال الحادثة كلما اتسعت إمكانيات وقوعها ، أي تعددت الطرق الممكنة التي تؤدي إلى وقوعها . وهو

ما نتوقعه بالفطرة السليمة . وبلغة رياضية تقول النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٣) إن الدالة P ، وتسمى عادة القياس الاحتمالي ، هي دالة غير متناقصة على حقل الحوادث $\mathcal{F}$.

نتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٤)

لكل حادثة A لدينا

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

برهـــان

لكل حادثة A نعلم أن $A \subseteq S$ وبتطبيق النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٣) والاستفادة من المسلمة ٢ نجد $P(A) \leq P(S) = 1$. أما $P(A) \geq 0$ فيتبع من المسلمة ١ .

نتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٥)

$$P(\phi) = 0$$

برهـــان

نعلم أن $\phi \cup S = S$ وأن $\phi \cap S = \phi$

ومنه

$$P(\phi \cup S) = P(S)$$

والطرف الأيسر يساوي $P(\phi) + (P(S))$ حسب المسلمة ٣ ، أي أن

$$P(\phi) + P(S) = P(S)$$

ومن المسلمة ٢ نجد :

$$P(\phi) + 1 = 1$$

ومنه

$$P(\phi) = 0$$

نتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٦)

لأي حادثة A لدينا

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

برهـــان

لأي حادثة A لدينا $S = A \cup \bar{A}$.

أي أن

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S)$$

وبما أن $A \cap \bar{A} = \phi$ نجـد بتطبيق المسلمـة ٣ على الطـرف الأيسر، والاستفـادة من المسلمة ٢ في الطرف الأيمن،

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

أو

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

نتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٧)

لأي حادثة A ، B لدينا :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

برهـــان

$$A \cup B = A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B$$

لنفرض أن $P(A\bar{B}) = a$ وأن $P(\bar{A}B) = b$ ، وأن $P(AB) = c$ ،

فعندئذ

$$P(A \cup B) = P(A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$$
$$= a + b + c$$

وذلك استنادا إلى المسلمة ٣ . ولكن من خواص الأعداد الحقيقية يمكننا كتابة :

$$P(A \cup B) = a + c + b + c - c = (a + c) + (b + c) - c$$

ولكن

$$a + b = P(A\bar{B}) + P(AB) = P(A\bar{B} \cup AB) = P(A)$$

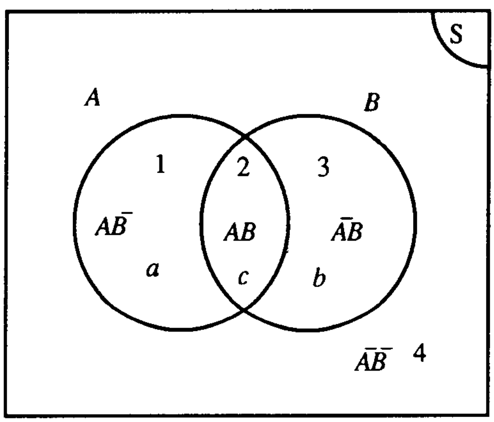
$$b + c = P(\bar{A}B) + P(AB) = P(\bar{A}B \cup AB) = P(B)$$

وذلك بالاستفادة ثانية من المسلمة ٣ . وبالتعويض في العلاقة الأخيرة نجد :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

ملاحظـة

تتصف قياسات الطول والمساحة والحجم والوزن وسائر القياسات المشابهة بالخاصة الجمعية. إذ لو نظرنا في خريطة مهندس معماري وعليها مخطط لغرفتين متجاورتين، ومساحة أرض الأولى عشرون مترا مربعا ومساحة أرض الثانية ستة عشر مترا مربعا، فاتحاد الغرفتين يعطي غرفة جديدة مساحة أرضها $36 = 20 + 16$ مترا مربعا. وكذلك الأمر عند دمج قطعتين منفصلتين من الفضة في قطعة واحدة فوزن القطعة الناتجة هو مجموع وزني القطعتين. والمسلمة الثالثة تقول إن هذه الخاصة الجمعية تبقى صحيحة بالنسبة لاحتمالي حادثتين منفصلتين. وهي تسمح لنا بالنظر إلى احتمالات الحوادث في مخطط ڤن وكأنها مساحات. وبالتالي فإن ما يصح على جمع المساحات نجده صحيحا أيضا على الاحتمالات. وعلى الشكل (٢ ـ ٧) نجد أن المناطق



شكل (٢ ـ ٧)

1، 2، 3، تمثل الحوادث $A\bar{B}$، AB، $\bar{A}B$، على الترتيب. وكما أن مساحة الدائرة A تساوي مساحة المنطقة 1 مضافا إليها مساحة المنطقة 2، فكذلك احتمال الحادثة A يساوي احتمال الحادثة $A\bar{B}$، ممثلة بالمنطقة 1، مضافا إليه احتمال الحادثة AB، ممثلة بالمنطقة 2. ومخطط ڤن في الشكل (٢ ـ ٧) يلعب دور وسيلة الايضاح التي تيسر متابعة وفهم خطوات برهان النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٧) إلا أنه لا يشكل جزءا من البرهان، ولا يجوز أن يكون كذلك.

مثال (٢ ـ ٨)

من أجل أي حادثتين A ، B بين أن :

$$P(A) \le P(A \cup B),$$

$$P(A) \ge P(A \cap B).$$

نعلم أن

$$A \subseteq A \cup B, \quad A \supseteq A \cap B$$

واستنادا إلى النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٣) نجد المطلوب .

مثال (٢ ـ ٩)

بين وجه الخطأ في كل من العبارات التالية :

ا ـ احتمال أن ينجح خالد في امتحان الفيزياء هو -0.95

ب ـ احتمال أن ينجح خالد في مقرر الاحصاء هو 0.9 واحتمال ألا ينجح هو 0.15 .

جـ ـ احتمال أن يفوز الفريق الوطني لكرة القدم في مباراته القادمة هو 0.75 واحتمال أن يتعادل 0.09 واحتمال أن يفوز أو يتعادل هو 0.95 .

د ـ احتمال أن ينجح خالد في مقرر الاحصاء هو 0.9 واحتمال أن ينجح في مقرري الاحصاء والرياضيات هو 0.95 .

الحـــل

ا ـ يتناقض الاحتمال المعطى مع المسلمة الأولى التي تقول إن احتمال أي حادثة لا يجوز أن يكون سالبا .

ب ـ تناقض الاحتمالات المعطاة المسلمة الثانية . إذ لو رمزنا لحادثة نجاح خالد في مقرر الاحصاء بـ A فإن عدم نجاحه يمثل الحادثة المتممة $\bar{A}$ و

$$P(\bar{A}) + P(\bar{A}) = P(S) = 0.9 + 0.15 > 1$$

(احتمال حادثة + احتمال متممتها يجب أن يساوي الواحد بالضبط دون زيادة أو نقصان .)

جـ ـ لنرمز بـ A لحادثة فوز الفريق الوطني لكرة القدم في مباراته القادمة ، ولنرمز بـ B لحادثة تعادل الفريق الوطني لكرة القدم في مباراته القادمة .

فيمكن تلخيص المعلومات المعطاة كالتالي :

$$P(A) = 0.75 ; P(B) = 0.09 ; P(A \cup B) = 0.95$$

والحادثتان A ، B متنافيتان وحسب المسلمـة الثالثة يجب أن يكون $P(A \cup B)$ مساويا لمجموع $P(A)$ و $P(B)$ وهو غير متحقق لأن $0.95 \neq 0.75 + .09$

د ـ لنرمز بـA لحادثة أن ينجح خالد في مقرر الاحصاء ،
ولنرمز بـB لحادثة أن ينجح خالد في مقرر الرياضيات .

لدينا

$$P(AB) = 0.95 \text{ ، } P(A) = 0.9$$

وبما أن

$$AB \subseteq A$$

فلابد أن يكون

$$P(AB) \leq P(A)$$

وفق النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٣) . وهذا غير متوفر، $(0.95 \nleq 0.9)$

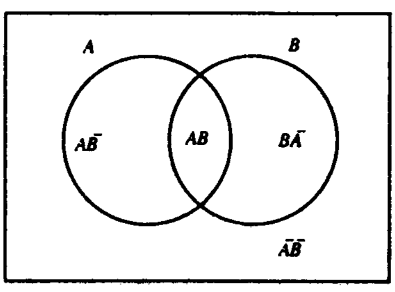
مثال (٢ ـ ١٠)

إذا علمت أن $P(A) = 0.55$ ، $P(A \cup B) = 0.7$ ، $P(B) = 0.35$ فاحسب

$$P(\bar{A}B) \ , \ P(A\bar{B}) \ , \ P(AB)$$

الحــــل

رسم مخطط ڤن مفيد دائما في مثل هذه التمارين . إذ يساعدنا على كتابة العلاقات التي نحتاجها لحل التمرين .



شكل (٣ ـ ٨)

نعلم أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

وهي علاقة تربط بين أربعة مقادير. وإذا علمنا أي ثلاثة منها فيمكن استخدامها لحساب المقدار الرابع. لدينا هنا $P(A \cup B)$ و $P(A)$ و $P(B)$ والمطلوب حساب $P(AB)$. بالتعويض في العلاقة نجد

$$0.7 = 0.55 + 0.35 - P(AB)$$

ومنه:

$$P(AB) = 0.55 + 0.35 - 0.7 = 0.2$$

ولدينا أيضا

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A) - P(AB) \\ &= 0.55 - 0.2 = 0.35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}B) &= P(B) - P(AB) \\ &= 0.35 - 0.20 = 0.15 \end{aligned}$$

انظر النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٢).

تمارين (٢ ـ ٢)

١ ـ ما هو وجه الخطأ في كل من العبارات التالية:

ا ـ احتمال هطول مطر في يوم معين هو 0.6 واحتمال وجود رياح نشطة هو 0.8 واحتمال هطول المطر ووجود رياح نشطة هو 0.85.

ب ـ احتمال أن ينجح سالم في مقرر الرياضيات 0.8 واحتمال أن ينجح في مقرر الرياضيات ويرسب في مقرر الفيزياء هو 0.9.

جـ ـ احتمال أن تستقبل عيادة طبيب أقل من 5 مراجعين في فترة ما قبل الظهر هو 0.62 واحتمال أن تستقبل 5 مراجعين أو أكثر هو 0.25.

٢ ـ في دراسة للأحداث الجانحين في مدينة معينة، ترمز R لحادثة أن الجانح ترك المدرسة، وترمز Q لحادثة أن أسرة الجانح ميسورة الحال. أعرض بكلمات الاحتمالات التي تعبر عنها الرموز التالية:

$P(Q' \cup R)$ ، $P(Q' R)$ ، $P(Q' R')$ ، $P(Q \cup R')$ ، $P(QR)$ ، $P(Q')$ ، $P(R')$

٣) إذا كانت D حادثة أن كتابا جديدا في الإحصاء سيُطبع طباعة ممتازة؛ و E حادثة أنه سيلقى رواجا في السوق، و F حادثة أنه سيجري تبنيه لمقرر جامعي. اكتب كلا من الاحتمالات التالية بصورة رمزية:

أ ـ احتمال أن الكتاب سيلقى رواجا ويجري تبنيه لمقرر جامعي.

ب ـ احتمال أن الكتاب سوف لا يُطبع طباعة ممتازة ولا يجري تبنيه لمقرر جامعي.

جـ ـ احتمال أن الكتاب سوف لا يطبع طباعة ممتازة ويجري تبنيه لمقرر جامعي.

د ـ احتمال أن الكتاب سيطبع طباعة ممتازة ويجري تبنيه لمقرر جامعي.

هـ ـ احتمال أن الكتاب سيلقى رواجا ولكنه سوف لا يطبع طباعة ممتازة ولا يجري تبنيه لمقرر جامعي.

٤) بعد تحليل دراسة تمت ضمن كل من ثلاث شركات يصرح مديروها بما يلي:

يصرح المدير الأول أن احتمالات زيادة في ميزانية الشركة أو انخفاض في ميزانية الشركة، أو بقاء الميزانيةعلى حالتها هي على الترتيب: 0.65 ، 0.07 ، 0.25 .

ويصرح المدير الثاني بأن هذه الاحتمالات بالنسبة إلى شركته هي 0.48، 0.14 ، 0.38،

ويصرح المدير الثالث بأن هذه الاحتمالات بالنسبة إلى شركته هي 0.56 ، 0.08، 0.38.

علق على هذه التصريحات من وجهة النظر الاحتمالية.

٥) الحادثتان A و B متنافيتان و $P(A) = 0.12$ ، $P(B) = 0.60$. أوجد:

$P(A' B')$ ، $P(A' \cup B')$ ، $P(AB)$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(B')$ ، $P(A')$.

٦) الحادثتان C و D متنافيتان $P(C) = 0.27$ ، $P(D) = 0.33$ ، أوجد:

$P(C' \cup D')$ ، $P(CD')$ ، $P(C' D)$ ، $P(C \cup D)$ ، $P(D')$ ، $P(C')$.

٧) إذا كان 0.2 احتمال أن يبيع معرض سيارات في شهرين ثلاث سيارات على الأقل، احسب احتمال أن يبيع في ذلك الشهر سيارتين على الأكثر.

٨) لنفرض أن $P(A) = 0.56$ ، $P(B) = 0.43$ ، $P(AB) = 0.18$ ، احسب :
$P(A')$ ، $P(B')$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(A'B)$ ، $P(AB')$

٩) احتمال أن يحصل مشترك في المسابقة الدولية لتجويد وتفسير القرآن الكريم على جائزة التجويد هو 0.16 واحتمال أن يحصل على جائزة التفسير هو 0.30، واحتمال أن يحصل عليهما معا هو 0.09 :
أ ـ احسب احتمال حصول المشترك هذا على واحدة منهما على الأقل .
ب ـ احسب احتمال أن يحصل على واحدة منهما فقط .
جـ ـ احسب احتمال ألا يحصل على أي منهما .

١٠) إذا كان احتمال هطول مطر في يوم معين هو 0.1 ، واحتمال وجود رياح نشطة في ذلك اليوم هو 0.05 واحتمال وجود رياح نشطة وهطول مطر هو 0.03، فاحسب احتمال :
ا ـ هطول مطر أو وجود رياح نشطة في ذلك اليوم،
ب ـ ألا يهطل مطر في ذلك اليوم ولا توجد رياح نشطة،
جـ ـ أن توجد رياح نشطة ولا يهطل المطر في ذلك اليوم .

١١) إذا كان $P(B) = 2/3$ ، $P(AB) = 1/2$ ، $P(AB') = 0.25$ فاحسب :
$P(A)$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(A'B')$

١٢) إذا علمت أن $P(A) = 0.4$ ، $P(A \cup B)$ ، $P(AB') = 0.25$ فاحسب :
$P(AB)$ ، $P(B)$ ، $P(AB')$ ، $P(A'B')$.

١٣) ما هو وجه الخطأ في كل مما يلي :
ا ـ $P(A) = 0.48$ ، $P(A') = 0.42$.
ب ـ $P(B) = 1.02$ ،
جـ ـ $P(C) - 0.03$ ،
د ـ $P(A) = 0.45$ و $P(AB) = 0.53$ ،
هـ ـ $P(A) = 0.87$ و $P(A \cup B) = 0.79$

١٤) احتمال أن يطلب صاحب سيارة واقف في محطة بنزين الكشف على ضغط الهواء في العجلات هو 0.12 واحتمال أن يطلب الكشف على زيت المحرك هو 0.29، واحتمال أن يطلب الأمرين معا هو 0.07.

أ ـ ما احتمال أن يطلب صاحب سيارة يقف في المحطة الكشف على العجلات أو على زيت المحرك؟

ب ـ ما احتمال أن لا يطلب صاحب سيارة يقف في المحطة الكشف على العجلات ولا الكشف على زيت المحرك؟

جـ ـ ما احتمال أن يطلب صاحب سيارة يقف في المحطة الكشف على العجلات ولا يطلب الكشف على زيت المحرك؟

١٥) يمكن تعميم النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٧) إلى حالة حوادث أو أكثر. بين أن:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

(٢ ـ ٩) بناء نموذج احتمالي

نقصد ببناء النموذج الاحتمالي تحديد طريقة عمل تسمح لنا بحساب قيمة الدالة P لكل حادثة من الحقل $\mathscr{F}$ في فضاء احتمالي $(S, \mathscr{F}, P)$، وبما ينسجم تماما مع المسلمات التي وضعناها.

ومن أجل أي فضاء عينة S، رأينا أنه يمكن تحديد أكثر من حقل من الحوادث، وأبسطها هو الحقل $\{\phi, S\}$، وأكثرها اتساعا هو الحقل المؤلف من كافة المجموعات الجزئية من S. وسنأخذ هذا الحقل بالذات، ولنرمز له فيما يلي بـ $\mathscr{F}$، ونبني عليه نموذجا احتماليا. أي نحدد طريقة ميسرة تقودنا إلى معرفة قيمة الدالة P لأي حادثة من هذا الحقل $\mathscr{F}$. وبالطبع يمكن، بطريقة مماثلة، تعريف نماذج أخرى في حقول أخرى أقل اتساعا.

لنفرض الآن أن عدد نقاط العينة في فضاء عينة S هو t حيث t عدد منته، ولنرمز لهذه النقاط، أو الحوادث الابتدائية، بـ E_1، E_2، . . . ، E_t. من الواضح أن هذه الأسرة

من الحوادث الابتدائية تشكل تجزئة لـS، فهي منفصلة بعضها عن بعض لأن التجربة لا يمكن أن تؤدي إلى نتيجتين مختلفتين في آن واحد، ولأن

$$S = \bigcup_{i=1}^{t} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_t$$

بمقتضى تعريف فضاء العينة S. وأي حادثة من $\mathscr{F}$ هي، بوضوح، اتحاد عدد من هذه الحوادث الابتدائية المنفصلة.

