الفصل التاسع

مبادىء الاحتمالات

(٩ ـ ١) مقدمــــة

من الكلمات الشائعة في حياتنا اليومية كلمة محتمل، ممكن وغالبًا، ربما، أحيانًا وكـذلـك مؤكد، مستحيل، فمثلاً يوجد كثير من التعبيرات المألوفة مثل نجاح أحد الطلاب في مقرر دراسي معين يكون محتملاً، كما يقال من المحتمل أن تمطر السماء اليوم أو من المحتمل أن يكون الجو باردًا في المساء. . . الخ. واستخدام كلمة محتمل يكون للتعبـير عن تحقق حادث بذاتـه ويكـون غير مؤكـد، وغير مستحيل الوقوع. وعادة ما يستخدم عدد كبير من الناس كلمة محتمل أو ممكن في نفس الظروف بتعبيرات مختلفة مثل محتمل، محتمل جدًّا، محتمل جدًّا جدًّا، الخ. حيث تكون درجة الميل إلى إمكانية سقـوط المـطر مثـلاً مختلفة من شخص إلى آخر حسب المعلومات المتوافرة للشخص وخبرته. ومن هنا نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس رقمية بدلاً من التعبيرات التي يستدل منها على درجة الثقة في وقوع الحادث المعبر عنه. والعلم الذي يبحث في هذه المقاييس وعـلاقتهـا بعضها ببعض يسمى علم الاحتمالات. وهذا العلم تطور تطورًا كبيرًا، وأصبح أساسًا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرهما. وعلم الاحتمالات كسائر العلوم الأخـرى يبـدأ ببعض التعـاريف والبـديهيات، ويعتمد في تطوره على بعض المفهـومـات الأساسية في الرياضيات، مثل نظرية المجموعات وغيرها، وسوف نبدأ بتلخيص ما نحتاجه من نظرية المجموعات فيما يلي.

(٩ - ٢) المجموعـــات

المجموعة هي تجمع لأشياء معرَّفة تعريفًا جيدًا. والمقصود بالتعريف الجيد هو إعطاء الصفات المشتركة والمميزة للعناصر حيث يمكن الحكم على عنصر ما بأنه ينتمي إلى هذه المجمـوعة أو لا ينتمي إلى هذه المجموعة. وعادة يرمز للمجموعة بحروف هجـائية مكـبرة أو داكنة مثل **ا**، **ب**، **جـ**... وعناصر المجموعة بحروف هجائية مصغرة مثل ا، ب، جـ.

وإذا كان عنصر ما ا مثلا ينتمى إلى المجموعة **ا** فإنه يكتب على الصورة ا $\in$ **ا** (ويقرأ العنصر ا ينتمي إلى المجموعة ا).

وإذا كان هذا العنصر لا ينتمي إلى المجموعة **ا** فيكتب على الصورة ا $\notin$ **ا** (ويقرأ العنصر ا لا ينتمي إلى المجموعة ا).

والأمثلة للمجموعات كثيرة فمثلاً مجموعة طلاب كلية الزراعة بجامعة الملك سعود. فإن كل طالب في كلية الزراعة بجامعة الملك سعود ينتمي إلى هذه المجموعة وإن أي طالب من كلية أخرى من جامعة الملك سعود أو غيرها لا ينتمي إلى هذه المجموعة.

(٩ - ٢ - ١) طريقة كتابة المجموعة

هناك طرق كثيرة لكتابة المجموعات نذكر منها ما يسمى طريقة جدولة العناصر أو طريقة الخاصة المميزة للعناصر أو أشكال فن (Venn) وسوف نتناول كل طريقة بالشرح والتفصيل والأمثلة كما يلي.

طريقة جدولة العناصر

وتتلخص هذه الطريقة في كتابة اسم المجموعة وليكن **ا**، ثم نكتب يساوي، ثم نفتح قوسين من النوع {   } وبين هذين القوسين نكتب جميع عناصر المجموعة،

وكل عنصر يفصل عن العنصر الآخر بفاصلة (،) فعلى سبيل المثال إذا كانت المجموعة ا عناصرها هي الأعداد ١ ، ٢ ، ٥ فإننا نعبر عنها بالصورة:

ا = { ١، ٢، ٥ }

ويهمنا في دراستنا للمجموعات معرفة عدد العناصر الموجودة في المجموعة ويرمز لعدد العناصر بالرمز ن (ا)، ويوضع بين القوسين اسم المجموعة، فمثلاً نلاحظ أن عدد عناصر المجموعة ا السابقة هو ٣ فنكتب عدد العناصر للمجموعة ا على الصورة التالية

ن (ا) = ٣

ويجب أن نعرف أنه ليس من الضروري أن تكون عناصر المجموعة أرقامًا فقط، فقد تكون حروفًا، أو صفات أو أسماءًا أو أشياء أخرى محددة، ونوضح ذلك بالمجموعات التالية:

ا = { ولد ، بنت } ويكون عدد العناصر لها ن (ا) = ٢ .

ب = { أ، ب، جـ، د } ويكون عدد العناصر لها ن (ب) = ٤ .

جـ = { صورة ، كتابة } ويكون عدد العناصر لها ن (جـ) = ٢ .

طريقة الخاصة المميزة للعناصر

تتلخص هذه الطريقة في كتابة المجموعة كالتالي:

ا = { س : س (ا) } حيث س (ا) الصفة المميزة للعناصر س ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (١)

ا = { س : س عدد زوجي }

وتكون المجموعة ا بطريقة جدولة العناصر على الصورة

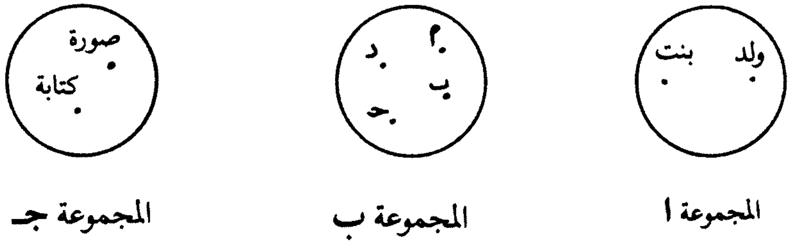
ا = { . . . ، -٤، -٢، ٢، ٤، . . . }

طريقة أشكال فن

أشكال فن عبارة عن أشكال أو رسوم هندسية تحوي بداخلها نقاطًا تمثل عناصر المجموعة، وقد تكون هذه الأشكال مربعات، أو مثلثات، أو مستطيلات، أو دوائر،

أو أشكال بيضاوية مثلاً، وسوف نستخدم في هذا الكتاب الأشكال الدائرية والمستطيلة.

ويمكن تمثيل المجموعات السابقة أ، ب، جـ بأشكال فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ١): أشكال فن لبعض المجموعات

(٩ ـ ٢ ـ ٢) المجموعة الجزئية

إذا وقعت جميع عناصر المجموعة ا ضمن عناصر المجموعة ب فإنه يقال: إن المجمـوعة ا مجموعة جزئية من المجموعة ب ويرمز لها بالرمز ا $\subset$ ب، وإذا كانت المجموعة ب لا تحوي جميع عناصر ا فإنه يقال إن ا ليست مجموعة جزئية من ب، وتكتب على الصورة ا $\not\subset$ ب وتمثل بأشكال فن كالتالي:

شكل (٩ ـ ٢): المجموعة الجزئية

مثـال (٢)

ا = {١، ٣} ، ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}،

جـ = {٣، ٥، ٦، ٧}

نلاحظ أن :

ا $\subset$ ب لأن جميع عناصر ا موجودة في المجموعة ب .

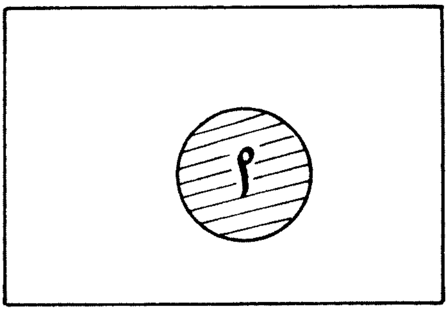
جـ $\not\subset$ ب لأن العنصر ٧ ليس عنصرًا في المجموعة ب .

ا $\not\subset$ جـ لأن العنصر ١ الموجود في المجموعة ا ليس عنصرًا في المجموعة جـ .

(٩ ـ ٢ ـ ٣) المجموعة الشاملة (ش)

لأي مجموعة من المجموعات يكون لها مجموعة أكبر منها وأعم وأشمل وتسمى المجموعة الشاملة، ويرمز لها بالرمز **ش**، والمثال على ذلك مجموعة طلاب كلية الآداب بجامعة الملك سعود، هي مجموعة جزئية من طلاب جامعة الملك سعود، ومجموعة طلاب جامعة الملك سعود مجموعة جزئية من طلاب جامعات المملكة العربية السعودية، ومجموعة طلاب جامعات المملكة العربية السعودية هي مجموعة جزئية من طلاب جامعات الدول العربية، وهكذا . . .

وسوف نمثل المجموعة الشاملة **ش** بشكل «فن» عبارة عن مستطيل ترسم داخله الأشكال الدائرية الممثلة للمجموعات الأخرى، كما هو موضح بالرسم :



شكل (٩ ـ ٣) : المجموعة الشاملة

(٩ ـ ٢ ـ ٤) المجموعة الخالية (ϕ)

وهي مجموعة لا تحتوي على أية عناصر، ويرمز لها بالرمز ϕ ، وتكتب على الصور التالية :

$$\phi = \{ \quad \}$$

والأمثلة على المجموعات الخالية كثيرة نذكر منها:
مجموعة الطلاب بجامعة الملك سعود الذين تقل أعمارهم عن عشر سنوات في الوقت الحالي مثلاً، مجموعة أيام السنة التي زادت فيها كمية الأمطار اليومية في مدينة الرياض عن متر.

ويجب أن نعرف أن عدد العناصر لها هو ن (ϕ) = صفر

مثـال (٣)

اذكر الفروق بين

ϕ ، صفر ، { صفـر }

نلاحظ أن:

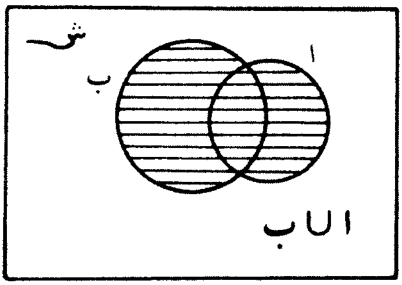
ϕ هي عبارة عن المجموعة الخالية التي لا توجد بها أية عناصر،
صفر هو رقم قيمته صفر.
{ صفـر } هي مجموعة تحتوي على عنصر واحد قيمته صفر.

