الفصل الخامس

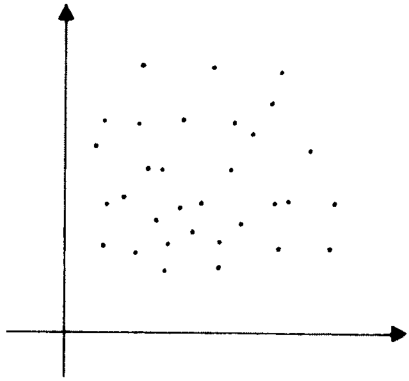
الارتباط والانحدار

(٥ - ١) مقدمـــــة

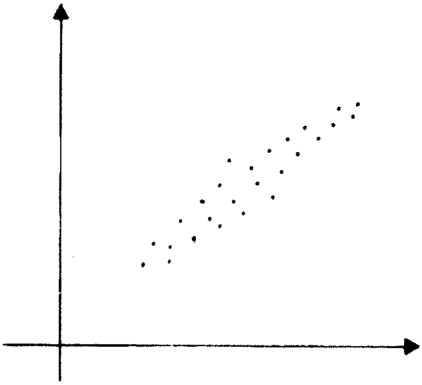
تعـرضنـا في الفصـول السـابقة لطرق تنظيم وتلخيص البيانات في توزيعات تكرارية وطرق عرضها بيانيا. كما تعرفنا في الفصلين الثالث والرابع على كيفية حساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات) وكذلك إيجاد مقاييس التشتت لمجموعة واحدة من البيانات في كل مرة، أو لأكثر من مجموعة من البيانات لغرض المقارنة فيما بينها، وكانت الصفة المشتركة التي تمثل هذه المجموعات أنها تعتمد على متغير واحد وهو المتغير محل الـدراسة. ولكن في الحياة العملية قد تكون مفردات العينة محل الدراسة عبارة عن أزواج من القيم لخاصتين مختلفتين ، كما قد يكون المطلوب في مثل هذه الحالة دراسة العلاقة بينهما، ومقياس قوة هذه العلاقة واتجاهها كأن تكون علاقة طردية أو عكسية أو غير ذلـك. من هذه العـلاقـات على سبيل المثال دراسة العلاقة بين الطول والوزن لمجموعة من الطلاب، أو الإنتاج والأجور لمجموعة من العمال، أو الدخل والإنفاق لمجموعة من الأسر، أو النمو للنبات وعمره، أو كمية المحصول والتسميد وهكذا.

وفي هذا الفصل سوف نقوم بدراسة طرق قياس مقدار العلاقة بين متغيرين محل الدراسة، مثل قياس قوة الارتباط بينهما. وإيجاد مقاييس عددية لقياس قوة الارتباط. نبحث كذلك موضوع إيجاد علاقة رياضية تربط المتغيرين بعضهما ببعض، لكي يمكن التنبؤ بأحد المتغيرات لقيمة محددة للمتغير الآخر، وهي ما تسمى بمعادلة الانحدار.

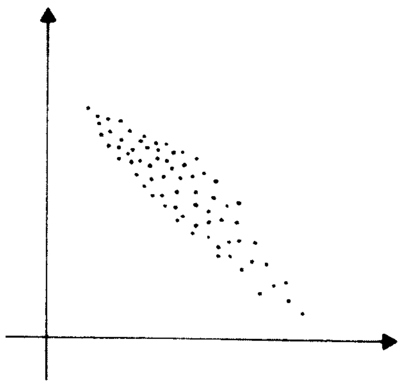
ولكي نبدأ هذه الدراسة يجب أن نتعرف على ما يسمى بأشكال الانتشار وهي عبارة عن رسم بياني على محورين لمجموعة من النقاط تمثل أزواج القيم للبيانات مثل : (س$_١$ ، ص$_١$) ، (س$_٢$ ، ص$_٢$) .... ، (س$_ن$ ، ص$_ن$) بحيث يكون المحور الأفقي يمثل المتغير س والمحور الرأسي يمثل المتغير ص. والمتغيرات لبعض الظواهر محل الدراسة تأخذ صور مختلفة من أشكال الانتشار نبين بعضها بيانيًا كما يلي :



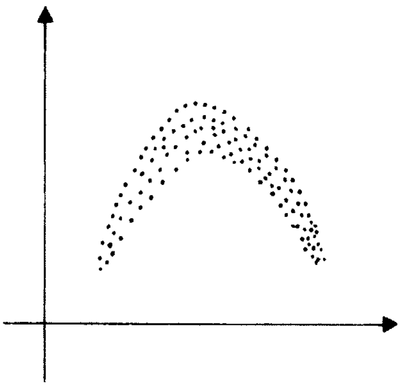
شكل (٥ ـ ١) : انتشار غير منتظم



شكل (٥ ـ ٢) : انتشار قيم (س ، ص) في اتجاه خطي طردي



شكل (٥ ـ ٣) : انتشار قيم (س ، ص) في اتجاه خطي عكسي



شكل (٥ ـ ٤) : انتشار قيم (س ، ص) في خط منحني

في شكل (٥ ـ ١): يتضح منه أن أزواج القيم (س، ص) مبعثرة بدون ضابط أو اتجاه معين، أي لا يمكن استنتاج أي علاقة بين المتغيرين (س، ص). ويمكن القول أن المتغيرين س، ص مستقلين ولا يوجد أي ارتباط بينهما.

في شكل (٥ ـ ٢): نلاحظ أن أزواج المشاهدات (س، ص) تنتشر حول خط مستقيم أي كلما تزداد قيم س تزداد معها قيم ص ومنه نستنتج أنه توجد علاقة خطية طردية بين المتغيرين (س، ص).

في شكل (٥ ـ ٣): نجد أن شكل الانتشار يأخذ شكل خطي أيضا ولكن عندما تزداد قيم س تقل قيم ص، أي توجد علاقة خطية عكسية بين المتغيرين (س، ص).

في شكل (٥ ـ ٤): نجد أن البيانات منتشرة حول منحنى أي توجد علاقة غير خطية بين المتغيرين (س، ص).

والمقاييس التي توضح مدى هذا الارتباط بين المتغيرين (س، ص) تسمى بمعامل الارتباط. أما العلاقة الرياضية التي تربط المتغيرين (س، ص) تسمى معادلة خط الانحدار. سوف نكتفي بدراسة معامل الارتباط الخطي وكذلك معادلة الانحدار الخطي بأشكال الانتشار (٥ ـ ٢)، (٥ ـ ٣) وذلك لمراعاة مستوى وطبيعة تخصصات الدارسين لهذا الكتاب. وسوف نقوم بدراسة بعض مقاييس الارتباط بين المتغيرين (س، ص) مثل معامل الارتباط الخطي لبيرسون (Pearson) ومعامل الارتباط للرتب لسبيرمان (Spearman) ومعامل الاقتران لكرامير (Cramer) وكذلك إيجاد معادلة الانحدار الخطي للمتغيرين (س، ص). كما سنحاول تبسيط عرضنا للموضوع كلما أمكن، وذلك باستخدام الأمثلة لكل مقياس على حدة.

(٥ - ٢) معامل الإرتباط الخطي

يستخدم معامل الارتباط لبيرسون (Pearson) لقياس قوة الارتباط بين متغيرين س، ص عندما تكون أزواج القراءات كمية أي رقيمة وذلك في حالة البيانات غير المبوبة أو في حالة البيانات المبوبة وسنتناول كلا من هاتين الحالتين فيما يلي.