إذا خصصنا لكل حادثة ابتدائية E_i عددا حقيقيا p_i وكانت هذه الأعداد تحقق الشرطين:

أ ـ $p_i \geq 0$ ، $i = 1, 2, \ldots, t$

ب ـ $\sum_{i=1}^{t} p_i = 1$

نكون قد أقمنا نموذجا احتماليا. إذ نستطيع الآن حساب احتمال أي حادثة من $\mathscr{F}$ كما يلي:

(٢ ـ ٩ ـ ١) احتمال حادثة

احتمال حادثة هو مجموع الاحتمالات المخصصة لنقاط العينة التي تنتمي إلى هذه الحادثة.

وبعبارة أخرى، احتمال حادثة هو مجموع احتمالات الحوادث الابتدائية الداخلة في تشكيل هذه الحادثة.

مثال (٢ ـ ١١)

في المثال (٢ ـ ٤)، افترض أن الاحتمالات المخصصة لنقاط العينة كانت كما في الجدول التالي:

نقطة العينة	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)	(0,-1)	(0,0)	(0,1)	(1,-1)	(1,0)	(1-1)
الاحتمال المخصص	0.16	0.08	0.16	0.08	0.04	0.08	0.16	0.08	0.16

ا) تحقق أن الجدول يمثل نموذجا احتماليا .

ب) احسب احتمالات الحوادث المذكورة في الجزئين ب و جـ من ذلك المثال .

الحـــــل

ا) شرطا النموذج الاحتمالي متحققان، إذ لا يوجد احتمال سالب ومجموع الاحتمالات المخصصة لنقاط العينة يساوي الواحد تماما .

ب)

$$P(A) = P(\{(1,-1)\}) + P(\{(1,0)\}) + P(\{(1,-1)\})$$
$$= 0.16 + 0.08 + 0.16 = 0.40$$
$$P(B) = P(\{(-1,-1)\}) + P(\{(0,0)\}) + P(\{(1,1)\})$$
$$= 0.16 + 0.04 + 0.16 = 0.36$$
$$P(C) = P(\{(-1,\ \ 0\ \}) + P(\{(1,0)\}) + P(\{(0,-1)\}) + P(\{(0,1)\}) + P(\{(0,0)\})$$
$$= 0.08 + 0.08 + 0.08 + 0.08 + 0.04 = 0.36$$
$$P(U) = P(\{(-1,-1)\}) + P(\{(0,-1)\}) + P(\{(1,-1)\})$$
$$= 0.16 + 0.08 + 0.16 = 0.40$$
$$P(T) = P(\{(-1,1)\}) + P(\{(-1,0)\}) + P(\{(6-1)\}) + P(\{(0,-1) + P(\{(1,-1)\})$$
$$= 0.16 + 0.08 + 0.16 + 0.08 + 0.16 = 0.64$$
$$P(V) = P(\{(-1,1)\}) + P(\{(1,-1)\}) = 0.16 + 0.16 = 0.32$$

مثال (٢ ـ ١٢)

في المثال (٢ ـ ٣) افترض أن حجر النرد هو مكعب متناظر تماما مما لا يترك مبررا لاختلاف الاحتمال المخصص لنقطة عينة من نقطة إلى أخرى من النقاط الست

والثلاثين في فضاء العينة S . [الجدول (٢ ـ ١)]. وفي مثل هذه الحالـة يسمى النموذج «نموذج الاحتمالات المتساوية».

احسب احتمالات الحوادث المذكورة في ب و جـ من ذلك المثال.

الحـــل

وفقا لنموذج الاحتمالات المتساوية نوزع الـواحد هنا بالتساوي على النقاط الست والثلاثين، فتكون حصة كل منها 1/36. ويكون احتمال أي حادثة في S هو عدد النقاط التي تتضمنها الحادثة مضروبا بـ 1/36. وبذلك تكون الاحتمالات المطلوبة:

$$P(A) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \quad , \quad P(B) = 10 \times \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \; ,$$

$$P(C) = 10 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{18} \quad , \quad P(D) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \; ,$$

$$P(E) = 10 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{18} \quad , \quad P(F) = P(\phi) = 0 \; ,$$

$$P(G) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \quad , \quad P(H) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \; ,$$

$$P(I) = 4 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{9} \quad , \quad P(J) = 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6} = \; ,$$

$$P(K) = 9 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$$

مثال (٢ ـ ١٣)*

لنفرض في المثال (٢ ـ ٣) أن اهتمامنا يقتصر على المجموع الذي نحصل عليه من القذفتين. أقم على فضاء العينة S نموذجا احتماليا يفي بـالغرض، واستخدمه لحساب احتمالات الحوادث التالية:

T : الحصول على مجموع يساوي 7.

U : الحصول على مجموع يساوي 7 على الأكثر.

V : الحصول على مجموع أكبر من 9.

لنأخذ التجزئة التالية لـ S :

المجموع 2 $\qquad B_1 = \{(1, 1)\}$

---

* للقراءة فقط.

المجموع 3	$B_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
المجموع 4	$B_3 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\}$
المجموع 5	$B_4 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$
المجموع 6	$B_5 = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$
المجموع 7	$B_6 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
المجموع 8	$B_7 = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$
المجموع 9	$B_8 = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$
المجموع 10	$B_9 = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$
المجموع 11	$B_{10} = \{((5,6), (6,5)\}$
المجموع 12	$B_{11} = \{(6,6)\}$

ونلاحظ أن نقاط العينـة التي تؤدي إلى المجموع نفسه قـد صنفت مع بعضها في المجموعـة الجزئية ذاتها. أي أن كل حـادثة من حـوادث التجزئة B_1 ، B_2 ، . . . ، B_{11} تتضمن نقاط عينة تؤدي إلى المجمـوع نفسه. وسنخصص احتمالات لهذه الحوادث وفقا للقاعـدة الموضحة في المثـال السابق انسجامـا مع الافتراض بأن حجر النـرد مكعب تام التناظر. وبذلك يكون،

$$P(B_1) = \frac{1}{36}\ ,\ P(B_2) = \frac{2}{36}\ ,\ P(B_3) = \frac{3}{36}\ ,\ P(B_4) = \frac{4}{36}\ ,\ P(B_5) = \frac{5}{36}\ ,$$

$$P(B_6) = \frac{6}{36}\ ,\ P(B_7) = \frac{5}{36}\ ,\ P(B_8) = \frac{4}{36}\ ,\ P(B_9) = \frac{3}{36}\ ,\ P(B_{10}) = \frac{2}{36}\ ,$$

$$P(B_{11}) = \frac{1}{36}\ .$$

وسنعـرف حـقـل الحـوادث A بـأنـه الأسـرة المـؤلـفـة من حوادث التجزئة B_1 ، B_2 ، . . . ، B_{11} والحـوادث الناتجة عـن اتحاد أي حادثتين أو أكثر منها بالاضافة إلى ϕ ونعرف الدالة P على هذا الحقل A على الشكل التالي:

احتمال حادثة يساوي مجموع الاحتمالات المخصصة لحوادث التجزئة التي تدخل في تشكيل هذه الحادثة. (لاحظ أن أي حادثة ممكنة يجب أن تكون الآن إحدى حوادث

التجزئة أو اتحاد عدد منها). وبذلك عرفنا الفضاء الاحتمالي $(S, \mathscr{A}, P)$ وحددنا طريقة عمل لحساب الدالة P لكل حادثة من حقل الحوادث $\mathscr{A}$. أي أننا أقمنا نموذجا احتماليا. ومن الواضح أنه نموذج قادر على الاجابة على احتمال أي حادثة تتعلق بالمجموع الذي نحصل عليه في القذفتين. وعلى سبيل المثال:

$$P(T) = P(B_6) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(U) &= P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{21} \end{aligned}$$

$$P(V) = P(B_{10} \cup B_{11}) = P(B_{10}) + P(B_{11}) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

ويمكن بالطبع استخدام النموذج (الأعم) الذي أقمناه في المثال (٢ ــ ١٢) للحصول على احتمالات الحوادث T، U، وV وسنجد الأجوبة نفسها.

تعليق*

على فضاء العينة نفسه المبين في الجدول (٢ ــ ١)، أقمنا نموذجين احتماليين. وتجدر ملاحظة أن الحقل $\mathscr{F}$ في المثال (٢ ــ ١٢) يتضمن كل المجموعات الجزئية الممكنة من S، أي 2^{36} حادثة، وهو أوسع حقل يمكن تشكيله من S. والدالة P في المثال (٢ ـ ١٢) تقدم احتمالا لكل من هذه الحوادث. إلا أن الحقل $\mathscr{A}$ في المثال (٢ ـ ١٣) لا يتضمن إلا جزءا يسيرا من حوادث $\mathscr{F}$. والدالة P في المثال (٢ ـ ١٣) تقدم احتمالات الحوادث في $\mathscr{A}$. ولو سألنا مثلا: ما احتمال الحصول على النتيجة نفسها في القذفتين؟ لما أمكن للنموذج المقام في المثال (٢ ـ ١٣) الإجابة عنه، لأن عبارة «الحصول على النتيجة نفسها» ليست حادثة في عُرف الفضاء الاحتمالي $(S, \mathscr{A}, P)$ باعتبارها تمثل مجموعة جزئية غير منتمية إلى الحقل $\mathscr{A}$. وبالتالي ليس لها في عُرف

---

* للقراءة فقط.

هذا الفضـاء احتمال. ولكنها في عُـرف الفضاء $(S, \mathscr{F}, P)$ تشكل حادثـة لأنها تمثل مجموعة جـزئية تنتمي إلى حقل الحوادث $\mathscr{F}$. واحتمالها كما حسبناه في المثـال (٢ ـ ١٢) هو 1/6. ولو سألنـا في المقـابل: ما احتمال الحصـول على مجموع زوجي؟ لوجدنـا جوابا في النمـوذج المقام في المثال (٢ ــ ١٣) لأن وصف أو عبـارة «المجموع زوجي» يتمثل في $B_1 \cup B_3 \cup B_5 \cup B7 \cup B_9 \cup B_{11}$. أي يمكن التعبير عنه كاتحاد عـدد من حوادث التجزئة، وبـالتالي فهـو ينتمي إلى حقل الحوادث $\mathscr{A}$، أي أنه يمثل حـادثة لها في عُرف الفضاء الاحتمالي $(S, \mathscr{A}, P)$ احتمال يساوي

$$P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) + P(B_7) + P(B_9) + P(B_{11})$$
$$= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

ولهذا السؤال جوابه أيضا في النمـوذج المقـام في المثال (٢ ـ ١٢). فالحصول على مجموع زوجي يمثل المجمـوعة الجزئية المؤلفـة من جميع نقاط العينـة في الجدول (٢ ـ ١) التي مجموعها زوجي، وعدد هذه النقاط 18. وهي مجموعة جزئية تنتمي إلى $\mathscr{F}$، أي أنها حادثة، وبالتالي لها احتمال يساوي، . وفقا لنموذج المثال (٢ ـ ١٢)، $18 \times 1/36 = 1/2$. وهو الجواب السابق نفسه.

وفي الحقيقـة، كـل مـا يمكـن للنمـوذج في المثــال (٢ ـ ١٣) أن يجيب عليـه، سيجيب عليـه أيضا النمـوذج «الأوسـع» في المثــال (٢ ـ ١٢)، ولكــن العكـس غير صحيح. فالنمـوذج في المثال (٢ ـ ١٣) صـالح للاجابـة على حوادث معنية بـالمجموع المتحصل من القــذفتين فقـط. وإذا اقتصر اهتمامنــا على مثل هــذه الحوادث، فمن الواضح أنه يمكن اعتماد الفضاء $(S, \mathscr{A}, P)$، لأنه يفي بالغـرض. وسنرى في الفصل القـادم تجسيدا لهذه الفكـرة فيما سنسميـه بالمتغير العشـوائي الـذي يولـد، اعتمادا على الفضاء الأصلي، فضـاء جديدا، لا يُعنى إلا بـالقياسات التي يمكن أن يفترضهـا هذا المتغير العشـوائي. وسنسمي النموذج المقـام في هذا الفضـاء الجديد التـوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

(٢ ـ ١٠) نموذج الاحتمالات المتساوية

كحالة خاصة لنفرض أن عدد النتائج الممكنة لتجربة هو N، وأنه ليس هناك ما يبرر منح أفضلية لنتيجة من النتائج الممكنة على نتيجة أخرى. فهي جميعها متساوية الأفضلية. أو بعبارة أخرى نقول إن فرصة ظهور نتيجة محددة، عند تنفيذ التجربة، هي نفس فرصة ظهور أي من النتائج الممكنة الأخرى. وقد رأينا مثالا على ذلك في تجربة قذف حجر نرد. وافتراض أن حجر النرد هو مكعب متناظر تماما استدعى القول إن لكل من أوجهه الستة الفرصة نفسها في أن يكون الوجه الظاهر عند قذف الحجر. وفي مثال هذه الحالات نخصص لكل نقطة عينة (نتيجة ممكنة) الاحتمال نفسه، أي نوزع الواحد بالتساوي على النقاط الـN فتكون حصة كل منها $1/N$. لنفرض الآن أن حادثة A تتضمن n نقطة عينة، فيكون احتمال A حسب التعريف:

$$P(A) = \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \ldots + \frac{1}{N}}_{n \text{ مرة}} = n \times \frac{1}{N} = \frac{n}{N}$$

وهكذا نكون قد أقمنا نموذجا احتماليا يسمى، لأسباب واضحة تماما، نموذج الاحتمالات المتساوية. وفي مثل هذا النموذج يكون احتمال حادثة، باختصار، هو حاصل قسمة عدد النتائج (أو الحالات) الملائمة، على عدد جميع النتائج (أو الحالات) الممكنة، ومنه التعريف التقليدي التالي لاحتمال حادثة:

(٢ ـ ١٠ ـ ١) التعريف التقليدي لاحتمال حادثة

إذا أمكن لتجربة أن تظهر في N من الحالات المتنافية مثنى مثنى والمتساوية الأفضلية. وكان n من هذه الحالات يؤدي إلى تحقق حادثة A فإن احتمال A يساوي n/N.

مثال (٢ ـ ١٤)

في المثال (٢ ـ ٢) إذا افترضنا أن قطعة النقود متناظرة تماما فاحسب احتمالات الحوادث A، B، C، D.

الحـــــل

تناظر القطعة يسمح بتطبيق نموذج الاحتمالات المتساوية أي باستخدام التعريف التقليدي للاحتمال فنجد :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

وبصورة مماثلة :

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\ ,\ P(C) = \frac{3}{4}\ ,\ P(D) = \frac{3}{4}$$

مثال (٢ ـ ١٥)

يتضمن صندوق أول كرتين بيضاويين وكرة سوداء واحدة. ويتضمن صندوق ثان كرة بيضاء وكرة سوداء. سحبنا عشوائيا كرة من الصندوق الأول وخلطناها جيدا مع كرات الصندوق الثاني، ثم سحبنا عشوائيا كرة من الصندوق الثاني. ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء؟

تمييزا للكرات ذات اللون نفسه بعضها عن بعض نرقمها فنضع الرقم 1 على إحدى الكرتين البيضاوين في الصندوق الأول، ولنرمز لها بـW_1 ، والرقم 2 على الكرة البيضاء الأخرى في الصندوق الأول، ولنرمز لها بـW_2 ، والرقم 3 على الكرة البيضاء في الصندوق الثاني والرقم 1 على الكرة السوداء في الصندوق الأول، ولنرمز لها بـB_1 ، والرقم 2 على الكرة السوداء في الصندوق الثاني، ولنرمز لها بـB_2. ويمكن الآن كتابة فضاء العينة S كما يلي :

$$S = \{\ W_1 W_1,\ W_1 W_3,\ W_1 B_2,\ W_2 W_2,\ W_2 W_3,\ W_2 B_2,\ B_1 B_1,\ B_1 W_3,\ B_1 B_2\}$$

حيث ترمز نقطة العينة $W_2\ W_3$ ، مثلا، إلى النتيجة : «سحبنا الكرة W_2 من الصندوق الأول. ثم سحبنا الكرة W_3 من الصندوق الثاني». ويتضمن S تسع نقاط. والسحب

العشوائي من كل من الصندوقين يعني أن لكل من النتـائج التسع الفرصة نفسها في أن تكون النتيجة التي نحصل عليها عند تنفيذ التجربة. وحصة كل نقطة عينة هي إذا 1/9.
والحادثة المطلوبة، ولنرمز لها بـA، تتضمن النقاط التالية:

$$A = \{W_1\ W_1,\ W_1\ W_3,\ W_2\ W_2,\ W_2\ W_3,\ B_1\ W_3\}$$

ويكون:

$$P(A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

أو نطبق التعريف التقليدي لـلاحتمال فنقوم بتعـداد النتائج الملائمة وهـي النقاط التي يكون حرفها الثاني W فنجدها 5 ويكون:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{5}{9}$$

مثال (٢ ـ ١٦)

لدينـا خمس بذور، اثنتان منها تنتجـان زهورا حمراء ولنرمـز لها بـR_1 وR_2. واثنتان تنتجان زهورا بيضاء، ولنرمز لهما بـ W_1، W_2، وواحدة تنتج زهورا صفراء، ولنرمز لها بـY. خلطنا هذه البذور جيدا ثم اخترنا منهـا عشوائيا بذرتين. فما هو احتمال أن تنتجا زهورا من اللون نفسه؟

فضاء العينة هو:

		الاختيار الثاني				
		R_1	R_2	W_1	W_2	Y
الاختيار الأول	R_1	–	$R_1 R_2$	$R_1 W_1$	$R_1 W_2$	$R_1 Y$
	R_2	$R_2 R_1$	–	$R_2 W_1$	$R_2 W_2$	$R_2 Y$
	W_1	$W_1 R_1$	$W_2 R_2$	–	$W_2 W_1$	$W_1 Y$
	W_2	$W_2 R_1$	$W_2 R_2$	$W_1 W_2$	–	$W_2 Y$
	Y	YR_1	YR_2	YW_1	YW_2	–

وهو يتضمن عشرين نقطة عينة، لكل منها فرصة 1/20 في أن تكون هي النتيجة التي يتمخض عنها الاختيار. وعدد النتائج التي تحقق المطلوب، هو عدد النقاط التي تتضمن الحرف نفسه، وهو 4 . فالاحتمال المطلوب يساوي 4/20=1/5.

