الفصل الرابع

مقاييس التشتت

(٤ - ١) مقدمة

سبق أن تحدثنا عن طرق تلخيص البيانات الإحصائية وعرضها بصورها المختلفة. وتناولنا بعد ذلك طريقة حساب مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)، لإيجاد قيم عددية محددة تصف هذه البيانات بأشكالها المختلفة، ولكن هذه المقاييس تكون غير كافية، وذلك لأنها لا توضح مقدار التفاوت بين مفردات المشاهدات للظاهرة محل الدراسة، كما يتضح من المثال التالي.

مثال (١)

عند دراسة الأجر اليومي لمجموعتين من العمال الزراعيين بالريال في منطقتين مختلفتين كل منهما يتكون من عشرة عمال كانت البيانات كما يلي:

المجموعة الأولى: ٤٣، ٤٠، ٤٠، ٤٥، ٤٤، ٤٢، ٤١، ٤٢، ٤٦، ٤٧

المجموعة الثانية: ٣٠، ٣٥، ٤٢، ٤٨، ٣٩، ٥٠، ٦٠، ٤٢، ٣١، ٦١

بحساب الوسط الحسابي للعينة الأولى نجده يساوي ٤٣ ريالا، كما وجدنا أن الوسط الحسابي للعينة الثانية يساوي ٤٣ ريالا أيضا. نلاحظ من ذلك أن الوسطين الحسابيين لكل من العينتين متساويان، ولكن قيم الأجور للمجموعة الأولى متقاربة ومحصورة بين ٤٠، ٤٧ ريالا، أو يمكن القول: إن أجور العمال في المجموعة الأولى متقاربة أو متجانسة. أما في العينة الثانية فإن قيم الأجور تكون محصورة بين ٣٠، ٦١ ريالا، أي أنها متفاوتة وغير متجانسة أي متباعدة بخلاف المجموعة الأولى رغم تساويها في الوسط

الحسابي في المثال السابق. نلاحظ أن مثل هذه الخصائص لمقاييس النزعة المركزية يجعلها غير كافية لوصف البيانات من حيث تشتت المفردات للمجموعة بعضها عن بعض. ث دعت الحاجة إلى إيجاد مقاييس أخرى عددية لقياس مقدار هذا التفاوت بين المفردات. وهذه المقاييس هي ما تسمى مقاييس التشتت، وسوف نتعرض في هذا الفصل إلى دراسة كيفية حساب بعض خصائص أهم مقاييس التشتت، وعلى الأخص المدى ونصف المدى الربيعي، والإنحراف المتوسط، والتباين والانحرف المعياري، ومعامل الاختلاف. كذلك سنتناول بعض المقاييس الأخرى التي لها علاقة بمقاييس التشتت مثل مقاييس الالتواء، ومقاييس التفلطح في آخر هذا الفصل. وسنحاول تبسيط عرضنا باستخدام الأمثلة لكل مقياس على حدة.

(٤ - ٢) المــــدى

يعرّف المدى للبيانات غير المبوبة بأنه الفرق بين أكبر قراءة وأصغر قراءة لعينة من البيانات أو هو الفرق بين القراءة العظمى والقراءة الصغرى أي أن

المدى = أكبر قراءة - أصغر قراءة .... (١)

مثال (٢):

أوجد المدى للأجور اليومية بالريال لعينة من العمال مكونة من عشرة عمال في إحدى المؤسسات وكانت: ٦٥، ٥٥، ٧٧، ٨٩، ٩٠، ٩٩، ٨٠، ٦٠، ٨٨، ٧٠

نلاحظ أن أقل أجر يومي = ٥٥ ريالاً

وأن أكبر أجر يومي = ٩٩ ريالاً

فيكون المدى = ٩٩ - ٥٥ = ٤٤ ريالاً

أما في حالة البيانات المبوبة فيوجد أكثر من تعريف للمدى نذكر منها التعريفين التاليين:

التعريف الأول:

المدى عبارة عن الفرق بين مركز الفئة العليا ومركز الفئة الدنيا أي أن

المدى = مركز الفئة العليا - مركز الفئة الدنيا ...... (٢)

التعريف الثاني:
المدى عبارة عن الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا والحد الأدنى للفئة الدنيا.

أي أن
المدى = الحد الأعلى للفئة العليا - الحد الأدنى للفئة الدنيا ... (٣)

مثال (٣):
أوجد المدى للأجر اليومي لعينة مكونة من ٥٠ عاملا، وهي مبينة بالجدول التالي:

جدول التوزيع التكراري للأجور اليومية لمجموعة من العمال

فئات الأجور	٢٥ - ٢٩	٣٠ - ٣٤	٣٥ - ٣٩	٤٠ - ٤٤	٤٥ - ٤٩	٥٠ - ٥٤
عدد العمال	٥	٨	١٠	١٣	٨	٦

نلاحظ من الجدول التكراري السابق أن
مركز الفئة الدنيا = ٢٧، ومركز الفئة العليا = ٥٢ ريالا
الحد الأعلى للفئة العليا = ٥٤,٥، والحد الأدنى للفئة الدنيا = ٢٤,٥ ريالا
المدى باستخدام التعريف الأول = ٥٢ - ٢٧ = ٢٥ ريالاً
المدى باستخدام التعريف الثاني = ٥٤,٥ - ٢٤,٥ = ٣٠ ريالاً

(٤ - ٢ - ١) مزايا المدى
١) يعطي فكرة سريعة عن طبيعة البيانات الإحصائية.
٢) مقياس سهل الحساب ويستخدم عادة في مراقبة جودة الإنتاج والأحوال الجوية.

(٤ ـ ٢ ـ ٢) عيوب المدى

١) يعتمد فقد على القراءتين المتطرفتين وأحيانا تكون قيم هاتين القراءتين شاذة لذلك فإن المدى مقياس تقريبي لا يعتمد عليه.

٢) يصعب حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة، أو في حالة البيانات الوصفية.

(٤ ـ ٣) نصف المدى الربيعي

لاحظنا مما سبق أن من أهم خصائص المدى غير المرغوب فيها تأثره بالقيم الشاذة. لذا فمن الواجب إيجاد مقياس أو مقاييس أخرى تستبعد هذه القيم الشاذة من الطرفين، ومن أهم هذه المقاييس نصف المدى الربيعي، ويمكن حسابه بترتيب البيانات تصاعديا، وتقسيم البيانات إلى أربعة أقسام يستبعد منها ربع القيم الصغرى من ناحية، وكذلك ربع القيم الكبرى من الناحية الأخرى.

بعد ذلك فإننا نسمي القيمة (النقطة) التي تكون دونها ربع القراءات الربيع الأدنى ويرمز لها بالرمز $ر_{١}$. أما القيمة (النقطة) التي تحدد ثلاثة أرباع القراءات فتسمى الربيع الأعلى، ويرمز لها بالرمز $ر_{٣}$ والفرق بينهما هو ما يسمى المدى الربيعي. أما نصف المدى بين الربيع الثالث والربيع الأول فيسمى نصف المدى الربيعي، ويرمز له بالرمز (ر) أي أن:

$$ر = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

ويعتبر نصف المدى الربيعي مقياسا يستبعد القيم المتطرفة من الجانبين الأعلى والأدنى.

ويلاحظ أن القيمة (النقطة) التي تكون دونها نصف القراءات (وتسمى بالربيع الثاني) وهي القراءة التي تقسم البيانات إلى نصفين ويرمز له بالرمز $ر_{٢}$ وسبقت الإشارة إليها في الفصل السابق على أنها الوسيط عند دراسة مقاييس النزعة المركزية.

وسوف نتناول طريقة حساب نصف المدى الربيعي في حالة البيانات غير المبوبة، والبيانات المبوبة كالتالي.

(٤ ـ ٣ ـ ١) نصف المدى الربيعي في حالة البيانات غير المبوبة

إذا كانت لدينا مجموعة من البيانات $س_١$، $س_٢$، . . . .، $س_ن$ فإنه لإيجاد نصف المدى الربيعي لها نتبع الخطوات التالية:

١ ـ نرتب البيانات، وليكن عددها «ن» ترتيبا تصاعديا مثلاً.