(٥ - ٢ - ١) معامل الارتباط الخطي لبيرسون في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كان لدينا أزواج القيم للمتغيرين س، ص من المجتمع محل الدراسة كالتالي ($س_١$، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)، .... ، ($س_ن$ ، $ص_ن$) فإننا نعرّف معامل الارتباط الخطي لبيرسون ($م_ب$) بأنه متوسط مجموع حاصل ضرب القيم المعيارية للظاهرتين المراد دراسة العلاقة بينهما ولكل ظاهرة، ولتكن $\tilde{س}$، $\tilde{ص}$. وهذه هي أفضل طريقة لقياس التغيرات التي تحدث بين ظاهرتين وتحدد طبيعة التغير سواءً بالنقص أو الزيادة ويعبّر عن ذلك رياضيًّا كما يلي:

$$م_ب = \frac{١}{ن} \text{مجـ } \tilde{س}\,\tilde{ص} \qquad .... (١)$$

$$\text{حيث } \tilde{س} = \frac{س - \bar{س}}{\sigma\,(س)} \quad \text{و} \quad \tilde{ص} = \frac{ص - \bar{ص}}{\sigma\,(ص)}$$

وبالتعويض عن القيم المعيارية $\tilde{س}$، $\tilde{ص}$ فيكون $م_ب$ كالتالي:

$$م_ب = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})\,(ص - \bar{ص})}{ن \;\sigma\,(س)\;\sigma\,(ص)} \qquad .... (٢)$$

يلاحظ أن هذه الصيغة لا تعتمد على وحدات القياس للظاهرتين. وعندما تكون البيانات مأخوذة من عينة حجمها ن فإنه يفضل القسمة على (ن - ١) بدلا من ن عندئذ نكتب العلاقة (١) في الصورة التالية:

$$م_ب = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})\,(ص - \bar{ص})}{(ن - ١)\;\sigma_س\;\sigma_ص} \qquad .... (٣)$$

يلاحظ في بعض الأحيان أن العلاقة (٣) السابقة صعبة إلى حد ما عند حساب قيمتها عدديا، وقد يتعرض الدارس إلى ارتكاب بعض الأخطاء لأنه يحتاج إلى عدد من المقادير

الإحصائية مثل $\sigma_{س}$ ، $\sigma_{ص}$ ، $\bar{س}$، $\bar{ص}$ ولتجاوز مثل هذه الصعوبة سنعمد فيما يلي إلى استنتاج صيغة ستكون غالبا أبسط في الحساب من العلاقة (٣) السابقة وتكون كالتالي:

$$م_{ب} = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^{٢} - (مجـ\ س)^{٢}][ن\ مجـ\ ص^{٢} - (مجـ\ ص)^{٢}]}} \quad \ldots\ldots (٤)$$

وتعتمـد العـلاقـة (٤) في كونها سهلة حسابيا من سابقها لأننا نحسب فقط المقادير مجـ س، مجـ ص، مجـ س ص، مجـ $س^{٢}$، مجـ $ص^{٢}$، وهي مقادير يمكن الإشارة إليها: بأنه يمكن حسابها مباشرة، وبسرعة أكبر.

مثـــال (١)

أوجد معامل الارتباط بين الإنفاق ص والدخل س لمجموعة مكونة من سبع أسر والبيانات بمئات الريالات كالتالي:

جدول (٥ ـ ١): الإنفاق والدخل لسبع أسر

س	٨	١٠	١٢	١٢	١٣	١٥	٢٠
ص	٨	٩	١٢	١٠	١٠	١٣	١٩

ولسهولة الحل نلخص الحسابات في الجدول التالي:

الدخل (س)	الإنفاق (ص)	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
١٠	٩	٩٠	١٠٠	٨١
١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
١٢	١٠	١٢٠	١٤٤	١٠٠
١٣	١٠	١٣٠	١٦٩	١٠٠

الدخل (س)	الإنفاق (ص)	س ص	$س^2$	$ص^2$
١٥ ٢٠	١٣ ١٩	١٩٥ ٣٨٠	٢٢٥ ٤٠٠	١٦٩ ٣٦١
٩٠	٨١	١١٢٣	١٢٤٦	١٠١٩

ومن ذلك يمكن حساب معامل الارتباط كما يلي:

$$م_{ب} = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س\ مج\ ص}{\sqrt{[ن\ مج\ س^2 - (مج\ س)^2][ن\ مج\ ص^2 - (مج\ ص)^2]}}$$

$$= \frac{٧ \times ١١٢٣ - ٩٠ \times ٨١}{\sqrt{[٧ \times ١٢٤٦ - (٩٠)^2][٧ \times ١٠١٩ - (٨١)^2]}}$$

$$= \frac{٧٨٦١ - ٧٢٩٠}{\sqrt{٦٢٢ \times ٥٧٢}} = \frac{٥٧١}{٥٩٦,٤٨}$$

$$= ٠,٩٥٧$$

ملاحظـــات

نلاحظ أن قيمة معامل الإرتباط $م_{ب}$ تتراوح بين ١ ، -١ . كما يقال: إن الإرتباط طردي إذا كانت قيمة معامله $م_{ب}$ موجبة (أي محصورة بين الصفر والواحد الصحيح) وتزداد قوة الارتباط كلما قربت قيمة معامل الارتباط من الواحد الصحيح، وتضعف قيمته كلما اقترب من الصفر. كما يقال: إن الارتباط عكسي إذا كانت قيمة معامله $م_{ب}$ سالبة (أي أقل من صفر إلى -١)، ويكون ارتباطًا عكسيًا قويًا كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من -١، وتضعف قيمته كلما اقترب من الصفر.

وتجدر الإشارة إلى أنه لا توجد حدود فاصلة تبين قوة وضعف الارتباط، ولكن يمكن وضع حدود تقريبية لقيم «$م_{ب}$» مبنية على الخبرة السابقة، وسوف نذكر ذلك

للقيم الموجبة وبالمثل يمكن تطبيقها عندما تكون «$م_{ب}$» سالبة، وذلك بتغير إشارة الحدود في الجدول التالي:

جدول (٥ ـ ٢): قيم معامل الإرتباط وقوته

قسم معامل الإتباط $م_{ب}$	قـوة الإرتبـاط
صفر إلى ٠,٣	لا يوجد ارتباط يذكر
٠,٣ إلى ٠,٥	ارتبـاط ضعيـف
٠,٥ إلى ٠,٧	ارتبـاط متوسـط
٠,٧ إلى ٠,٩	ارتبـاط قـوي
٠,٩ إلى ١	ارتبـاط قـوي جـدًا

وبذلك يكون الإرتباط في مثال (١) السابق قويا جدًا.

بعض خصائص معامل الإرتباط الخطي لبيرسون

من أهم خصائصه أنه لا يعتمد على القيم نفسها وإنما يعتمد على مقدار تباعد هذه القيم عن بعضها، ولذلك إذا جمعنا أو طرحنا مقدارا ثابتا من كل قراءات الظاهرتين س أو ص فإن قيمة معامل الارتباط لا تتغير. يتمتع معامل الارتباط بهذه الخاصة بالنسبة للضرب والقسمة كذلك إلا إنه في حالة ضرب أو قسمة مقدار ثابت في كل من س، ص فإن قيمة معامل الإرتباط لا تتغير بمثل هذه العمليات البسيطة. ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في المعادلة (٤) السابقة بوضع $س = س \pm ا$، $ص = ص \pm ب$ فإن المعادلة (٤) تصبح كالتالي:

$$م_{ب} = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{مج } س \text{ مج } ص}{\sqrt{[ن \text{ مج } س^{٢} - (\text{مج } س)^{٢}][ن \text{ مج } ص^{٢} - (\text{مج } ص)^{٢}]}} \quad \ldots\ldots\ldots (٥)$$

وكذلك في حالة قسمة كل من س، ص على مقدار ثابت أي بوضع

$س = \frac{س}{ا}$ ، $ص = \frac{ص}{ب}$ فإن المعادلة (٥) تصبح كالتالي:

$$م_ب = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{مج } س \text{ مج } ص}{\sqrt{[ن \text{ مج } س^{٢} - (\text{مج } س)^{٢}][ن \text{ مج } ص^{٢} - (\text{مج } ص)^{٢}]}} \quad \ldots\ldots (٦)$$

ولاستخدام بيانات مثال (١) السابق لتوضيح الأفكار السابقة نورد المثال التالي:

نطرح من جميع قيم س مقدارًا ثابتًا وليكن ا = ١٠ كما نطرح من جميع قيم ص مقدار ب = ٨ في بيانات المثال السابق فنحصل على القيم الجديدة، وهي س = س - ١٠، ص = ص - ٨ فنحصل على بيانات العمودين الأول والثاني من الجدول التالي وبقسمة قيم س، ص على مقدار ثابت وليكن ٢ مثلاً فنحصل على بيانات العمودين الثالث والرابع، ويكون جدول الحل في هذه الحالة هو:

س	ص	$س = \frac{س}{٢}$	$ص = \frac{ص}{٢}$	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
٢-	٠	١-	٠	٠	١	٠
٠	١	٠	٠,٥	٠	٠	٠,٢٥
٢	٤	١	٢	٢	١	٤,٠٠
٢	٢	١	١	١	١	١,٠٠
٣	٢	١,٥	١	١,٥	٢,٢٥	١,٠٠
٥	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥	٦,٢٥	٦,٢٥
١٠	١١	٥	٥,٥	٢٧,٥٠	٢٥,٠٠	٣٠,٢٥
المجموع		١٠	١٢,٥	٣٨,٢٥	٣٦,٥٠	٤٢,٧٥

$$م_ب = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{مج } س \text{ مج } ص}{\sqrt{[ن \text{ مج } س^{٢} - (\text{مج } س)^{٢}][ن \text{ مج } ص^{٢} - (\text{مج } ص)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٧ \times ٣٨,٢٥ - ١٠ \times ١٢,٥}{\sqrt{[٧ \times ٣٦,٢٥ - (١٠)^{٢}][٧ \times ٤٢,٧٥ - (١٢,٥)^{٢}]}}$$

$$= \frac{\text{٢٦٧,٧٥} - \text{١٢٥}}{\sqrt{\text{١٥٥,٥} \times \text{١٤٣}}} = \frac{\text{١٤٢,٢٥}}{\text{١٤٩,١٢}}$$

$= \text{٠,٩٥٧}$ وهي النتيجة السابقة نفسها أيضا.