أو كان يمكن الاكتفاء بعشر «حالات» تتضمن كل منها نقطتين لهما، إذا أغفلنا ترتيب الحرفين فيهما، المدلول نفسه. فمثلا، W_1 R_1 وR_1 W_1 تعنيان في الناتج النهائي الحصول على بذرتين هما W_1 و R_1 دون أخذ الترتيب الذي حصلنا فيه على W_1 أو R_1 في الاعتبار وطالما أن كلا من الحالات العشر تتضمن نقطتي عينة فلهما أفضليات متساوية وفرصة كل منهما هي 1/10. ومن بين هذه الحالات العشر الممكنة نجد حالتين ملائمتين فقط والاحتمال المطلوب يساوي 2/10=1/5، وهو الجواب نفسه الذي حصلنا عليه منذ قليل.

وقد يقول قائل لماذا لا نختصر إلى حالتين فقط فإما أن نحصل على زهرتين من اللون نفسه أو تكون الزهرتان من لونين مختلفين؟ فهناك حالتان ممكنتان أحدهما ملائمة والأخرى غير ملائمة والجواب حسب التعريف هو 1/2. وهو جواب مختلف عن الجوابين السابقين المتساويين، وخاطىء طبعا لأن أحد شرطي التعريف (٢ ـ ٢٠ ـ ١) غير متوفر. فالحالتان هنا متنافيتان فعلا ولكن فرصة إحداهما 4/20، بينما فرصة الأخرى 16/20. (تتضمن ست عشرة نقطة عينة) أي أن شرط الأفضليات المتساوية غير متوفر.

سـؤال

بالعودة إلى المثال (٥ ـ ١٣) لنعتبر كل حادثة من حوادث التجزئة حالة، فيكون لدينا إحدى عشرة حالة ممكنة. ولحساب احتمال الحادثة V نجد ثلاث حالات ملائمة ويكون الجواب 3/11 وهو جواب خاطىء. لماذا؟

(٢ ـ ١١) الاحتمال الاحصائي

قُذفت قطعة نقود، تبدو متوازنة ومتناظرة، مئة مرة، وسُجلت النتائج في الجدول (٢ ـ ٢) ، حيث سجلنا التكرار النسبي لظهور كل من وجهي الـ H والـT. وكما رأينا

في الفقـرة (٢ ـ ٢) فإن التكـرار النسبي سيميل إلى الاستقـرار حول قيمـة محددة عندمـا نستمر في تكـرار التجربة عـددا كبيرا من المرات. وفي الجدول (٢ ـ ٢) نجـد أن التكرار النسبي قريب من 1/2، وهذا ليس مفاجئا، فتناظر قطعـة النقود سيجعلنا نتوقع ظهور وجه الـH حوالي نفس عدد مرات ظهور وجه الـT.

جدول (٢ ـ ٢)

النتيجة	التكرار	التكرار النسبي الملحوظ	التكرار النسبي المتوقع على المدى المطويل من قطعة متزنة
H	56	0.56	0.50
T	44	0.44	0.50
المجموع	100	1.00	1.00

وفي تجربة أخرى، قُذف حجر نرد، يبدو متناظرا، 300 مرة، وسجل تكرارظهور كل من الأوجه الستة. فكانت النتائج كما في الجدول (٢ ـ ٣). ونلاحظ اقتراب التكرار النسبي لظهور كل من الأوجه الستة من القيمة 1/6. وهذه النتائج غير مفاجئة بدورها، طـالما أن حجر النـرد يبدو متنـاظرا ومتـزنـا. مما يقترح علينـا اعتبار التكـرار النسبي في الجدول (٢ ـ ٢)، تقـديرا أوليـا لاحتمال ظهور وجـه معين من وجهي قطعة النقـود عند قـذفها، واعتبـار التكرار النسبي، في الجدول (٢ ـ ٣)، لظهـور وجه معين من أوجـه حجر النرد تقريبا لاحتمال ظهور ذلك الوجه عند قذف حجر النرد.

وفي الحقيقة، يمكننـا، كما رأينا في الفقرة (٢ ـ ٢)، أن نفترض وجـود عدد p هو احتمال وجه الـH. وإذا بدت لنا القطعة متوازنة ومتناظرة تماما فيمكن بطريقة استنتاجية القول إن احتمال كل وجه هو 1/2. أما إذا لم تكن القطعة تامـة التناظر، كما هو الحال في الواقع العملي، فيمكـن اللجوء إلى التجربـة، فنقذف القطعـة عد دا كـافيا من المرات، ونسجل النتائج كما في الجدول (٢ ـ ٢)، ثم نعتبر التكرار النسبي لوجـه الـH كتقريب لقيمة p.

جدول (٢ ـ ٣)

التكرار النسبي المتوقع على المدى الطويل من حجر نرد متزن	التكرار النسبي	التكرار	النتيجة
0.1667	0.170	51	1
0.1667	0.180	54	2
0.1667	0.160	48	3
0.1667	0.170	51	4
0.1667	0.163	49	5
0.1667	0.157	47	6
1.0000	1.000	300	المجموع

وفي حالة حجر النرد يمكننا، عند افتراض تناظر الحجر تماما، القول بعدم وجود أفضلية لوجه على الآخر، وإن المنطق يدعو إلى الاستنتاج بأن احتمالات ظهور كل من الأوجه الستة ولنرمز لها بـ p_1، p_2، . . . ، p_6 متساوية وكل منها يساوي 1/6. ولما كان الحجر المتناظر تماما غير موجود إلا في مخيلتنا، ولا يمكن الوصول إلى صناعة حجر نرد متناظر تماما. إلا أنه يمكن أن تكون صناعة الحجر متقنة فيبدو لنا وكأنه متناظر تماما. وعندئذ سنستمر في اعتبار 1/6 قيمة تقريبية جيدة لكل من p_1، p_2، . . . ، p_6. ولو فرضنا الآن أن حجر النرد غير متوازن، وأنه من المؤكد أن أوجهه الستة لا تتمتع بفرص الظهور نفسها عند قذف الحجر، ففي هذه الحالة لا يزال ممكنا بالطبع افتراض وجود الأعداد p_1، p_2، . . . ، p_6، إلا أنه لا يمكن تقدير أي منها بطريقة استنتاجية. ولا بد من اللجوء إلى التجربة فنقذف الحجر عددا كبيرا من المرات ثم نعتبر التكرار النسبي لظهور كل وجه تقديرا لاحتمال ظهور ذلك الوجه.

وكما رأينا في مطلع هذا الفصل، فإن معظم الظواهر التي نواجهها في حياتنا العملية، هي من النوع الذي لا يمكن التنبؤ بنتائجه سلفا. فلنفرض، مثلا، أننا نريد تقدير احتمال أن يكون أول طفل سيولد في مدينة الرياض ذكرا. مثل هذه الحادثة

تصادفية، ويمكننا، استنادا إلى ظاهرة الانتظام الاحصائي، أن نفترض وجود عدد p يسمى احتمالها. ولا يمكن، في الواقع العملي، معرفة p تماما، إلا أنه يمكن تقديرها بصورة جيدة. ولو عدنا، مثلا، إلى سجلات الولادات في مدينة الرياض لفترة سنوات خلت، فوجدنا أن 51% من الولادات كانت ذكورا، فيكون معقولا أن نعتبر 0.51 قيمة تقريبية لـ p. والاحتمال الذي نحصل عليه بهذه الطريقة يسمى أحيانا الاحتمال الاحصائي.

تمارين (٢ ـ ٣)

١) يتضمن صندوق ست قطع حمراء من الورق مرقمة من 1 إلى 6، وكذلك ست قطع بيضاء من الورق مرقمة من 1 إلى 6. وجميع القطع من الحجم نفسه. سحبنا قطعة بصورة عشوائية. ما احتمال أن تكون:
ا ـ حمراء؟ ب ـ عليها رقم زوجي؟ جـ ـ حمراء وعليها رقم زوجي؟
د ـ حمراء أو عليها رقم زوجي؟ هـ ـ ليست حمراء وليس عليها رقم زوجي؟

٢) قذفنا حجري نرد. لتكن A حادثة الحصول على عدد فردي من القطعة الأولى، و B حادثة الحصول على عدد أكبر من 2 من القطعة الثانية.
احسب $P(A)$، $P(B)$، $P(AB)$، $P(A \cup B)$.

٣) إذا كانت احتمالات أن تتلقى عيادة طبيب 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 أو أكثر من المكالمات الهاتفية خلال ساعة الظهر هي، على الترتيب، 0.001، 0.006، 022.، 052.، 0.091، 0.128، 0.149، 0.551. فما هو احتمال أنها ستتلقى:
ا ـ أقل من 5 مكالمات؟ ب ـ ثلاث مكالمات على الأقل؟
جـ ـ من 2 إلى 4 مكالمات؟

٤) احتمالات تقويم هيئة المواصفات والمقاييس لأداة مبتكرة للوقاية من التلوث بغاز السيارات، بأنها رديئة، مقبولة، جيدة، ممتازة، هي على الترتيب: 0.12، 0.23،

0.45، 0.20. احسب احتمال أن يكون تقويمها للأداة:
ا ـ رديئة أو مقبولة، ب ـ على الأقل مقبولة،
جـ ـ جيدة أو ممتازة، د ـ مقبولة أو جيدة.

٥) يعلم صاحب مطعم من خبرته السابقة أن احتمالات أن يطلب زبون بعد تناول الغداء، بوظة، معمولا، فطاير بالجوز، فطاير بالقشطة، عصير برتقال، بطيخا، هي، على الترتيب، 0.13، 0.24، 0.09، 0.11، 0.05، 0.07. ما هو احتمال أن يطلب زبون ما يلي:
أ ـ بوظة أو عصير برتقال؟
ب ـ فطاير بالجوز أو فطاير بالقشطة أو معمول؟
جـ ـ بوظة أو معمولا أو عصير برتقال أو بطيخا؟
د ـ لا شيء مما ذكر؟
علما أن الزبون يقدم رغبة واحدة فقط.

٦) في التمرين ٧ من مجموعة التمارين (٢ ـ ١) لنفرض أن لكل نقطة من فضاء العينة الاحتمال نفسه (نموذج الاحتمالات المتساوية) احسب احتمالات الحوادث التالية:
أ ـ A، T، R، V.
ب ـ احسب احتمالات الحوادث الواردة في الجزء جـ من ذلك التمرين.

٧) بالاشارة إلى التمرين ٢ أعلاه، لتكن C حادثة الحصول على مجموع زوجي. احسب $P(C)$، $P(AC)$، $P(BC)$، $P(A\cup C)$، $P(ABC)$، $P(A\cup B\cup C)$

٨) في التمرين ١ من مجموعة التمارين (٢ ـ ١). إذا فرضنا أن حجر النرد وقطعة النقود يتصفان بالتناظر التام.
احسب احتمالات الحوادث A، B، C، D، E، F، G.

٩) في التمرين ٢ من مجموعة التمارين (٢ ـ ١). احسب احتمالات الحوادث A، B، C، D، E، بفرض أن قطعة النقود متناظرة.

١٠) في السوق عرض مخفض لبيع مجموعة من المعلبات التي لا عنوان عليها. ويحوي هذا البيع 200 علبة طماطم، 300 علبة سبانخ، 100 علبة مشمش، و400 علبة كمثرى، فما احتمال أن أول مبتاع سيحصل على علبة خضروات؟ علبة فواكه؟ علبة كمثرى؟

١١) في مسح صحي تناول عينة ضخمة من السكان في بلد معين تم تشخيص الاصابة أو عدم الاصابة بالديدان. وكانت النتائج كما هو مبين في الجدول التالي:

نسبة المصابين بالديدان في هذه الشريحة من العمر	النسبة من العينة في هذه الشريحة من العمر	شريحة العمر (بالسنوات)
0.09	0.20	0 - 4
0.25	0.18	5 - 9
0.31	0.14	10 - 14
0.62	0.09	15 - 19
0.49	0.13	20 - 25
0.41	0.10	30 - 39
0.41	0.07	40 - 49
0.40	0.04	50 - 59
0.28	0.05	60 +

إذا اخترنا عشوائيا شخصا من هذه العينة السكانية فما احتمال أن يكون (أو أن تكون):

ا ـ من 15 سنة إلى 19 سنة؟

ب ـ أقل من 15 سنة؟

جـ ـ من 15 سنة إلى 29 سنة؟

د ـ من 15 إلى 19 ومصاب بالديدان؟

هـ ـ من 15 إلى 29 ومصاب بالديدان

و ـ من 15 إلى 29 وغير مصاب بالديدان؟
ز ـ مصاب بالديدان؟
ح ـ ما هو احتمال أن شخصا من 15 إلى 29 مصاب بالديدان؟

١٢) لأغراض عدة يُقال إن الطفل خديج إذا كان وزنه عند الولادة 5.5 باوند أو أقل مستخدما البيان الاحصائي المعطى في التمرين ١٥ من مجموعة التمارين (١ ـ ١)، احسب:
أ ـ احتمال أن طفلا مولودا عام 1965 في جنوب غرب انكلترا مسجل خديجا.
ب ـ الوزن عند الولادة الذي يجري تخطيه باحتمال 0.025
جـ ـ الوزن عند الولادة الذي يجري تخطيه باحتمال 0.975.

(٢ ـ ١٢) طرق العد

في المثالين (٢ ـ ١٥) و (٢ ـ ١٦) استطعنا بجهد مقبول وضع قائمة تتضمن كافة نقاط العينة. ولكن ماذا لو أن عدد النتائج الممكنة كان كبيرا جدا؟ لا شك أن اللجوء إلى حصر النتائج واحدة فأخرى سيكون شاقا، وغالبا ما يكون من الناحية العملية مستحيلا. وسنستعرض الآن عددا من القواعد المفيدة والسهلة التي يمكن استخدامها للوصول بسرعة ويسر إلى عدد الحالات الممكنة وعدد الحالات الملائمة التي وردت في التعريف التقليدي لاحتمال حادثة.

(٢ ـ ١٢ ـ ١) قاعدة الـ $m \times n$

إذا أمكن استكمال مرحلة أولى من عمل معين بـ m طريقة، ومن أجل كل من هذه الطرق أمكن لمرحلة ثانية أن تتم بـn طريقة، فالعدد الكلي للأشكال المختلفة لاستكمال العمل بمرحلتيه هو $m \times n$ طريقة.

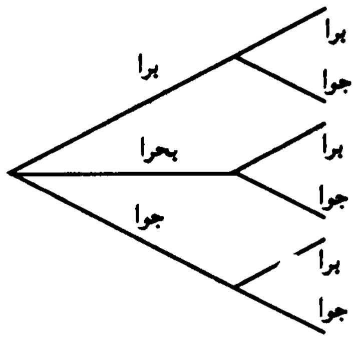
مثال (٢ ـ ١٧)

يمكن لحاج أن يصل جدة برا أو جوا أو بحرا وبعد إتمام مناسك الحج يمكنه الوصول إلى المدينة المنورة برا أو جوا. فبكم طريقة مختلفة يمكن لحاج إتمام مناسك الحج وزيارة المسجد النبوي الشريف؟

المرحلـة الأولى يمكن أن تتم بثـلاث طـرق، ومـن أجل كل منهـا يمكن أن تتم المرحلة ا لثانية بطريقتين، فعدد الطرق المختلفة الممكنة،

$$3 \times 2 = 6$$

ويوضح المخطط في الشكل (٢ ـ ٩) الطرق الست الممكنة.



شكل (٢ ـ ٩)

مثال (٢ ـ ١٨)

بكم طريقة يمكن كتابة زوج مرتب عنصره الأول أحد الأعداد 1,2,3,4,5,6 وعنصره الثاني أحد الحروف a,b,c,d,e؟

الجواب $6 \times 5 = 30$

ويبين الجدول (٢ ـ ٤) الأزواج المرتبة الثلاثين بالتفصيل.

جدول (٢ ـ ٤)

	1	2	3	4	5	6
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)	(a,4)	(a,5)	(a,b)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)	(b,4)	(b,5)	(b,6)
c	(c,1)	(c,2)	(c,3)	(c,4)	(c,5)	(c,6)
d	(d,1)	(d,2)	(d,3)	(d,4)	(d,5)	(d,6)
e	(e,1)	(e,2)	(e,3)	(e,4)	(e,5)	(e,6)

ويمكن تعميم قاعدة الـ $m \times n$ إلى عمل يتضمن k من المراحل المتتالية. ولو فرضنا أنه يمكن إتمام الرحلة الأولى بـ n_1 طريقة والمرحلة الثانية بـ n_2 طريقة، . . . ، والمرحلة الـ k بـ n_k طريقة فيكون عدد الطرق المختلفة لاتمام العمل بجميع مراحله هو

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$$

(٢ ـ ١٢ ـ ٢) المتبادلات

يسمى ترتيب r من الأشياء المتميزة «متبادلة». لنفرض أن لدينا n شيئا متميزا ونريد اختيار r شيئا منها ثم ترتيبها في متبادلة، فبكم طريقة مختلفة يمكن القيام بذلك؟

ونرمز عادة لعدد الطرق هذا بـ P_r^n ويقرأ «عدد متبادلات n شيئا مأخوذ r منها في وقت واحد».

نظرية المتبادلات

$$P_r^n = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

برهان

المسألة المطروحة مكافئة لمسألة شغل r من المواقع المحددة المتتالية وذلك بأن نضع في كل موقع شيئا نختاره من بين الأشياء الـ n المتوفرة. ومثل هذا العمل يتضمن بوضوح r مرحلة. فالمرحلة الأولى شغل الموقع الأول، والمرحلة الثانية شغل الموقع الثاني وهكذا. . . والمرحلة الأخيرة شغل الموقع الـ r. ويمكن، بوضوح، شغل الموقع الأول بأي شيء نختاره من بين الأشياء الـ n المتوفرة، أي بـ n طريقة مختلفة. ويمكن شغل الموقع الثاني باختيار أي شيء من الأشياء الـ $n-1$ المتبقية، أي بـ $n-1$ طريقة مختلفة وهكذا، . . . ، والموقع الأخير يمكن شغله بـ $n-(r-1) = n-r+1$ طريقة مختلفة. ووفقا لقاعدة الـ $m \times n$ المعممة نجد المطلوب.