٢ ـ نوجد رتبة الربيع الأدنى $ر_١$ (أو الأول) وهي $\frac{ن}{٤}$ في حالة ما إذا كانت ن تقبل القسمة على ٤ وبذلك تكون قيمة $ر_١$ هي القراءة التي رتبتها $\frac{ن}{٤}$. أما إذا كانت «ن» لا تقبل القسمة على ٤ فتكون قيمة الربيع الأدنى $ر_١$ هي متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{ن}{٤}$.

٣ ـ نحسب الربيع الأعلى (أو الثالث) $ر_٣$ وهي القراءة التي رتبتها $\frac{٣ن}{٤}$ في حالة كون ن تقبل القسمة على ٤. أما فيما عدا ذلك فقيمة الربيع الأعلى هي متوسط القراءتين اللتين يقع بينهما العدد الكسري $\frac{٣ن}{٤}$ أي إذا كانت ن لا تقبل القسمة على ٤.

٤ ـ نحسب نصف المدى الربيعي ر بتطبيق العلاقة (٤) ونوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٤)

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار عينة مكونة من ٨ موظفين في أحد الأقسام الإدارية بجامعة الملك سعود، حيث كانت البيانات هي:

٤٠، ٤٥، ٣٠، ٢٥، ٢٧، ٢٠، ٢١، ٣٥

نرتب البيانات تصاعديا كالتالي:

٢٠، ٢١، ٢٥، ٢٧، ٣٠، ٣٥، ٤٠، ٤٥

$ن = ٨$، رتبة $ر_١ = \frac{٨}{٤} = ٢$

أي أن الربيع الأدنى هو القراءة الثانية من جهة اليمين وهي:

$ر_١ = ٢١$ سنة

رتبة الربيع الأعلى $\frac{\text{٣.ن}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣ ن}}{\text{٤}} = \text{٦}$ أي أن $ر_{٣}$ هو الحد السادس من جهة اليمين، وقيمته هي :

$ر_{٣} = \text{٣٥}$ سنة

أما نصف المدى الربيعي فيكون :

$$ر = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣٥} - \text{٢١}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٤}}{\text{٢}} = \text{٧ سنوات}$$

مثال (٥)

أوجد نصف المدى الربيعي لأعمار مفردات العينة المكونة من ١٠ موظفين حيث إن البيانات كالتالي :

٢٢ ، ٤١ ، ٤٥ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٢٠ ، ٣٢ ، ٣٩

الحل

نرتب البيانات تصاعديا فتكون :

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٢ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٥ ، ٣٩ ، ٤١ ، ٤٥

ن = ١٠ ، ورتبة $ر_{١} = \frac{\text{ن}}{\text{٤}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٤}} = \text{٢,٥}$

وبذلك تكون قيمة الربيع الأدنى $ر_{١} = \frac{\text{٢٢} + \text{٢٢}}{\text{٢}} = \text{٢٢}$ سنة

ورتبة $ر_{٣} = \frac{\text{٣ ن}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣} \times \text{١٠}}{\text{٤}} = \frac{\text{٣٠}}{\text{٤}} = \text{٧,٥}$ سنة

أي قيمة الربيع الأعلى هي متوسط الحدين السابع والثامن، أي قيمة الربيع الأعلى $ر_{٣}$ هي :

$$ر_{٣} = \frac{\text{٣٥} + \text{٣٩}}{\text{٢}} = \frac{\text{٧٤}}{\text{٢}} = \text{٣٧ سنة}$$

وعليه فإن قيمة نصف المدى الربيعي ر هي :

$$ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٣٧ - ٢٢}{٢} = ٧,٥ \text{ سنة}$$

(٤ ـ ٣ ـ ٢) نصف المدى الربيعي في حالة البيانات المبوبة

وتحسب «ر» في هذه الحالة بطريقتين، أولهما حسابية أما الطريقة الثانية فبيانية :

أولاً : نصف المدى الربيعي حسابيا :

يتم حساب كل من الربيع الأدنى ($ر_١$) والربيع الأعلى ($ر_٣$) من البيانات المبوبة بعد تكوين الجدول المتجمع الصاعد. وبطريقة مشابهة تماما لحساب الوسيط في الفصل السابق مع استبدال $\frac{ن}{٢}$ بالقيمة $\frac{ن}{٤}$ في حالة حساب الربيع الأدنى ($ر_١$)، أو استبداله بالرتبة $\frac{٣ ن}{٤}$ في حالة حساب الربيع الأعلى ($ر_٣$). وعليه فإنه يمكن كتابة قيم $ر_١$ ، $ر_٣$ بالعلاقتين التاليتين :

$$ر_١ = ا + \frac{\frac{ن}{٤} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \, ل$$

حيث ا = بداية فئة الربيع الأدنى .

$ك_١$ = التكرار المتجمع الصاعد السابق لتكرار $ر_١$.

$ك_٢$ = التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لتكرار $ر_١$.

ل = طول الفئة للربيع الأدنى .

$$ر_٣ = \bar{ا} + \frac{\frac{٣ ن}{٤} - \bar{ك}_١}{\bar{ك}_٢ - \bar{ك}_١} \, \bar{ل}$$

حيث إن $\bar{ا}$ = بداية فئة الربيع الأعلى .

$\bar{ك}_١$ = التكرار المتجمع الصاعد السابق لتكرار $ر_٣$.

$\bar{ك}_٢$ = التكرار المتجمع الصاعد اللاحق لتكرار $ر_٣$.

$\bar{ل}$ = طول الفئة للربيع الأعلى .

وسوف نوضح طريقة الحساب من المثال التالي .

مثال (٦)

أوجد نصف المدى الربيعي ر للأجور اليومية بالريال للعمال حسب البيانات المعطاة في مثال (٣) من الفصل الثاني.

نكون أولاً الجدول المتجمع الصاعد كما يلي:

الجدول المتجمع الصاعد للأجور اليومية لمجموعة من العمال

الفئـــــات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤,٥	صفر
أقل من ٢٩,٥ أ	٥ $ك_١$
أقل من ٣٤,٥	١٣ $ك_٢$
أقل من ٣٩,٥	٢٣
أقل من ٤٤,٥ $\acute{أ}$	٣٦ $\acute{ك}_١$
أقل من ٤٩,٥	٤٤ $\acute{ك}_٢$
أقل من ٥٤,٥	٥٠

نوجد رتبة الربيع الأدنى $\frac{ن}{٤} = \frac{٥٠}{٤} = ١٢,٥$

ونضع خطًا أفقيًا بين التكرارين الصاعدين ٥، ١٣ الواقعة بينهما القيمة ١٢,٥ كما هو موضح بالجدول، فيكون من الجدول السابق

أ = ٢٩,٥، $ك_١$ = ٥، $ك_٢$ = ١٣، ل = ٥

أي أن

$$ر_١ = أ + \frac{\frac{ن}{٤} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} ل = ٢٩,٥ + \frac{١٢,٥ - ٥}{١٣ - ٥} \times ٥$$

$$= ٢٩,٥ + \frac{(٧,٥٠)}{٨} \times ٥ = ٢٩,٥٠ + ٤,٦٩ = ٣٤,١٩ \text{ ريالا}$$

كذلك نجد أن:

$$\text{رتبة الربيع الأعلى } ر_٣ = \frac{٣\,ن}{٤} = \frac{٣ \times ٥٠}{٤} = \frac{١٥٠}{٤} = ٣٧,٥$$

وبذلك نضع خطًا أفقيًا بين التكرارين الصاعدين ٣٦، ٤٤ اللذين تقع بينهما القيمة ٣٧,٥ كما هو موضح بالجدول السابق فتكون:

$$ر_٣ = أ + \frac{\frac{٣ن}{٤} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \; ل$$

$$= ٤٤,٥ + \frac{٣٧,٥ - ٣٦}{٤٤ - ٣٦} \times ٥$$

$$= ٤٥,٤٤ \text{ ريالا}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي } ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$$