وباستخدام القسمة فقط لبيانات مثال (١) تقسم س، ص على مقدار ثابت وليكن ٢ مثلاً، فيكون جدول الحل في هذه الحالة هو:

س	ص	$س = \frac{س}{٢}$	$ص = \frac{ص}{٢}$	س ص	$س^٢$	$ص^٢$
٨	٨	٤	٤	١٦	١٦	١٦
١٠	٩	٥	٤,٥	٢٢,٥	٢٥	٢٠,٢٥
١٢	١٢	٦	٦	٣٦	٣٦	٣٦
١٢	١٠	٦	٥	٣٠	٣٦	٢٥
١٣	١٠	٦,٥	٥	٣٢,٥	٤٥,٢٥	٢٥
١٥	١٣	٧,٥	٦,٥	٤٨,٧٥	٥٦,٢٥	٤٢,٢٥
٢٠	١٩	١٠	٩,٥	٩٥	١٠٠	٩٠,٢٥
المجموع		٤٥	٤٠,٥	٢٨٠,٧٥	٣١١,٥	٢٥٤,٧٥

$$\text{م}_{\text{ب}} = \frac{\text{ن مج س ص} - \text{مج س مج ص}}{\sqrt{[\text{ن مج س}^٢ - (\text{مج س})^٢][\text{ن مج ص}^٢ - (\text{مج ص})^٢]}}$$

$$= \frac{\text{٧} \times \text{٢٨٠,٧٥} - \text{٤٥} \times \text{٤٠,٥}}{\sqrt{[\text{٧} \times \text{٣١١,٥} - (\text{٤٥})^٢][\text{٧} \times \text{٢٥٤,٧٥} - (\text{٤٠,٥})^٢]}}$$

$$= \frac{\text{١٩٦٥,٢٥} - \text{١٨٢٢,٥}}{\sqrt{\text{١٥٥,٥} \times \text{١٤٣}}}$$

$= \frac{\text{١٤٢,٧٥}}{\text{١٤٩ ١٢}} = \text{٠,٩٥٧}$ وهي النتيجة السابقة نفسها

(٥ ـ ٢ ـ ٢) معامل الإرتباط الخطي لبيرسون في حالة البيانات المبوبة

في هذه الحالة تصبح العلاقة (٤) في الشكل التالي:

$$م_ب = \frac{ن\ مج\ ك_{٢١} س\ ص - (مج\ ك_١ س)(مج\ ك_٢ ص)}{\sqrt{[ن\ مج\ ك_١ س^٢ - (مج\ ك_١ س)^٢][ن\ مج\ ك_٢ ص^٢ - (مج\ ك_٢ ص)^٢]}} \quad \ldots (٧)$$

حيث

ن مجموع التكرارات الكلية.

$ك_{٢١}$ التكرار المشترك للمتغيرين س، ص في الخلايا.

$ك_١$ مجموع التكرارات الأفقية (أي الصف) لمراكز الفئات للمتغير س.

$ك_٢$ مجموع التكرارات الرأسية (أي العمود) لمراكز الفئات للمتغير ص.

س هي مراكز الفئات للمتغير س.

ص هي مراكز الفئات للمتغير ص.

ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٢)

أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين الأجور والانتاج لمجموعة مكونة من ثلاثين عاملاً في مثال (٤) في الفصل الثاني.

الحل:

نلخص الحل والحسابات في الجدول التالي:

القيمة التي في الركن للصف الأول ١٢ هي عبارة عن ضرب التكرار ٣ × مركز الفئة س (−٢) × مركز الفئة ص (−٢) = ٣ × −٢ × −٢ = ١٢ = $ك_{٢١}$ س ص.

وهكذا بالنسبة لباقي الخلايا يمكن حساب $ك_{٢١}$ س ص بنفس الطريقة. وتجمع أفقيا فيكون العمود الرأسي الأخير في الجدول. وتجمع رأسيا فيكون الصف الأخير $ك_{٢١}$ س ص في الجدول. وتكون نتيجة مجموع العمود الأخير مج $ك_{٢١}$ س ص مساويا لمجموع الصف الأخير في الجدول مج $ك_{٢١}$ س ص = ٤٢.

الانتاج ص / الأجور س	٥٠-٥٩	٦٠-٦٩	٧٠-٧٩	٨٠-٨٩	٩٠-٩٩	$ك_١$	$س = \frac{س - ٧٤,٥}{١٠}$	$ك_١ س$	$ك_١ س^٢$	$ك_{٢١} س ص$
٥٠-٥٩	٣ / ١٢					٣	٢-	٦-	١٢	١٢
٦٠-٦٩	١ / ٢	٤ / ٤				٥	١-	٥-	٥	٦
٧٠-٧٩	٢ / ٠	٨ / ٠				١٠	٠	٠	٠	٠
٨٠-٨٩			١ / ٠	٦ / ٦	١ / ٢	٨	١	٨	٨	٨
٩٠-٩٩					٤ / ١٦	٤	٢	٨	١٦	١٦
$ك_٢$	٤	٦	٩	٦	٥	٣٠	مج	٥	٤١	٤٢
$ص = \frac{ص - ٧٤,٥}{١٠}$	٢-	١-	٠	١	٢	مج				
$ك_٢ ص$	٨-	٦-	٠	٦	١٠	٢				
$ك_٢ ص^٢$	١٦	٦	٠	٦	٢٠	١٢٠				
$ك_{٢١} س ص$	١٤	٤	٠	٦	١٨	٤٢				

$$ر_ب = \frac{ن \text{ مج } ك_{٢١} س ص - (\text{مج } ك_١ س)(\text{مج } ك_٢ ص)}{\sqrt{[ن \text{ مج } ك_١ س^٢ - (\text{مج } ك_١ س)^٢][ن \text{ مج } ك_٢ ص^٢ - (\text{مج } ك_٢ ص)^٢]}}$$

$$= \frac{٣٠ \times ٤٢ - ٥ \times ٢}{\sqrt{[٣٠ \times ٤١ - (٥)^٢][٣٠ \times ٤٨ - (٢)^٢]}}$$

$$= \frac{١٢٦٠ - ١٠}{\sqrt{١٢٠٥ \times ١٤٣٦}}$$

$$= \frac{١٢٥٠}{١٣١٥,٤٤} = ٠,٩٥$$

أي أنه يوجد ارتباط طردي قوي بين مقدار الأجر وكمية الإنتاج.

(٥ - ٣) معامل ارتباط الرتب

يلاحظ أن الارتباط الخطي لبيرسون يبين مدى قوة الارتباط بين المتغيرين (س، ص) في حالة البيانات الكمية فقط، ولكن في كثير من الدراسات التطبيقية نصادف

بيانات وصفية يكون المطلوب فيها إيجاد قوة الارتباط بين المتغيرين الوصفيين. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس يستخدم في حالة البيانات الوصفية خاصة إذا أمكن وضعها في صورة ترتيبية، مثل تقديرات الطلاب، أو المراتب العلمية لأعضاء هيئة التدريس بالجامعة، أو المراتب والدرجات لموظفين حسب السلم الوظيفي.