(٩ ـ ٢ ـ ٥) اتحاد مجموعتين

يعرَّف اتحاد مجموعتين ا، ب بأنه المجموعة جـ مثلاً، وهي عبارة عن مجموعة العناصر الموجودة في ا أو ب أو كليهما معًا، ويرمز لها كالتالي:

جـ = ا $\cup$ ب (وتقرأ ا اتحاد ب)

وتمثل بشكل فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ٤): اتحاد مجموعتين

مثـال (٤)

إذا كانت المجموعات التالية

ا = { ١ ، ٢ } ، ب = { ١، ٣، ٤، ٧ } ، جـ = { ٨ }

فأوجد الآتي

ا ∪ ب ، ا ∪ جـ ، ب ∪ جـ

وعدد عناصر كل من

ن (ا ∪ ب) ، ن (ا ∪ جـ) ، ن(ب ∪ جـ)

الحـــل

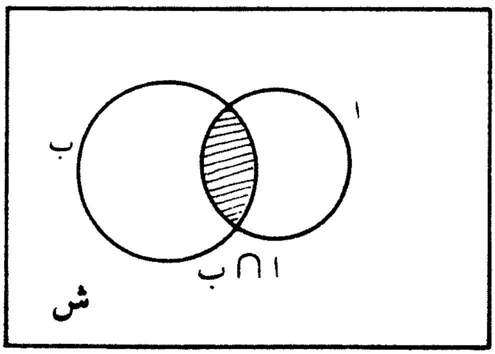
ا ∪ ب = { ١، ٢، ٣، ٤، ٧ } ، ن (ا ∪ ب) = ٥

ا ∪ جـ = { ١، ٢، ٨ } ، ن (ا ∪ جـ) = ٣

ب ∪ جـ = { ١، ٣، ٤، ٧، ٨ } ، ن (ب ∪ جـ) = ٥

(٩ ـ ٢ ـ ٦) تقاطع المجموعات

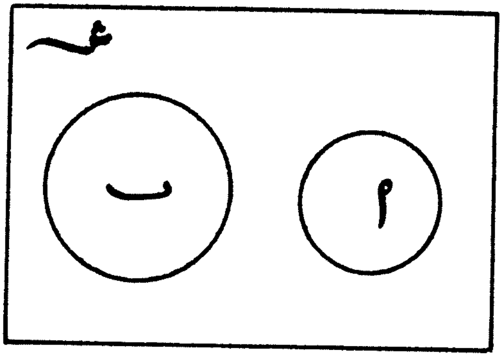
يعرَّف تقاطع مجموعتين ا، ب مثلاً بالمجموعة د حيث إن د عبارة عن مجموعة العناصر الموجودة في كل من ا، ب معًا، وتكتب: د = ا ∩ ب (وتقرأ ا تقاطع ب) وتمثل بشكل فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ٥): تقاطع مجموعتين

وفي حالة عدم وجود عناصر مشتركة في المجموعتين ا، ب فيقال إن المجموعتين ا، ب منفصلتان أو متنافيتان أي أن ا ∩ ب = ϕ

وتمثل بشكل فن كالتالي:



شكل (٩ ـ ٦): تنافي مجموعتين

مثـال (٥)

من مثال (٤) السابق أوجد ا ∩ ب ، ا ∩ جـ ، ب ∩ جـ وعدد عناصر كل منهم نلاحظ أن

ا ∩ ب = { ١، ٢ } ∩{ ١، ٣، ٤، ٧ } = { ١ }

ا ∩ جـ = { ١، ٢ } ∩{ ٨ } = ϕ

ب ∩ جـ = { ١، ٣، ٤، ٧ } ∩{ ٨ } = ϕ

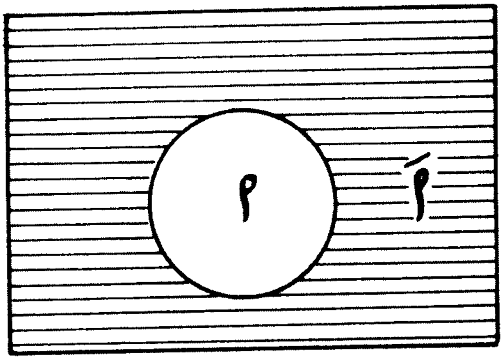
ن (ا ∩ ب) = ١ ، ن (ا ∩ جـ) = صفر ، ن (ب ∩ جـ) = صفر

(٩ ـ ٢ ـ ٧) المجموعة المكملة

تعرّف المجموعة المكملة للمجموعة ا بأنها مجموعة العناصر المجودة في المجموعة الشاملة وليست موجودة في المجموعة ا، ويرمز لها بالرمز اَ (وتقرأ مكملة ا) أي أن:

اَ = ش - ا،

وباستخدام شكل فن نعبر عن اَ كالتالي:



شكل (٩ ـ ٧): المجموعة المكملة

ونلاحظ أن

$$\text{ش} = \text{ا} \cup \overline{\text{ا}}$$
$$\phi = \text{ا} \cap \overline{\text{ا}}$$

مثـال (٦)

إذا كانت **ش** = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ا = { ١ ، ٣ ، ٥ }

فأوجد $\overline{\text{ا}}$، ن ($\overline{\text{ا}}$)

$\overline{\text{ا}}$ = ش - ا

$\overline{\text{ا}}$ = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ن ($\overline{\text{ا}}$) = ٣

ملاحظة مهمة:

نلاحظ أن

$$\overline{(\text{ا} \cup \text{ب})} = \overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$$
$$\overline{(\text{ا} \cap \text{ب})} = \overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$$

ويسمى «**قانون ديمورجن**»، وله أهمية كبيرة في دراسة الاحتمالات.

مثال (٧)

ش = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، ا = {١، ٢} ،
ب = {١، ٣، ٥} ، جـ = {٦}

أوجد

$\overline{\text{ا}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ ، $\overline{\text{جـ}}$ ، ا ∪ ب ، ا ∪ جـ

ا ∪ ب ∪ جـ ، ا ∩ ب ، $\overline{(\text{ا} \cap \text{ب})}$ ، $\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$

$\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$ ، $\overline{(\text{ا} \cup \text{ب})}$ وعدد عناصر كل منهم

نجد أن

$\overline{\text{ا}}$ = {٣، ٤، ٥، ٦} ، ن ($\overline{\text{ا}}$) = ٤

$\overline{\text{ب}}$ = {٢، ٤، ٦} ، ن ($\overline{\text{ب}}$) = ٣

$\overline{\text{جـ}}$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥} ، ن ($\overline{\text{جـ}}$) = ٥

ا ∪ ب = {١، ٢، ٣، ٥} ، ن (ا ∪ ب) = ٤

ا ∪ جـ = {١، ٢، ٦} ، ن (ا ∪ جـ) = ٣

ا ∪ ب ∪ جـ = {١، ٢، ٣، ٥، ٦} ، ن (ا ∪ ب ∪ جـ) = ٥

ا ∩ ب = {١} ، ن (ا ∩ ب) = ١

$\overline{\text{ا} \cap \text{ب}}$ = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، ن $\overline{(\text{ا} \cap \text{ب})}$ = ٥

$\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$ = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، ن ($\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$) = ٥

$\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$ = {٤، ٦} ، ن ($\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$) = ٢

$\overline{\text{ا} \cup \text{ب}}$ = {٤، ٦} ، ن $\overline{(\text{ا} \cup \text{ب})}$ = ٢

ومن ذلك نلاحظ أن :

$$\overline{\text{ا} \cap \text{ب}} = \overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}}$$

$$\overline{\text{ا} \cup \text{ب}} = \overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}$$

وهذا يحقق قانون ديمورجَن الذي سبقت الإشارة إليه .

(٩ ـ ٣) التجربة العشوائية

يستخدم علم الإحصاء في استقراء النتائج والمشاهدات والقياسات التي يسجلها العلماء والباحثون نتيجة إجراء التجارب. والتجربة العشوائية هي كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا بشكل مؤكد، فمثلاً نسمى إلقاء قطعة نقود تجربة عشوائية، لأننا نعلم مسبقا نتائجها الممكنة وهي الصورة والكتابة ولكن لا نستطيع أن نتنبأ بأي من الصورة أو الكتابة يظهر بعد إلقائها. وكذلك فإن رمي زهرة النرد (مكعب سداسي الوجوه) مرة واحدة فهي تجربة عشوائية أيضًا، لأن جميع نتائج التجربة معروفة. ويكون الوجه الذي يظهر إلى أعلى يحمل أحد الأعداد الآتية: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.

(٩ ـ ٤) فراغ العينة والحادثة

فراغ العينة هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، وسنرمز لفراغ العينة بالرمز **ش**. لكن الحادثة ا هي مجموعة جزئية من فراغ العينة، أي أن ا ⊂ **ش**، ففي حالة رمي قطعة نقود تكون النتيجة صورة ص أو كتابة ك فإن فراغ العينة **ش** = { ص، ك } وإذا كان اهتمامنا بوجه معين من وجهي قطعة النقود، وليكن الصورة مثلاً فإن ظهور هذا الوجه يسمى حادثة، ونرمز لها بالرمز ا حيث ا = { ص } وتكون الحادثة أ مجموعة جزئية من فراغ العينة ش أي ا ⊂ **ش**.

وكذلك في حالة رمي زهرة النرد تكون النتيجة هي ظهور أحد الأوجه الستة الذي يحمل أحد الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، فإن فراغ العينة في هذه الحالة **ش** = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ } وإذا كان اهتمامنا بظهور وجه يحمل عددًا زوجيًا فإن ظهور أي وجه بعدد زوجي يسمى حادثة، ولتكن ب = { ٢، ٤، ٦ } والحادثة ب تكون مجموعة جزئية من **ش**. ونلاحظ أن الحادثة قد تحتوي على عنصر واحد، كما في حالة ظهور الصورة عند رمي قطعة النقود، أو تحتوي على أكثر من عنصر في حالة ظهور العدد الزوجي عند رمي زهرة النرد ب = { ٢، ٤، ٦ }.

هناك نوعان من فراغ العينة هما فراغ العينة المنتهي وفراغ العينة غير المنتهي، وسوف نكتفي في هذا الكتاب بدراسة الفراغ المنتهي، وهو فراغ العينة القابل للعد.