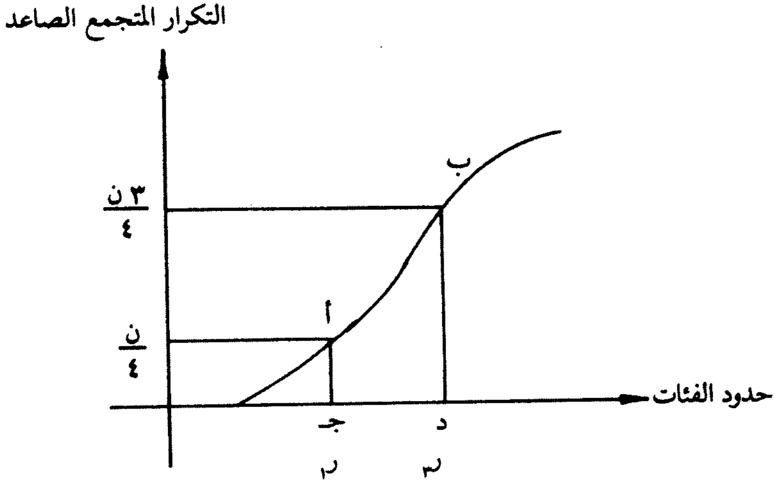
$$= \frac{٤٥,٤٤ - ٣٤,١٩}{٢}$$

$$= ٥,٦٣ \text{ ريالات}$$

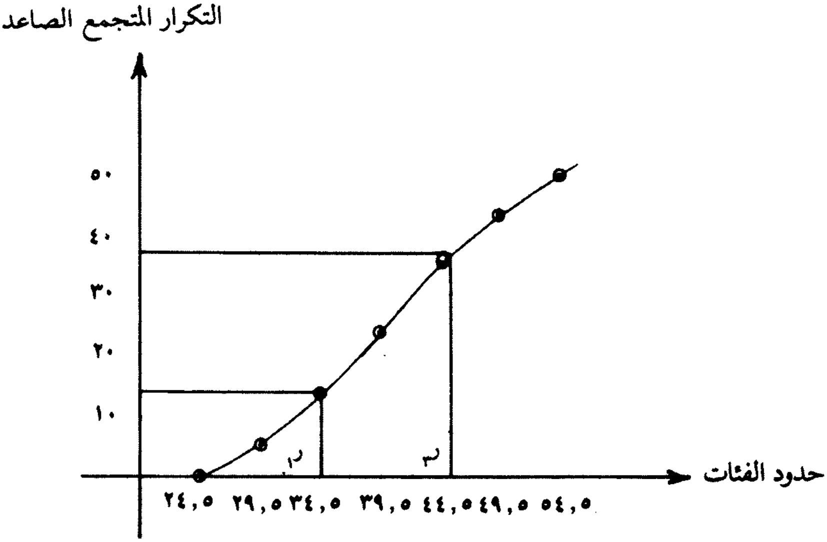
ولحساب قيمة نصف المدى الربيعي (ر) بالطريقة البيانية نرسم المنحنى المتجمع الصاعد من الجدول المتجمع الصاعد السابق. ثم نحدد على محور التكرارات المتجمعة كلا من القيمتين $\frac{ن}{٤}$ ، $\frac{٣\,ن}{٤}$ ، ومنهما نرسم مستقيمين أفقيين متوازيين لمحور الفئات فيقابلان المنحنى الصاعد في النقطتين أ، ب على الترتيب، نسقط عمودين رأسيين على محور الفئات فيقابلانه في النقطتين جـ، د وهما قيمة كل من الربيع الأدنى $ر_١$ ، والربيع الأعلى $ر_٣$ على الترتيب. ونطبق العلاقة (٤)، لنحصل على قيمة نصف المدى الربيعي (ر)، كما هو موضح بالشكل (٤ ـ ١).

مثال (٧):

أوجد نصف المدى الربيعي بيانيا للأجور اليومية للعمال في مثال (٣) السابق. من الجدول المتجمع الصاعد في مثال (٦) نرسم المنحنى المتجمع الصاعد كما في شكل (٤ـ٢).



شكل (٤ - ١) : تحديد الربيعين الأول والثالث بيانيًا



شكل (٤ - ٢): تحديد الربيعين الأول والثالث لأجور العمال بيانيًا

نلاحظ من الرسم أن:

($ر_١$) هي قيمة جـ من الرسم = ٣٤,٥ تقريبا

($ر_٣$) هي قيمة د من الرسم = ٤٥,٥ تقريبا

ومن ذلك نجد أن نصف المدى الربيعي ر = $\frac{\text{قراءة (د) − قراءة (جـ)}}{٢}$

$= \frac{٤٥,٥ - ٣٤,٥}{٢}$

= ٥,٥ ريـالا

(٤ ـ ٣ ـ ٣) مزايا نصف المدى الربيعي

١ ـ لا يتأثر بالقيم الشاذة المتطرفة.

٢ ـ يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ ـ ٣ ـ ٤) عيوب نصف المدى الربيعي

١ ـ لا يأخذ جميع القيم في الاعتبار عند حسابه.

٢ ـ لا يسهل التعامل معه في التحليل الإحصائي.

(٤ ـ ٤) الانحـراف المتوسـط

قبل تعريف الانحراف المتوسط، وتوضيح كيفية حسابه نحتاج إلى استخدام مفهـوم القيمة المطلقة لأي رقم هي قيمته العددية بإشارة موجبة فقط أي أن القيمة المـطلقة للعدد − ٥ هي ٥ وتكتب على الصورة $|-٥| = ٥$ وعموما القيمة المطلقة للقراءة ـ س هي س أي $|ـ س| = س$.

وكذلك المقدار س − ص فإن قيمته المطلقة هي $|س - ص|$ وهكذا.

والآن نستطيع تعريف الانحراف المتوسط في حالة البيانات المبوبة وغير المبوبة.

(٤ ـ ٤ ـ ١) الانحراف المتوسط للبيانات غير المبوبة

يعرَّف الانحراف المتوسط في حالة البيانات غير المبوبة بأنه مجموع الانحرافات المطلقة للقراءات عن وسطها الحسابي مقسوما على عددها. والانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات يحدد مدى تباعد (أو تشتت) مختلف القراءات عن متوسطها باستبعاد الإشارة السالبة كل مرة. مع ملاحظة أن مجموع انحرافات (تباعد) جميع القراءات عن متوسطها يساوي صفرًا.

ولتكن لدينا القراءات

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_ن$$

ذات متوسط حسابي $\bar{س}$

فإن انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي $\bar{س}$ هي:

$$(س_١ - \bar{س})، (س_٢ - \bar{س})، \ldots\ldots ، (س_ن - \bar{س})$$

وتكون الانحرافات المطلقة هي القيم المطلقة لانحرافات القراءات أي أن:

$$|س_١ - \bar{س}| ، |س_٢ - \bar{س}| ، \ldots\ldots\ldots ، |س_ن - \bar{س}|$$

وعلى ذلك يكون الانحراف المتوسط الذي يعرّف كذلك على أنه الوسط الحسابي للانحرافات المطلقة، وبالتالي فإن:

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{|س_١ - \bar{س}| + |س_٢ - \bar{س}| + \ldots + |س_ن - \bar{س}|}{ن}$$

$$= \frac{مجـ |س - \bar{س}|}{ن} \qquad \ldots\ldots\ldots (٧)$$

مثـــال (٨):

أوجد الانحراف المتوسط لأعمار عينة مكونة من ٨ موظفين في مثال (٤).

نحسب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$$

أي أن :

$$\bar{س} = \frac{١}{٨} (٤٠ + ٤٥ + ٣٠ + ٢٥ + ٢٧ + ٢٠ + ٢١ + ٣٥)$$

$$= \frac{١}{٨} (٢٤٣) = ٣٠,٣٧٥ \text{ ريـالا}$$

ومن ذلك يكون :

الانحراف المتوسط

$$= \frac{١}{٨} (|٤٠ - ٣٠,٣٧٥| + |٤٥ - ٣٠,٣٧٥| + \cdots + |٣٥ - ٣٠,٣٧٥|)$$

$$= \frac{١}{٨} (٩,٦٢٥ + ١٤,٦٢٥ + ٠,٣٧٥ + ٥,٣٧٥ + ٣,٣٧٥ + ١٠,٣٧٥ + ٩,٣٧٥ + ٤,٦٢٥)$$

$$= \frac{٥٧,٧٥٠}{٨} = ٧,٢١٨٧٥ \text{ ريالا}$$

(٤ ـ ٤ ـ ٢) الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة

إذا كانت لدينا التكرارات

$ك_١$ ، $ك_٢$ ، . . . . ، $ك_م$ لمجموعة عددها م من الفئات التي مراكزها على الترتيب هي :

$س_١$ ، $س_٢$ ، . . . . ، $س_م$

فإنه يمكن تعريف الانحراف المتوسط كالتالي :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{ك_١|س_١ - \bar{س}| + ك_٢|س_٢ - \bar{س}| + \cdots + ك_م|س_م - \bar{س}|}{ك_١ + ك_٢ + \cdots\cdots + ك_م}$$

$$= \frac{مجـ ك|س - \bar{س}|}{مجـ ك}$$

$$= \frac{مجـ ك|س - \bar{س}|}{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

حيث إن ن = مجـ ك .