ويمكن ملاحظة أن استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (Spearman) يفيد في مثل حالة هذه البيانات الوصفية السالفة الذكر أو البيانات الكمية كذلك مع مراعاة أن تكون عدد أزواج القيم أقل من ٣٠ حتى يمكن أن يعطي معامل ارتباط الرتب في أغلب الأحيان قوة الارتباط بصورة أكثر دقة من معامل ارتباط بيرسون. ويعرًف معامل ارتباط الرتب لسبيرمان $م_{س}$ بالعلاقة التالية:

$$م_{س} = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)} \quad .... (٨)$$

حيث إن «ن» عدد المشاهدات، ف فرق الرتبة بين المتغيرين.

ولتوضيح طريقة إيجاد رتب مجموعة من الأرقام نتصور أننا رتبنا الأرقام تصاعديا أو تنازليا فيكون الرقم الأول رتبة ١، والرقم الثاني رتبة ٢، وهكذا....

وإذا تساوى رقمان فإننا نأخذ متوسط مجموع الرتبتين لهما، ونوضح ذلك باستخدام الترتيب التصاعدي في ثلاثة الأمثلة التالية، حيث نوضح في المثال (٣) كيفية تحديد رتب القراءات، ومن ثم نطبق ذلك لإيجاد معامل ارتباط الرتب في المثالين التاليين (٤)، (٥).

مثـال (٣)

أوجد رتب الأعداد التالية:

س	٢	٤	٣	٩	٦	٧	٣

إذا تصورنا ترتيب البيانات تصاعديا فإن الرقم ٢ يحتل المرتبة الأولى (١)، والرقمين ٣، ٣ يحتلان المرتبة الثانية والثالثة (٢، ٣)، وتكون رتبة كل منهما هي متوسط الرتبتين (٢، ٣) أي ($\frac{٢+٣}{٢}$= ٢,٥) والرقم ٤ يمثل المرتبة (٤) وهكذا باقي الأرقام . . . .

ونوضح ذلك بالجدول التالي لقيم «س» ورتبها

س	٢	٤	٣	٩	٦	٧	٣
رتبة س	١	٤	٢,٥	٧	٥	٦	٢,٥

ولإيجاد معامل الارتباط للرتب حسب العلاقة (٨) نوضح طريقة حسابه بالمثال التالي.

مثال (٤)

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان للدخل والإنفاق لعينة مكونة من ٧ أسر حسب البيانات المعطاة في مثال (١) السابق.

ويمكن تلخيص الحسابات كما في الجدول التالي:

الدخل (س)	الإنفاق (ص)	رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س - رتبة ص	ف^{٢}
٨	٨	١	١	٠	٠
١٠	٩	٢	٢	٠	٠
١٢	١٢	٣,٥	٥	١,٥-	٢,٢٥
١٢	١٠	٣,٥	٣,٥	٠	٠
١٣	١٠	٥	٣,٥	١,٥	٢,٢٥
١٥	١٣	٦	٦	٠	٠
٢٠	١٩	٧	٧	٠	٠
-	-	-	-	-	٤,٥

$$م_{س} = ١ - \frac{٦ \text{ مج ف}^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٤,٥}{٧(٤٩ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٢٧}{٧ \times ٤٨}$$

$$= ١ - \frac{٢٧}{٣٣٦}$$

$$= ١ - ٠,٠٨$$

$$م_{س} = ٠,٩٢$$ وهو ارتباط طردي وقوي جدًّا.

مثـال (٥)

في دراسة اجتماعية لعينة مكونة من ٥ عائلات عن الوضع المالي لكل من أسرتي الـزوج والزوجة، وذلك لمعرفة تأثير الحالة المادية في الزواج بين الأسر، حيث كانت المعلومات كما في الجدول التالي:

جدول (٥ ـ ٣): الأوضاع المالية لأسر الأزواج والزوجات لخمسة أسر

الحالة المالية لأسرة الزوج (س)	جيدة	منخفضة	متوسطة	ممتازة	متوسطة
الحالة المالية لأسرة الزوجة (ص)	ممتازة	جيدة	جيدة	ممتازة	متوسطة

أي أن المطلوب هو حساب معامل ارتباط الرتب.

نلخص الحل في الجدول التالي:

س (أسرة الزوج)	ص (أسرة الزوجة)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف^٢
جيـــدة	ممتـــازة	٤	٤,٥	-٠,٥	٠,٢٥
منخفضـة	جيـــدة	١	٢,٥	-١,٥	٢,٢٥

س (أسرة الزوج)	ص (أسرة الزوجة)	رتبة س	رتبة ص	ف	ف²
متوسطة	جيدة	٢,٥	٢,٥	٠	٠
ممتازة	ممتازة	٥	٤,٥	٠,٥	٠,٢٥
متوسطة	متوسطة	٢,٥	١	١,٥	٢,٢٥
				مجـ	٥

$$م_{س} = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن (ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ \times ٥}{٥ (٢٥ - ١)}$$

$$م_{س} = ١ - ٠,٢٥ = ٠,٧٥$$

أي أنه يوجد ارتباط طردي قوي.

(٥ - ٤) معامل الاقتران

لقد سبق أن أوجدنا معامل الارتباط لسبيرمان (الرتب) للبيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها، ولكن نصادف كثيرًا من الدراسات التطبيقية في مختلف أوجه الحياة العملية كعلم الاجتماع والطب والزراعة... الخ، بيانات وصفية ليس في طبيعتها صفة الترتيب أي لا يمكن وضع رتب لها، أو لا معنى للرتب فيها، نذكر مثلًا: التدخين فيكون له صفتان (يدخن، أو لا يدخن)، التعليم أي يكون (متعلمًا أو غير متعلم)، أو لون الشعر كأن يكون (أشقرًا، أو بنيًا، أو أسودًا)، لون العيون يكون (أزرقًا، أو عسليًا، أو أسودًا، ...) فصائل الدم تكون (مثلًا ا، ا +، ب، ...) وهكذا.

ولتبسيط مفهوم الاقتران بين صفات ما لنفرض أن لكل من المتغيرين أو زوج القراءة س، ص صفتان أولى وثانية فإنه يمكن التعبير عن البيانات الناتجة كما في الجدول التالي

جدول (٥ ـ ٤): التكرارات المشتركة بين الصفات

المتغير س / المتغير ص	الصفة الأولى $س_١$	الصفة الثانية $س_٢$
الصفة الأولى $ص_١$	ا	ب
الصفة الثانية $ص_٢$	جـ	د

حيث إن ا هي عبارة عن التكرارات المشتركة في الصفة الأولى $س_١$ والصفة الأولى $ص_١$، هكذا بالنسبة لبقية الرموز ب، جـ، د.

وقد اقترح بيل (Yule) بأن يعرف معامل الاقتران ($م_ق$) في هذه الحالة بالعلاقة التالية

$$م_ق = \frac{ا د - ب جـ}{ا د + ب جـ} \quad \ldots\ldots\ldots (٩)$$

ونوضح طريقة حساب $م_ق$ بالمثال التالي.

مثـال (٦)

أوجد معامل الاقتران $م_ق$ بين التعليم والعمل لمجموعة من الأفراد حيث كانت البيانات المجموعة عنهم هي كما يلي:

جدول (٥ ـ ٥): الاقتران بين العمل والتعليم

التعليم س / العمل ص	متعلم	أمي
يعمل	١٠	٥
لا يعمل	٤	٦

ومن ذلك يمكن حساب معامل الاقتران كما يلي:

$$م_ق = \frac{ا د - ب ج}{ا د + ب ج}$$

$$= \frac{١٠ \times ٦ - ٥ \times ٤}{١٠ \times ٦ + ٥ \times ٤} = \frac{٤٠}{٨٠} = ٠,٥$$

أي يوجد ارتباط متوسط بين التعليم والعمل.

أما عندما تتكون الظواهر من عدة صفات لكل متغير فنذكر على سبيل المثال لا الحصر أنه يمكن وصف لون العين على أنه أزرق - أو عسلي - أو أسود - . . . ، أو لون الشعر حيث يمكن وصفه على أنه (أشقر - أو بني - أو أسود - . . .)