مثال (٢ ـ ١٩)

اشتريت مرجعا من خمسة أجزاء. وعلى رف من رفوف مكتبتك في المنزل لا يتوفر إلا ثلاثة أمكنة. بكم طريقة مختلفة يمكنك شغل هذه الأماكن الثلاثة المتوفرة بثلاثة أجزاء تختارها من الأجزاء الخمسة؟

الحـــل

عدد الطرق المختلفة لشغل الأماكن الثلاثة هو عدد متبادلات خمسة أشياء مأخوذ ثلاث منهـا في وقت واحد أي P_3^5 . ولحساب P_3^5 نطبق نظريـة المتبادلات ، فنحسب القوس الأخيرة $(n - r + 1)$حيث $n = 5$ ، $r = 3$ لنجد

$$n - r + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$$

ويكون P_3^5 مساويا لجداء الأعداد الصحيحة المتناقصة بدءا من 5 وانتهاء بـ 3، أي

$$P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $r = n$ ، نطبق نظرية المتبادلات بوضع $r = n$ ، نجد أن عدد متبادلات n شيئا مأخوذة جميعها في وقت واحد هو

$$P_n^n = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

ونرمز لمثل هذا الجداء بـ $n!$ ويُقرأ «مضروب n ».

وهذا يعني أن عدد الطـرق المختلفة لترتيب n شيئا متميزًا هو $n!$. وباستخدام رمز المضروب يمكن التعبير عن P_r^n كما يلي :

$$\begin{aligned} P_r^n &= n(n-1)\ldots(n-r+1) \\ &= \frac{[n(n-1)\ldots(n-r+1)]\,[(n-r)\,(n-r-1)\ldots \times 2 \times 1]}{[(n-r)(n-r-1)\ldots \times 2 \times 1]} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

ولو عوضنا r بـ n لوجدنا

$$P_n^n = \frac{n!}{0!}$$

ويفتـقر مضروب الصفـر، $(0!)$، إلى أي مغـزى عملي، ولكن رأينـا قبـل قليـل أن $P_n^n = n!$ وهذا يؤدي إلى أنه لابد أن يكون $n! = \frac{n!}{0!}$ ، مما يقترح علينا أن نصطلح على اعتبار $0!$ مساويا للواحد $(0! = 1)$.

(٢ ـ ١٢ ـ ٣) المتوافقات

إذا كـان لديـنا مجموعـة تتضمـن n عنصرا فاختيـار مجموعة جزئية من r عنصرا ($r \leq n$) يسمى متوافقة. وعدد المجموعات الجزئية المختلفة التي يمكن اختيارها يسمى «عدد متوافقات n شيئا مأخوذ r منها في وقت واحد». ونرمز له عادة بـ C_r^n أو $\binom{n}{r}$، ونقرؤها «n متوافقات r» أو «n اختيار r». وتجدر هنا مـلاحظة أن لا أهميـة لترتيب اختيار العناصر. فالمجموعة الجزئية من r عنصرا نختارها من بين n عنصرا ستبقى بدون تغيير طـالما تضمنت العنـاصر نفسها، وذلك بصرف النظـر عن الترتيب الـذي تم فيـه اختيار هذه العناصر.

ومن الواضح أنـه يجب أن تكون هناك عـلاقة بين P_r^n، حيث نختـار «اختيارا مرتباً»، وC_r^n إذ لا أهمية لترتيب الاختيار. وللوصول إلى هـذه العلاقة نحاول حساب P_r^n بالطريقـة التالية، فنقول إنـه يمكن الوصول إلى P_r^n على مرحلتين، حيـث نختار في المرحلة الأولى جميع متوافقات n شيئا مأخوذ r منها في وقت واحـد، ولنرمز لعـدد هذه المتوافقات بـ C_r^n كما أسلفنـا، ثم نرتب عنـاصر كل متـوافقة فـور اختيارهـا بجميع الأشكال الممكنة، ونعلم أن عدد مثل هـذه الترتيبات المختلفة أو المتبادلات يساوي $r!$. والعملية هنا تتألف إذا مـن مرحلتين، أولاهما يمكن أن تتم بـ C_r^n طريقة، ومن أجل كل من هذه الطرق يمكن أن تتم المرحلة الثانية بـ $r!$ طريقة. وحسب قاعدة الـ $m \times n$ يمكن إتمام العملية المطلوبة بـ $C_r^n \times r!$. وهذا يعني أن

$$P_r^n = C_r^n \times r!$$

أو

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وبذلك نكون قد برهنا النظرية التالية:

نظرية المتوافقات

عدد متوافقات n شيئا مأخوذ r منها في وقت واحد هو:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال (٢ ـ ٢٠)

في المثـال (٢ ـ ١٩) بكم طـريقة يمكنك اختيـار ثـلاثة منهـا لوضعهـا على رف المكتبة؟

الحـــل

يقتصر المطلوب على اختيار ثـلاثة أجزاء من بين خمسة دون أهميـة للترتيب الذي حصل فيه الاختيار. فالاختيار سيكون نفسه، مثلا، إذا بدأنا باختيار الجزء الخامس ثم اخترنا بعـده الثالث ثم الأول، أو بـدأنا باختيـار الجزء الأول ثم اخترنا بعـده الثالث ثم ختمنا بـالخامس، . . . ، وهكذا يمكن أن نمضي فنذكـر ستة ترتيبات مختلفـة لاختيار هذه الأجزاء بعينها، هي على وجه التحديد:

$$(1,3,5); (1,5,3); (3,1,5); (3,5,1); (5,3,1); (5,1,3)$$

ومن حيث مضمون الاختيار (وهو ما يقتصر عليـه اهتمامنا في المتوافقات) فإن الترتيبات الستـة تـؤدي إلى الاختيار نفســه، أو إلى المتـوافقـة نفسها. وهـذا يـوضح أن كل ست متبادلات قد اختزلت إلى متوافقة واحدة. وبذلك يكون العدد المطلوب هو

$$\frac{P_3^5}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

وسنجد الجواب نفسه بتطبيق نظرية المتوافقات، السابقة فنكتب:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{(\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}) \times 2!}$$
$$= \frac{5 \times 4}{2!} = \frac{20}{2 \times 1} = 10$$

ملاحظة

يمثل C_r^n، كما رأينا، عدد المجموعات الجزئية من r عنصرا التي يمكن اختيارها من مجموعة تتضمن n عنصرا. ولكن اختيار مجموعة جزئية من r عنصرا يعني عمليـا تقسيم المجموعـة التي نختار منهـا إلى مجموعتين، إحـداهما تتضمن الـ r عنصرا التي اختيرت، والأخرى تتضمن الـ $n - r$ عنصرا المتبقية. وبـالتالي فإن $C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ تجيب على سؤال آخر يمكن صياغته على الشكل التالي:

بكم طريقـة يمكن تقسيم n شيئـا متميـزا إلى قسمين أحـدهما يتضمن n_1 شيئا والآخر يتضمن n_2 شيئا، حيث $n_1 + n_2 = n$؟

والجواب هو

$$C^{n}_{n_1} = C^{n}_{n_2} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!}$$

والغاية من طرح المسألة بهذه الصيغة هي قابليتها للتعميم بسهولة. فبكم طريقة يمكن تقسيم n شيئا متميزا إلى ثلاثة أقسام أولها يتضمن n_1 شيئا والثاني يتضن n_2 شيئا والثالث يتضمن n_3 شيئا حيث $n_1 + n_2 + n_3 = n$؟ والجواب ببساطة هو

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}$$

ويمكن برهان ذلك بأن نقوم بعملية التقسيم المطلوب على مرحلتين. فنقسم الأشياء المتميزة الـ n إلى قسمين أحدهما يتضمن n_1 شيئا والآخر يتضمن الـ $n_2 + n_3$ شيئا المتبقية. ثم نقوم في المرحلة الثانية بتقسيم الـ $n_2 + n_3$ شيئا إلى قسمين أحدهما يتضمن n_2 شيئا والآخر يتضمن n_3 شيئا. ومما سبق نعلم أن عدد الطرق المختلفة لاتمام المرحلة الأولى هو $\frac{n!}{n_1!(n_2+n_3)!}$. وعدد الطرق المختلفة لاتمام المرحلة الثانية هو $\frac{(n_2+n_3)!}{n_2!\ n_3!}$ وعدد الطرق المختلفة لاتمام عملية التقسيم بمرحلتيها هو حسب قاعدة الـ $m \times n$:

$$\frac{n!}{n_1!(n_2+n_3)!} \times \frac{(n_2+n_3)!}{n_2!\ n_3!} = \frac{n!}{n_1!\ n_2!\ n_3!}$$

ويمكن تعميم هذه النتيجة فنقول أن عدد طرق تقسيم n شيئا متميزا إلى k قسما، يتضمن القسم الأول n_1 شيئا منها، ويتضمن القسم الثاني n_2 شيئا وهكذا، . . . ، ويتضمن الجزء الأخير n_k شيئا، حيث $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$، هو

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2! \dots n_k!}$$

(٢ ـ ١٢ ـ ٤) متبادلات n من الأشياء غير المتميزة

وللقاعدة التي توصلنا إليها في ختام الملاحظة السابقة تطبيق هام. فلنفرض أن لدينا n من الأشياء غير المتميزة، حيث n_1 منها أشياء متطابقة ومن النوع نفسه، و n_2

منها متطابقة ومن النوع نفسه، وهكذا . . . ، وn_k منها متطابقة ومن النوع نفسه، فبكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب هذه الأشياء؟ أي ما هو عدد متبادلات الأشياء الـn مأخوذة جميعها في وقت واحد؟

لو عدنا إلى تصور عملية الترتيب كعملية مكافئة لوضع الأشياء الـn في n من المواقع المتتالية لأمكننا أن نقول ما يلي:

سنحصل على متبادلة لهذه الأشياء الـn عندما نقسم المواقع الـn إلى k قسما، أولها يتضمن n_1 موقعا نضع فيها أشياء النوع الأول، وثانيها يتضمن n_2 موقعا نشغلها بأشياء النوع الثاني، وهكذا . . . ، وآخرها يتضمن الـn_k موقعا الباقية لتأوي إليها أشياء النوع الأخير. وإذ لا تتغير المتبادلة عندما يتبادل شيئان من النوع نفسه موقعيهما، فإنها تتغير في حالة واحدة فقط وهي عندما نقوم بنقل شيء من نوع معين إلى موقع شيء من نوع آخر. وعدد المتبادلات المختلفة هو إذا عدد الطرق المختلفة لعملية التقسيم تلك، أي

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \dots\ n_k!}$$

(٢ ـ ٢١)مثال

ما عدد متبادلات حروف كلمة Statistics؟

تتضمن الكلمة عشرة حروف. ويتكرر الحرف s ثلاث مرات والحرف t ثلاث مرات، والحرف a مرة، والحرف i مرتين، والحرف c مرة واحدة.

الحــل

$$\text{عدد المتبادلات} = \frac{10!}{3!\ 3!\ 2!\ 1!\ 1!} = 50400$$

مثال (٢ ـ ٢٢)

تريد هيئة للرقابة والتفتيش تشكيل ثلاث لجان لدراسة موضوع الأسعار في صناعة معيّنة. ويتوافر عندها 84 مفتشا. فبكم طريقة يمكن تشكيل اللجان الثلاث إذا كانت ستتضمن 17، 19و 27 مفتشا. وأنه لا يمكن لمفتش أن يشترك في أكثر من لجنة واحدة؟

الحـــل

العدد المطلوب هو عدد إمكانات تقسيم الـ 84 مفتشا إلى أربع مجموعات إحداها تتضمن 17 مفتشا، والثانية تتضمن 19 مفتشا، والثالثة تتضمن 27 مفتشا، والرابعة تتضمن الـ 21 مفتشا الباقين. أي

$$\frac{84!}{17!\ 19!\ 27!\ 21!}$$

مثال (٢ ـ ٢٣)

من حقيبة تحوي 7 كرات سود و 5 كرات بيض، سحبنا عشوائيا خمس كرات فما احتمال أن تتضمن كرتين بيضاوين؟

الحـــل

عدد الحالات الممكنة هو C_5^{12} . وعدد الحالات الملائمة هو عدد طرق اختيار كرتين بيضاوين من الكرات الخمس البيض، مضروبا بعدد طرق اختيار الكرات السود الباقية من بين الكرات السود السبع المتوفرة. أي $C_2^5 \times C_3^7$

ويكون الاحتمال المطلوب:

$$\frac{\left(C_2^5 \times C_3^7\right)}{C_5^{12}} = \frac{5!}{2!\ 3!} \times \frac{7!}{3!\ 4!} + \frac{12!}{5!\ 7!}$$

$$= \frac{4 \times 5}{2} \times \frac{5 \times 6 \times 7}{2 \times 3} + \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$= (10 \times 35) + 792 = \frac{350}{792} = 0.442$$

مثال (٢ ـ ٢٤)

في المثال (٢ ـ ١٦) احسب الاحتمال المطلوب بتطبيق نموذج الاحتمالات المتساوية.

الحـــل

عدد الحالات الممكنة هو $10 = C_2^5$. وعدد الحالات الملائمة هو بوضوح اثنان. البذرتان اللتان تنتجان زهورا حمرا أو البذرتان اللتان تنتجان زهورا بيضا) ويكون الاحتمال المطلوب

$$\frac{2}{10} = 0.2$$

تمارين (٢ ـ ٤)

١) قاعة للاحتفالات فيها أربعة أبواب. بكم طريقة مختلفة يمكنك الدخول إلى القاعة والخروج منها؟

٢) يذاكر أحمد كل يوم إما 0 أو 1 أو 2 ساعة. بكم طريقة يمكن لأحمد أن يذاكر ما مجموعه أربع ساعات في ثلاثة أيام متتالية؟

٣) توجد أربعة طرق A، B، C، D بين منزلك والجامعة. إذا كان للطريق A اتجاه واحد هو من الجامعة إلى المنزل وللطريق D اتجاه واحد هو من المنزل إلى الجامعة.

ا ـ ارسم رسما توضيحيا يبين عدد الامكانات المختلفة للقيام برحلتك اليومية إلى الجامعة ذهابا وإيابا.

ب ـ شريطة أن يختلف طريقا الذهاب والاياب كم يصبح عدد الامكانات المختلفة للقيام برحلتك؟

٤) بكم طريقة مختلفة يمكنك ترتيب خمسة من كتبك الجامعية على رف مكتبتك؟

٥) بكم طريقة يمكن تشكيل عدد من أربعة أرقام:

ا ـ إذا كان التكرار ممكنا؟

ب ـ إذا لم يكن التكرار ممكنا؟

٦) ما عدد أرقام الهواتف الممكنة المؤلفة من سبعة منازل عشرية إذا كانت المنزلة الأخيرة 3 أو 4؟

٧) إذا توافر عشرة لاعبين لكرة سلة فكم فريقا من خمسة لاعبين يمكن تشكيله إذا أمكن لكل لاعب أن يقوم بأي دور يوكل إليه؟

٨) توجد ستة مواضيع تعبير مختلفة يختار الطالب في ١٠١ نجل واحدا منها للكتابة فيه. فبكم طريقة يمكن لأربعة طلاب في هذا المقرر أن يختاروا مواضيعهم بحيث:
أ ـ لا يختار طالبان الموضوع نفسه.
ب ـ لا توجد أية قيود على اختيار المواضيع.

٩) بكم طريقة يمكن لمدير محطة تليفزيون أن يوزع ستة إعلانات تجارية على ستة أوقات مخصصة للدعاية أثناء إذاعة مباراة في كرة القدم؟

١٠) فصل يتضمن عشرين طالبا، منهم 15 من المستوى الأول، و5 من المستوى الثاني. بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاثة طلاب بحيث:
ا ـ تتضمن واحدا من المستوى الثاني واثنين من المستوى الأول؟
ب ـ تتضمن واحدا على الأقل من المستوى الثاني؟

١١) مجموعة من خمس عشرة ساعة فيها ساعة واحدة معيبة. بكم طريقة يمكن أن نختار منها ثلاث ساعات بحيث:
أ ـ لا تتضمن الساعة المعيبة؟
ب ـ تتضمن الساعة المعيبة؟

١٢) بالاشارة إلى التمرين السابق لنفرض أن المجموعة تتضمن ساعتين معيبتين، فبكم طريقة يمكن اختيار ثلاث ساعات بحيث تكون:
ا ـ جميعها سليمة؟
ب ـ واحدة منها معيبة؟

١٣) تحقق أن

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \quad , \quad \binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

١٤) بالاشارة إلى التمرين ٩، بكم طريقة يمكن للمدير شغل ستة أوقات للاعلانات التجارية إذا كان لديه أربعة إعلانات مختلفة ويتكرر أحدها ثلاث مرات؟

١٥) ما هو عدد التباديل المختلفة لحروف كلمة INDEPENDENCE؟

١٦) يتضمن اختبار «صح ـ خطأ» ستة عشرة سؤالا. احسب عدد الطرق المختلفة لإعداد ورقة الإجابة. احسب عدد الطرق التي يمكن أن نختار فيها:
ا ـ ثمانية أسئلة للإجابة عليها بـ «صح» وثمانية للإجابة عليها ب «خطأ».
ب ـ عشرة أسئلة للإجابة عليها بـ «صح» وستة للإجابة عليها بـ «خطأ».