مثـال (٨)

إذا رميت قطعة نقود مرتين متتاليتين فأوجد ما يلي:

(١) فراغ العينة لهذه التجربة العشوائية، وكذلك عدد عناصر فراغ العينة.

(٢) الحوادث التالية، وكذلك عدد عناصر كل حادثة.

ا = { ظهور صورة واحدة } ، **ب** = { ظهور صورة على الأقل }

جـ = { ظهور كتابة مرتين }

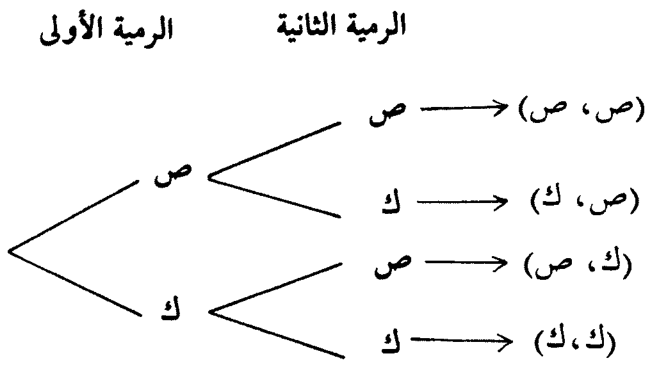
الحـــل

إذا رمزنا للصورة بالرمز (ص) وللكتابة بالرمز (ك) فإن فراغ العينة **ش** يكون كما يلي:

ش = { (ص، ص) ، (ص، ك) ، (ك، ص) ، (ك، ك) }

ن (**ش**) = ٤

ويمكن إيجاد **ش** باستخدام الشجرة البيانية كما يلي:



شكل (٩ ـ ٨): الشجرة البيانية

وواضح من الشجرة البيانية أن كل فرع يحدد أحد النتائج الممكنة للتجربة العشوائية (ورمي قطعة النقود مرتين) فمثلا الفرع الأعلى يحدد النتائج (ص ، ص) وهو ظهور الصورة في الرمية الأولى، وظهور صورة في الرمية الثانية كذلك.

وبالمثل بقية الفروع تحدد بقية نتائج التجربة التي تمثل فراغ العينة ش التي سبقت كتابتها والموضحة بجوار الرسم

ا = { (ص ، ك) ، (ك ، ص) } ، ن (ا) = ٢

ب = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) } ، ن (ب) = ٣

جـ = { (ك ، ك) } ، ن (جـ) = ١

مثال (٩)

إذا ألقينا حجريْ نرد مرة واحدة فاكتب فراغ العينة ش والحوادث التالية:

ا = { ظهور رقمين متساويين } ، ب = { مجموع الرقمين يساوي عشرة } ،
جـ = { مجموع الرقمين أقل من ٢ } .

يمكن تمثيل نتائج الحجر الأول على المحور الأفقي، والحجر الثاني على المحور الرأسي، ونكتب نتائج الحجرين كما هو موضح بالشكل التالي:

الحجر الثاني \ الحجر الأول	١	٢	٣	٤	٥	٦
٦	١ ، ٦	٢ ، ٦	٣ ، ٦	٤ ، ٦	٥ ، ٦	٦ ، ٦
٥	١ ، ٥	٢ ، ٥	٣ ، ٥	٤ ، ٥	٥ ، ٥	٦ ، ٥
٤	١ ، ٤	٢ ، ٤	٣ ، ٤	٤ ، ٤	٥ ، ٤	٦ ، ٤
٣	١ ، ٣	٢ ، ٣	٣ ، ٣	٤ ، ٣	٥ ، ٣	٦ ، ٣
٢	١ ، ٢	٢ ، ٢	٣ ، ٢	٤ ، ٢	٥ ، ٢	٦ ، ٢
١	١ ، ١	٢ ، ١	٣ ، ١	٤ ، ١	٥ ، ١	٦ ، ١

شكل (٩ ـ ٩): تمثيل فراغ العينة بواسطة شبكة التربيع

ومن الشكل يمكن كتابة فراغ العينة ش كالتالي

ش = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، . . . . ، (٦ ، ٦) }

ن (ش) = ٣٦

الحوادث ا ، ب كما هي موضحة بالشكل الممثل لفراغ العينة ش هي

ا = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)، (٤ ، ٤)، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

ب = { (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٤) }

جـ = ϕ

ن (ا) = ٦ ، ن (ب) = ٣ ، ن (جـ) = صفر

يمكن أن نستعرض بعض التعاريف، وبعض أنواع الحوادث فيما يلي.

(٩ ـ ٤ ـ ١) الحالات المواتية

هي النتائج أو الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي ندرس احتمال حدوثه، ففي حالة رمي قطعة النقود فإن ظهور الصورة يعتبر حالة مواتية، إذا كانت الحادثة المطلوبة هي ظهور الصورة كما يعتبر ظهور الكتابة حالة غير مواتية. وكذلك في حالة رمي زهرة النرد مثلاً إذا كانت الحادثة هي الحصول على عدد زوجي فإن الحصول على الأوجه ٢ ، ٤ ، ٦ حالات مواتية، أو حالات نجاح لحدوث العدد الزوجي في التجربة العشوائية.

(٩ ـ ٤ ـ ٢) الحالات المتماثلة (المتساوية الفرص)

إذا كان عندنا تجربة عشوائية وهي رمي زهرة النرد وكانت هذه الزهرة مصنوعة من مادة متجانسة الكثافة، وكان مكعب الزهرة منتظمًا وكان الرامي غير متحيز في رميته فإن كل الظروف مهيأة للحصول على أي وجه من الستة تماثل الظروف المهيأة لأي وجه آخر. ولذلك تعتبر هذه الحالات متكافئة الفرصة ومتماثلة. وكذلك في حالة رمي قطعة نقود أو سحب كرة من مجموعة كرات متساوية الوزن والحجم في صندوق تكون متساوية الفرصة عندما لا يكون هناك ما يدعو لأن نتوقع حدوث أحدهما دون حدوث أي حادثة أخرى، وتكون المصادفة وحدها هي التي تحدد ذلك.

(٩ ـ ٤ ـ ٣) الحوادث المتنافية

إذا استحال حدوث أي حادثتين معا. فإنه يقال إن هاتين الحادثتين متنافيتان أو مانعتان لبعضهما. ولتوضيح ذلك عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة فإنه يستحيل ظهور الصورة والكتابة في وقت واحد. فإذا كانت الحادثة ا تمثل ظهور الصورة والحادثة ب تمثل ظهور الكتابة فإن ا $\cap$ ب = ϕ .

(٩ ـ ٤ ـ ٤) الحوادث الشاملة

يطلق على مجموعة من الحوادث $ا_{١}$ ، $ا_{٢}$ ، . . . . . ، $ا_{ن}$ حوادث شاملة عند إجراء تجربة عشوائية معينة، إذا كان لا بد من حدوث أحد هذه الحوادث عند إجراء هذه التجربة. ومثال على ذلك عند رميْ حجر النرد فإن الحصول على الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ تعتبر حوادث شاملة.

(٩ ـ ٤ ـ ٥) الحوادث المستقلة

إذا كان لدينا حادثتان ا ، ب وكان حدوث أحدهما لا يؤثر في حدوث الأخرى أو عدم حدوثها فإنه يقال: إن الحادثتين ا ، ب مستقلتان. فمثلاً عند إلقاء قطعتين من النقود فإن ظهور الصورة للقطعة الأولى لا يؤثر على ظهور الصورة أو عدم ظهورها على القطعة الثانية ويقال: إنهما حادثتان مستقلتان.

فيما يلي نورد بعض الأمثلة على الحوادث:

١) ا $\cup$ ب تعني حدوث ا أو حدوث ب أو حدوث كليهما، أو بمعنى آخر حدوث أحدهما على الأقل.

٢) ا $\cap$ ب تعني حدوث ا و ب معًا.

٣) $\overline{ا}$ عدم حدوث ا .

(٩ ـ ٥) تعريف الاحتمالات

سندرس فيما يلي نوعين من تعاريف الاحتمالات، وهما:

(٩ ـ ٥ ـ ١) التعريف التقليدي للاحتمال

إذا كان لدينا الحادثة ا وهذه الحادثة تحدث بعدد ن (ا) من المرات وكانت ن (ش) عدد جميع الحالات الممكنة التي لها نفس الفرصة في الحدوث. فإن احتمال حدوث الحادثة (نجاح حدوثها)، ويرمز له بالرمز ح (ا) يعطي بالعلاقة

$$ح (ا) = \frac{ن (ا)}{ن (ش)} \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

ملحوظة:

التعريف التقليدي يصلح فقط عندما تكون نتائج التجربة العشوائية متماثلة أي متساوية الفرصة في الظهور.

مثال (١٠)

رميت زهرة نرد مرة واحدة أوجد احتمال أن يظهر رقم زوجي.

عند إلقاء زهرة النرد مرة واحدة فإن فراغ العينة **ش** يكون

$$ش = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \} \quad ، \quad ن (ش) = ٦$$

ونفرض أن الحادثة ا تمثل ظهور رقم زوجي

$$ا = \{ ٢ ، ٤ ، ٦ \} \quad ، \quad ن (ا) = ٣$$

$$ح (ا) = \frac{ن (ا)}{ن (ش)} = \frac{٣}{٦}$$

$$\therefore \quad ح (ا) = \frac{١}{٢} = ٠,٥$$

(٩ ـ ٥ ـ ٢) تعريف الاحتمال بالنسبة (أو التجريبي)

إذا ألقينا قطعة نقود ن من المرات، وحصلنا على عدد ى من الصور فإن نسبة ظهور عدد الصور يساوي $\frac{ى}{ن}$.

هذه النسبة من الناحية التجريبية تختلف عن المقدار الثابت $\frac{١}{٢}$ (وهو احتمال ظهور الصورة لقطعة منتظمة غير متحيزة) ولكن كلما زاد عدد الرميات لقطعة النقود أي زادت ن فإن النسبة $\frac{ي}{ن}$ تقترب كثيراً إلى المقدار $\frac{١}{٢}$ ويمكن القول إن

$$\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نها}} \frac{ي}{ن} = \frac{١}{٢} .$$

وهذا هو التعريف التجريبي لاحتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة نقدية. وعلى ذلك يمكن تعريف الاحتمال بالنسبة كما يلي:

«إذا أجريت تجربة مرات متتالية عددها ن وكان عدد المرات التي تظهر فيها حادثة معينة هو ى فإن احتمال وقوع هذه الحادثة يساوي $\underset{ن \leftarrow \infty}{\text{نها}} \frac{ى}{ن}$ ويسمى المقدار $\frac{ى}{ن}$ التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي».