فإننا في مثل هذه الحالات نضع المتغيرين س، ص وصفاتهما الأخرى مهما كان عددها في جدول مبسط كما يلي:

جدول (٥ - ٦): التكرارات المشتركة بين الصفات

المتغير س / المتغير ص	الصفة الأولى $س_١$	الصفة الثانية $س_٢$	......	الصفة $س_م$	المجموع
الصفة الأولى $ص_١$	$ك_{١١}$	$ك_{٢١}$	......	$ك_{م١}$	$ك_{٠١}$
الصفة الثانية $ص_٢$	$ك_{١٢}$	$ك_{٢٢}$	......	$ك_{م٢}$	$ك_{٠٢}$
. . . . . .			. . . . . .		
الصفة $ص_ل$	$ك_{١ل}$	$ك_{٢ل}$	......	$ك_{مل}$	$ك_{٠ل}$
المجموع	$ك_{١٠}$	$ك_{٢٠}$		$ك_{م٠}$	$ك_{٠٠}$

نقول لمعامل الاقتران في هذه الحالة معامل التوافق، ونرمز له بالرمز $م_{ت}$ ويمكن حساب قيمته باستخدام العلاقة التالية:

$$م_{ت} = \sqrt{\frac{جـ - ١}{جـ}} \quad \ldots\ldots\ldots (١٠)$$

حيث إن جـ تحسب من الجدول السابق كالآتي

$$جـ = \frac{(ك_{١١})^{٢}}{ك_{١٠}\,ك_{٠١}} + \frac{(ك_{٢١})^{٢}}{ك_{٢٠}\,ك_{٠١}} + \cdots\cdots + \frac{(ك_{لم})^{٢}}{ك_{ل٠}\,ك_{٠م}} \quad \ldots\ldots\ldots (١١)$$

أي أن نربع تكرار الخلية الأولى، ونقسمه على حاصل ضرب مجموع التكرارات للصف الـذي به الخلية الأولى، ومجموع التكرارات للعمود الذي به الخلية الأولى، وهكذا نحسب بقية حدود جـ من العلاقة (١١) بالنسبة لتكرارات جميع الخلايا. ولتوضيح خطوات حساب معامل التوافق نورد المثال التالي.

مثـال (٧)

أوجد معامل التوافق بين لون الشعر ولون العين لعينة مكونة من ٤٥ شخصًا باستخدام البيانات التالية:

جدول (٥ ـ ٧): التكرارات المشتركة بين لون العيون ولون الشعر

لون الشعر س / لون العيون ص	أشقر	بني	أسود	المجموع
أزرق	٦	٥	٤	١٥
عسلي	٣	٦	٦	١٥
أسود	٢	٧	٦	١٥
المجموع	١١	١٨	١٦	٤٥

لإيجاد معامل التوافق م ت نحسب أولا قيمة جـ كالتالي :

$$\text{ج} = \frac{(٦)^٢}{١١ \times ١٥} + \frac{(٥)^٢}{١٨ \times ١٥} + \frac{(٤)^٢}{١٦ \times ١٥}$$

$$+ \frac{(٣)^٢}{١١ \times ١٥} + \frac{(٦)^٢}{١٨ \times ١٥} + \frac{(٦)^٢}{١٦ \times ١٥}$$

$$+ \frac{(٢)^٢}{١١ \times ١٥} + \frac{(٧)^٢}{١٨ \times ١٥} + \frac{(٦)^٢}{١٦ \times ١٥}$$

$$\text{ج} = ٠,٢٢ + ٠,٠٩ + ٠,٠٧ +$$

$$+ ٠,٠٥ + ٠,١٣ + ٠,١٥ +$$

$$+ ٠,٠٢ + ٠,١٨ + ٠,١٥ +$$

$$\text{ج} = ١,٠٧$$

$$\text{م}_{\text{ت}} = \sqrt{\frac{\text{ج} - ١}{\text{ج}}}$$

$$= \sqrt{\frac{١,٠٧ - ١}{١,٠٧}}$$

$$= \sqrt{٠,٠٧}$$

$$= ٠,٢٦$$

أي يوجد ارتباط ضعيف بين لون الشعر ولون العينين.

ولأهمية دراسة مفهوم الاقتران في كثير من المسائل التطبيقية بين متغيرين أو أكثر، وذلك للاستدلال على طبيعة الاقتران أو قياس معامل الاقتران، وذلك للمقارنة والتعرف على قوة مثل هذا الاقتران. نواجه في دراسة الاقتران عددا من تطبيقات الإحصاء مثل تطبيقات الإحصاء في علم الاجتماع لدراسة ظواهر ما، وعلاقة ذلك بالدين أو التعليم أو الجنس أو العادات الأخرى، كما نواجه مثل هذه الدراسات في كثير من العلوم أحيانا، وفي دراسة بعض الخصائص الوراثية مثل لون الشعر أو العين.. إلخ.

باستخدام الجدول (١٤) يمكن أن نشير إلى الحد العام على أنه ك $_{س ص}$ حيث إن عدد صفوف الجدول ل، وعدد أعمدته م. نرمز لأي قراءة من الجدول ك $_{س ص}$ بالمشاهدة «مش»، ويسمى المقدار $\frac{ك_{س} ك_{ص}}{ك}$ القيمة المتوقعة للقراءة، ونرمز لها بالرمز «مت»، وبذلك نحسب ما يسمى مربع كاي، ونرمز له كا^{٢} على الصورة

$$كا^{٢} = مجـ \frac{(مش - مت)^{٢}}{مت} \quad \ldots\ldots\ldots (١٢)$$

حيث إن المجموع مجـ يكون على جميع خلايا الجدول.

مثال (٨)

أوجد مربع كاي لبيانات المثال ٧ عند دراسة الاقتران بين لون الشعر ولون العين لعينة مكونة من ٤٥ شخصًا.

الحل

أولا نكوّن جدول القيم المشاهدة كما يلي:

لون الشعر س / لون العيون ص	أشقر	بني	أسود	المجموع
أزرق	٦	٥	٤	١٥
عسلي	٣	٦	٦	١٥
أسود	٢	٧	٦	١٥
المجموع	١١	١٨	١٦	٤٥

أما جدول القيم المتوقعة فيمكن حسابه لكل خلية على حده فبالنسبة للخلية في الصف الأول والعمود الأول التي قيمة مشاهداتها ٦ فإن القيمة المتوقعة لها

$$مت_{١١} = \frac{١١ \times ١٥}{٤٥} = \frac{١١}{٣}$$

والقيمة المتوقعة للخلية في الصف الثاني والعمود الأول

$$\text{مت}_{١٢} = \frac{١١ \times ١٥}{٤٥} = \frac{١١}{٣}$$

وبالمثل نلاحظ أن

$$\text{مت}_{٢١} = \frac{١٨ \times ١٥}{٤٥} = ٦$$

ومن ذلك يكون جدول القيم المتوقعة هو

لون الشعر س / لون العيون ص	أشقر	بني	أسود
أزرق	$\frac{١١}{٣}$	٦	$\frac{١٦}{٣}$
عسلي	$\frac{١١}{٣}$	٦	$\frac{١٦}{٣}$
أسود	$\frac{١١}{٣}$	٦	$\frac{١٦}{٣}$

وبالتالي فإنه باستخدام الجدولين السابقين يكون مربع كاي هو

$$\text{كا}^٢ = \frac{(٦ - \frac{١١}{٣})^٢}{\frac{١١}{٣}} + \frac{(٣ - \frac{١١}{٣})^٢}{\frac{١١}{٣}} + \frac{(٢ - \frac{١١}{٣})^٢}{\frac{١١}{٣}}$$

$$= \frac{(٥ - ٦)^٢}{٦} + \frac{(٦ - ٦)^٢}{٦} + \frac{(٧ - ٦)^٢}{٦}$$

$$\text{كا}^٢ = \frac{(٤ - \frac{١٦}{٣})^٢}{\frac{١٦}{٣}} + \frac{(٦ - \frac{١٦}{٣})^٢}{\frac{١٦}{٣}} + \frac{(٦ - \frac{١٦}{٣})^٢}{\frac{١٦}{٣}}$$

$$= ١,٤٨ + ٠,١٢ + ٠,٧٦$$
$$+ ٠,١٧ + ٠,٠٠ + ٠,١٧$$
$$+ ٠,٣٣ + ٠,٠٨ + ٠,٠٨$$
$$= ٣,١٩$$

بعد حساب مربع كاي يمكن حساب معامل كارل بيرسون للاقتران بالصيغة التالية :

$$م_ي = \sqrt{\frac{كا^٢}{ك_{..} + كا^٢}} \quad \ldots\ldots\ldots (١٣)$$

كما اعتاد بعض الإحصائيين على استخدام كمية أخرى تسمى مربع فاي، ويرمز لها بالرمز $ف^٢$ وهي

$$ف^٢ = \frac{كا^٢}{ك_{..}}$$

وبذلك فإنه يمكن حساب معامل بيرسون للاقتران باستخدام مربع فاي من

$$م_ي = \sqrt{\frac{ف^٢}{١ + ف^٢}} \quad \ldots\ldots\ldots (١٤)$$

مثـال (٩)

أوجـد معامل بيرسون للاقتران لبيانات المثال ٨ السابق باستخدام مربع كاي ومربع فاي.