١٧) توجد في متاهة أربعة تقاطعات. وعند كل منها يمكن لفأر أن يذهب يمينا أو يسارا أو على خط مستقيم. ما احتمال اجتياز الفأر للمتاهة عند أول محاولة، إذا علمت أنه يوجد طريق واحد ممكن بين طرفي المتاهة؟

١٨) قدمنا لقرد اثنتي عشرة قطعة تتضمن ثلاثة مربعات، وثلاثة مستطيلات، وثلاثة مثلثات، وثلاث دوائر. إذا رتب بنجاح ثلاثا من الشكل نفسه، ثم ثلاثا من شكل ثان، ثم ثلاثا من شكل ثالث، وثلاثا من الشكل الرابع المتبقي. ما احتمال هذه الحادثة تحت الفرض بأن القرد لا يميز بالفعل بين الأشكال الهندسية؟
١٩) بالاشارة إلى التمرين ٦، ما احتمال أن يكون رقم هاتفك 4343434؟

٢٠) بالاشارة إلى التمرين ١٠، إذا اخترنا لجنة بصورة عشوائية فما هو احتمال أن تتضمن واحدا على الأقل من المستوى الثاني؟

٢١) بالاشارة إلى التمرين ١١، لنفرض أننا اخترنا عشوائيا ثلاث ساعات فما احتمال أن تتضمن الساعة المعيبة؟

٢٢) بالاشارة إلى التمرين ١٢، لنفرض أننا اخترنا عشوائيا ثلاث ساعات فما احتمال أن تكون جميعها سليمة؟

(٢ ـ ١٣) الاحتمال الشرطي

عندما تستيقظ صبيحة يوم من أيام فصل الشتاء، وتنظر إلى السماء لتجدها ملبدة بالغيوم، فسيكون احتمال هطول المطر في ذلك اليوم أقوى مما لو وجدت سحابا متفرقا. ولو رمزنا لحادثة «هطول المطر» بـ A، ولحادثة «السماء ملبدة بالغيوم» بـ B. ورمزنا بـ $P(A|B)$ لاحتمال A علما أن B قد وقعت، أي احتمال هطول المطر علما بأن السماء ملبدة بالغيوم، فإن $P(A|B)$ سيكون أكبر من $P(A)$، وهذا بدوره أكبر من $P(A|\bar{B})$. فمعرفتنا المسبقة بأن السماء غائمة، تعني أن الفرصة مهيأة بمشيئة الله لسقوط المطر، مما يزيد من احتمال A. ويخفض هذا الاحتمال معرفتنا المسبقة بأن السماء صافية. ويسمى $P(A|B)$ الاحتمال الشرطي لـ A علما أن B قد وقعت.

ويوضح هذا المثال أن الحوادث قد تكون، بصورة عامة، على صلة ببعضها، بمعنى أن وقوع حادثة قد يؤثر زيادة أو نقصانا في احتمال وقوع حادثة أخرى. ومن هنا تأتي أهمية الاحتمال الشرطي. ولو وجدنا أن وقوع B لم يؤثر لا زيادة ولا نقصانا في احتمال وقوع A ، أي أن $P(A|B) = P(A)$، فسنستنتج بلا شك أن لا صلة للحادثتين ببعضهما من الناحية الاحتمالية، أو أنهما مستقلتان احتماليا. وسنتعرض لمفهوم الاستقلال في فقرة قادمة.

مثال (٢ ـ ٢٥)

قذفنا حجر نرد متوازن، ولتكن:

A_1: حادثة الحصول على 2،

A_2: حادثة الحصول على عدد أقل من 4،

A_3: حادثة الحصول على عدد أقل من 5،

B: حادثة الحصول على عدد زوجي.

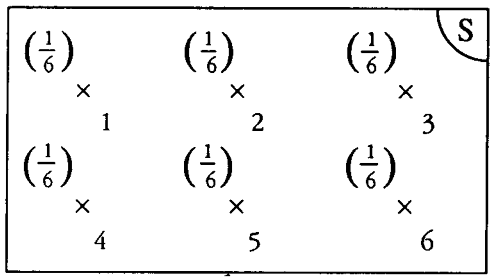
احسب $P(A_1|B)$، $P(A_2|B)$، $P(A_3|B)$

الحـــل

يتضمن فضاء العينة ست نقاط. وطالما أن الحجر متوازن فلا توجد أفضلية لوجه

على آخر، وحصة كل نقطة عينة هي 1/6، كما هو موضح في الشكل (٢ ـ ١٠). ومن السهل رؤية أن:

$$P(A_1) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(A_2) = \frac{1}{2}$$
$$P(A_3) = \frac{2}{3} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

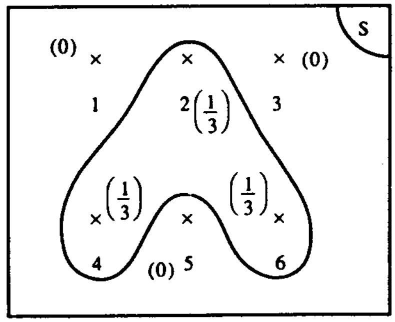


شكل (٢ ـ ١٠): النموذج غير الشرطي

لنفرض الآن أن الشخص الـذي قذف حجر النرد أفادنـا أن النتيجة التي حصل عليها كانت زوجية، أي أن الحادثة B قد وقعت.

ولنستعرض آثار هـذه المعلومات، التي توفـرت لنا مسبقا، على الاحتمالات التي حسبناها أعلاه دون أي شروط مسبقة. فنقول أولا إنه لابد من بناء نموذج احتمالي جديد يأخذ في الاعتبـار حقيقة أن B قد وقعت، وأن $P(B)$ الآن هو الواحـد. وفي ظل هذه الحقيقة لم تعد النتائج الممكنة ستة، وإنما أصبحت ثلاثا فقط. فهي إما 2 أو 4 أو 6. أما النتائج 1، 3، 5 فأصبحت مستحيلة. ولا يجوز عنـد بناء النموذج الجديـد أن نمنحها حصة غير الصفر. ونحن هنا أمام فضاء جديد يسمى الفضاء الشرطي، وإذ استخدمنا الحرف P رمزا لـدالة الاحتمال في الفضاء غير الشرطي، فمن المستحسن استخدام الـرمز P_B لدالـة الاحتمال في الفضاء الشرطـي. وهي تذكـرنا أن الاحتمالات محسـوبة الآن على أساس أن الحادثة B قد وقعت. ولكن ما هي الاحتمالات التي تخصصها الدالة P_B لكل من نقاط العينة الستة؟ من الواضح أولا أن

$$P_B(\{1\}) = P_B(\{3\}) = P_B(\{5\}) = 0$$



شكل (٢ ـ ١١): الفضاء الشرطي والنموذج المقام عليه

ومجموع الاحتمالات أو الحصص التي كانت الدالة P تمنحها لهذه النقاط، ويساوي النصف، يجب أن توزعه P_B على النقاط 2، 4، 6. فكيف تتم عملية التوزيع هذه؟ من الواضح أن كل نقطة من هذه النقاط ينبغي أن يزداد احتمالها بصورة تتناسب طردا مع الاحتمال الذي خصصته لها الدالة P. ولو أن P خصصت لنقطة ω_i، مثلا، ضعف ما خصصته لنقطة أخرى، ω_j، فإن حصة ω_i من الزيادة ينبغي لها أن تكون ضعف حصة ω_j منها. وفي مثالنا هنا حيث خصصت P احتمالات متساوية لكل من 2 ، 4 ، 6 ينبغي أن توزع P_B النصف المتوفر بالتساوي على هذه النقاط ليصبح الاحتمال الجديد لكل منها 1/3 .

أي
$$P_B(\{2\}) = P_B(\{4\}) = P_B(\{6\}) = \frac{1}{3}$$

وهكذا تقيم P_B على فضاء العينة S نموذجا جديدا هو النموذج الشرطي، [انظر الشكل (٢ـ١١)] ويكون:

$$P(A_1|B) = P_B(A_1) = P_B(\{2\}) = \frac{1}{3} > P(A_1) ,$$

$$P(A_2|B) = P_B(A_2) = P_B(\{2\}) = \frac{1}{3} < P(A_1) ,$$

$$P(A_3|B) = P_B(A_3) = P_B(\{2, 4\}) = P_B(\{2\}) + P_B(\{4\}) ,$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = P(A_3)$$

تغيرت النتائج في ضوء الحقيقة التي عرفناها (حقيقة وقوع B)، فزاد احتمال A_1 من 1/6 إلى 1/3 ، وانخفض احتمال A_2 من 1/2 إلى 1/3 ، أما احتمال A_3 فلم يتغير.

وقد لا تكون إقامة النموذج الشرطي الجديد الذي نستخدمه في حساب الاحتمالات الشرطية، عملا سهلا . وسنقدم الآن تعريفا للاحتمال الشرطي يسمح لنا باستخدام النموذج غير الشرطي لحساب الاحتمالات الشرطية بيسر وسهولة، دون الحاجة إلى كتابة أو ذكر الفضاء الشرطي والنموذج المقام عليه .

تعريف الاحتمال الشرطي

لتكن A ، B حادثتين في فضاء عينة S فعندئذ :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0 ;$$

أو

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0 .$$

وهذا التعريف يقول ببساطة: لحساب الاحتمال الشرطي لحادثة A علما أن حادثة أخرى B قد وقعت، نقسم احتمال وقوع A و B معا على احتمال وقوع B فنجد المطلوب.

لنعد الآن إلى المثال السابق ولنحسب :

$$P(A_1 B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A_1| B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

وبصورة مماثلة :

$$P(A_2 B) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A_2| B) = \frac{P(A_2 B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

و

$$P(A_3B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

وهي النتائج ذاتها التي وصلنا إليها باستخدام الفضاء الشرطي. إلا أننا في جميع الحسابات هنا لم نحتج حتى إلى التفكير بالفضاء الشرطي، ولم نستخدمه.

مثال (٢ـ٢٦)

صنّفنا مائة شخص وفقا للجنس (ذكر، أنثى) ووفقا للإصابة بمرض عمى الألوان (مصاب، غير مصاب). فكانت النتيجة كما في الجدول التالي:

	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	2	58	60
أنثى	1	39	40
المجموع	3	97	100

اخترنا عشوائيا شخصا واحدا ولتكن:

A حادثة الشخص مصاب بعمى الألوان،

B حادثة الشخص ذكر.

إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان ذكرا فما هو احتمال أن يكون مصابا؟ نعلم الآن أن الاختيار كان من 60 ذكرا بينهم اثنان من المصابين فالاحتمال المطلوب هو

$$P(A|B) = \frac{2}{60}$$

وبصورة مماثلة، إذا علمنا أن الشخص الذي اختير مصاب، فاحتمال كونه ذكرا، هو نسبة الذكور بين المصابين، والاختيار كان من ثلاثة مصابين، بينهم اثنان من الذكور، والاحتمال المطلوب هو:

$$P(B|A) = \frac{2}{3}$$

ولو حسبنا $P(A)$ ، $P(B)$، و$P(AB)$ ، ثم طبقنا التعريف لوجدنا :

$$P(AB) = \frac{2}{100} \quad , \quad P(B) = \frac{60}{100} \quad , \quad P(A) = \frac{3}{100}$$

ومنه :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/100}{60/100} = \frac{2}{60} ,$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2/100}{3/100} = \frac{2}{3} .$$

وهي الأجوبة السابقة نفسها .

مثال (٢ ـ ٢٧)

أظهر تصنيف لطلاب الجامعة أن 10% من الطلاب يدخنون ، وأن 30% من الطلاب يشربون القهوة ، وأن 5% من الطلاب يدخنون ويشربون القهوة .

أ ـ احسب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون ولا يشربون القهوة .
ب ـ من بين الطلاب المدخنين ما هي نسبة الطلاب الذي يشربون القهوة؟
جـ ـ من بين الطلاب الذين لا يشربون القهوة ما هي نسبة المدخنين؟

الحـــل

نلاحظ ، بصورة عامة ، أنه إذا كان لدينا مجتمع فيه N عنصرا ، ومن بينهم n عنصرا يتصف بصفة معينة C ، مثلا ، فإن نسبة العناصر في هذا المجتمع التي تتصف بالصفة C هي n/N. أو، كنسبة مئوية ، نقول إن n/N 100 بالمائة من هذا المجتمع يتصفون بالصفة C. ولكن n/N هي بالضبط احتمال أن نختار عشوائيا عنصرا من هذا المجتمع فنجده يتصف بالصفة C. (عدد الحالات الملائمة مقسوما على عدد الحالات الممكنة) . أي أن احتمال أن نختار، بصورة عشوائية ، عنصرا واحدا من هذا المجتمع فنجده متصفا بالصفة C هو ببساطة نسبة الذين يتصفون بالصفة C في المجتمع . وهذا يوضح كيف نترجم النسبة إلى احتمال وكيف نفسر الاحتمال كنسبة . الأمر الذي وجدنا مبرراته في الفقرات (٢ـ٢)، (٢ـ١٠) و (٢ـ١١) .

لنتصور أن التجربة هي اختيار عشوائي لطالب من طلاب الجامعة ولنرمز بـ

A لحادثة الطالب يدخن .

B لحادثة الطالب يشرب القهوة .

أ ـ لحساب النسبة المطلوبة نحسب احتمال الحادثة AB ثم نفسره كنسبة . ولكن (حسب قانون دي مورغان والنتيجة ٢ ـ ٨ ـ ٦)

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\ &= 1 - 0.10 - 0.30 + 0.05 = 0.65 \end{aligned}$$

أي أن 65% من الطلاب لا يدخنون ولا يشربون القهوة .

ب ـ لحساب هذه النسبة التي تشترط أن الطالب مدخن نحسب $P(B|A)$ ثم نفسره كنسبة .

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.10} = \frac{1}{2}$$

أي أن 50% من الطلاب المدخنين يشربون القهوة .

جـ ـ ولحساب هذه النسبة حيث نشترط أن الطالب لا يشرب القهوة . نحسب $P(A|\bar{B})$ ثم نفسره كنسبة .

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} = \frac{0.10 - 0.05}{1 - 0.30} = 0.071$$

أي أن 7.1% فقط من الطلاب الذين لا يشربون القهوة مدخنون .

تعليق*

نقدم فيما يلي برهانا للعلاقة الواردة في تعريف الاحتمال الشرطي ، حيث نرمز لنقطة عينة بـ ω. ولاحتمال حادثة A علما أن الحادثة B قد وقعت بـ $P_B(A)$. وبـ $P(A)$ لاحتمال A غير الشرطي . ونعلم أولا أن :

---

* للقراءة فقط .

$$\sum_{\omega \in B} P_B(\{\omega\}) = 1$$

حيث نقصد بالرمز $\sum_{\omega \in B}$ المجموع فوق نقـاط العينة ω التي تنتمي إلى B. وهذه العلاقة تعبر عن حقيقة أن B هي الآن (تحت شرط وقوع B) الحادثة الأكيدة، مما يجعل احتمال أي نقطة عينة لا تنتمي إلى B مساويا للصفر وفقا للدالة الشرطية P_B، ويزيد من احتمال كل نقطة تنتمي إلى B بمقدار يتناسب مع الاحتمال الذي خصتهـا به الدالة غير الشرطية P. الفكرة التي أوضحناها في سياق المثال (٢ـ٢٥). وهذا يسمح لنا بكتابة :

$$P_B(\{\omega\}) = \begin{cases} KP(\{\omega\}) , & \forall \; \omega \in B, \\ 0 , & \forall \; \omega \notin B. \end{cases}$$

حيث K عدد ثابت موجب. ولكن

$$1 = \sum_{\omega \in B} P_B(\{\omega\}) = K \sum_{\omega \in B} P(\{\omega\}) = KP(B)$$

وبالتالي،

$$K = \frac{1}{P(B)}$$

والعلاقة السابقة تصبح :

$$P_B(\{\omega\}) = \begin{cases} \dfrac{P(\{\omega\})}{P(B)} , & \omega \in B ; \\ 0 , & \omega \in \bar{B} . \end{cases}$$

والآن، من أجل أي حادثة A، لدينا :

$$P(A | B) = P_B(A) = \sum_{\omega \in A} P_B(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega \in A \cap B} P_B(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in A \cap \bar{B}} P_B(\{\omega\})$$

$$= \sum_{\omega \in A \cap B} P_B(\{\omega\}) + 0$$

$$= \sum_{\omega \in A \cap B} \frac{P(\{\omega\})}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \sum_{\omega \in A \cap B} P(\{\omega\})$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(٢ ـ ١٤) الاستقلال

لتكن A ، B، حادثتين من فضاء عينة S. ولنفرض أننا حسبنا $P(A \mid B)$ فوجدناه مساويا لـ $P(A)$ ، فماذا نقول عن حالة كهـذه؟ حساباتنا تشير إلى أن وقوع B لم يكن له أثر على احتمال وقـوع A، وقـد ذكرنـا في مطلع الفقرة السـابقة أنـه من الطبيعي وصف الحادثتين بأنهما مستقلتـان احتماليا . وسنكتفـي من الآن فصاعـدا بـالقول إن حـادثتين مستقلتان ، ونقصد بالطبع أن الحادثتين مستقلتان احتماليا .

لنكتب الآن التعبير الرمزي عن استقلال حادثتين A ، B ، أي :

$$P(A \mid B) = P(A)$$

ولنعوض عن $P(A \mid B)$ بما يساويها وفقا لتعريف الاحتمال الشرطي فنجد :

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \quad , \quad P(B) \neq 0$$

أو

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

وعلى العكس، لو فرضنا أن $P(B) \neq 0$ ، وأن :

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

فنجد بقسمة الطرفين على P(B) وتطبيق تعريف الاحتمال الشرطي أن :

$$P(A \mid B) = P(A)$$

أي أن الحادثتين A و B مستقلتان . ومنه نستنتج القاعدة التالية :

الشرط اللازم والكافي لاستقلال حادثتين A و B هو أن يكون

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

وهذه القاعدة تقول، إذا كنا نعلم أن حادثتين A و B مستقلتان فاحتمال وقوعهما معا هو جداء احتماليهما. وكي نقرر في مسألة استقلال أو عدم استقلال حادثتين A ، B نحسب احتمال وقوع كل منهما، $P(A)$ ، $P(B)$ ، ونحسب احتمال وقوعهما معا، $P(AB)$ ، فإذا وجدنا أن الشرط المذكور أعلاه محقق استنتجنا أنهما مستقلتان، وإذا وجدنا أنه غير محقق استنتجنا أنهما غير مستقلتين. وهذا يدعو إلى تبني هذا الشرط كتعريف لاستقلال حادثتين.

(٢ ـ ١٤ ـ ١) الحادثتان المستقلتان

نقول إن الحادثتين A و B مستقلتان إذا، وفقط إذا، كان:

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

مثال (٢ ـ ٢٨)

لنعد إلى مثال قذف حجر النرد في الفقرة السابقة حيث وجدنا أن $P(A_3 | B) = P(A_3) = 1/3$ ، فالحادثة A_3 مستقلة عن الحادثة B. ونلاحظ تحقق الشرط:

$$P(A_3 B) = P(A_3)\,P(B),$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

ولكن A_2 غير مستقلة عن B لأن

$$P(A_2 B) \neq P(A_2)\,P(B)$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}.$$

وكذلك A_1 غير مستقلة عن B ، (تحقق من ذلك).