مثـال (٩):

احسب الإنحراف المتوسط لأجور العمال في مثال (٣) السابق.

الحـل

ولإيجاد ذلك يجب أن نكوّن الجدول التالي وذلك لتبسيط الحسابات.

جدول التوزيع التكراري للأجور لمجموعة من العمال

الفئات	مراكز الفئات س	ك	ك س	س - سَ	|س - سَ|	ك|س - سَ|
٢٥ - ٢٩	٢٧	٥	١٣٥	-١٢,٩	١٢,٩	٦٤,٥
٣٠ - ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	-٧,٩	٧,٩	٦٣,٢
٣٥ - ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	-٢,٩	٢,٩	٢٩,٠٠
٤٠ - ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٢,١	٢٧,٣
٤٥ - ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٧,١	٥٦,٨
٥٠ - ٥٤	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٢,١	٧٢,٦
المجموع		٥٠	١٩٩٥			٣١٣,٤

وبذلك يكون الوسط الحسابي هو:

$$\bar{س} = \frac{\text{مج ك س}}{ن} = \frac{١٩٩٥}{٥٠} = ٣٩,٩٠ \text{ ريالا}$$

$$\therefore \text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مج ك}|س - \bar{س}|}{ن} = \frac{٣١٣,٤}{٥٠} = ٦,٢٧ \text{ ريـالا}$$

(٤ - ٤ - ٣) مميزات الانحراف المتوسط

١ - يأخذ جميع القيم في الاعتبار.

(٤ ـ ٤ ـ ٤) عيوب الانحراف المتوسط

١ ـ مقياس صعب الحساب وخاصة عندما يكون المتوسط عددًا كسريًا.

٢ ـ يصعب حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ ـ ٥) التباين والانحراف المعياري

يعتبر التباين والانحراف المعياري من أهم مقاييس التشتت المستخدمة في كثير من المسائل الإحصائية. يعرَّف التباين لمجموعة من القراءات عددها «ن» مثلا بأنه متوسط مربعات انحرافات تلك القراءات عن وسطها الحسابي، ويرمز له بالرمز(σ^2) وتقرأ (تباين) أي إنه إذا كانت لدينا القراءات من مجتمع

س$_١$، س$_٢$، . . . . . ، س$_ن$

فإن الوسط الحسابي $\bar{س}$ يكون

$$\bar{س} = \frac{مج\ س}{ن}$$

ومربع الانحرافات عن $\bar{س}$ هي:

$$(س_١ - \bar{س})^٢ ،\ (س_٢ - \bar{س})^٢ ،\ . . . . ،\ (س_ن - \bar{س})^٢$$

وبذلك يكون التباين (σ^2)كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{١}{ن}\ [(س_١ - \bar{س})^٢ + (س_٢ - \bar{س})^٢ + ... + (س_ن - \bar{س})^٢]$$

$$= \frac{١}{ن}\ مج\ (س - \bar{س})^٢$$

وتتلخص فكرة حسابه في حساب الانحرافات عن أحد مقاييس الموضع، ويستعمل الوسط الحسابي وحده لهذا الغرض. ومركزه بين مقاييس التشتت كمركز الوسط الحسابي بين مقاييس النزعة المركزية. أما الجذر التربيعي للتباين فهو ما يسمى الانحراف المعياري، ويرمز له بالرمز (σ)، ويعتبر الانحراف المعياري من أهم وأدق وأفضل مقاييس التشتت، وذلك لسهولة حسابه، وسهولة التعامل معه في التحليل الإحصائي. ومن المعلوم عند دراسة أي ظاهرة من الظواهر في الحياة العملية أنّ المشاهدات تكون مأخوذة بالعينة، وهنا يفضل حساب التباين من العلاقة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{١}{ن - ١} \text{ مج } (س - \bar{س})^٢ \quad \ldots\ldots\ldots (٩)$$

حيث إن «ن» عدد مفردات العينة.. ومن الجذر التربيعي للتباين نحصل على الانحراف المعياري أي أن

$$\sigma = \sqrt{\frac{١}{(ن - ١)} \text{ مج } (س - \bar{س})^٢} \quad \ldots\ldots\ldots (١٠)$$

والجذر التربيعي يعطينا قياسًا للتشتت بنفس وحدات المتغير س.

وسوف نتناول طريقة حساب التباين والانحراف المعياري في كل من البيانات غير المبوبة، والبيانات المبوبة كالتالي.

(٤ ـ ٥ ـ ١) التباين والانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة

إذا كانت لدينا القراءات التالية $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$

فإن التباين يعطي بالعلاقة (٩) والانحراف المعياري بالعلاقة (١٠)، وسوف نوضح طريقة الحساب في المثال التالي.

مثـال (١٠)

أوجد التباين والانحراف المعياري لأعمار عينة من الموظفين بياناتها في مثال (٤) السابق كالتالي:

٤٠، ٤٥، ٣٠، ٢٥، ٢٧، ٢٠، ٢١، ٣٥

نكوّن الجدول التالي:

س	(س - $\bar{س}$)	$(س - \bar{س})^٢$
٤٠	٩,٦٣	٩٢,٥٤
٤٥	١٤,٦٣	٢١٣,٧٤
٣٠	-٠,٣٨	٠,١٤
٢٥	-٥,٣٨	٢٨,٩٤

س	(س - $\bar{س}$)	(س - $\bar{س}$)^٢
٢٧	-٣,٣٨	١١,٤٣
٢٠	-١٠,٣٨	١٠٧,٧٤
٢١	-٩,٣٨	٨٧,٩٨
٣٥	٤,٦٣	٢١,٣٤
٢٤٣		٥٦٣,٨٤

ومن ذلك يكون الوسط الحسابي:

$$\bar{س} = \frac{١}{ن} \text{ مجـ } س = \frac{٢٤٣}{٨} = ٣٠,٣٨ \text{ سنة}$$

$$\sigma^2 = \frac{١}{ن - ١} \text{ مجـ } (س - \bar{س})^٢$$

$$\sigma^2 = \frac{١}{٧} (٥٦٣,٨٤) = ٨٠,٥٥$$

والإنحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{٨٠,٥٥} = ٨,٩٨ \text{ سنة}$$

نلاحظ عند حساب التباين والإنحراف المعياري باستخدام العلاقتين (٩) و (١٠) السابقتين أنه لا بد من حساب الوسط الحسابي $\bar{س}$ وطرحه من جميع القيم. ومن المعلوم أن الوسط قد يكون عددًا كسريًا مما يزيد من صعوبة الحسابات والتعرض للأخطاء. مما دعت الحاجة إلى إيجاد صيغ أخرى مستنتجة منها تكون أبسط في الحساب كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{١}{ن - ١}\left(\text{مجـ } س^٢ - \frac{(\text{مجـ } س)^٢}{ن}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (١١)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(ن-1)}\left(مج\ س^{2} - \frac{(مج\ س)^{2}}{ن}\right)}$$

لإثبات العلاقة (١١) من العلاقة (٩) كالتالي:

$$\because \sigma^2 = \frac{1}{ن-1}\ مج\ (س - \bar{س})^{2}$$

$$= \frac{1}{ن-1}\ مج\ (س^{2} - 2\ \bar{س}\ س + \bar{س}^{2})$$

$$= \frac{1}{ن-1}\ (مج\ س^{2} - 2\ \bar{س}\ مج\ س + ن\ \bar{س}^{2})$$

$$= \frac{1}{ن-1}\ \left(مج\ س^{2} - \frac{2}{ن}(مج\ س)^{2} + \frac{1}{ن}(مج\ س)^{2}\right)$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{ن-1}\left(مج\ س^{2} - \frac{(مج\ س)^{2}}{ن}\right)$$

ويكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثـــال (١١)

حل مثال (١٠) السابق باستخدام العلاقة (١١)

نكوّن جدول الحل التالي:

س	$س^{2}$
٤٠	١٦٠٠
٤٥	٢٠٢٥
٣٠	٩٠٠
٢٥	٦٢٥
٢٧	٧٢٩

س	س^{٢}
٢٠	٤٠٠
٢١	٤٤١
٣٥	١٢٢٥
٢٤٣	٧٩٤٥

وبذلك يكون التباين:

$$\sigma^2 = \frac{١}{ن - ١}\left(\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{ن}\right)$$

وبالتعويض يكون لدينا

$$\sigma^2 = \frac{١}{٧}\left(٧٩٤٥ - \frac{٥٩٠٤٩}{٨}\right)$$

$$= \frac{٥٦٣,٨٨}{٧} = ٨٠,٥٥$$

والانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{٨٠,٥٥} = ٨,٩٨ \text{ سنة}$$

وهي نفس النتيجة في مثال (١٠) السابق. ونستنتج أن هذه الطريقة أسهل في الحساب من الحساب باستخدام العلاقة (٩) السابقة في مثال (١٠). وفي بعض الأحيان قد تكون قيم المتغير «س» للظاهرة محل الدراسة كبيرة، وبذلك تكون مربعات القيم كبيرة جدًّا مما يجعل الحساب بالعلاقة (١١) صعبًا إلى حد ما. مما جعلنا نفكر في تبسيط القيم قبل الحساب، وذلك باستخدام الخاصية المهمة التي يتميز بها كل من التباين والانحراف المعياري، وهي إذا طرحنا أو جمعنا مقدارَ ثابت (أ) من جميع القيم فإن التباين والانحراف المعياري لا يتأثر بالقيم نفسها، وإنما يتأثر بمقدار التفاوت بين القراءات، أي مقدار التقارب أو التباعد للقيم عن بعضها ونوضح ذلك كما يلي:

نفرض أنه لدينا القراءات:

$$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_ن$$

فإذا طرحنا مقدارًا ثابت ا من جميع القراءات السابقة فنحصل على الانحرافات التالية:

$$ح_١ ، ح_٢ ، \ldots\ldots ، ح_ن$$

حيث إن ح = س − ا، وبذلك يكون التباين:

$$\sigma^2 = \frac{١}{ن - ١}\left(مجـ ح^٢ - \frac{(مجـ ح)^٢}{ن}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٢)$$

والانحراف المعياري يكون:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

وبذلك يكون الحل في مثال (١١) بتطبيق العلاقة (١٢) كالتالي:

نختار مقدارًا ثابتًا ا = ٣٠ (قيمة متوسطة بين القراءات) ونكوّن جدول الحل التالي

س	ح = س − ٣٠	ح^٢
٤٠	١٠	١٠٠
٤٥	١٥	٢٢٥
٣٠	٠	٠
٢٥	٥−	٢٥
٢٧	٣−	٩
٢٠	١٠−	١٠٠
٢١	٩−	٨١
٣٥	٥	٢٥
المجموع	٣	٥٦٥

ومن الجدول نجد:

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{ن - 1}\left(مجـ ح^2 - \frac{(مجـ ح)^2}{ن}\right)$$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{٧}\left(٥٦٥ - \frac{٩}{٨}\right)$$

$$= \frac{1}{٧}\ (٥٦٥ - ١,١٣) = \frac{٥٦٣,٨٧}{٧} = ٨٠,٥٥$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{٨٠,٥٥} = ٨,٩٨ \text{ سنة}$$

وهي النتائج السابقة نفسها. ونلاحظ صغر القيم في الحسابات التي حصلنا عليها بهذه الطريقة.

(٤ ـ ٥ ـ ٢) التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة:

إذا كان لدينا التكرارات

$ك_١ ، ك_٢ ، \ldots\ldots ، ك_م$

لفئات عددها م ومراكزها هي

$س_١ ، س_٢ ، \ldots\ldots ، س_م$ على الترتيب

فإن التباين والإنحراف المعياري يعطى كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن - 1}\ مجـ\ ك\ (س - \bar{س})^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٣)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(ن - 1)}\ مجـ\ ك\ (س - \bar{س})^2}$$

ويمكن كتابة الصيغة المبسطة (١١) والصيغة المختصرة (١٢) باستخدام وسط فرضي أ، وذلك باتباع نفس الخطوات السابقة في حالة البيانات غير المبوبة كالتالي:

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن - 1}\left(مجـ\ ك\ س^2 - \frac{(مجـ\ ك\ س)^2}{ن}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٤)$$

و

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن - 1} \left(\text{مجـ ك ح}^2 - \frac{(\text{مجـ ك ح})^2}{ن} \right) \qquad \text{.......... (١٥)}$$

وقد وجد عمليا أنه لسهولة الحسابات يفضل أن يكون الوسط الفرضي أ مساويًا مركز الفئة التي يناظرها أكبر تكرار.

مثال (١٢)

احسب التباين والانحراف المعياري في مثال (٣)، وذلك باستخدام العلاقات (١٣)، (١٤)، (١٥) على الترتيب.

الحــل

لحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٣) نكون جدول الحل كالتالي:

الفئـات	س	م	ك س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^2	ك (س − $\bar{س}$)^2
٢٥ـ٢٩	٢٧	٥	١٣٥	-١٢,٩	١٦٦,٤١	٨٣٢,٠٥
٣٠ـ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	-٧,٩	٦٢,٤١	٤٩٩,٢٨
٣٥ـ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	-٢,٩	٨,٤١	٨٤,١٠
٤٠ـ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	٥٧,٣٣
٤٥ـ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٤٠٣,٢٨
٥٠ـ٥٤	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٨٧٨,٤٦
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٢٧٥٤,٥٠

ومن ذلك يكون الوسط الحسابي هو:

$$\bar{س} = \frac{١}{ن} \text{ مج ك س}$$

$$= \frac{١}{٥٠} (١٩٩٥)$$

$$= ٣٩,٩٠ \text{ ريالا}$$

أما التباين فهو

$$\sigma^2 = \frac{١}{ن - ١} \text{ مج ك } (س - \bar{س})^٢$$

$$= \frac{١}{٤٩} (٢٧٥٤,٥٠)$$

$$= ٥٦,٢١$$

أما الإنحراف المعياري فيكون

$$\sigma = \sqrt{٥٦,٢١}$$

$$= ٧,٥٠ \text{ ريالات}$$

ولحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٤) نكوّن الجدول التالي:

الفئـات	س	$س^٢$	ك	ك س	ك $س^٢$
٢٥ - ٢٩	٢٧	٧٢٩	٥	١٣٥	٣٦٤٥
٣٠ - ٣٤	٣٢	١٠٢٤	٨	٢٥٦	٨١٩٢
٣٥ - ٣٩	٣٧	١٣٦٩	١٠	٣٧٠	١٣٦٩٠
٤٠ - ٤٤	٤٢	١٧٦٤	١٣	٥٤٦	٢٢٩٣٢
٤٥ - ٤٩	٤٧	٢٢٠٩	٨	٣٧٦	١٧٦٧٢
٥٠ - ٥٤	٥٢	٢٧٠٤	٦	٣١٢	١٦٢٢٤
المجموع	-	-	٥٠	١٩٩٥	٨٢٣٥٥

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{ن} - 1}\left(\text{مجـ ك س}^2 - \frac{(\text{مجـ ك س})^2}{\text{ن}}\right)$$

$$= \frac{١}{٤٩}\left(٨٢٣٥٥ - \frac{٣٩٨٠٠٢٥}{٥٠}\right)$$

$$= ٥٦,٢١$$

ومن ذلك يكون:

$$\sigma = \sqrt{٥٦,٢١} = ٧,٥٠ \text{ ريال}$$

ولحساب التباين والانحراف المعياري باستخدام العلاقة (١٥) نكوّن جدول الحل التالي بعد اختيار ا = ٤٢ لتناظرها لأكبر تكرار