الحـل

سبق أن حسبنا مربع كاي فكانت قيمته

$$كا^٢ = ٣,١٩$$

وبذلك يكون معامل بيرسون للاقتران

$$م_ي = \sqrt{\frac{٣,١٩}{٤٥ + ٣,١٩}} = ٠,٢٦$$

ولحساب مربع فاي يكون لدينـا:

$$\text{ف}^{٢} = \frac{٣,١٩}{٤٥}$$

$$= ٠,٠٧$$

وبالتالي فإن معامل بيرسون للاقتران هو:

$$\text{م}_{\text{ي}} = \sqrt{\frac{٠,٠٧}{١ + ٠,٠٧}}$$

$$= ٠,٢٦$$

وقد لوحظ أن معامل بيرسون للاقتران $\text{م}_{\text{ي}}$ لا يساوي الوحدة حتى في حالة الاقتران الكلي بين متغيرين عندما تكون التقسيمات ل، م محدودة وتقترب من الوحدة عندما تكون قيم ل، م كبيرة جدًّا.

وقد لوحظ أنه في حالة ل = م فإن القيمة العظمى لمعامل بيرسون للاقتران هي

$\text{م} = ٢$ فإن $\text{م}_{\text{ي}} = ٠,٧٠٧$

$\text{م} = ٣$ فإن $\text{م}_{\text{ي}} = ٠,٨١٦$

$\text{م} = ١٠$ فإن $\text{م}_{\text{ي}} = ٠,٩٤٩$

وبذلك يمكن استخدام معامل بيرسون للاقتران فقط للمقارنة بين قيمة بيانات مختلفة في حالة تساوي أبعاد هذه البيانات أي أن لها نفس الصفوف والأعمدة.

ولتجاوز هذه المشكلة فقد اقترح تشابرو ما يسمى معامل تشابرو للاقتران، ويرمز له بالرمز $\text{م}_{\text{و}}$ ويحسب بالصيغة التالية:

$$\text{م}_{\text{و}}^{٢} = \frac{\text{ف}^{٢}}{\sqrt{(\text{ل} - ١)(\text{م} - ١)}} \quad \ldots\ldots\ldots (١٥)$$

أو

$$م_و^٢ = \frac{م_ي^٢}{\sqrt{(١ - م_ي^٢)(ل - ١)(م - ١)}} \quad \ldots\ldots\ (١٦)$$

حيث إن العلاقتين (١٥) و (١٦) متكافئتان.

وقد تبين أن معامل تشابرو يقع بين الصفر والواحد عندما تكون ل = م.

مثـــال (١٠)

أوجد معامل تشابرو للاقتران لبيانات مثالي ٨ و ٩ السابقين. وبما أننا سبق وأن حسبنا المقدارين $ف^٢$ و $م_ي$ عندئذ يكون معامل تشابرو للاقتران حسب العلاقة (١٥) هو:

$$م_و^٢ = \frac{٠,٠٧}{\sqrt{(٣ - ١)(٣ - ١)}}$$

$$= ٠,٠٣٥$$

بينما يكون نفس المعامل باستخدام العلاقة (١٦) هو:

$$م_و^٢ = \frac{(٠,٢٦)^٢}{\sqrt{(١ - (٠,٢٦)^٢)(٣ - ١)(٣ - ١)}}$$

$$= ٠,٠٣٥$$

أي أن:

$$م_و = ٠,١٩$$

(٥ ـ ٥) خـــط الانحـــدار

سبق أن درسنا في هذا الفصل طرق حساب قيمة معامل الارتباط الخطي بين متغيرين س، ص بعدة طرق، وذلك في معامل الارتباط لبيرسون، أو معامل الارتباط للرتب لسبيرمان، كما تعرفنا على كيفية إيجاد قيمة معامل الاقتران لكارل بيرسون وغيره.

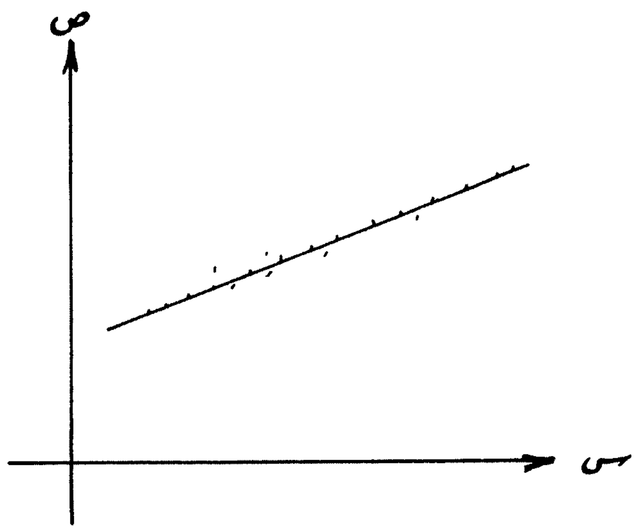
ومن الملاحظ أن جميع المقاييس السابقة تبين أو تعطي قوة الارتباط بين أي متغيرين

فقط، ولكن إذا كان يود الدارس أو الباحث استقصاءً أو بحثًا لأحد المتغيرين عند معرفة قيمة محددة للمتغير الآخر فإنه لا يمكن استخدام معامل الارتباط أو معاملي الاقتران والتوافق ولا بد للوصول إلى إيجاد علاقة جبرية محددة بين المتغيرين (س،ص)، تسمى عادة العلاقة الرياضية التي تفرض التوقع أو التنبوء بسلوك أحد المتغيرين عند معرفة الآخر بمعادلة خط الانحدار. وتشير معادلة خط الانحدار إلى انحدار أحد المتغيرين على المتغير الآخر، وسوف ندرس فيما يلي معادلة خط انحدار المتغير ص على المتغير س وكذلك معادلة خط انحدار المتغير «س» على المتغير «ص» ويمكن تلخيص الصورتين الجبرية والبيانية لخطيْ الانحدار فيما يلي.

(٥ ـ ٥ ـ ١): انحدار ص على س يعطي بالمعادلة التالية

ص = ا س + ب . . . . (١٧)

ويمكن توضيح المقصود بالشكل البياني التالي:

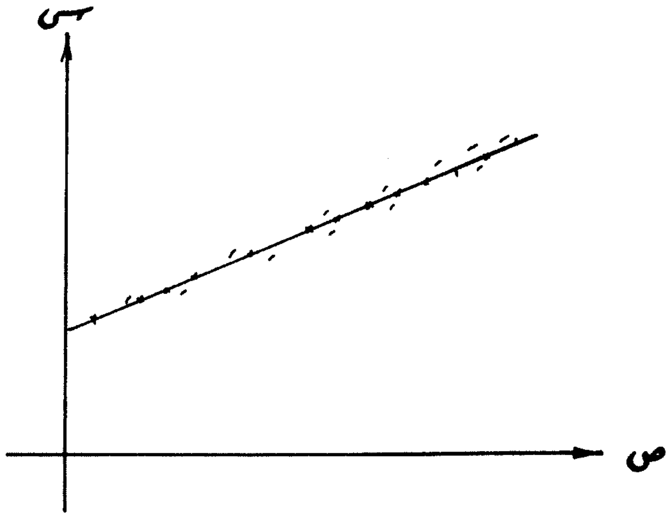


شكل (٥ ـ ٥): شكل خط انحدار ص على س

(٥ ـ ٥ ـ ٢): انحدار س على ص ويعطى بالمعادلة التالية

س = ا ص + ب .... (١٨)

ويمكن توضيح المقصود بالعلاقة السابقة بالرسم البياني التالي:



شكل (٥ ـ ٦): شكل خط انحدار س على ص

حيث إن أحد المتغيرين يعتمد على الآخر سواء كان الاعتماد طرديًا أو عكسيًا.