مثال (٢ ـ ٢٩)

في صندوق تسع قطع نقود من الأنواع المبينة في الجدول التالي وتحمل التواريخ المبينة لكل نوع.

ربع ريال 1976 ، 1978 ، 1980 ، 1982
نصف ريال 1976 ، 1980 ، 1982
ريـــال 1980 ، 1983 .

سحبنا قطعـة بصورة عشـوائية ، لتكن A حـادثة سحب ربع ريـال ؛ B حادثة سحب نصف ريـال ؛ و C حادثـة سحب قطعة نقـود تحمل التاريخ 1980 ، والمطلوب حساب: $P(C)$ ، $P(A|C)$ ، هل الحادثتان A و C مستقلتان؟ هل الحادثتان B و C مستقلتان؟

الحـــل

لحساب احتمال C نلاحظ أن عدد الحالات الممكنة 9، وعدد الحالات الملائمة 3 ويكون

$$P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

وبصورة مماثلة نجد أن

$$P(AC) = \frac{1}{9}$$

ووفقا لتعريف الاحتمال الشرطي يكون

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{1/9}{1/3} = \frac{1}{3}$$

وللحكم في استقلال A ، C نحسب $P(A)$ والجداء $P(A) \times P(C)$ ثم نقارنه مـع $P(AC)$. فنجد

$$P(A) = \frac{4}{9}$$

$$P(A) \times P(C) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \neq P(AC) = \frac{1}{9}$$

فالحادثتان A ، C غير مستقلتين .

وللحكم في استقلال B ، C نحسب ، بصورة مماثلة ،

$$P(B)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$P(BC)=\frac{1}{9}$$

$$P(B)\times P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}=P(BC)$$

فالحادثتان B ، C مستقلتان.

مثال (٢ ـ ٣٠)

الحادثتان A و B متنافيتان ، و $P(A)\neq 0$ ، و $P(B)\neq 0$. ادرس استقلال الحادثتين.

الحــل

بما أن الحادثتين متنافيتان فإن تقاطعهما خال. (لا يمكن وقوعهما معا) أي $P(AB)=P(\phi)=0$. ولا يمكن تحقق شرط الاستقلال، لأن أحد الطرفين ($P(AB)$ يساوي الصفر، والطرف الآخر $P(A)P(B)$، هو جداء عددين موجبين بالفرض، أي أنه لا يمكن أن يساوي صفرا. وهكذا نستنتج أن الحادثتين المتنافيتين هما على وجه التأكيد، غير مستقلتين. وهذه النتيجة تنسجم تماما مع بداية كلامنا عن الاستقلال، فوقوع أحدهما يجعل احتمال وقوع الأخرى صفرا، وأي تأثير يمكن أن يكون أكبر من ذلك!

(٢ ـ ١٥) قانونان أساسيان في الاحتمال واستخدامهما

(٢ ـ ١٥ ـ ١) قانون الجمع

برهنا في النتيجة (٢ ـ ٨ ـ ٧) أن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

وهو ما يسمى بقانون الجمع.

(٢ ـ ١٥ ـ ٢) قانون الجداء

من تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن

$$P(AB) = P(A)\ P(B \mid A)$$
$$= P(B)\ P(A \mid B)$$

وهو قانون الجداء.

وتجدر ملاحظة أن قانون الجمع يصبح مسلمة الاحتمال الثالثة عندما تكون الحادثتان A ، B ، متنافيتين، أي $AB = \phi$. إذ يصبح الحد الثالث $P(AB)$ صفرا. كما تجدر ملاحظة أن قانون الجداء يصبح، في حالة استقلال الحادثتين A ، B ، الشرط اللازم والكافي لاستقلالهما. إذ يكون عندئذ $P(A \mid B) = P(A)$ و $P(B \mid A) = P(B)$.

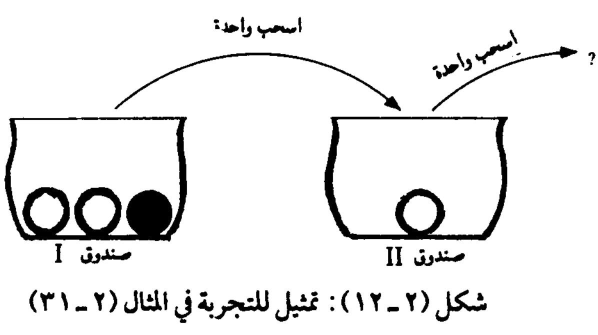
مثال (٢ ـ ٣١)

لنعد الآن إلى المثال (٢ ـ ١٥) احسب باستخدام القواعد والقوانين الأساسية التي تعلمتها، احتمال الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني.

الحل

لنرمز بـ A لحادثة الحصول على كرة بيضاء من الصندوق الثاني. فلا يمكن الوصول إلى A إلا بإحدى طريقتين:

أن نسحب «كرة بيضاء من الصندوق I» و «كرة بيضاء من الصندوق II» (ولنرمز لهذه الحادثة بـ B). أو أن نسحب «كرة سوداء من الصندوق I» و «كرة بيضاء من الصندوق II» (ولنرمز لهذه الحادثة بـ C). ونلاحظ أن B و C متنافيتان وأن $A = B \cup C$. (أي أن A تتحقق بوقوع B أو C).



شكل (٢ ـ ١٢): تمثيل للتجربة في المثال (٢ ـ ٣١)

ومن عبارة B نلاحظ أن $B = B_1 A$ حيث B_1 حادثة سحب كرة بيضاء من الصندوق I. كما نلاحظ من عبارة C أن $C = C_1 A$ حيث C_1 حادثة سحب كرة سوداء من الصندوق I. ويمكننا أن نكتب الآن، اعتمادا على قوانين معروفة،

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B \cup C) \\ &= P(B) + P(C) \qquad (B \text{ و } C \text{ متنافيتان}) \\ &= P(AB_1) + P(AC_1) \\ &= P(A|B_1)\, P(B_1) + P(A|C_1)\, P(C_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

وهو الجواب نفسه الذي حصلنا عليه في حل المثال (٢ ــ ١٥) مستخدمين هناك فضاء العينة وتعريف احتمال حادثة.

مثال (٢ ـ ٣٢)

بالعودة إلى المثال (٢ ـ ١٦) حيث اخترنا عشوائيا بذرتين من خمس بذور. ما هو احتمال الحصول على بذرة تنتج زهورا بيضاء وبذرة تنتج زهورا حمراء؟

الحـــل

لنرمز بـ A لحادثة الحصول على بذرة تنتج زهورا بيضاء وبذرة تنتج زهورا حمراء فيمكن الوصول إلى A بإحدى طريقتين، فإما أن نختار بذرة الزهور البيضاء أولا وبذرة الزهور الحمراء ثانيا (ولنرمز لهذا الطريق بـ B)، أو نختار بذرة الزهور الحمراء أولا وبذرة الزهور البيضاء ثانيا (ولنرمز لهذا الطريق بـC).

ومن عبارتي B و C نلاحظ أن $B = B_1 B_2$، $C = C_1 C_2$. حيث ترمز B_1 لحادثة اختيار بذرة الزهور البيضاء أولا وB_2 لحادثة اختيار بذرة الزهور الحمراء ثانيا وترمز C_1 لحادثة اختيار بذرة الزهور الحمراء أولا و C_2 لحادثة اختيار بذرة الزهور البيضاء ثانيا ويكون

$$A = B \cup C = B_1 B_2 \cup C_1 C_2$$

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) \qquad \text{(} B \text{ و } C \text{ متنافيتان)،}$$

$$= P(B_1 B_2) + P(C_1 C_2)$$

$$= P(B_1)\, P(B_2 | B_1) + P(C_1)\, P(C_2 | C_1)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = 0.4$$

حل آخر

باستخدام طرق العدّ، نلاحظ بسهولة أن عدد الحالات الملائمة هو عدد إمكانات اختيار بذرة زهور بيضاء، وبذرة زهور حمراء. ولكن يمكن اختيار بذرة زهور بيضاء بطريقتين مختلفتين وفي كل منها يمكن اختيار بذرة زهور حمراء بطريقتين مختلفتين أيضا، ويكون عدد الحالات الملائمة $4 = 2 \times 2$ وعدد الحالات الممكنة هو عدد طرق اختيار بذرتين من خمس بذور ويساوي $C_2^5 = 10$. والاحتمال المطلوب هو:

$$\frac{4}{10} = 0.4$$

مثال (٢ ـ ٣٣)

احتمال أن يكون باب معين مقفلا هو 1/2. ومفتاح الباب هو بين 12 مفتاحا متوفرة ضمن حزمة واحدة إذا اختار شخص مفتاحين بصورة عشوائية، فما هو احتمال أن يستطيع فتح الباب دون اللجوء إلى مفاتيح أخرى؟

الحل

لنرمز بـ A لحادثة «فتح الباب». ولنتساءل ما هي الطريق التي تؤدي إلى A؟ من الواضح أن A تتحقق إذا وفقط إذا كان الباب غير مقفل أو كان الباب مقفلا واخترنا المفتاح الصحيح. لنرمز الآن لحادثة «الباب مقفل» بـ B، ولحادثة «اختيار المفتاح الصحيح» بـ C . فيمكننا كتابة:

$$A = \bar{B} \cup BC$$

ومن الواضح أن B و C مستقلتان، وأن $\bar{B}$ و BC متنافيتان، وبالتالي:

$$P(A) = P(\bar{B} \cup BC) = P(\bar{B}) + P(BC)$$
$$= 1 - P(B) + P(B)\,P(C)$$

ولكن $P(B) = 1/2$، ولحساب احتمال C نقوم بالمحاكمة التالية:

تتحقق C إذا، وفقط إذا، كان أحد المفتاحين اللذين اخترناهما هو المفتاح الصحيح، ويمكن اختيار المفتاح الصحيح بطريقة واحدة، واختيار المفتاح غير الصحيح بـ 11 طريقة، ويكون عدد الحالات الملائمة $1 \times 11 = 11$، وعدد الحالات الممكنة لاختيار مفتاحين هو C_2^{12} وبالتالي:

$$P(C) = \frac{11}{C_2^{12}} = \frac{11 \times 2}{11 \times 12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

والآن

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

(٢ ـ ١٦) التكرارات المستقلة

إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة فيما بينها فيمكن أن نكتب كتعميم لما وجدناه في حالة استقلال حادثتين:

$$P(A_1 . A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n)$$

وتنبغي ملاحظة أن تحقق هذه العلاقة لا يكفي للقول باستقلال هذه الحوادث بعضها عن بعض. إذ يجب تحقق شروط أخرى إضافية سوف لا ندخل هنا في تفاصيلها. ولكن ما قلناه لا يتعدى أنه إذا كانت الحوادث مستقلة فيما بينها، فإن هذه العلاقة تكون صحيحة.

مثال (٢ ـ ٣٤)

قذفنا قطعة نقود ثلاث مرات متتالية. احسب احتمال:

أ ـ الحصول على HHT،

ب ـ الحصول على وجه الـ H مرتين.

الحـــل:

يتضح من طبيعة التجربة أنه لا يمكن أن يكون لنتيجة إحدى القذفات، أي أثر في الاحتمالات الموافقة لنتائج قذفة أخرى. والقذفات الثلاث هي تكرارات مستقلة للتجربة نفسها. وفي كل تكرار نعلم أن $P(H) = P(T) = 1/2$.

أ ـ $P(HHT) = P$ (H في القذفة الأولى و H في القذفة الثانية و T في القذفة الثالثة)

$= P$(H في القذفة الأولى) $\times$ P (H في القذفة الثانية)

$\times P$(T في القذفة الثالثة)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ب ـ حادثة «الحصول على وجه الـ H مرتين ولنرمز لها بـ A يمكن أن تتحقق بثلاثة أشكال مختلفة هي HHT أو HTH أو THH وهكذا نكتب:

$P(A) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$ ، (حسب المسلمة الثالثة)

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

كيف علمنا بوجود ثلاثة أشكال مختلفة تحقق المطلوب؟

الجواب: عدد هذه الأشكال هو عدد إمكانات اختيار موقعين من ثلاثة مواقع لنضع فيها H ونترك الباقي لـ T. وهذا العدد كما نعلم من الطرق العد هو $C_2^3 = 3$.

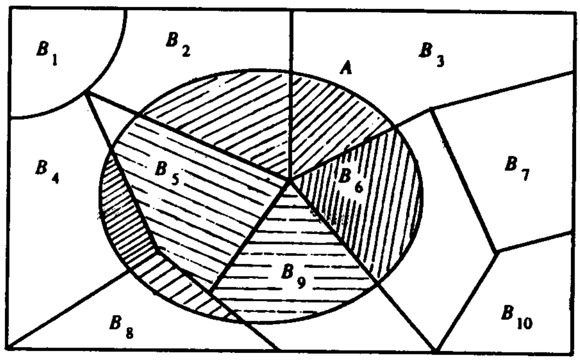
(٢ ـ ١٧) الاحتمال الكلي

لنفرض أن الحوادث غير الخالية $B_1, B_2, ..., B_k$ تشكل تجزئة لفضاء عينة S. أي أنها متنافية ومستنفذة ($B_i \cap B_j = \phi$ لأي $i \neq j$ ؛ و $B_1 \cup B_2, ... \cup B_k = S$) فيمكن

التعبير عندئذ عن أي حادثة A من S بدلالة تقاطعات هذه الحادثة مع كل من حوادث التجزئة . وهذا واضح مما يلي :

$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k)$$
$$= (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k)$$

(انظر الشكل ٢ ـ ١٣)



شكل (٢ ـ ١٣) عشر حوادث B_1 إلى B_{10} تشكل تجزئة لفضاء عينة S .

ووفقا للمسلمة الثالثة نجد :

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_k)$$

وبتطبيق قانون الجداء على كل حد من حدود الطرف الأيمن نجد :

$$P(A) = P(A \mid B_1)\, P(B_1) + P(A \mid B_2)\, P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_k)\, P(B_k)$$

وهو قانون الاحتمال الكلي . ويمكن كتابته باختصار كما يلي :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \mid B_i)\; P(B_i)$$

مثال (٢ ـ ٣٥)

مصنع للجوارب يتضمن ثلاث آلات . مساهمة كل منها في الإنتاج الكلي اليومي للمصنع هـي ، على الترتيب ، 30% ، 36% ، 34% . اخترنا عشوائيا جـوربا من الإنتاج

الكلي اليومي للمصنع. ما هو احتمال أن يكون معيبا (فيه عيب صناعي)، علما أن النسبة المئوية للإنتاج المعيب في الآلات الثلاث هي، على الترتيب، 1%، 2%، و2% ؟

الحـــل

لنرمز بـ:

B_1 لحادثة «الجورب من إنتاج الآلة الأولى»،

B_2 لحادثة «الجورب من إنتاج الآلة الثانية»،

B_3 لحادثة «الجورب من إنتاج الآلة الثالثة»،

A لحادثة «الجورب معيب».

نلاحظ أولا أن B_1، B_2، B_3 تشكل تجزئة لفضاء العينة S الموافق لتجربة الاختيار العشوائي لجورب من مجمل الانتاج اليومي للمصنع. فأي جورب نختاره لابد أن يكون من إنتاج الآلة الأولى، أو من إنتاج الآلة الثانية، أو من إنتاج الآلة الثالثة. وبتطبيق قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

ولكن من معطيات المسألة نلاحظ أن:

$$P(B_1) = 0.30 \, ; \, P(B_2) = 0.36 \, ; \, P(B_3) = 0.34$$

(لاحظ أن مجموع احتمالات حوادث التجزئة يجب أن يكون مساويا للواحد).

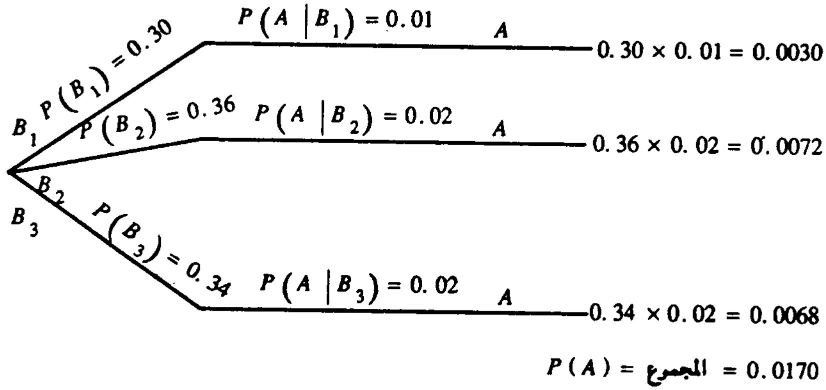
$$P(A|B_1) = 0.01 \, ; \, P(A|B_2) = 0.02 \, ; \, P(A|B_3) = 0.02$$

وبالتعويض في علاقة الاحتمال الكلي نجد:

$$P(A) = 0.01 \times 0.30 + 0.02 \times 0.36 + 0.02 \times 0.34 = 0.017$$

ملاحظة

يوضح المخطط في الشكل (٢ ـ ١٤) المسألة في المثال السابق. ويسمى مثل هذا المخطط، عادة، مخطط الشجرة.



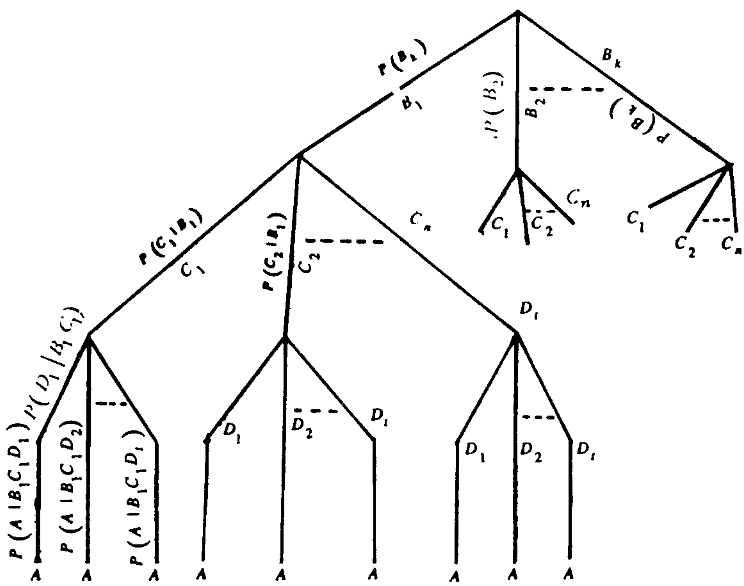
شكل (٢ ـ ١٤): مخطط الشجرة لحل المثال (٢ ـ ٣٥)

(٢ ـ ١٧ ـ ١) طريقة مخطط الشجرة لحل مسألة احتمالية

يمكن تعميم فكرة مخطط الشجرة التي استعرضناها لحل المثال (٢ ــ ٣٥) إلى مسائل احتمالية تتعدد فيها المسارات المؤدية إلى الحادثة المطلوبة، ويتألف كل مسار من عدة غصون، غصن لكل مرحلة من مراحل التجربة. ويمكن تلخيص الطريقة كما يلي: (انظر الشكل ٢ ـ ١٥ التوضيحي).