(٩ - ٦) مسلمات الاحتمالات

إذا كانت **ش** فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكانت ا و ب أي حادثتين من **ش** عندئذ تسمى ح دالة احتمال ويسمى العدد ح (ا) احتمال الحادثة ا إذا تحققت المسلمات التالية:

(٩ - ٦ - ١) المسلمة الأولى

لأي حادثة ا فإن

$$ح (ا) \geqslant صفر$$

(٩ - ٦ - ٢) المسلمة الثانية

$$ح (\textbf{ش}) = ١ .$$

(٩ - ٦ - ٣) المسلمة الثالثة

لأي حادثتين متنافيتين ا و ب أي أن ا $\cap$ ب = ϕ فإن:

$$ح (ا \cup ب) = ح (ا) + ح (ب)$$

(٩ ـ ٦ ـ ٤) المسلمة الرابعة

إذا كانت $ا_١$، $ا_٢$، . . . متوالية من الحوادث المتنافية ثنائيًا أي أن

$$ا_ر \cap ا_ك = \phi$$

لأي $ر \neq ك$ يكون

$$ح\,(ا_١ \cup ا_٢ \cup \ldots) = ح\,(ا_١) + ح\,(ا_٢) + \ldots$$

وسنستخدم فيما يلي هذه البديهيات الاحتمالية في إثبات بعض النظريات وبعض العلاقات الاحتمالية.

نظريـة (١)

احتمال حدوث الحادثة الخالية ϕ يساوي صفرًا

أي أن:

$$ح\,(\phi) = صفر$$

البرهـــان

الحادثتان الشاملة **ش** والخالية ϕ تحققان التالي:

$$ش \cap \phi = \phi \qquad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$ش \cup \phi = ش$$

$$ح\,(ش \cup \phi) = ح\,(ش) \qquad \ldots\ldots\ldots (٣)$$

من (٢) ينتج أن الحادثتين ش، ϕ متنافيتان وبتطبيق المسلمة الثالثة ينتج

$$ح\,(ش) + ح\,(\phi) = ح\,(ش)$$

وبالتالي فإن:

$$ح\,(\phi) = صفر$$

نظريـة (٢)

احتمال حدوث الحادثة ا مضافًا إليه احتمال حدوث الحادثة المكملة $\bar{ا}$ يساوي الواحد الصحيح.

أي أن:

$$ح(ا) + ح(\bar{ا}) = ١$$

البرهـــان

الحادثتان ا، $\bar{ا}$ يحققان التالي

$$ا \cap \bar{ا} = \phi$$

$$ا \cup \bar{ا} = ش \quad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

وفق ذلك نجد:

$$ح(ا \cup \bar{ا}) = ح(ش)$$

وبتطبيق المسلمة الثالثة للطرف الأيمن، والمسلمة الثانية للطرف الأيسر نحصل على

$$ح(ا) + ح(\bar{ا}) = ١$$

مثـال (١١)

إذا كان احتمال نجاح خالد في امتحان مادة الإحصاء التطبيقي $\frac{١}{٣}$ فأوجد احتمال رسوبه في هذا المقرر.

الحـــل

نفرض أن الحادثة ا تمثل نجاح خالد. فتكون الحادثة $\bar{ا}$ تمثل رسوبه.

$$\therefore ح(ا) = \frac{١}{٣}$$

ويكون المطلوب هو إيجاد ح ($\bar{ا}$)

$$\because ح(ا) + ح(\bar{ا}) = ١$$

هذا يكون على الصورة

$$\frac{١}{٣} + ح(\bar{ا}) = ١$$

ومنه نجد أن

$$ح(\bar{ا}) = \frac{٢}{٣} = ٠,٦٧$$

نظريـة (٣)

لأي حادثتـين ا، ب فإن احتمال حدوث ا وعدم حدوث ب يساوي احتمال حدوث ا مطروحا منه احتمال حدوث ا و ب معًا.

أي أن

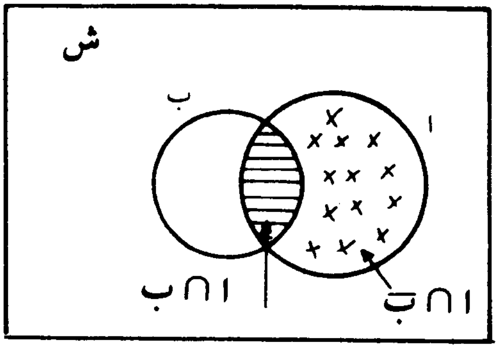
$$\text{ح}(\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\text{ا}) - \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب})$$

البرهـــان

نوضح الحوادث

ا ، ب ، ش

بشكل فن كما هو مبين.



شكل (٩ ـ ١٠): تقاطع واتحاد مجموعتين

الحادثتان $\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}$ ، $\text{ا} \cap \text{ب}$ متنافيتان كما هو موضح بشكل فن

$$(\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}) \cap (\text{ا} \cap \text{ب}) = \phi$$

$$(\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}) \cup (\text{ا} \cap \text{ب}) = \text{ا}$$

$$\text{ح}\{(\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}) \cup (\text{ا} \cap \text{ب})\} = \text{ح}(\text{ا}) \qquad \ldots\ldots (٥)$$

وبتطبيق المسلمة الثالثة على (٥) نحصل على

$$\text{ح}(\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}) + \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب}) = \text{ح}(\text{ا})$$

$$\text{ح}(\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\text{ا}) - \text{ح}(\text{أ} \cap \text{ب})$$

مثال (١٢)

إذا كان احتمال نجاح سامي في الامتحان النهائي في مقرر علم الاجتماع الإحصائي هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال نجاح صالح وسامي في نفس المقرر هو $\frac{١}{٤}$ فأوجد احتمال نجاح سامي ورسوب صالح.

الحل

نفرض أن الحادثتان ا ، ب كالتالي:

ا = { نجاح سامي } ، ب = { نجاح صالح }

$$ح\,(ا) = \frac{١}{٣} \quad ، \quad ح\,(ا \cap ب) = \frac{١}{٤}$$

فيكون المطلوب هو إيجاد $ح\,(ا \cap \overline{ب})$

من نظرية (٣)

$$ح\,(ا \cap \overline{ب}) = ح\,(ا) - ح\,(ا \cap ب)$$

وبالتالي يكون:

$$ح\,(ا \cap ب) = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{٤ - ٣}{١٢}$$

$$= \frac{١}{١٢} = ٠,٠٨$$

نظرية (٤)

إذا كانت ا ، ب حادثتين فإن احتمال حدوث إحداهما على الأقل يساوي احتمال حدوث ا مضافًا إليه احتمال حدوث ب مطروحًا منهما احتمال حدوث ا ، ب معًا.

أي أن:

$$ح\,(ا \cup ب) = ح\,(ا) + ح\,(ب) - ح\,(ا \cap ب)$$

البرهـــان

الحادثتان ب، $\text{ا} \cap \bar{\text{ب}}$ متنافيتان وبالتالي يحققان

$$\text{ب} \cap (\text{ا} \cap \bar{\text{ب}}) = \phi$$

$$\text{ا} \cup \text{ب} = (\text{ا} \cap \bar{\text{ب}}) \cup \text{ب}$$

أي أن

$$\text{ح}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \text{ح}((\text{ا} \cap \bar{\text{ب}}) \cup \text{ب}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

بتطبيق المسلمة الثالثة على الطرف الأيسر في (٦) نحصل على

$$\text{ح}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{ب}) + \text{ح}(\text{ا} \cap \bar{\text{ب}}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٧)$$

بتطبيق نظرية (٣) على الطرف الأيسر من (٧) نحصل على

$$\text{ح}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{ب}) + \text{ح}(\text{ا}) - \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب})$$

مثـال (١٣)

إذا كان احتمال نجاح عمر في مقرر النبات العام هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال نجاح عمر وخالد في نفس المقرر هو $\frac{١}{٤}$ واحتمال نجاح أحدهما على الأقل هو $\frac{١}{٢}$ فأوجد احتمال نجاح خالد في ذلك المقرر.

الحـــل

نفرض أن الحادثة ا تمثل نجاح عمر والحادثة ب تمثل نجاح خالد

$$\text{ح}(\text{ا}) = \frac{١}{٣} \quad ، \quad \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٤} \quad ، \quad \text{ح}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \frac{١}{٢}$$

فيكون المطلوب هو ح (ب)

نعلم أن

$$\text{ح}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{ا}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب})$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٣} + \text{ح}(\text{ب}) - \frac{١}{٤}$$

وبالتالي يكون :

$$\text{ح (ب)} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} = \frac{٦ - ٤ + ٣}{١٢} = \frac{٥}{١٢} = ٠,٤٣$$

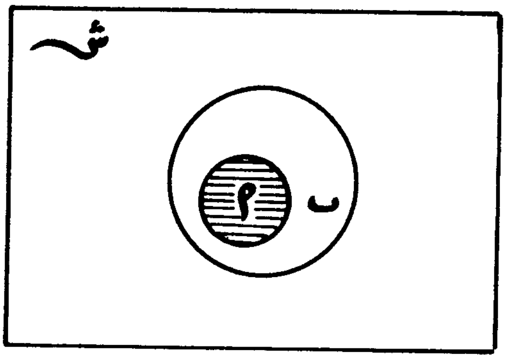
نظريـة (٥)

إذا كانت الحادثة ا مجموعة جزئية من الحادثة ب فإن احتمال حدوث الحادثة (أ) أقل من أو يساوي احتمال حدوث الحادثة ب أي أن ح (ا) ≤ ح (ب).

البرهـــان

نرسم شكل فن كما هو موضح

ونلاحظ من الرسم أن



شكل (٩ ـ ١١) : المجموعة الجزئية

ا ⊂ ب

وأن ا ∩ ب = ا

∵ ح (ب ∩ آ) = ح (ب) − ح (ا ∩ ب)

∴ ح (ب ∩ آ) = ح (ب) − ح (ا)

ولكن ح (ب ∩ آ) ≥ صفر

∴ ح (ب) − ح (ا) ≥ صفر

ح (ب) ≥ ح (ا)

مثال (١٤)

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض، مرقمة من ١ إلى ٥، فأرقام الكرات الحمراء هي ١، ٢، ٣ ورقما الكرتين اللتين لونهما أبيض هما ٤، ٥. سحبت عينة من كرتين واحدة بعد الأخرى بدون إرجاع.

أوجــد:

أولاً: احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء.