ويمكن تحديد ورسم خط الانحدار بعدة طرق: منها تمهيد خط مناسب بعد رسم شكل الانتشار للبيانات الخاصة بالمتغيرين (س، ص) وهذه الطريقة تقريبية جدًا، ولا تستخدم كثيرًا، لأنها تختلف من شخص لآخر، ولهذا كان لا بد من إيجاد طريقة لتوفيق خط الانحدار بحيث لا تعتمد على انطباع الأشخاص، ولكن تعتمد على البيانات الخاصة بالمتغيرين (س، ص) فقط من المعادلة (١٧) أو (١٨). ومن ذلك يمكن تحديد الصيغة الرياضية لخط انحدار ص على س بالضبط إذا عُلِمَتْ قيمتا الثابتين ا، ب واللذين يمكن حسابهما باتباع طريقة المربعات الصغرى التي نوردها فيما يلي:

إذا كان الخطأ في تمثيل النقطة (س $_ر$، ص $_ر$) عن خط الانحدار هو خ $_ر$ فإن:

$$خ_ر = ص_ر - ا\,س_ر - ب$$

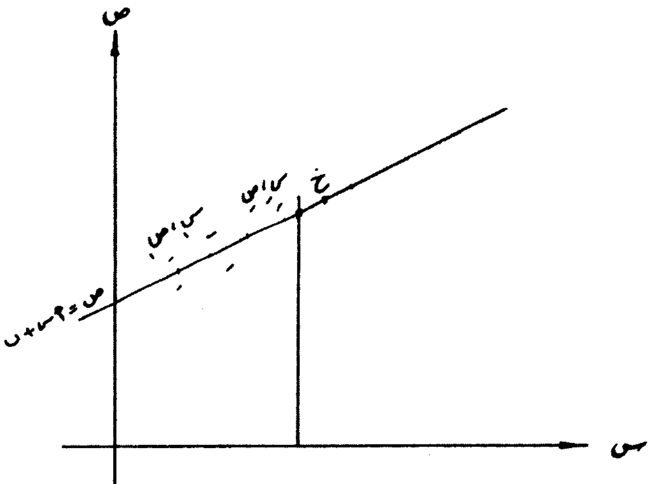
عندئذ يكون مجموع مربعات الأخطاء (م) هو:

$$م = مج\, خ_ر^٢ = مج\, (ص_ر - ا\,س_ر - ب)^٢$$

ولكي يكون (م) نهاية صغرى (أي أن الأبعاد الرأسية للنقطة عن الخط المقترح أصغر ما يمكن) فإننا نفاضل (م) بالنسبة لكل من (ا) و (ب) وتساوي نتيجة التفاضل في كل منهما بالصفر فنحصل على المعادلتين التاليتين:

$$مج\, ص = ا\, مج\, س + ن\, ب \quad \ldots\ldots\ldots (١٩)$$

$$مج\, س\, ص = ا\, مج\, س^٢ + ب\, مج\, س \quad \ldots\ldots\ldots (٢٠)$$



شكل (٥ ـ ٧): كيفية إيجاد معادلة خط انحدار ص على س

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على قيمتي الثابتين (ا) و (ب) كما يلي:

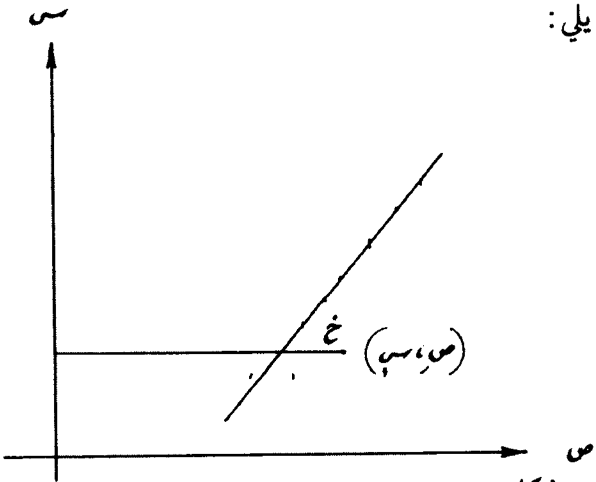
$$ا = \frac{ن\, مج\, س\, ص - مج\, س\, مج\, ص}{ن\, مج\, س^٢ - (مج\, س)^٢}$$

ويسمى الثابت (ا) عادة بمعامل انحدار ص على س.

$$ب = \frac{مج\ ص}{ن} - ا\ \frac{مج\ س}{ن}$$

حيث إن ب تمثل الجزء الذي يقطعه خط انحدار ص على س من محور ص.

ويمكن إعادة الخطوات السابقة لإيجاد معادلة خط انحدار س على ص المعطاة بالمعادلة (١٨) وكذلك حساب الثوابت ا و ب للمعادلة (١٨)، بطريقة المربعات الصغرى كما يلي:



شكل (٥ - ٨): كيفية إيجاد معادلة خط انحدار س على ص

$$خ_ر = س_ر - اص_ر - ب$$

عندئذ يكون مجموع مربعات الأخطاء (م) هو

$$م = مج\ خ_ر^2 = مج\ (س_ر - أ\ ص_ر - ب)^2$$

ولكي يكون (م) نهاية صغرى فإننا نفاضل (م) بالنسبة إلى ا و ب على التوالي ونساوي الناتج في كل منهما بصفر فنحصل على المعادلتين التاليتين:

$$مج\ س = ا\ مج\ ص + ن\ ب \quad \ldots\ldots\ (٢١)$$

$$مج\ س\ ص = أ\ مج\ ص + ب\ مج\ ص \quad \ldots\ldots\ (٢١)$$

وبحل المعادلتين نحصل على قيمتي الثابتين ا و ب كما يلي:

$$ا = \frac{ن \text{ مج } س ص - \text{ مج } س \text{ مج } ص}{ن \text{ مج } ص^{٢} - (\text{مج } ص)^{٢}}$$

حيث ا يسمى معامل انحدار س على ص.

$$ب = \frac{\text{مج } س}{ن} - ا \frac{\text{مج } ص}{ن}$$

حيث إن ب تمثل الجزء المقطوع من محور س لخط انحدار س على ص.

مثـــال (١١)

أوجد معادلة خط انحدار الإنفاق (ص) على الدخل (س) ومن ثم أوجد مقدار الإنفاق عندما يكون الدخل ٣٠٠٠ ريال كما أوجد معادلة خط انحدار الدخل (س) على الإنفاق (ص) وذلك باستخدام البيانات المعطاة في مثال (١) السابق.

الحـــل

نلخص الحل في الجدول التالي:

س	ص	س ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
١٠	٩	٩٠	١٠٠	٨١
١٢	١٢	١٤٤	١٤٤	١٤٤
١٢	١٠	١٢٠	١٤٤	١٠٠
١٣	١٠	١٣٠	١٦٩	١٠٠
١٥	١٣	١٩٥	٢٢٥	١٦٩
٢٠	١٩	٣٨٠	٤٠٠	٣٦١
٩٠	٨١	١١٢٣	١٢٤٦	١٠١٩

أولا

لإيجاد معادلة خط انحدار الإنفاق (ص) على الدخل (س) نحسب التالي:

$$\text{ا} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{٧ \times ١١٢٣ - ٩٠ \times ٨١}{٧ \times ١٢٤٦ - (٩٠)^{٢}}$$

$$= \frac{٥٧١}{٦٢٢} = ٠,٩٢$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} - \text{ا} \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{٨١}{٧} - ٠,٩٢ \times \frac{٩٠}{٧}$$

$$= ١١,٥٧ - ١١,٨٣$$

$$= -٠,٢٦$$

معادلة خط انحدار ص على س تصبح

ص = ٠,٩٢ س + (-٠,٢٦)

= ٠,٩٢ س - ٠,٢٦

ويكون قيمة الإنفاق ص عندما يكون الدخل س = ٣٠٠٠ ريال هو

ص = ٠,٩٢ (٣٠) - ٠,٢٦

= ٢٧,٦٠ - ٠,٢٦

= ٢٧,٣٤

أي أن الإنفاق = ٢٧,٣٤ × ١٠٠ = ٢٧٣٤ ريالا

ثانيا

لإيجاد معادلة خط انحدار س على ص نحسب قيم «ا» و«ب» كما يلي:

$$\text{ا} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}$$

$$= \frac{٨١ \times ٩٠ - ١١٢٣ \times ٧}{٧ \times ١٠٩١ - (٨١)^٢}$$

$$= \frac{٥٧١}{٥٧٢} = ٠,٩٩٨ \simeq ١$$

ب $$= \frac{مجـ\ س}{ن} - ١ \frac{مجـ\ ص}{ن}$$

$$= \frac{٩٠}{٧} - ١ \times \frac{٨١}{٧}$$

$$= ١٢,٨٦ - ١١,٥٧$$

$$= ١,٢٩$$

معادلة خط انحدار الدخل (س) على الإنفاق (ص) تكون كالتالي:

$$س = ص + ١,٢٩$$

(٥ ـ ٦) تمارين

١ ـ البيانات التالية تمثل الدخل لمجموعة من المزارعين مكونة من ٧ أفراد، وكذلك الإنفاق بآلاف الريالات مقربة لأقرب ألف.