الفئات	س	ك	ح = س - ٤٢	ح٢	ك ح	ك ح٢
٢٥ـ٢٩	٢٧	٥	١٥-	٢٢٥	٧٥-	١١٢٥
٣٠ـ٣٤	٣٢	٨	١٠-	١٠٠	٨٠-	٨٠٠
٣٥ـ٣٩	٣٧	١٠	٥-	٢٥	٥٠-	٢٥٠
٤٠ـ٤٤	٤٢	١٣	٠	٠	٠	٠
٤٥ـ٤٩	٤٧	٨	٥	٢٥	٤٠	٢٠٠
٥٠ـ٥٤	٥٢	٦	١٠	١٠٠	٦٠	٦٠٠
المجموع	-	٥٠	-	-	١٠٥-	٢٩٧٥

$$\sigma^2 = \frac{1}{\text{ن} - 1}\left(\text{مجـ ك ح}^2 - \frac{(\text{مجـ ك ح})^2}{\text{ن}}\right)$$

$$= \frac{١}{٤٩}\left(٢٩٧٥ - \frac{(-١٠٥)^2}{٥٠}\right)$$

$$= \frac{١}{٤٩}(٢٩٧٥ - ٢٢٠,٥) = ٥٦,٢١$$

أما الانحراف المعياري فيكون:

$$\sigma = \sqrt{٥٦,٢١} = ٧,٥٠ \text{ ريـال}$$

ونلاحظ أن قيمة التباين والانحراف المعياري المحسوبة بالطرق الثلاث السابقة لا تتغير.

(٤ ـ ٥ ـ ٣) مميزات الانحراف المعياري

١ ـ يأخذ جميع القيم في الاعتبار، ويعتبر من أدق مقاييس التشتت.

٢ ـ يدخل في معظم التحاليل الإحصائية لسهولة التعامل معه رياضيا.

(٤ ـ ٥ ـ ٤) عيوب الانحراف المعياري

١ ـ يتأثر بالقيم المتطرفة (الشاذة).

٢ ـ يصعب حسـابـه في البيانـات الوصفية، والبيانات الكمية ذات الجداول التكرارية المفتوحة.

(٤ ـ ٦) مقاييس التشتت النسبية

سبق لنا دراسة المدى ونصف المدى الربيعي، والانحراف المتوسط والانحراف المعياري، وجميعها مقاييس للتشتت. لها وحدات حسب طبيعة الظاهرة محل الدراسة. ولذلك فإنها تصلح للمقارنة بين الظواهر التي لها نفس الوحدات، مثل مقارنة تشتت أطوال مجموعة من جنود البحرية مع تشتت أطوال مجموعة من جنود الطيران، أو مقارنة تشتت أوزان مجموعة من طلاب جامعة الملك سعود مع تشتت أوزان مجموعة من طلاب جامعة الملك عبدالعزيز وهكذا. أما إذا رغبنا في المقارنة بين ظاهرتين لكل منهما وحدات تختلف عن الأخرى مثل مقارنة تشتت أطوال مجموعة من الطلاب مع تشتت أوزانهم فإن المقاييس السابقة للتشتت لا تصلح للمقارنة، وذلك لاختلاف الوحدات، لأن التشتت للأطوال يقاس بالسنتمتر، والأوزان تقاس بالكيلوجرام مثلا. لذلك نشأت الحاجة إلى إيجاد مقياس نسبي لا يعتمد على الوحدات، ويسمى هذا المقياس معامل الاختلاف، ويعرَّف كالتالي:

$$\text{معامل الاختلاف النسبي} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (١٦)$$

$$\text{أو معامل الاختلاف المئوي} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \times ١٠٠ \quad \dots\dots \quad (١٧)$$

أما في حالة كون جداول التوزيعات التكرارية مفتوحة بإنه للتغلب على ذلك يعرَّف معامل الاختلاف النسبي أو المئوي باستخدام الربيعات كالتالي:

$$\text{معامل الاختلاف النسبي} = \frac{\text{الربيع الأعلى } (ر_٣) - \text{الربيع الأدنى } (ر_١)}{\text{الربيع الأعلى } (ر_٣) + \text{الربيع الأدنى } (ر_١)} \quad \dots \quad (١٨)$$

$$\text{معامل الاختلاف المئوي} = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١} \times ١٠٠ \quad \dots\dots \quad (١٩)$$

مثـــال (١٣)

احسب معامل الاختلاف لأجور العمال في مثال (٣) السابق

أولا: باستخدام معامل الاختلاف النسبي المعرّف بالعلاقة (١٦) والعلاقة (١٧).

ثانيا: باستخدام معامل الاختلاف المعطى بالعلاقة (١٨) والعلاقة (١٩).

الحـــل

سبق حساب كل من $\bar{س}$ = ٣٩,٩٠ ريال والانحراف المعياري = ٧,٥٠ ريال.

وبذلك يكون:

$$\text{معامل الاختلاف النسبي} = \frac{٧,٥٠}{٣٩,٩٠} = ٠,١٨٨$$

$$\text{معامل الاختلاف المئوي} = \frac{٧,٥٠}{٣٩,٩٠} \times ١٠٠ = ١٨,٨٠\%$$

سبق حساب $ر_٣$ = ٤٥,٤٤ ، $ر_١$ = ٣٥,٤٤

وبذلك يكـــون:

$$\text{معامل الاختلاف النسبي} = \frac{ر_٣ - ر_١}{ر_٣ + ر_١}$$

$$= \frac{٤٥,٤٤ - ٣٥,٤٤}{٤٥,٤٤ + ٣٥,٤٤}$$

$$= ٠,١٢٤$$

∴ معامل الاختلاف المئوي = ٠,١٢٤ × ١٠٠ = ١٢,٤٪

ويلاحظ أنه يوجد اختلاف بين قيمتي معامل الاختلاف باستخدام العلاقة (١٦) والعلاقة (١٨) وذلك لاختلاف الأساس الرياضي في كل من التعريفين السابقين ويفضل التعريف الأول إذا كانت جداول التوزيعات التكرارية غير مفتوحة وذلك لدقته.

(٤ ـ ٧) العزوم والالتواء والتفلطح

(٤ ـ ٧ ـ ١) العزوم

يعرَّف العزم الرائي إذا كانت لدينا مجموعة من القراءات $س_١$، $س_٢$، ......، $س_ن$ بالعلاقة الآتية:

$$\text{العزم الرائي} = \frac{\text{مجـ } س^ر}{ن} \qquad .... (٢٠)$$

ويسمى هذا العزم بالعزم الرائي حول نقطة الأصل، أو العزم الرائي غير المركزي وإذا كانت ر = ١ فإنه يسمى العزم الأول حول نقطة الأصل، وهو يساوي الوسط الحسابي $\bar{س}$.

أي أن

$$\text{العزم الأول حول نقطة الأصل} = \frac{\text{مجـ } س}{ن} = \bar{س}$$

ويعرف العزم الرائي حول الوسط الحسابي بالعزم الرائي المركزي كالتالي:

$$\text{العزم الرائي المركزي} = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})^ر}{ن} \qquad .... (٢١)$$

وفي هذه الحالة عندما ر = ١

فإن العزم الأول المركزي = صفرًا

وعندما ر = ٢

$$\text{فإن العزم الثاني المركزي} = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})^{٢}}{ن}$$ وهذا يساوي التباين

وعندما ر = ٣

$$\text{فإن العزم الثالث المركزي} = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})^{٣}}{ن}$$

عندما ر = ٤

$$\text{فإن العزم الرابع المركزي} = \frac{\text{مجـ } (س - \bar{س})^{٤}}{ن}$$ .... وهكـذا

وبالمثل في حالة البيانات المبوبة فإن العلاقتين (٢٠)، (٢١) يمكن كتابتهما كالتالي:

$$\text{العزم الرائي حول نقطة الأصل} = \frac{\text{مجـ ك س}^{ر}}{\text{مجـ ك}} = \frac{\text{مجـ ك س}^{ر}}{ن} \quad \ldots \quad (٢٢)$$

حيث ن = مجـ ك وذلك عندما يكون لدينا مراكز فئات $س_{١}$، $س_{٢}$، ......، $س_{م}$ لها تكرارات $ك_{١}$، $ك_{٢}$ ......، $ك_{م}$

ويكون أيضا

$$\text{العزم الرائي المركزي} = \frac{\text{مجـ ك } (س - \bar{س})^{ر}}{ن} \quad \ldots \quad (٢٣)$$

ونلاحظ أن العزم الأول حول نقطة الأصل بوضع ر = ١ في (٢٢) ويكون هو الوسط الحسابي، وأن العزم الأول المركزي ر = ١ في (٢٣) يساوي صفرا، وأن العزم الثاني المركزي ر = ٢ في (٢٣) يساوي التباين، وبطريقة مماثلة لها في البيانات غير المبوبة يمكن حساب العزوم الأخرى.