نرسم غصون المرحلة الأولى بجميع أشكالها الممكنة ونحسب احتمال كل منها، (مجموع هذه الاحتمالات يجب أن يساوي الواحد). ومن كل غصن من أغصان المرحلة الأولى، نرسم كل ما يمكن أن يتفرع من أغصان المرحلة الثانية، ونحسب لكل غصن منها احتمالها الشرطي في ضوء الغصن الذي سبقه (ومجموع هذه الاحتمالات لفروع كل غصن من أغصان المرحلة الأولى يجب أن يساوي الواحد أيضا). وهكذا. . . حتى نصل إلى المرحلة الأخيرة التي تؤدي إلى الحادثة المطلوبة، A مثلا، وفي هذه المرحلة الأخيرة لا يتفرع من كل غصن من أغصان المرحلة السابقة إلا الغصن (الأغصان) التي تؤدي إلى الحادثة A. ونحسب الاحتمال الشرطي الموافق له (لكل منها) في ضوء جميع الغصون السابقة له (لكل منها) والتي تشكل بدءا من المرحلة الأولى وانتهاء بالمرحلة الأخيرة مسارا مؤديا إلى A.

ونحسب الآن لكل مسار احتمالا، هـو جداء الاحتمالات المحسـوبة لكل غصن من غصونه. وأخيرا نجمع احتمالات المسـارات المختلفة فنحصل على احتمال الحادثة A المطلوبة.



احتمال المسار $B_1C_1D_1A = P(B_1) \times P(C_1|B_1) \times P(D_1|C_1B_1) \times P(A|B_1C_1D_1)$

شكل (٢ ـ ١٥): رسم توضيحي لطريقة مخطط الشجرة

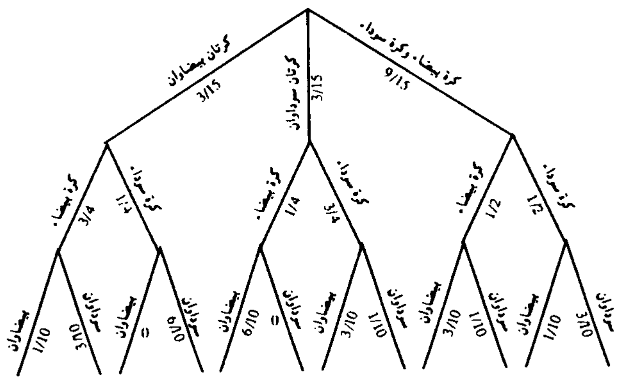
يقتصر المخطط على أربـــع مـــراحل تتـألف المرحلـــة الأولى من k غصنــا هي $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ويتفـرع مـن كـل منهـا، في المرحلـة الثانيـة n غصنا هي $c_1, c_2, \ldots, c_n$، ومن كـل مـن الـ $n \times k$ غصنـا الناتجـة يتفـرع في المرحلـة الثالـثة t غصنا هـي $D_1, D_2, \ldots, D_t$. ومن كل من الـ $k \times n \times t$ غصنـا النـاتجة نأخـذ في المرحلـة الأخيرة الغصن الـذي يـؤدي إلى A ولدينـا إذا $k \times n \times t$ مســارا وكل مسار مـؤلف من أربعة أغصـان متتالية، مثلا، المسـارات $B_1\,C_1\,D_1\,A$، $B_1\,C_1\,D_2\,A$ . . . ، $B_1\,C_1\,D_t\,A$، وهكـذا . . .

واحتمـال المسـار $B_1\,C_1\,D_1\,A$، مثلا، هو:

$$P(B_1\,C_1\,D_1\,A) = P(A|\,B_1\,C_1\,D_1)\,P(D_1\,|\,C_1\,B_1)\,P(C_1\,|\,B_1)\,P(B_1)$$

مثال (٢ ـ ٣٦)

لدينا في الصندوق I ثلاث كرات بيض وثلاث كرات سود. وفي الصندوق II لدينا كرة بيضاء وكرة سوداء. اخترنا عشوائيا كرتين من الصندوق I ثم خلطناهما جيدا مع كرات الصندوق II. واخترنا من الخليط، عشوائيا، كرة واحدة خلطناهـا جيدا مع الكرات المتبقية في الصندوق I، ثم اخترنا منه كرتين. احسب احتمال أن تكونا من لون واحد؟



الاحتمال المطلوب:

$$\frac{3}{15}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{15}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{15}\times\frac{1}{4}\times 0+\frac{3}{15}\times\frac{1}{4}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{15}\times\frac{1}{4}$$
$$\times\frac{6}{10}+\frac{3}{15}\times\frac{1}{4}\times 0+\frac{3}{15}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{15}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{9}{15}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}$$
$$+\frac{9}{15}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{9}{15}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{9}{15}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=$$
$$\frac{9+27+18+18+27+9+54+18+18+54}{600}=\frac{252}{600}=\frac{42}{100}=0.42$$

(٢ ـ ١٨) قانون بايز (Bayes)

لنفرض في المثال (٢ ــ ٣٥) أننا اخترنا جوربا، بصورة عشوائية، فوجدناه معيبا. ونريد حساب احتمال أن يكون هـذا الجورب من إنتاج الآلة الأولى. أي أننا نريد

معرفة الاحتمال الشرطي $P(B_1 | A)$. ونلاحظ أنه يمكن النظر إلى التجزئة B_1, B_2, B_3 في المثال (٢ ـ ٣٥)، كأسباب، وأن النتيجة التي تهمنا هي ما إذا كان الجورب الذي نختاره معيبا. والاحتمال المطلوب $P(B_1 | A)$ هو إذا احتمال السبب B_1 علما أن النتيجة كانت A . أو بصياغة أكثر تعبيرا احتمال أن تكون A (التي وقعت) نتيجة للسبب B_1 دون غيره من الأسباب. ولذلك يسمى مثل هذا الاحتمال، أحيانا، الاحتمال السببي. ولدينا من قانون الاحتمال الشرطي.

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1 A)}{P(A)} = \frac{P(A | B_1)\ P(B_1)}{P(A)}$$

ومن قانون الاحتمال الكلي يمكن تعويض $P(A)$ بما تساويه لنجد أخيرا:

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1)\ P(B_1)}{P(A\ B_1)\ P(B_1) + P(A | B_2)\ P(B_2) + P(A | B_3)\ P(B_3)}$$

وهو قانون بايز في حالة وجود ثلاثة أسباب، أي وجود تجزئة لـ S تقطعه إلى ثلاثة أجزاء.

وبالتعويض من المثال (٢ ـ ٣٥) نجد:

$$P(B_1 | A) = \frac{0.01 \times 0.30}{0.01 \times 0.30 + 0.02 \times 0.36 + 0.02 \times 0.34}$$

$$= \frac{0.003}{0.017} = \frac{3}{17}\ .$$

وبصورة عامة، إذا فرضنا k من الأسباب، أي تجزئة $B_1, B_2, \ldots, B_k$. وكان المطلوب حساب $P(B_j | A)$ أي احتمال أن الحادثة A التي وقعت كانت نتيجة للسبب B_j ، دون غيره من الأسباب، نكتب من قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j\ A)}{P(A)} = \frac{P(A | B_j)\ P(B_j)}{P(A)}$$

وبتعويض $P(A)$ في المقام بما يساويها، استنادا إلى قانون الاحتمال الكلي، نجد قانون بايز بصورته العامة:

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j)\ P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A | B_i)\ P(B_i)} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

مثال (٢ ـ ٣٧)

في مجتمع من البالغين تبلغ نسبة الإصابة بمرض السكري 8%. واحتمال أن يقرر طبيب معين إصابة شخص بهذا المرض، علما أنه مريض بالفعل، هو 0.95 واحتمال أن يقرر إصابته علما أنه غير مصاب هو 0.02 . ما هو احتمال أن يكون شخص بالغ مريضا بالسكري علما أن الطبيب أنبأه بذلك؟

الحل

نتعرف أولا على حوادث التجزئة، وهي ما سميناه بالأسباب. ومن العلامات المميزة لحوادث التجزئة أن مجموع احتمالاتها يجب أن يكون الواحد. ومن الواضح أنها هنا الاصابة أو عدم الاصابة بالسكري.

لتكن B حادثة الإصابة بمرض السكري، ونعلم من معطيات المسألة أن $P(B) = 0.08$. ولتكن B حادثة عدم الاصابة بمرض السكري، ومن الواضح أن $P(B) = 0.92$. لتكن A حادثة أن الطبيب شخّص الإصابة بالمرض. فلدينا من نص المسألة أن $P(A | B) = 0.95$ ، و $P(A | B') = 0.02$ والمطلوب هو حساب $P(B | A)$ ووفقا لقانون بايز لدينا:

$$P(B | A) = \frac{P(A | B)\ P(B)}{P(A | B)\ P(B) + P(A | B')\ P(B')}$$

$$= \frac{0.95 \times 0.08}{0.95 \times 0.08 + 0.02 \times 0.92} = \frac{0.076}{0.0944} = 0.81$$

تمـــارين (٢ ـ ٥)

١) إذا كانت H حادثة أن يحصل خالـد على تقدير ممتاز، و G حادثة أن يكون متفوقا في الرياضة. عبر بكلمات عما تعنيه الرموز التالية :
أ ـ $P(G|H)$، ب ـ $P(G\ |\ H)$، جـ ـ $P(H|G')$ ،
د ـ $P(H'|G)$ ، هـ ـ $P(H'|G')$ ، و ـ $P(G'|H')$.

٢) إذا رمزنا بـ A لحادثة أن يكون شخص مصابا بعمـى الألوان، ورمزنا بـ C لحادثة أن يكون تحت العاشرة من العمر. عبر عن الاحتمالات التالية رمزيا :
ا ـ احتمال أن الشخص تحت العاشرة ومصاب،
ب ـ احتمال أن شخصا تحت العاشرة مصاب،
جـ ـ احتمال أن عمر شخص مصاب عشرة أو أكثر،
د ـ احتمال أن شخصا عمره عشرة أو أكثر غير مصاب بعمى الألوان.

٣) تقـدم سـتـون شخصا لـوظيفـة. عنـد تصنيفهم وفقا للشهـادة والخبرة حصلنـا على الجدول التالي :

	يحمل شهادة جامعية	لا يحمل شهادة جامعية
له خبرة سابقة	12	6
بدون خبرة سابقة	24	18

اخترنـا أحد المتقـدمين بصورة عشـوائية. ولنـرمز بـ G لحادثـة أنـه يحمل شهـادة جامعية، وبـ T لحادثة أن له خبرة سابقة.

ا ـ احسب الاحتمالات التالية من الجدول مباشرة :
$P(G\ |\ T)$، $P(T\ |\ G)$، $P(G'T)$، $P(TG)$، $P(T)$، $P(G)$
ب ـ تحقق أن

$$P(T\ \ G) = \frac{P(TG)}{P(G)} \qquad\qquad P(G'\ |\ T') = \frac{P(G'\ T')}{P(T')}$$

٤) كجزء من الحملة الدعائية تقدم شركة للصناعات الغذائية جائزة مقدارها خمسون ألف ريالا لواحد ممن يرسلون أسماءهم مكتوبة على طلب اشتراك في المسابقة. ووفقا لرغبة المشترك، يمكنه أيضا أن يرسل مع الطلب، الجزء العلوي من علبة تغليف لأحد منتجات هذه الشركة. وقد تبين من فرز وتصنيف 000 60 طلب اشتراك ما يلي:

	بدون الجزء العلوي من علبة تغليف	مع الجزء العلوي من علبة تغليف
سعودي	11000	32000
مقـــيم	9000	8000

إذا اختير رابح الجائزة بالقرعة، وكانت C حادثة أن يكون الفائز سعوديا، و B حادثة أن الفائز ممن أرسلوا الجزء العلوي من علبة تغليف. احسب كلا من الاحتمالات التالية:

أ- $P(C)$ ، $P(C')$ ، $P(B)$ ، $P(B')$ ، $P(CB)$ ، $P(C' \ B')$
$P(C|B)$ ، $P(B|C)$ ، $P(C'|B')$ ، $P(B'|C')$.

ب- استخدم النتائج في أ للتحقق مما يلي:

$$P(C|B) = \frac{P(CB)}{P(B)} , \qquad P(C' \mid B') = \frac{P(B' \ C')}{P(B')}$$

$$P(B' \mid C') = \frac{P(B' \ C')}{P(C')} \qquad P(B|C) = \frac{P(B \ C)}{P(C)}$$

٥) لنفرض، في التمرين السابق، أنه أعيدت ترتيبات اختيار الفائز بحيث تتضاعف فرصة من يرسل الجزء العلوي من علبة تغليف. أعط تصورا للترتيب الجديد، وأعد كافة الحسابات المطلوبة في ذلك التمرين.

٦) في التمرين ٩ من مجموعة التمارين (٢ ـ ٢)، احسب:
أ ـ احتمال أن المشترك سوف لا يحصل على جائزة التجويد علما أنه حصل على جائزة التفسير.
ب ـ احتمال أن المشترك سوف يحصل على جائزة التفسير علما أنه لم يحصل على جائزة التجويد.

٧) لدى مدير مركز أبحاث المعلومات التالية: احتمال أن يتم استلام تجهيزات، يحتاجها مشروع معين، في وقتها هو 0.8. واحتمال أن يتم تسليم التجهيزات في وقتها وإتمام المشروع في وقته المحدد هو 0.45.
أ ـ احسب احتمال إتمام المشروع في وقته علما أن التجهيزات قد سُلمت في وقتها.
ب ـ إذا كان احتمال أن يتم المشروع في وقته هو 0.5، وعلمت أن التجهيزات سوف لا تتيسر في وقتها، فكم سيصبح هذا الاحتمال؟

٨) تتولى مراكز التأهيل الطبي في المملكة مهمة تأهيل المرضى المعاقين جسميا. وفيما يلي جدول يبين الحالات الجديدة التي تم تأهيلها لعام ١٤٠٦هـ في كل من مركزي مكة المكرمة والرياض: *

نوع الحالة / المركز	شلل أطفال	بتر أطراف	تشوهات	شلل إربي	حالات متنوعة	المجموع
مركز مكة المكرمة	321	179	193	38	814	1545
مركز الرياض	485	243	680	42	540	1990
المجموع	806	422	873	80	1354	3535

* مأخوذ من التقرير الصحي السنوي لعام ١٤٠٦هـ الصادر عن وزارة الصحة في المملكة العربية السعودية.

إذا اخترنا إحدى الحالات عشوائيا فاحسب احتمال أن تكون :

ا ـ حالة شلل أطفال، ب ـ من مركز مكة المكرمة، جـ ـ من مركز الرياض علما أنها حالة بتر أطراف، د ـ حالة تشوه علما أنها من مركز مكة المكرمة، هـ ـ حالة شلل إربي أو شلل أطفال، و ـ حالة شلل إربي أو شلل أطفال علما أنها من مركز الرياض.

٩) فيما يلي جدول يبين عدد الحجاج وعدد حالات ضربة الحرارة في مكة والمشاعر حسب الجنسية وذلك لعام ١٤٠٦هـ:

الجنسية	عدد الحالات	عدد الحجاج	الجنسية	عدد الحالات	عدد الحجاج	الجنسبة	عدد الحالات	عدد الحجاج
مصري	84	98606	هندي	26	39344	عراقي	10	14551
مغربي	72	22912	سوري	22	15803	يماني	8	43512
تركي	67	54624	سعودي	14	239207	ليبي	8	14509
باكستاني	43	92305	تونسي	10	6887	بنجلاديشي	7	13631
اندونيسي	35	59172	أفغاني	12	4603	لبناني	9	4298
جزائري	34	28093	أردني	10	17165	جنوب افريقيا	5	2498
نيجيري	29	29899	إيراني	10	152149	أخرى	81	103212

ا ـ إذا اخترنا أحد الحجاج عشوائيا فما احتمال أن يكون ممن أصيبوا بضربة الحرارة. *

ب ـ إذا اخترنا حاجا بصورة عشوائية فوجدناه سعوديا، ما احتمال ألا يكون قد أصيب بضربة الحرارة.

جـ ـ إذا اخترنا حاجا بصورة عشوائية فوجدناه ممن أصيبوا بضربة الحرارة، ما هو احتمال أن يكون من إحدى البلاد المذكورة تفصيلا في الجدول ومطلة على البحر الأبيض المتوسط.

* مأخوذ من التقرير الصحي السنوي لعام ١٤٠٦هـ الصادر عن وزارة الصحة في المملكة العربية السعودية.

١٠) أظهر تصنيف لطلبة إحدى الكليات أن 40% منهم من أهالي الرياض، و 80% منهم يتناولون وجبة الغداء بانتظام في مطعم الجامعة، و 30% منهم من أهالي الرياض ويتناولون وجبة الغداء بانتظام في مطعم الجامعة. **

أ ـ ما هي النسبة المئوية للطلبة من غير أهالي الرياض ولا يتناولون وجبة الغداء بانتظام في مطعم الجامعة.