ثانيًا: احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض.

ثالثًا: احتمال أن تكون الكرتان لونهما أحمر.

رابعًا: احتمال أن تكون الكرتان من نفس اللون.

الحــل

إذا فرضنا أن السحبة الأولى كانت الكرة رقم ١ فيبقى في الصندوق الكرات ذوات الأرقام ٢، ٣، ٤، ٥ وبذلك تكون السحبة الثانية واحدة من الأرقام الباقية السابقة. أما إذا كانت السحبة الأولى الكرة رقم ٢ فتكون السحبة الثانية من الأرقام الباقية ١، ٣، ٤، ٥ وهكذا، ويمكن كتابة فراغ العينة **ش** كالتالي:

ش = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ،
(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ،
(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ،
(٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، }

عدد عناصر فراغ العينة هو

ن (ش) = ٢٠ عنصرًا

أولاً: نفرض أن ا هي الحادثة بأن تكون الكرة الأولى بيضاء عندئذ يكون:

ا = { (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢)
، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) }

عدد عناصر الحادثة ا هو

ن (ا) = ٨ عناصر

$$ح(ا) = \frac{ن(ا)}{ن(ش)} = \frac{٨}{٢٠} = \frac{٢}{٥} = ٠,٤$$

ثانيًا: نفرض أن ب هي الحادثة التي يكون فيها لون الكرتين أبيض

ب = { (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) }

ن (ب) = ٢ عنصرًا

$$ح(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ش)}$$

$$= \frac{٢}{٢٠} = \frac{١}{١٠} = ٠,١$$

ثالثًا: نفرض أن حـ هي الحادثة التي يكون فيها لون الكرتين أحمر

حـ = { (١ ، ٢)، (١ ، ٣)، (٢ ، ١)، (٢ ، ٣)، (٣ ، ١)، (٣ ، ٢) }

ن (حـ) = ٦

$$ح(حـ) = \frac{ن(حـ)}{ن(ش)}$$

$$= \frac{٦}{٢٠} = \frac{٣}{١٠} = ٠,٣$$

رابعًا: الكرتان من نفس اللون معناه هو أن الكرتين لونهما أبيض أي أن الحادثة ب أو الكرتان لونهما أحمر أي أن الحادثة حـ، ولأن ب، حـ حادثتان متنافيتان فيكون إيجاد المطلوب كما يلي:

$$ح(ب \cup حـ) = ح(ب) + ح(حـ)$$

$$= ٠,١ + ٠,٣$$

$$= ٠,٤$$

مثال (١٥)

إذا كانت الحادثتان ا، ب بحيث كان

ح (ا) = ٠,٢ ، ح (ب) = ٠,٤ ، ح (ا $\cup$ ب) = ٠,٥

أوجد:

ح (ا $\cap$ ب) ، ح ($\overline{ا}$ $\cap$ $\overline{ب}$) ، ح ($\overline{ا}$ $\cap$ ب)

أولاً: ح (ا $\cap$ ب) = ح (ا) + ح (ب) − ح (ا $\cup$ ب)

= ٠,٢ + ٠,٤ − ٠,٥

= ٠,١

ثانيًا: ح (ا $\cap$ ب) = ح ($\overline{ا \cup ب}$)

= ١ − ح (أ $\cup$ ب)

= ١ − ٠,٥

= ٠,٥

ثالثًا: ح ($\overline{ا}$ $\cap$ ب) = ح (ب) − ح (ا $\cap$ ب)

= ٠,٤ − ٠,١

= ٠,٣

(٩ ـ ٧) الاحتمال الشرطي والاستقلال

(٩ ـ ٧ ـ ١) الاحتمـال الشرطـي

إذا كان لدينا الحادثتان ا، ب فإن احتمال حدوث الحادثة ا إذا علمنا بحدوث الحادثة ب يسمى الاحتمال الشرطي ويرمز له بالرمز ح (ا | ب) ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\text{ح}(\text{ا} | \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})} \qquad \text{.............} \quad (٨)$$

ويمكن من تعريف الاحتمال أن تكتب المعادلة (٨) على الصورة التالية:

$$ح(ا \mid ب) = \frac{\frac{ن(ا \cap ب)}{ن(ش)}}{\frac{ن(ب)}{ن(ش)}} = \frac{ن(ا \cap ب)}{ن(ب)}$$

مثال (١٦)

إذا كان احتمال أن ينجح عمر هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال أن ينجح عمر وخالد هو $\frac{١}{٤}$ فأوجد احتمال نجاح خالد إذا علم أن عمر قد نجح.

الحل

نفرض أن الحادثة ا هي نجاح عمر والحادثة ب تمثل نجاح خالد فيكون

$$ح(ا) = \frac{١}{٣} \text{ ، } ح(ا \cap ب) = \frac{١}{٤}$$

ويكون المطلوب هو إيجاد ح (ب | ا) وهذا الاحتمال الشرطي يعطى بالعلاقة التالية:

$$ح(ب \mid ا) = \frac{ح(ا \cap ب)}{ح(ا)} = \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٣}} = \frac{٣}{٤} = ٠{,}٧٥$$

(٩ - ٧ - ٢) الاستقلال

يقال: إن الحادثتين ا، ب مستقلتان إذا كان حدوث أي منهما لا يؤثر على حدوث الأخرى أي أن الاحتمال الشرطي يساوي الاحتمال غير الشرطي أي أن

$$ح(ا \mid ب) = ح(ا) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٩)$$

ويمكن وضع هذا الشرط بصورة أخرى إذا ما طبقنا تعريف الاحتمال الشرطي للطرف الأيمن في المعادلة (٩) أي

$$\frac{ح(ا \cap ب)}{ح(ب)} = ح(ا)$$

$\therefore$ ح (ا $\cap$ ب) = ح (ا) ح (ب) .... (١٠)

والتعريف (١٠) يسمى شرط استقلال الحادثتين ا، ب وتطبق هذه المعادلة (١٠) فقط في حالة استقلال الحادثتين ا، ب كما أنه إذا تحققت المعادلة (١٠) تكون الحادثتان ا، ب مستقلتين عن بعضهما.

نلاحظ مما سبق أنه يمكن القول: إن الحادثتين ا، ب مستقلتان إذا تحققت علاقة واحدة فقط من العلاقات التالية:

ح (ا | ب) = ح (ا)

أو ح (ب | ا) = ح (ب)

أو ح (ا $\cap$ ب) = ح (ا) ح (ب)

ومعنى ذلك أنه إذا طلب منا إثبات استقلال حادثتين فسنكتفي بتوضيح أن إحدى هذه العلاقات الثلاث محققة. وبالتالي فإن العلاقات الثلاث السابقة تكون صحيحة ويمكن استخدام هذه العلاقات إذا لزم الأمر.

مثال (١٧)

إذا كان احتمال نجاح عمر في امتحان قيادة السيارة هو $\frac{١}{٣}$ واحتمال نجاح خالد في نفس الامتحان هو $\frac{٥}{١٢}$ واحتمال نجاحهما معا هو $\frac{١}{٤}$ فهل نجاح عمر مستقل عن نجاح خالد أم لا.

الحل

كما سبق نفرض أولاً أن الحادثتين ا، ب يمثلان نجاح عمر وخالد على الترتيب فيكون.

ح (ا) = $\frac{١}{٣}$ ، ح (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ ، ح (ا $\cap$ ب) = $\frac{١}{٤}$ ،

وحيث إن

ح (ا) ح (ب) = $\frac{١}{٣} \times \frac{٥}{١٢} = \frac{٥}{٣٦}$

وبما أن

$$\frac{١}{٤} \neq \frac{٥}{٣٦}$$

أي أن

ح (ا ∩ ب) ≠ ح (ا) ح (ب)

∴ الحادثتين ا ، ب غير مستقلتين أي أن نجاح عمر ليس مستقلاً عن نجاح خالد.

مثـال (١٨)

أثبت أن

ح (ا ∩ ب) = ح (ب ∩ ا) = ح (ا | ب) ح (ب) = ح (ب | ا) ح (ا)

حيث إن

ا ∩ ب = ب ∩ ا

∴ ح (ا ∩ ب) = ح (ب ∩ ا) .... (١)

$$\text{ح (ا / ب)} = \frac{\text{ح (ا} \cap \text{ب)}}{\text{ح (ب)}}$$

أي أن:

ح (ا / ب) ح (ب) = ح (ا ∩ ب) .... (٢)

$$\text{ح (ب / ا)} = \frac{\text{ح (ب} \cap \text{ا)}}{\text{ح (ا)}}$$

ح (ب / ا) ح (ا) = ح (ب ∩ ا) .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج المطلوب.

مثـال (١٩)

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض أخذت عينة مكونة من كرتين واحدة بعد الأخرى بدون إرجاع. أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض.

الحـــل

نفرض أن الحادثة $ا_١$ هي أن الكرة الأولى بيضاء، الحادثة $ا_٢$ هي أن الكرة الثانية بيضاء ولكي تكون الكرتان لونهما أبيض لابد أن تكون الأولى بيضاء والثانية بيضاء أيضًا.

أي أن المطلوب ح ($ا_١ \cap ا_٢$)

ح ($ا_١$) = $\frac{٢}{٥}$ فيكون ح ($ا_٢$ / $ا_١$) = $\frac{٢ - ١}{٥ - ١} = \frac{١}{٤}$

ويكون:

ح ($ا_١ \cap ا_٢$) = ح ($ا_١$) ح ($ا_٢$ / $ا_١$)

$= \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٤}$

$= \frac{٢}{٢٠} = \frac{١}{١٠} =$ ٠,١

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في مثال (١٤) عند كتابة فراغ العينة.

مثـال (٢٠)

بفرض أن ا ، ب حادثتان بحيث ح (ا) = ٠,٥ ، ح ($\bar{ب}$) = ٠,٦٢٥ ، ح (ا $\cup$ ب) = ٠,٧٥

احسب ح (ب) ، ح ($\bar{ا} \cap \bar{ب}$) ، ح (ا / $\bar{ب}$).