الدخل والإنفاق لسبعة مزارعين

الدخل س	٥	٥	٦	٧	٧	٦	٨
الإنفاق ص	٤	٥	٥	٧	٦	٦	٧

ا) اوجد معامل الإرتباط لبيرسون وسبيرمان للدخل والإنفاق.

ب) اوجد معادلة خط الإنحدار ص على س.

جـ) اوجد الإنفاق عندما يصبح الدخل ١٠٠٠٠ ريال.

٢ ـ الجدول التالي يوضح سعر ثمانية من كتب الإحصاء التطبيقي وعدد صفحات كل منها.

أسعار وعدد صفحات ثمانية كتب في الإحصاء

سعر الكتاب	٥٠	٧٠	٦٠	٨٠	٨٠	١٠٠	٩٠	١٢٠
عدد الصفحات	١٥٠	١٨٠	١٨٠	٢٠٠	٢٠٠	٢٥٠	٢٣٠	٣٠٠

ا) اوجد معامل الإرتباط بين سعر الكتاب وعدد صفحاته .

ب) اوجد معادلة خط الانحدار لسعر الكتاب على عدد الصفحات .

٣ ـ الجدول التالي يمثل عمر الزوج س وعمر الزوجة ص لعينة مكونة من ١٠ أسر.

أعمار الأزواج والزوجات في عشرة أسر

عمر الزوج س	٦٠	٢٥	٢٩	٤٠	٣٨	٢٨	٥١	٥٢	٥٥	٧٠
عمر الزوجة ص	٦٠	١٧	٢١	٤٠	٣٠	٢٠	٣٨	٥٠	٥٥	٦٥

ا) اوجد معامل ارتباط عمر الزوجة ص وعمر الزوج س بطريقتين مختلفتين .

ب) اوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم معادلة انحدار س على ص .

جـ) اوجد عمر الزوجة عندما يكون عمر الزوج ٨٠ سنة .

٤ ـ الجدول التالي يمثل تقديرات ثمانية طلاب في مادتي الإحصاء والفيزياء .

تقديرات ثمانية طلاب في الإحصاء والفيزياء

الإحصاء	أ	هـ	د	د	جـ	ب	ب	هـ
الفيزياء	ب	هـ	جـ	د	هـ	ب	أ	د

اوجد معامل الارتباط بين تقديرات الإحصاء والفيزياء .

٥ ـ الجدول التالي يمثل تكاليف الدعاية س بمئات الريالات والمبيعات ص بمئات الريالات .

تكاليف الدعاية وقيمة المبيعات بمئات الريالات

تكاليف الدعاية س	٩	١٠	٩	١٠	٤	٥	٧
المبيعـــات ص	١٦٠	١٨٠	١٥٠	١٩٠	١٢٠	١٢٠	١٤٠

ا) ارسم شكل الانتشار للمتغيرين س، ص.

ب) احسب معامل الإرتباط بين تكاليف الدعاية والمبيعات.

جـ) اوجد معادلة خط انحدار ص على س.

د) اوجد المبيعات (ص) عندما تصير الدعاية ١٢٠٠ ريال.

٦ ـ البيانـات التـالية تمثل اختبار الذكاء واختبار مادة الإحصاء التي حصلنا عليها لمجموعة مكوّنة من ٦ طلاب.

درجة الذكاء ودرجة الإحصاء لستة طلاب

درجة الذكاء س	٧٠	٨٠	٩٠	٦٠	٧٥	٨١
درجة الإحصاء ص	٦٠	٨٠	٩٥	٦٥	٧٤	٨٠

ا) اوجد معامل الإرتباط بين س، ص بطريقتين مختلفتين.

ب) اوجد معادلة خط انحدار ص على س، وكذلك خط انحدار س على ص.

جـ) ارسم خطي الإنحدار وأوجد نقطة التقاطع.

٧ ـ الجدول التالي يمثل درجات أعمال السنة س، ودرجات الامتحان النهائي ص لعينة مكوّنة من سبعة طلاب.

درجات أعمال السنة والامتحان النهائي لسبعة طلاب

أعمال السنة س	١٥	٢٥	٣٠	٣٥	٣٣	٢٥	٢٨
الامتحان النهائي ص	٤٥	٤٠	٥٠	٤٦	٤٥	٣٥	٤٠

ا) اوجد معامل الإرتباط بين المتغيرين (س، ص).
ب) اوجد معادلة خط الإنحدار لدرجة الامتحان النهائي (ص) على درجة أعمال السنة (س).
جـ) اوجد درجة الامتحان النهائي عندما تكون درجة أعمال السنة ٣٩.

٨ - في تجربة لدراسة تأثير تطعيم مجموعة من الحيوانات ضد مرض معين كانت النتائج كما يلي.

التكرارات المشتركة للتطعيم والإصابة بالمرض

الإصابة / التطعيم	أصيب بالمرض	لم يصب بالمرض
طعم	٥	١٢
لم يطعم	٩	٤

أوضح مدى تأثير التطعيم في الوقاية من هذا المرض.

٩ - كانت نتيجة دراسة ألوان البشرة لمجموعة من الأمهات وأول أبنائهن أو بناتهن كما يلي

التكرارات المشتركة لألوان بشرة الأمهات وأوائل الأطفال

الأمهات / الأبناء / البنات	أبيض	قمحي	أسمر
أبيض	٢٧	٦	٧
قمحي	٨	١٧	٥
أسمر	٥	٧	١٨

بيّن فيما إذا كان هناك توافق في لون البشرة للطفل الأول وللأم وناقش ذلك.

١٠- أجري بحث في إحدى عيادات العلاج النفسي عن مدى ارتباط الوضع الاجتماعي ونوعية المرض فكانت النتائج كما يلي:

التكرارات المشتركة بين الأوضاع الاجتماعية والأمراض النفسية

نوع المرض / الوضع الاجتماعي	أعصاب	كآبة	اضطرابات شخصية	فصام شخصية
عالٍ	٢٥	٥	١٢	٨
متوسط	٨	٢٠	١٥	١٢
منخفض	٧	١١	٨	٩

ادرس الاقتران بين الوضع الاجتماعي، ونوع المرض.

١١- في دراسة لعينة من موظفي جامعة الملك سعود كانت العلاقة بين العمر (للأب) وعدد الأطفال كما يلي:

التكرارات المشتركة لفئات العمر للآباء وأعداد الأطفال

عدد الأطفال / العمر	٠-٢	٣-٥	٥-٧	٨-١١
٢٠-٢٥	١٢			
٢٥-٣٠	٧	٥		
٣٠-٣٥	٥	٨		
٣٥-٤٠		٧	٤	
٤٠-٤٥		٦	٣	
٤٥-٥٠		٤	٩	
٥٠-٥٥		٢	٧	٥
٥٥-٦٠			١٠	١٥

أوجد معامل الإرتباط بين عمر الأب وعدد الأطفال.

١٢ـ لدراسة العلاقة بين الدخل (س) بآلاف الريالات والمصروف (ص) بآلاف الريالات في إحدى المدن ـ أخذت عينة من الأسر فكانت لدينا النتائج الآتية:

سَ = ٥ ، صَ = ٤ ، مجـ س ص = ٧٥٠ ، مجـ س^{٢} = ١٤٨٠ ،

مجـ ص^{٢} = ٥٠٠ ، مجـ ص = ٨٠

ا) اوجد معامل الارتباط بين س، ص وبيّن نوعه.

ب) اوجد خط انحدار س على ص.

جـ) قدّر قيمة الدخل عندما يكون الاستهلاك ٦ آلاف ريال.

١٣ـ البيانات التالية تمثل تقديرات ثمانية طلاب في مقررين دراسيين.

تقديرات ثمانية طلاب في مقررين

المقرر الأول	أ	ب	د	هـ	جـ	د	هـ	ب
المقرر الثاني	أ	جـ	هـ	د	جـ	د	هـ	ب

اوجد معامل الارتباط لتقديرات هذين المقررين.