ب ـ من بين الطلبة من أهالي الرياض ما هي نسبة الطلاب الذين يتناولون وجبة الغداء بانتظام في مطعم الجامعة؟

جـ ـ من بين الطلاب الذين لا يتناولون وجبة الغداء بانتظام في مطعم الجامعة ما هي نسبة الطلاب من أهالي الرياض؟

١١) ينتمي ستون بالمائة من الطلبة المسجلين في مقرر الاحصاء 101 إلى كلية العلوم، وينتمي الباقون إلى كلية الحاسب الآلي. وكانت نسبة النجاح في هذا المقرر هي 70% بالنسبة إلى طلاب كلية العلوم، بينما ترتفع هذه النسبة إلى 90% بين طلاب الحاسب الآلي:

أ ـ اخترنا طالبا بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون ناجحا؟

ب ـ إذا علمت أن الطالب الذي اخترناه كان من الناجحين، فما احتمال أنه من طلاب كلية الحاسب الآلي؟

١٢) أي الأزواج التالية من الحوادث مستقل وأيها غير مستقل؟

ا ـ أن يكون سائق سيارة مخمورا، وأن يرتكب حادث اصطدام،

ب ـ الحصول على ثلاث ثم ثلاث في قذفتين متتاليتين لحجر نرد،

جـ ـ أن يكون شخص مدير مصرف، وأن يكون أسود الشعر،

د ـ حصول بنشر لسيارتك، وتأخرك عن موعد عملك،

هـ ـ أن يكون شخص من مواليد يوليو (تموز) وأن تكون قدماه مسطحتين،

و ـ أن يكون لديك رخصة قيادة، وأن تمتلك سيارة،

ز ـ أن تكون ممن يعيشون في الرياض، ومن هواة جمع الطوابع،

ح ـ أي حادثتين متنافيتين وغير مستحيلتين.

** النسب المعطاة افتراضية وليست حقيقية.

١٣) في المثال (٢ ـ ٤)، افترض أن الاحتمالات المخصصة لنقاط العينة كانت ما يلي :

نقطة العينة	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)	(0,-1)	(0,0)	(0,-1)	(1,-1)	(1,0)	(1,1)
الاحتمال	0.16	0.08	0.16	0.08	0.04	0.08	0.16	0.08	0.16

لتكن N حادثة أن الشخص الأول على الحياد، و S حادثة أن الشخص الثاني ضد القضية.

ا ـ احسب $P(N)$، $P(S)$، $P(NS)$، $P(N \mid S)$،

ب ـ تحقق أن الحادثة N مستقلة عن الحادثة S،

جـ ـ تحقق أن الحادثة N مستقلة عن الحادثة S'،

د ـ تحقق أن الحادثة S مستقلة عن الحادثة N'،

١٤) في التمرين ٦ من مجموعة التمارين (٢ ـ ٣)، هل الحادثتان A و T مستقلتان؟

١٥) يحتفظ مستشفى بسيارتي إسعاف احتياطا للطوارىء. ونظرا لتوقيت الطلب أو لإمكانية وجود عطل ميكانيكي، فإن احتمال توفر سيارة إسعاف معينة عند الحاجة إليها هو 0.9. وتوفر إحدى السيارتين مستقل عن توفر الأخرى. والمطلوب :

ا ـ ما احتمال ألا تتوفر أي منهما؟

ب ـ إذا احتجنا لسيارة إسعاف في حالة طارئة فما احتمال تلبية الطلب؟

١٦) الحادثتان A، B مستقلتان. و $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.4$، احسب :

ا ـ احتمال وقوعهما معا،

ب ـ احتمال وقوع واحدة منهما على الأقل،

جـ ـ احتمال وقوع واحدة منهما بالضبط،

د ـ احتمال عدم وقوع أي منهما.

١٧) إذا كان احتمال مولود ذكر يساوي $1/2$. وكان الجنس مستقلا من طفل إلى آخر، فما احتمال أن نجد في أسرة تتضمن أربعة أطفال:

ا ـ الأطفال الأربعة ذكور؟

ب ـ أحدهم على الأقل ذكر؟

جـ ـ عدد الذكور يساوي عدد الإناث؟

١٨) كم مرة يجب قذف قطعة نقود حتى يكون احتمال ملاحظة وجه الـ T مرة واحدة على الأقل أكبر من 0.9؟

١٩) خمس قطع من الورق كُتبت عليها الحروف a، b، c، d، e، حرف على كل قطعة. سحبنا ثلاث قطع عشوائيا. لتكن A حادثة الحصول على الحرف a ولتكن B حادثة الحصول على الحرف b، ولتكن C حادثة عدم الحصول على الحرف d في المجموعة التي اخترناها. احسب:

ا ـ $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$،

ب ـ هل A و C مستقلتان؟

جـ ـ احسب $P(B \mid A)$، $P(C' \mid B)$، $P(A \cup C)$

٢٠) في ناد يتضمن ستة أطفال، من بينهم أحمد وخالد. اخترنا بالقرعة لجنة من ثلاثة.

ا ـ ما هو احتمال أن تتضمن اللجنة أحمدا ولا تتضمن خالدا؟

ب ـ إذا علمت أن اللجنة تتضمن أحمدا فما هو الاحتمال الشرطي أنها تتضمن خالدا أيضا؟

٢١) أنتجت آلة صناعية 20 قطعة، فوجد أن 12 منها موافقة للطول المطلوب و 5 قطع أكبر من الطول المطلوب، و3 قطع أصغر من الطول المطلوب. سحبت قطعة من هذا الانتاج عشوائيا. احسب احتمالات الحوادث:

ا ـ القطعة المسحوبة موافقة للطول المطلوب،

ب ـ القطعة المسحوبة غير موافقة للطول المطلوب،

جـ ـ القطعة المسحوبة أكبر من الطول المطلوب علما أنها غير موافقة للطول المطلوب.

٢٢) في التمرين السابق، إذا سحبنا قطعتين بدون إعادة، فاحسب احتمالات الحوادث :

ا ـ القطعتان المسحوبتان موافقتان للطول .

ب ـ القطعتان المسحوبتان غير موافقتين للطول .

جـ ـ القطعتان المسحوبتان أكبر من الطول المطلوب .

د ـ القطعة الأولى موافقة للطول المطلوب والثانية أكبر منه .

هـ ـ واحدة أكبر من الطول المطلوب، والأخرى أصغر من الطول المطلوب .

٢٣) في التمرين السابق احسب الاحتمالات المطلوبة إذا كان السحب يجري مع الإعادة .

٢٤) عينة تتضمن 24 صماما منها 5 تالفة. سُحبت بدون إعادة عينة من 4 صمامات احسب احتمال :

ا ـ ألا تتضمن العينة صمامات تالفة ،

ب ـ أن تكون العينة كلها تالفة ،

جـ ـ أن يكون نصف العينة تالفا ،

د ـ أن تتضمن العينة قطعة واحدة تالفة .

٢٥) حل التمرين السابق إذا كان السحب مع الإعادة .

٢٦) نعلم أن احتمال وقوع أي عدد من الحوادث، المستقلة فيما بينها، يساوي جداء احتمالاتها. استخدم هذه القاعدة لحساب احتمال :

ا ـ الحصول على وجه الـ T ثماني مرات متتالية عند قذف قطعة نقود متزنة ثماني مرات .

ب ـ الحصول على وجه الـ H في القذفات الأربع الأولى ثم الحصول على وجه الـ T في القذفات الأربعة التالية .

جـ ـ الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات عند قذف حجر نرد متوازن أربع مرات .

د ـ أن يصيب رام الهدف خمس مرات متتالية علما أن احتمال إصابته للهدف في كل مرة 0.9، وأنه يمكن افتراض الاستقلال بين رمية وأخرى .

٢٧) حزمتان من البطاريات تحوي كل منهما ست بطاريات. وفي كل منهما بطاريتان لا تعملان. إذا اخترنا بطاريتين من كل حزمة فما احتمال أن تكون البطاريات الأربعة عاملة؟

٢٨) إذا علمت أن الصندوق I فيه ثلاث كرات بيض وخمس كرات سود، وفي الصندوق II خمس كرات بيض وثلاث كرات سود. وسحبنا مع الاعادة كرتين من الصندوق I، وبدون إعادة كرتين من الصندوق II، فما هو احتمال الحصول على:

ا ـ 4 كرات بيض

ب ـ كرتين بيضاوين

جـ ـ كرة سوداء واحدة على الأقل.

٢٩) بالاشارة إلى التمرين ٢٥. لنفرض أننا اخترنا بصورة عشوائية بطاريتين من الحزمة الأولى وخلطناهما مع بطاريات الحزمة الثانية، ثم أخذنا بصورة عشوائية اثنتين من البطاريات الثماني في الحزمة الثانية، فما هو احتمال أن تكونا عاملتين؟

٣٠) يتضمن صندوق ثلاث كرات حمراء وأربع كرات بيضاء وخمس كرات زرقاء، ويتضمن صندوق آخر كرة حمراء وست كرات بيضاء وثلاث كرات زرقاء. سحبنا عشوائيا كرة من كل صندوق. احسب احتمالات الحوادث:

ا ـ الكرتان من اللون نفسه،

ب ـ واحدة حمراء وواحدة بيضاء،

جـ ـ واحدة حمراء على الأقل،

د ـ كلاهما ليست زرقاء.

٣١) يقوم مصنع بتنفيذ دورات تدريبية لمعظم عماله الجدد. ونعلم من سجلات المصنع أن 35% من بين العمال الجدد الذين لم يتلقوا الدورة التدريبية يحسنون أداء عملهم، بينما ترتفع هذه النسبة إلى 86% بين العمال الجدد الذين تلقوا الدورة التدريبية. إذا علمت أن 80% من العمال الجدد في المصنع تلقوا دورة تدريبية. فما احتمال أن عاملا اخترناه عشوائيا من بين العمال الجدد سيُحسن أداء عمله؟

٣٢) يستأجر فندوق سيارات لنزلائه من 3وكالات X، Y، Z، وذلك وفق النسب التالية: 20% من X، و40% من Y، و40% من Z . إذا كان 14% من سيارات X، و4% من سيارات Y، و8% من سيارات Z تفتقر إلى مذياع، فما احتمال أن سيارة استؤجرت لأحد النزلاء تفتقر إلى مذياع؟

٣٣) احتمال أن يشترك مقاول A في مناقصة لبناء دار جديدة لبلدية إحدى المدن هو 1/2. اشترك المقاول B في المناقصة، واحتمال أن يفوز بالعقد هو 2/3 في غياب المقاول A، ويصبح 1/5 فقط عند اشتراك المقاول A في المناقصة. إذا علمت أن المقاول B قد فاز بالعقد فما احتمال أن المقاول A لم يشترك في المناقصة؟

٣٤) في مكتب للبريد ثلاثة أقسام هي S, Q, R تقوم بتصنيف وتوزيع الخطابات. ونعلم من السجلات السابقة للمكتب أن S يرتكب خطأ واحدا في كل مائة خطاب، وأن B يرتكب خمسة أخطاء في كل مائة خطاب، أما R فيرتكب ثلاثة أخطاء في كل مائة خطاب. كما نعلم أن العمل موزع بين الأقسام الثلاثة بحيث يقوم S بتصنيف وتوزيع 30% من الخطابات بينما يقوم Q بتصنيف وتوزيع 40% منها، ويتولى R الباقي. في حالة حدوث خطأ، ما هو احتمال أن يكون Q مسؤولا عنه؟

٣٥) تتوزع أبقار مزرعة بين أنواع ثلاث A، B، C، وفق النسب التالية، 25% من النوع A، 35% من النوع B، و40% من النوع C . ونعلم أن 2/3 الأبقار من النوع A، و1/2 الأبقار من النوع B، و 1/4 الأبقار من النوع C، يعطي أكثر من 10 كغ حليب يوميا.

ا ـ اختيرت بقرة من أبقار المزرعة عشوائيا فوجد أنها تعطي أكثر من 10 كغ حليب يوميا. ما احتمال أن تكون من النوع A؟

ب ـ اختيرت بقرة عشوائيا فتبين أنها تعطي ما لا يزيد عن 10 كغ حليب يوميا، ما احتمال أن تكون من النوع B؟

٣٦)* توضح سجلات الشرطة أن 30% من حوادث الانفجارات تقع بسبب انقطاع مفاجىء في التيار الكهربائي، وأن 15% منها يقع بسبب ضعف أحد الأجهزة

* النسب المعطاة افتراضية

الكهربائية، وأن 50% يقع بسبب اشتعال أحد الأسلاك، وأن 5% يقع بفعل فاعل. ونعلم من تقديرات الخبراء أن احتمال وقوع الانفجار عند توافر أحد الأسباب السابقة هو، على الترتيب، 0.25، 0.20، 0.40، 0.75. إذا حصل انفجار فكيف نستخدم قانون بايز لتحديد السبب الأكثر شبهة؟

٣٧) يخطط صديقك لقضاء عطلة الأسبوع في إحدى المناطق السياحية أ أو ب أو جـ ويأخذ قراره بالاختيار كما يلي: يقذف حجر نرد فإذا حصل على عدد زوجي يزور المنطقة أ، وإذا حصل على عدد فردي يقذف قطعة نقود، ويزور المنطقة ب إذا حصل على H والمنطقة جـ إذا حصل على T. ونعلم أن احتمال هطول المطر في كل من المناطق الثلاث هو، على الترتيب، 0.3، 0.4، و0.2. عندما عاد صديقك وجدت الوحل على عجلات سيارته فما هو احتمال أنه زار المنطقة أ ؟

حوار مع ملحد من منظور إحصائي

المؤمن: أنت تعتقد أن مختلف الظواهر في أنفسنا وفي هذا الكون من حولنا هي بفعل المصادفة البحتة.

الملحد: نعم.

المؤمن: هل يمكن لظاهرة واحدة من الظواهر أن تكون لغير المصادفة بل بفعل خالق مدبر.

الملحد: بالطبع لا، إذ لو اعتقدت بإمكانية ذلك لانحسب إيماني هذا على جميع الظواهر بلا استثناء. وليس هناك ما يسوغ إمكانية وجود جزئي لمدبر يتناول ظاهرة أو ظواهر معينة ويعجز عن تدبير وتصريف غيرها أو ينصرف عنها.

المؤمن: حسناً. لو أمعنا النظر لوجدنا العديد من الظواهر المستقلة بعضها عن بعض فما هو التأثير المتبادل. مثلاً، بين قدرتك على السمع أو النطق وبين النظام العجيب الذي تسير وفقاً له حياة جماعة من النمل؟ وما هي العلاقة بين النظام المدهش لمملكة النحل وبين مراحل تطور الجنين البشري في رحم الأم؟ وما هي العلاقة بين سرعة دوران الأرض حول نفسها وقدرة الخفافيش على أن تبلغ أهدافها في الظلام الدامس؟ في الحقيقة يمكن أن نستعرض عدداً هائلاً من الظواهر المستقلة في كوكبنا الأرضي وحده، الذي لا يشكل إلا ذرة لا متناهية في الصغر من الكون الفسيح بما يحويه من بلايين المجرات.

الملحد: لا اعتراض لي على ما تقول ولكن ما هو قصدك من ذلك.

المؤمن: لابد أنك سمعت بنظرية تسمى نظرية الاحتمالات، وهي نظرية تنتمي إلى ميدان الرياضيات البحتة. دعنا نسجل n من الظواهر المستقلة ثم نُقيم عليها نموذجاً احتمالياً هو نموذج بيرنوللي. وسأقيم هذا النموذج متحيزاً لصالحك وبالقدر الذي ترغبه.

كل ظاهرة من هذه الظواهر إما أن تكون بفعل المصادفة البحتة كما تقول أو لا تكون. لنفترض أنها بفعل المصادفة البحتة باحتمال عال جداً هو $(1-\varepsilon)$ حيث ε صغير جداً. فهذا النموذج، المنحاز بشدة لصالحك، سيخصص لكل من نقاط فضاءالعينة، وعددها 2^n، احتمالاً. والنقطة الوحيدة التي تخدم أغراضك هي النقطة التي تمثل الحادثة الابتدائية التالية:

جميع هذه الظواهر بدون استثناء هي بفعل المصادفة. والاحتمال المخصص لهذه النقطة. أي احتمال أن يكون هذا صحيحاً هو $(1-\varepsilon)^n$ كما هو معروف جيداً في نظرية الاحتمالات ولا يجادل في هذا اثنان، أما بقية نقاط العينة وعددها 2^n-1 فهي تخدم هدفي. وهي تمثل في جملتها حادثة أنه يوجد على الأقل ظاهرة واحدة من بين هذه الظواهر الـ n ليست بفعل المصادفة، وإنما من تدبير خالق واحد أحد. واحتمال هذه الحادثة هو $1-(1-\varepsilon)^n$ ومن الواضح أن احتمال أن تكون محاكمتك صحيحة وهي $(1-\varepsilon)^n$ يتناهى إلى الصفر مع زيادة n. فيما يتناهى $(1-(1-\varepsilon)^n)$ إلى الواحد، وهو احتمال أن تكون محاكمتي صحيحة. وإليك الآن بعض الحسابات التي توضح ذلك:

$1-\varepsilon$	n	$(1-\varepsilon)^n$
.9	35	.01
0.99	688	.001
.999	9206	.0001
.9999	115124	.00001

فهل هناك أيها الظالم أثر من الحكمة أو المنطق السليم في اتباع محاكمة ينتهي احتمالها إلى الصفر، والإعراض عن محاكمة تنتهي احتمالها إلى الواحد؟

﴿وَلَوْ شَاءَ رَبُّكَ لَآمَنَ مَن فِي الْأَرْضِ كُلُّهُمْ جَمِيعًا أَفَأَنتَ تُكْرِهُ النَّاسَ حَتَّىٰ يَكُونُوا مُؤْمِنِينَ﴾ [يونس: ٩٩]. ﴿وَتَرَى الشَّمْسَ إِذَا طَلَعَت تَّزَاوَرُ عَن كَهْفِهِمْ ذَاتَ الْيَمِينِ وَإِذَا غَرَبَت تَّقْرِضُهُمْ ذَاتَ الشِّمَالِ وَهُمْ فِي فَجْوَةٍ مِّنْهُ ذَٰلِكَ مِنْ آيَاتِ اللَّهِ مَن يَهْدِ اللَّهُ فَهُوَ الْمُهْتَدِ وَمَن يُضْلِلْ فَلَن تَجِدَ لَهُ وَلِيًّا مُّرْشِدًا﴾ [الكهف: ١٧].