الحـــل

لحساب هذه الاحتمالات السابقة نتبع الخطوات التالية:

ح (ب) = ١ - ح ($\bar{ب}$)

= ١ - ٠,٦٢٥

= ٠,٣٧٥

$$\because \text{ح}(\text{ا} \cup \text{ب}) = \text{ح}(\text{ا}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب})$$

$$٠,٧٥ = ٠,٥ + ٠,٣٧٥ - \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب})$$

$$\therefore \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب}) = ٠,٥ + ٠,٣٧٥ - ٠,٧٥$$

$$= ٠,١٢٥$$

$$\text{ح}(\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\overline{\text{ا} \cup \text{ب}}) = ١ - \text{ح}(\text{ا} \cup \text{ب})$$

$$= ١ - ٠,٧٥$$

$$= ٠,٢٥$$

$$\text{ح}(\text{ا} / \overline{\text{ب}}) = \frac{\text{ح}(\text{ا} \cap \overline{\text{ب}})}{\text{ح}(\overline{\text{ب}})}$$

$$= \frac{\text{ح}(\text{ا}) - \text{ح}(\text{ا} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\overline{\text{ب}})}$$

$$= \frac{٠,٥ - ٠,١٢٥}{٠,٦٢٥}$$

$$= \frac{٠,٣٧٥}{٠,٦٢٥}$$

$$= ٠,٦$$

(٩ - ٨) طـرق العـد

في هذا الجـزء سوف نتعـرض لطرق جديدة لإيجاد عدد نقاط (عناصر) فراغ العينة، وعدد نقاط الحادثة دون الحاجة لكتابة فراغ العينة أو كتابة الحادثة. وتسمى هذه الطرق طرق العد وتساعدنا في إيجاد قيم الاحتمال بسهولة خاصة في بعض الحالات التي يكـون فيهـا عدد نقاط فراغ العينة كبيراً مما يجعلها عرضة للخطأ أثناء حصرها وكتابتها. وسوف نذكر بعض التعاريف التي سبق للطالب دراستها في المراحل الدراسية السـابقـة، وذلك لمساعدتنا كثيراً في استيعاب هذا الجزء، وهي فكرة مضروب عدد ومفهوم التباديل والتوافيق.

(٩ ـ ٨ ـ ١) مضـــروب العـــدد

يعرف مضروب أي عدد صحيح موجب بأنه حاصل ضرب الرقم ١ في الرقم ٢ إلى أن نصل إلى الرقم نفسه فمثلاً مضروب ن يكتب على الصورة $\underline{|ن}$ (ويقرأ مضروب ن) يعرّف كما يلي:

$$\underline{|ن} = ١ \times ٢ \times \ldots \times ن$$

مثـال (٢١)

أوجـد مضـروب ٧ ($\underline{|٧}$)

$$\underline{|٧} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ = ٥٠٤٠$$

(٩ ـ ٨ ـ ٢) التبـــاديـــل

إذا كان لدينا ثلاث أحرف أ ب جـ. فإذا أردنا كتابة هذه الأرقام مع إجراء تبديل حرفين فقط فإننا نحصل على التباديل التالية:

أ ب جـ ، أ جـ ب ، جـ أ ب ، جـ ب أ ، ب جـ أ ، ب أ جـ أي نحصل على ٦ حالات

ويكون عدد الطرق ٦ = ٣ × ٢ ويرمز لها بالرمز $^{٣}ل_{٢}$

لاحظ أن عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (ى) وحدة مختلفة من بين (ن) وحدة بمراعاة الترتيب وحيث إنّ ى $\leqslant$ ن هي $^{ن}ل_{ى}$

وبوجه عام فإن $^{ن}ل_{ى}$ يعطي بالعلاقة التالية

$$^{ن}ل_{ى} = ن\,(ن - ١) \ldots\ldots\ldots (ن - ى + ١) \qquad \ldots\ldots\ldots (١١)$$

ويمكن كتابتها باستخدام صفة المضاريب على الصورة التالية:

$$^{ن}ل_{ى} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ى}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٢)$$

مثـال (٢٢)

أوجد كل من $^{٥}ل_{٣}$ ، $^{٥}ل_{٢}$

$$^{٥}ل_{٣} = \frac{\underline{|٥}}{\underline{|٥-٣}} = \frac{\underline{|٥}}{\underline{|٢}}$$

$$= \frac{\text{٥} \times \text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}}{\text{٢} \times \text{١}} = \text{٦٠}$$

$$^{\text{٥}}\text{ل}_{\text{٢}} = \frac{\underline{|\,\text{٥}}}{\underline{|\,\text{٥}-\text{٢}}} = \frac{\underline{|\,\text{٥}}}{\underline{|\,\text{٣}}}$$

$$= \frac{\text{٥} \times \text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}}{\text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}} = \text{٢٠}$$

(٩ ـ ٨ ـ ٣) التوافيـــق

هي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار (ى) من الأشياء المختلفة من بين (ن) من هذه الأشياء بغض النظر عن الترتيب ويرمز لها بالرمز $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ى}}$ وتعطى بالعلاقة :

$$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ى}} = \frac{\underline{|\,\text{ن}}}{\underline{|\,\text{ى}}\;\;\underline{|\,\text{ن}-\text{ى}}} \qquad \text{. . . . . (١٣)}$$

مثال (٢٣)

أوجـــد $^{\text{٥}}\text{ق}_{\text{٣}}$ ، $^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}}$

$$^{\text{٥}}\text{ق}_{\text{٣}} = \frac{\underline{|\,\text{٥}}}{\underline{|\,\text{٣}}\;\;\underline{|\,\text{٥}-\text{٣}}} = \frac{\underline{|\,\text{٥}}}{\underline{|\,\text{٣}}\;\;\underline{|\,\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٥} \times \text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}}{(\text{٣} \times \text{٢} \times \text{١})(\text{٢} \times \text{١})} = \text{١٠}$$

$$^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}} = \frac{\underline{|\,\text{٤}}}{\underline{|\,\text{٢}}\;\;\underline{|\,\text{٤}-\text{٢}}} = \frac{\underline{|\,\text{٤}}}{\underline{|\,\text{٢}}\;\;\underline{|\,\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٤} \times \text{٣} \times \text{٢} \times \text{١}}{(\text{٢} \times \text{١})(\text{٢} \times \text{١})} = \text{٦}$$

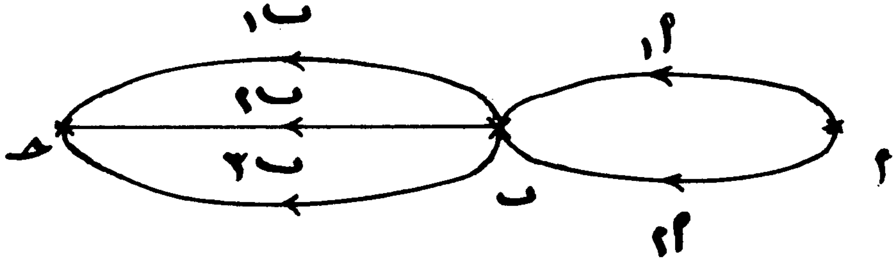
ملاحظــة :

يمكن تقسيم العناصر لفراغ العينة أو الحادثة من حيث الترتيب أو عدم الترتيب إلى نوعين هما ما يسمى العناصر المرتبة، وهي التي فيها العنصر (أ ، ب) مثلاً ليس هو نفس العنصر (ب ، أ) أما في حالة العناصر غير المرتبة فإنه يعتبر العنصر (أ ، ب) هو نفسه العنصر (ب ، أ) وسوف نتناول طرق العد في كل من النوعين كما يلي.

(٩ ـ ٨ ـ ٤) العناصـر المرتبـة

تحدث هذه العنـاصر عنـدمـا يكـون السحب بإحلال أو بدون إحلال وقبل التعرض لإيجاد القوانين في كل حالة من الحالات السابقة ندرس المثال التالي :

نفرض أن لدينا ثلاث مدن أ ، ب ، جـ وأنه يوجد طريقان بين أ ، ب هما ا$_1$ ، ا$_2$ كما هو موضح ويوجد ثلاث طرق بين المدينتين ب ، جـ، هم ب$_1$ ، ب$_2$ ، ب$_3$.



شكل (٩ ـ ١٢): طرق الإنتقال من أ إلى جـ

فإذا قام شخص ما من المدينة أ ليصل إلى المدينة جـ مارا بالمدينة ب فإن عدد الطرق الممكنة هي :

ا$_1$ ب$_1$ ، ا$_1$ ب$_2$ ، ا$_1$ ب$_3$ ، ا$_2$ ب$_1$ ، ا$_2$ ب$_2$ ، ا$_2$ ب$_3$

نلاحظ في هذا المثال أن عدد الطرق الممكنة هي ٦ = ٢ × ٣ ومعنى ذلك إذا كان لدينا عملية تتم على مرحلتين الأولى تتم بعدد ن$_1$ والثانية تتم بعدد ن$_2$ فإن عدد الطرق التي

تتم بها العملية = $ن_١ \times ن_٢$، وبوجه عام إذا كان لدينا عملية تتم بعدد ى من المراحل وعدد الطرق لهذه المراحل هي $ن_١$ ، $ن_٢$ ، . . . . . . $ن_ى$ (ى $\leqslant$ ن) فإن :

عدد الطرق كلها = $ن_١ \times ن_٢ \times . . . \times ن_ى$ . . . . (١٤)

وهـذه العلاقة (١٤) سوف تساعدنا في طرق العد لهذا النوع من العناصر (وتسمى بقاعدة الضرب).

السحب بإحلال (أو إرجاع)

إذا كان لدينا عدد ن من العناصر ثم تم السحب بإحلال (أو إرجاع) لعدد ى من العناصر. فبالنسبة للعنصر الأول يمكن أن يتم السحب بطرق عددها ن وكذلك بالنسبة للعنصر الثاني يمكن أن يتم السحب بطرق عددها ن أيضًا وهكذا، وبذلك يكون عدد طرق سحب ى $\leqslant$ ن من العناصر هو

عدد طرق سحب ى عنصر بإحلال من ن عنصرًا = ن × ن . . . × ن = $ن^ى$

مثـال (٢٤)

يحتوي صندوق على ٤ كرات مرقمة بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣، ٤ سحبت عينة بإرجاع مكونة من كرتين واحدة بعد الأخرى. أوجد عدد عناصر فراغ العينة بكتابة فراغ العينة وكذلك باستخدام طرق العد.

الحـــل

أولًا : بكتابة فراغ العينة يكون كالتالي

ش = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤)
(٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)
(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤)
(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

ويكون عدد العناصر ن (ش) = ١٦ عنصرًا.