مثـــال (١٤)

احسب العزم الأول والعزم الثاني حول نقطة الأصل، وكذلك كلا من العزم الأول المركزي والعزم الثاني المركزي لمجموعة البيانات:

٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٠

لسهولة الحل نكوّن الجدول التالي:

س	$\text{س}^{٢}$	$\text{س} - \bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$
٢	٤	٤-	١٦
٤	١٦	٢-	٤
٥	٢٥	١-	١
٧	٤٩	١	١
٨	٦٤	٢	٤
١٠	١٠٠	٤	١٦
٣٦	٢٥٨		٤٢

نحسب $\bar{\text{س}}$ وهو العزم الأول حول نقطة الأصل من القانون $\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$

أي أن $\bar{\text{س}} = \frac{٣٦}{٦} = ٦$

العزم الثاني غير المركزي $= \frac{\text{مجـ س}^{٢}}{\text{ن}}$

$= \frac{٢٥٨}{٦} = ٤٣$

العزم الأول المركزي $= \frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})}{\text{ن}} = \text{صفـرًا}$

العزم المركزي الثاني $= \frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}$

$= \frac{٤٢}{٦} = ٧$

أما البيانات المبوبة فسوف نرى كيفية حساب العزوم في مثال (١٥).

(٤ ـ ٧ ـ ٢) الالتــواء

لقد سبق أن أوضحنا أشكال المنحنيات للتوزيعات التكرارية المختلفة، وذكرنا منها ما هو متماثل وما هو غير متماثل، وذلك بشكل بياني، من الملاحظ أن الأشكال البيانية عادة تكون تقريبية، ولا تعطي قيمة محددة.

ولقد سبق أن ذكرنا في مقاييس النزعة المركزية إذا كانت المنحنيات متماثلة أن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال تكون متطابقة، أي متساوية في القيمة، وفي حالة عدم التـماثـل فإنها قد تكـون ملتوية ناحية اليمين، فيكون الوسط الحسابي أكبرها، يليه الوسيط، ثم المنوال. وإما ملتوية ناحية اليسار فيكون الوسط الحسابي أصغرها، يليه الوسيط، ثم المنوال.

وكـل ما سبق يكون غير كافٍ لقياس الالتواء مما دعت الحاجة لإيجاد مقياس للالتواء يفيد في المقارنات ودراسة طبيعة التوزيعات المختلفة. ويحدد لنا هذا المقياس مدى بعد شكل منحنى التكرار عن التماثل حول أحد مقاييس الموضع المختلفة. وتحدد قيمته عادة بمعامل الالتواء الذي يحسب بعدة طرق، كما سنرى فيما يلي، تختلف قيمها باختلاف اختيار مقياس الموضع.

مقياس الالتواء لبيرسون (Pearson)

يعرف معامل بيرسون للالتواء كالتالي:

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{الوسط الحسابي} - \text{المنوال}}{\text{الانحـراف المعيـاري}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (٢٤)$$

أو

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{٣(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحـراف المعيـاري}} \quad \ldots\ldots\ (٢٥)$$

ومعامل بيرسون للالتواء يعطي نتائج مقبولة عندما يكون الالتواء بسيطا، ويفشل عندما تكون المنحنيات شديدة الالتواء، أو في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة.

مقياس الالتواء لباولي Bowely

ويعرف معامل الالتواء لباولي كالآتي:

$$\text{معامل الالتواء لباولي} = \frac{(\text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى})}{(\text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط}) + (\text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى})} \quad \ldots\ldots\ldots (٢٦)$$

وهذه العلاقة تفيد في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة والمغلقة.

مقياس الالتواء بطريقة العزوم

ويعرف معامل الالتواء كالتالي:

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (٢٧)$$

ونوضح العلاقات الثلاث السابقة لحساب معامل الالتواء بالمثال التالي:

مثـــال (١٥)

أوجد معامل الالتواء لبيرسون ولباولي وباستخدام طريقة العزوم، وذلك في حالة أجور العمال في مثال (٣) السابق.

الحـــل

لقد سبق أن حسبنا في الأمثلة (٣)، (٩)، (١٢) في الفصل الثالث وكان الوسط الحسابي = ٣٩,٩٠ ريالا، الوسيط = ٤٠,٢٧ ريالا، المنوال = ٤١,٣٨ ريالا وفي مثال (١٢) السابق الانحراف المعياري = ٧,٥ ريالات.

وعليه فإن

$$\text{معامل الالتواء لبيرسون} = \frac{\text{الوسط الحسابي ـ المنوال}}{\text{الانحـراف المعيـاري}}$$

$$= \frac{\text{٣٩,٩ ـ ٤١,٣٨}}{\text{٧,٥}} = \text{- ٠,١٩٧}$$

أي أن الالتواء سالب فيكون جهة اليسار ومقداره صغير لقرب المقدار -١٩٧, ٠ من الصفر.

أو باستخدام العلاقة (٢٥) يكون

$$\text{معامل الالتواء لبيرسون} = \frac{\text{٣(الوسط الحسابي ـ الوسيط)}}{\text{الانحـراف المعيـاري}}$$

$$= \frac{\text{٣(٣٩,٩٠ - ٤٠,٢٧)}}{\text{٧,٥}} = \text{- ٠,١٤٨}$$

باستخدام العلاقة (٢٦) يكون

$$\text{معامل الالتواء لباولي} = \frac{(\text{ر}_{٣} - \text{ر}_{٢}) - (\text{ر}_{٢} - \text{ر}_{١})}{(\text{ر}_{٣} - \text{ر}_{٢}) + (\text{ر}_{٢} - \text{ر}_{١})}$$

$$= \frac{\text{(٤٥,٤٤ - ٤٠,٢٧) - (٤٠,٢٧ - ٣٥,٤٤)}}{\text{(٤٥,٤٤ - ٤٠,٢٧) + (٤٠,٢٧ - ٣٥,٤٤)}}$$

$$= \frac{\text{٥,١٧ - ٤,٨٣}}{\text{٥,١٧ + ٤,٨٣}} = \frac{\text{٠,٣٤}}{\text{١٠,٠٠}}$$

$$= \text{٠,٠٣٤}$$

باستخدام العلاقة (٢٧) يكون

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{العزم الثالث المركزي}}{(\text{الانحـراف المعيـاري})^{٣}}$$

ولحساب ذلك نكوّن جدول الحل التالي :

الفئات	س	ك	ك س	س - $\bar{\text{س}}$	(س - $\bar{\text{س}}$)^2	ك (س - $\bar{\text{س}}$)^2	ك (س - $\bar{\text{س}}$)^3
٢٥ـ٢٩	٢٧	٥	١٣٥	-١٢,٩	١٦٦,٤١	٨٣٢,٠٥	-١٠٧٣٣,٤٥
٣٠ـ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	-٧,٩	٦٢,٤١	٤٩٩,٢٨	-٣٩٤٤,٣١
٣٥ـ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	-٢,٩	٨,٤١	٨٤,١٠	-٢٤٣,٨٩
٤٠ـ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	٥٧,٣٣	١٢٠,٣٩
٤٥ـ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٤٠٣,٢٨	٢٨٦٣,٢٩
٥٠ـ٥٤	٥٢	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٨٧٨,٤٦	١٠٦٢٩,٣٧
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٢٧٥٤,٥٠	-١٣٠٨,٦

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{ن}} = \frac{\text{١٩٩٥}}{\text{٥٠}} = \text{٣٩,٩٠ ريالا}$$

$$\text{التباين} = \frac{\text{مجـ ك (س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن} - \text{١}} = \frac{\text{١}}{\text{٤٩}}(\text{٢٧٥٤,٥}) = \text{٥٦,٢١}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sqrt{\text{٥٦,٢١}} = \text{٧,٥ ريالا}$$

$$\text{العزم الثالث} = \frac{\text{مجـ ك (س} - \bar{\text{س}})^3}{\text{ن}} = \frac{\text{١}}{\text{٥٠}} \quad (\text{-١٣٠٨,٦})$$

$$= \text{-٢٦,١٧}$$

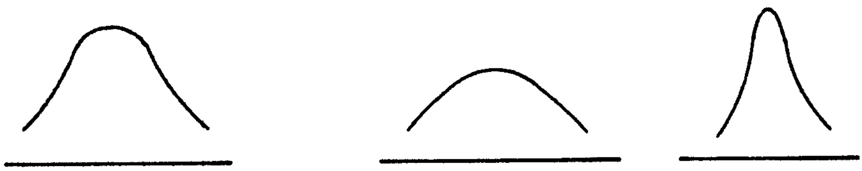
$$\text{معامل الالتواء} = \frac{\text{-٢٦,١٧}}{(\text{٧,٥})^3} = \frac{\text{-٢٦,١٧}}{\text{٤٢١,٨٨}}$$

$$= \text{-٠,٠٦٢}$$

ويلاحظ من حساب معامل الالتواء بالطرق الثلاث السابقة أن الالتواء سالب، أي جهة اليسار وأنه التواء بسيط، وذلك لقرب قيمته من الصفر.