ثانيًا: باستخدام طرق العد

عدد الطرق الممكنة = $ن^{ى} = ٤^{٢} = ١٦$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في «أولًا» دون كتابة فراغ العينة

إذا كان السحب بدون إحلال (بدون إرجاع)

نفرض أن لدينا عددًا ن من العناصر، وتم السحب منه لعدد ى من العناصر بدون إحلال (بدون إرجاع) ففي هذه الحالة يتم السحب بالنسبة للعنصر الأول بطرق عددها ن طريقة، وبالنسبة للعنصر الثاني بطرق عددها (ن − ١) طريقة وهكذا وبذلك يكون عدد طرق سحب ى عنصرًا من ن عنصرًا هو

عدد الطرق الممكنة = ن (ن − ١) (ن − ٢) . . . (ن − ى + ١)

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ى}} = {}^{ن}ل_{ى}$$

مثال (٢٥)

أوجد عدد عناصر فراغ العينة في مثال (٢٤) السابق إذا كان السحب بدون إحلال بطريقتين: الأولى كتابة فراغ العينة، والثانية بطرق العد.

الحل

أولا: بكتابة فراغ العينة **ش** يكون لدينا

ش = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤)
(٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)
(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤)
(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) }

ويكون عدد العناصر ن (**ش**) = ١٢ عنصرًا.

ثانيًا: باستخدام طرق العد

$$\text{عدد الطرق الممكنة} = {}^{٤}\text{ل}_{٢} = \frac{\underline{\text{ل}\,٤}}{\underline{\text{ل}\,٤-٢}} = \frac{٤\times٣\times٢\times١}{٢\times١} = ١٢$$

وهي نفس النتيجة بكتابة فراغ العينة.

(٩ ـ ٨ ـ ٥) العينات غير المرتبة

في هذه الحالة يكون عدد الطرق

$$^{ن}\text{ق}_{ى} = \frac{\underline{\text{ل}\,ن}}{\underline{\text{ل}\,ى}\;\underline{\text{ل}\,ن-ى}}$$

مثـال (٢٦)

أوجد عدد العناصر لفراغ العينة في مثال (٢٤) إذا كانت العناصر المسحوبة غير مرتبة بطريقتين، الأولى كتابة فراغ العينة، والثانية باستخدام طرق العد

الحـــل

أولًا: بكتابة فراغ العينة

ش = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)}

ن (**ش**) = ٦

ثانيًا: باستخدام طرق العد

$$\text{ن (ش)} = {}^{٤}\text{ق}_{٢} = \frac{\underline{\text{ل}\,٤}}{\underline{\text{ل}\,٢}\;\underline{\text{ل}\,٤-٢}} = \frac{٤\times٣\times٢\times١}{(٢\times١)\times(٢\times١)} = ٦$$

وهي نفس القيمة السابقة بكتابة فراغ العينة.

(٩ ـ ٨ ـ ٦) أمثلـة متنوعـة

مثـال (٢٧)

أثبت أن :

ح (ا ∩ ب ∩ حـ) = ح (ا) ح (ب / ا) ح (حـ / ا ∩ ب)

بشكل عام عند إثبات أن الطرفان متساويان إما أن تجري العمليات الرياضية على الطرف الأيمن حتى نحصل منه على الطرف الأيسر، وإما أن تجري العمليات الرياضية على الطرف الأيسر حتى نحصل على الطرف الأيمن، وإما أن تجري بعض العمليات الرياضية على كل من الطرفين حتى نحصل على قيمة معينة لكل منهما، ففي هذا المثال نجري التعويض في الطرف الأيسر لنحصل على الطرف الأيمن كالتالي

الطرف الأيسر = ح (ا) ح (ب / ا) ح (حـ / ا ∩ ب)

$$= \text{خ (ا)} \; \frac{\text{ح (ا ∩ ب)}}{\text{ح (ا)}} \; \frac{\text{ح (ا ∩ ب ∩ حـ)}}{\text{ح (ا ∩ ب)}}$$

= ح (ا ∩ ب ∩ حـ)

= الطرف الأيمن

وهو المطلوب

مثـال (٢٨)

سلة بها ٤ برتقالات، و ٦ تفاحات أخذت عينة مكونة من ثلاث حبات فاكهة

ا) إذا كان السحب بإرجاع فأوجد احتمال أن تكون العينة برتقالاً .

ب) إذا كان السحب بدون إرجاع فأوجد احتمال أن تكون العينة برتقالاً .

جـ) إذا كانت العينة غير مرتبة فأوجد احتمال أن تكون العينة برتقالاً .

الحـــل

نفرض أن ا الحادثة العينة كلها برتقال

أ) السحـــب بإرجـــاع

$$ح(ا) = \frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = ٠,٠٦٤$$

ب) السحـب بدون إرجـــاع

$$ح(ا) = \frac{٤}{١٠} \times \frac{٣}{٩} \times \frac{٢}{٨} = ٠,٠٣٣$$

جـ) السحـب بعينـة غيـر مرتبـة

$$ح(ا) = \frac{{}^{٤}ق_{٣}}{{}^{١٠}ق_{٣}} = ٠,٠٣٣$$

(٩ ـ ٩) نظريــة بيـــز

نفرض أن لدينا مجموعة من الحوادث الشاملة $ا_١$ ، $ا_٢$ ، . . . . ، $ا_ن$

أي أن $ا_١ \cup ا_٢$ . . . . $\cup\ ا_ن =$ ش

ولأي ل $\neq$ م فإن

$ا_ل \cap ا_م = \phi$ حيث ل، م = ١ ، ٢ ، . . . ، ن

وإذا كانت الحادثة ب معرفة على نفس فراغ العينة ش وجميع الاحتمالات الشرطية ح (ب / $ا_م$) حيث م = ١ ، ٢ ، . . . ، ن معلومة .

فإن ح ($ا_م$ / ب) يعطى بالعلاقة

$$ح(ا_م / ب) = \frac{ح(ب / ا_م)\,ح(ا_م)}{\sum_{ل=١}^{ن} ح(ب / ا_ل)\,ح(ا_ل)}$$

البرهـــان

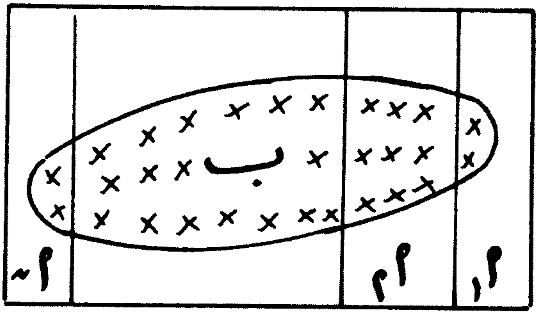
نرسم شكل فن كالتالي

وحيث إن

$$\text{ح}(\text{ا}_{\text{م}} / \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{ا}_{\text{م}} \cap \text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})}$$

$$\text{ح}(\text{ا}_{\text{م}} / \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{ب} / \text{ا}_{\text{م}})\,\text{ح}(\text{ا}_{\text{م}})}{\text{ح}(\text{ب})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (١٥)$$

$$\because\ \text{ا}_{١} \cup \text{ا}_{٢} \ldots\ldots\ldots\ldots \cup \text{ا}_{\text{ن}} = \text{ش}$$



شكل (٩ ـ ١٣): تجزيء المجموعة

$$\text{ب} \cap (\text{ا}_{١} \cup \text{ا}_{٢} \ldots\ldots \cup \text{ا}_{\text{ن}}) = \text{ب} \cap \text{ش}$$

$$(\text{ب} \cap \text{ا}_{١}) \cup (\text{ب} \cap \text{ا}_{٢}) \ldots\ldots \cup (\text{ب} \cap \text{ا}_{\text{ن}}) = \text{ب}$$

$$\text{ح}((\text{ب} \cap \text{ا}_{١}) \cup (\text{ب} \cap \text{ا}_{٢}) \ldots\ldots \cup (\text{ب} \cap \text{ا}_{\text{ن}})) = \text{ح}(\text{ب})$$

$$\text{ح}(\text{ا}_{١} \cap \text{ب}) + \text{ح}(\text{ا}_{٢} \cap \text{ب}) + \ldots\ldots + \text{ح}(\text{ا}_{\text{ن}} \cap \text{ب}) = \text{ح}(\text{ب})$$

$$\sum_{\text{ل}=١}^{\text{ن}} \text{ح}(\text{ب} / \text{ا}_{\text{ل}})\,\text{ح}(\text{ا}_{\text{ل}}) = \text{ح}(\text{ب}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (١٦)$$

من (١٥) ، (١٦) ينتج أن

$$\text{ح}(\text{ا}_{\text{م}} / \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{ب} / \text{ا}_{\text{م}})\,\text{ح}(\text{ا}_{\text{م}})}{\sum_{\text{ل}=١}^{\text{ن}} \text{ح}(\text{ب} / \text{ا}_{\text{ل}})\,\text{ح}(\text{ا}_{\text{ل}})}$$

وهـو المطلـوب

مثال (٢٩)

صندوقان الأول به ٤ تفاحات و ٦ برتقالات، والصندوق الثاني به ٨ تفاحات و ٣ برتقالات. اختير أحد الصناديق عشوائيًّا، واختيرت منه ثمرة بطريقة عشوائية أوجد:

ا) احتمال أن تكون الثمرة المسحوبة برتقالة.

ب) إذا اختيرت الثمرة ووجدت أنها برتقالة ما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني.

الحل

نفرض أن الحادثة $ا_١$ تمثل سحب الثمرة من الصندوق الأول، الحادثة $ا_٢$ تمثل سحب الثمرة من الصندوق الثاني ويكون ح ($ا_١$) = ح ($ا_٢$) = $\frac{١}{٢}$

نفرض أن ب تمثل الحادثة بأن الثمرة المسحوبة برتقالة

$$\therefore ح\,(ب / ا_١) = \frac{٦}{١٠} \quad ،\quad ح\,(ب / ا_٢) = \frac{٣}{١١}$$

$$\therefore ح\,(ب) = ح\,(ب / ا_١)\, ح\,(ا_١) + ح\,(ب / ا_٢) \cdot ح\,(ا_٢)$$

$$= \frac{٦}{١٠} \times \frac{١}{٢} + \frac{٣}{١١} \times \frac{١}{٢}$$

$$= ٠,٣ + ٠,١٣٦$$

$$= ٠,٤٣٦$$

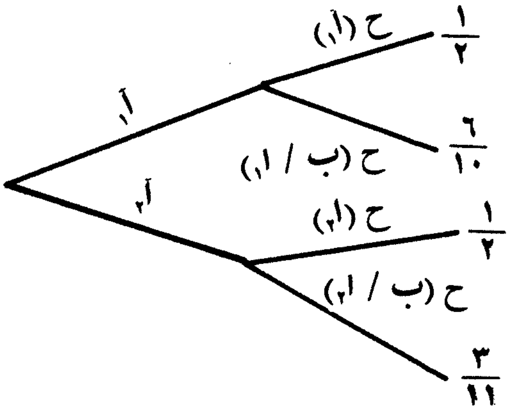
المطلوب الثاني هو إيجاد ح ($ا_٢$ / ب) فيكون حسب نظرية بيز كالتالي

$$ح\,(ا_٢ / ب) = \frac{ح\,(ب / ا_٢)\, ح\,(ا_٢)}{ح\,(ب)}$$

$$= \frac{\frac{٣}{١١} \times \frac{١}{٢}}{٠,٤٣٦}$$

$$= \frac{٠,١٣٦}{٠,٤٣٦} = ٠,٣١$$

ويمكن إيجاد الحل باستخدام الشجرة البيانية كالتالي



$$\text{ح}(\text{ب}) = \frac{١}{٢} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{١١} = ٠,٤٣٦$$

$$\text{ح}(\text{أ}_٢ / \text{ب}) = \frac{\text{ح}(\text{ب} / \text{أ}_٢)\,\text{ح}(\text{ا}_٢)}{\text{ح}(\text{ب})}$$

$$= \frac{\frac{٣}{١١} \times \frac{١}{٢}}{٠,٤٣٦}$$

$$= \frac{٠,١٣٦}{٠,٤٣٦}$$

$$= ٠,٣١$$

(٩ ـ ١٠) تمارين

١ ـ اكتب عناصر المجموعات التالية

ا) مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية.

ب) مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة التي تقل عن ٢٠.

جـ) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ٢٠، وتقبل القسمة على ٣.

د) مجموعة الأعداد الفردية.

٢ ـ اكتب عناصر المجموعات التالية

ا = { س: س عدد صحيح يحقق ١٤ ⩾ س ⩾ ٩ }

ب = { س: س تعطى بالعلاقة س = ن^{2} + ١ ، ن = ١ ، ٢ ، . . . }

جـ = { ص: ص تعطى بالعلاقة ص = ٢ن + ٣ ، ن = ١، ٢، . . . }

٣ ـ اكتب جميع المجموعات الجزئية لكل من المجموعات التالية

ش = { س ، ص ، ع }

ا = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ }

٤ ـ إذا كانت المجموعات ش ، ا ، ب ، جـ كالتالي

ش = { ٢ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ }

ا = { ٦ ، ٧ ، ١٠ }

ب = { ٢ ، ١٠ ، ١٣ }

جـ = { ٢ ، ٧ ، ١٣ ، ١٤ }

فأوجـــد:

$\overline{\text{ا}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ ، $\text{ا} \cup \text{ب}$ ، $\text{ا} \cap \text{ب}$ ، $(\overline{\text{ا}} \cup \overline{\text{ب}})$ ، $\overline{(\text{ا} \cap \text{ب})}$ ، $\overline{(\text{ا} \cup \text{ب})}$ ، $(\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}})$ ،
$\text{ا} \cap (\text{ب} \cup \text{جـ})$ ، $(\text{ا} \cup \text{ب}) \cap \text{جـ}$ ، $\text{ا} \cap \text{ب} \cap \overline{\text{جـ}}$ ، $(\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}} \cap \overline{\text{جـ}})$ ،
$(\overline{\text{ا}} \cap \overline{\text{ب}} \cap \overline{\text{جـ}})$ ، $(\text{ا} \cup \text{ب} \cup \overline{\text{جـ}})$

٥ ـ صندوق به ١٠ كرات حمراء، و ٨ كرات بيضاء، و ٧ كرات زرقاء سحبت منه عشوائيا كرة واحدة اوجد احتمال أن تكون الكرة:

ا) حمراء — د) حمراء أو بيضاء

ب) ليست زرقاء — هـ) بيضـــاء

جـ) ليست حمراء ولا زرقاء

٦ ـ سُحبت كرتان عشوائيا من صندوق في المسألة (٥) اوجـــد

ا) احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض

ب) احتمال أن تكون الكرتان لونهما أحمر

جـ) احتمال أن تكون الكرتان أحمر أو أبيض

د) احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والكرة الثانية زرقاء

٧ - ألقيت زهرتا نرد متوازنتين مرة واحدة اوجد احتمال ظهور مجموع الرقمين

ا) أكبر من أو يساوي ٨

ب) أكبر من ٩

جـ) زوجي أكبر من ٦

٨ - إذا علم أن

ح (ا ∪ ب) = ٠,٦٥ ، ح (ب) = ٠,٣ ، ح (ا) = ٠,٥

اوجـــد

ا) ح ($\overline{\text{ا}}$)، ح ($\overline{\text{ب}}$)، ح (ا ∩ ب)، ح ($\overline{\text{ا}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$)

ب) هل الحادثتان ا ، ب مستقلتان

٩ - إذا علم أن احتمال أن يكون الجو ملبدًا بالغيوم هو ٠,٣ واحتمال أن يكون الجو عاصفًا هو ٠,٥٢ واحتمال أن يكون الجو إما ملبدًا بالغيوم وإما عاصفًا هو ٠,٥٨ فأوجد احتمال الحوادث التالية:

ا) أن يكون الجو ملبدًا بالغيوم وعاصفًا.

ب) أن يكون ملبدًا بالغيوم وغير عاصف.

جـ) أن يكون الجو غير ملبد بالغيوم وغير عاصف.

١٠- إذا كان احتمال نجاح أحد الطلبة في مادة الرياضيات هو $\frac{١}{٣}$ ، واحتمال نجاحـه في مادة الإحصاء هو $\frac{١}{٢}$ ، واحتمال نجاحه في الإحصاء والرياضيات هو $\frac{١}{١٢}$ فأوجـــد

ا) احتمال نجاح الطالب في مادة على الأقل.

ب) احتمال نجاحه في الإحصاء إذا علم أنه نجح في الرياضيات.

جـ) احتمال رسوبه في الإحصاء إذا علم أنه نجح في الرياضيات.

د) هل نجاحه في الإحصاء مستقل عن نجاحه في الرياضيات؟

١١- سلة بها ٢٠ برتقالة، و ٣٠ تفاحة سحبت عينة مكونة من ثلاث ثمرات

ا) إذا كان السحب بدون إرجـاع فأوجـد احتمال أن تكون العينة المسحوبة برتقالاً.

ب) إذا كان السحب بإرجاع فأوجد احتمال أن تكون العينة إما برتقالاً أو تفاحًا

جـ) اوجد احتمال أن تكون العينة من نفس النوع في كل من حالتي السحب بإرجاع أو بدون إرجاع .

١٢ـ أسرة مكونة من أربعة أبناء بفرض كون المولود البنت مستقلاً عن كون المولود ابنًا ، ومساويًا له في الاحتمال .

اوجد ما يلي :

ا) احتمال أن تحتوي الأسرة على ثلاثة أولاد وبنت واحدة

ب) احتمال أن تحتوي الأسرة على ٤ أولاد

جـ) احتمال أن تحتوي الأسرة على ولد واحد على الأقل

د) احتمال أن تحتوي الأسرة على ولدين وبنتين

١٣ـ مصنع ينتج ثلاثة أصناف من مصابيح الكهرباء بنسب ٤٠٪، ٥٠٪، ١٠٪ وكانت نسبة التكاليف في الإنتاج هي ٣٪، ٢٪، ١٪ على الترتيب، أختير أحد أصناف الإنتاج واختير منه مصباح

اوجـــد :

ا) احتمال أن المصباح تالفًا .

ب) إذا كان المصباح تالفًا فأوجد احتمال أن يكون من الصنف الأول .

١٤ـ إذا كان احتمال أن يصيب ابراهيم هدفًا ما هو $\frac{١}{٣}$ ، واحتمـال أن يصيب محمـود الهدف هو $\frac{١}{٤}$. فأوجد احتمال أن يصيب واحد منهم على الأقل الهدف .

١٥ـ إذا كان ش فضاء عينة و أ و ب و جـ حوادث في فضاء العينة بحيث إن

ش = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢)

ا = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦)

ب = (٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧)

جـ = (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١)

أوجد احتمالات الحوادث التالية

$\text{ا} \cap \overline{\text{ب}} \cap \overline{\text{جـ}}$ ، $\overline{\text{ا} \cap \text{ب}}$ ، $\overline{\text{ا} \cap \text{ب} \cap \text{جـ}}$ ، $\text{ا} \cap \overline{\text{ب}}$

أ $\cap$ ب $\cap$ جـ ، أ $\cap$ ب

١٦- إذا كانت ب و جـ حادثتين وكان

ح (ب / جـ) = $\frac{١}{٤}$ ، ح (جـ / ب) = $\frac{١}{٢}$

ح (جـ) = $\frac{١}{٤}$

وضح أي الجمل تكون صحيحة وأيها تكون خطأ مع ذكر السبب في كل مرة عندما يكون

ب و جـ حادثتان متنافيتان.

ب و جـ حادثتان مستقلتان.

ح (ب $\cup$ جـ) = $\frac{١}{٢}$

١٧- سحبت عينة مكونة من ٣ مصابيح من إنتاج مصنع للمصابيح الكهربية فإذا رمز للمصباح المعيب بالرمز م وللمصباح السليم بالرمز س.

أوجد عناصر الحوادث التالية واحتمال كل منها

ا) فضـــاء العينـــة

ب) الحادث أ = { العينة كلها معيبة } .

جـ) الحادثة ب = { مصباح على الأقل معيب } .

د) الحادثة جـ = { مصباح على الأكثر معيب } .

هـ) أ $\cap$ ب ، جـ $\cup$ ب ، $\bar{ب}$ $\cap$ جـ.

١٨- يقوم أحمد وصالح وعلي بطباعة التقارير في إحدى الشركات الوطنية، والجدول التـالي يبـين النسب التي يقـوم كل منهم بطباعتها من التقارير والنسب المئوية للأخطاء التي يرتكبها فيما يطبعه.

النسب المئوية للتقارير التي قام بها ثلاثة أشخاص ونسب أخطائهم

الطابع / النسبة	أحمد	صالح	علي
النسبة المئوية من التقارير	٤٠٪	٢٥٪	٣٥٪
النسبة المئوية للأخطاء	٣٪	٥٪	٨٪

سحبت ورقة عشوائيا من تقارير الشركة.

أ) اوجد احتمال أن يوجد بالورقة خطأ مطبعي.

ب) إذا وجدت بالورقة خطأ مطبعيًا فما احتمال أن يكون قد طبعها صالحًا؟