(٤ ـ ٧ ـ ٣) التفلطح

سبق لنا دراسة طرق عرض التوزيعات التكرارية بيانيًا، ورسم المنحنيات التكرارية لها، ومعرفة المنحنيات المتماثلة وغير المتماثلة (أي الملتوية) وقياس معامل الالتواء لها. والآن سوف نتناول كيفية مقدار التفلطح لهذه المنحنيات التكرارية، وطريقة قياسه بالنسبة للمنحنى المتماثل الذي يسمى المنحنى الطبيعي، التفلطح يقيس مقدار التدبب لقمة هذه المنحنيات ارتفاعًا أو انخفاضًا بالنسبة لقمة التوزيع الطبيعي الذي يسمى متوسط التفلطح. فيما يلي بعض أشكال توضح من خلالها أنواع التفلطح المختلفة.



شكل (ا) مدبب شكل (ب) مفلطح شكل (جـ) متوسط التفلطح

شكل (٤ ـ ٣): بعض أشكال التفلطح

ونلاحظ ما يلي:

شكل (ا): له قمة عالية نسبيا ويسمى منحنى مدبب.

شكل (ب): له قمة مسطحة ويسمى منحنى مفلطح.

شكل (جـ): له قمة ليست مدببة ولا مفلطحة ويسمى منحنى متوسط التفلطح (أو المنحنى الطبيعي) ومعامل تفلطحه يساوي ثلاثة.

ولقياس معامل التفلطح تستخدم إحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى

معامل التفلطح بدلالة العزوم وهو يساوي خارج قسمة العزم الرابع المركزي على الانحراف المعياري مرفوعا للقوى ٤ أي أن:

$$\text{معامل التفلطح العزمي} = \frac{\text{العزم الرابع المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٢٨)$$

الطريقة الثانية

معامل التفلطح باستخدام الربيعات والمئينات ويعرف كالتالي:

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢(م_{٩٠} - م_{١٠})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٩)$$

حيث إن:

$ر_{٣}$ = الربيع الأعلى

$ر_{١}$ = الربيع الأدنى

$م_{٩٠}$ = المئين التسعين

$م_{١٠}$ = المئين العاشر

ونوضح كلا من الطريقتين بالمثال التالي.

مثال (١٦)

احسب معامل التفلطح باستخدام الطريقتين السابقتين لأجور العمال في مثال (٣) السابق.

بطريقة العزوم نكوّن جدول الحل التالي:

الفئات	س	ك	ك س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^{٢}$	$(س - \bar{س})^{٣}$	$ك(س - \bar{س})^{٤}$
٢٥ـ٢٩	٢٧	٥	١٣٥	-١٢,٩	١٦٦,٤١	٢٧٦٩٢,٢٩	١٣٨٤٦١,٤٥
٣٠ـ٣٤	٣٢	٨	٢٥٦	-٧,٩	٦٢,٤١	٣٨٩٥,٠١	٣١١٦٠,٠٨
٣٥ـ٣٩	٣٧	١٠	٣٧٠	-٢,٩	٨,٤١	٧٠,٧٣	٧٠٧,٢٠
٤٠ـ٤٤	٤٢	١٣	٥٤٦	٢,١	٤,٤١	١٩,٤٥	٢٥٢,٨٥
٤٥ـ٤٩	٤٧	٨	٣٧٦	٧,١	٥٠,٤١	٢٥٤١,١٧	٢٠٠٣٢٩,٣٦
٥٠ـ٥٤	٥٣	٦	٣١٢	١٢,١	١٤٦,٤١	٢١٤٣٥,٨٩	١٢٨٦١٥,٣٤
المجموع	-	٥٠	١٩٩٥	-	-	٥٥٦٥٤,٥٣	٣١٩٥٢٦,٣٨

سبق حساب $\bar{س}$ = ٣٩,٩٠، والانحراف المعياري نحر = ٧,٥٠

ومن الجدول يكون العزم الرابع المركزي $= \frac{\text{مجـ ك }(س - \bar{س})^4}{ن}$

$= \frac{٣١٩٥٢٦,٣٨}{٥٠} = ٦٣٩٠,٥٣$

معامل التفلطح $= \frac{\text{العزم الرابع المركزي}}{(\text{الانحراف المعياري})^4} = \frac{٦٣٩٠,٥٣}{٣١٦٤,٠٦}$

= ٢,٠٢ أي أن المنحنى مفلطح

بطريقة الربيعات والمئينات:

سبق أن حسبنا الربيع الأعلى والأدنى $ر_٣$، $ر_١$ في مثال (٦) السابق فكانت $ر_٣$ = ٤٥,٤٤، $ر_١$ = ٣٥,٤٤

ولحساب $م_{٩٠}$، $م_{١٠}$ نعيد كتابة الجدول المتجمع الصاعد كالتالي:

الفئـــات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤,٥	صفـر
أقل من ٢٩,٥	٥
أقل من ٣٤,٥	١٣
أقل من ٣٩,٥	٢٣
أقل من ٤٤,٥	٣٦
أقل من ٤٩,٥ أ	٤٤ $ك_١$
أقل من ٥٤,٥	٥٠ $ك_٢$

رتبة $م_{١٠} = \frac{١٠ \times ن}{١٠٠}$

$$= \frac{١٠ \times ٥٠}{١٠٠} = ٥$$

تكون $م_{١٠}$ = ٢٩,٥ ريـالا (من الجدول مباشرة)

$$\text{رتبة } م_{٩٠} = \frac{٩٠ \times ن}{١٠٠}$$

$$= \frac{٩٠ \times ٥٠}{١٠٠} = ٤٥$$

نضع خطًا أفقياً بين التكرارين المتجمعين ٤٤ ، ٥٠ ، ونحسب قيمة $م_{٩٠}$ من العلاقة الآتية :

$$\therefore م_{٩٠} = ا + \frac{\frac{٩٠ن}{١٠٠} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \times ل$$

حيث إن ا = ٤٩,٥ ، $ك_١$ = ٤٤ ، $ك_٢$ = ٥٠ ، ل = ٥

$$\therefore م_{٩٠} = ٤٩,٥ + \frac{٤٥ - ٤٤}{٥٠ - ٤٤} \times ٥$$

$$= ٤٩,٥ + \frac{٥}{٦} = ٥٠,٣٣$$

$$\text{معامل التفلطح} = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢(م_{٩٠} - م_{١٠})}$$

$$= \frac{٤٥,٤٤ - ٣٥,٤٤}{٢(٥٠,٣٢ - ٢٩,٥)} = ٠,٢٥$$ أي المنحنى مفلطح

(٤ ـ ٨) تماريـــن

١ ـ فيما يلي أعمار مجموعة من طلاب جامعة الملك سعود

٢٠ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢١ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٠ ، ٢١

ا) احسب المـدى ونصف المـدى الـربيعي والانحـراف المتـوسط والتبـاين والانحراف المعيارى لأعمار الطلاب .

ب) أوجد المقاييس المطلوب حسابها في الفقرة السابقة (أ) بعد أربع سنوات على نفس الأشخاص بفرض بقائهم على قيد الحياة.

٢ ـ عند دراسة تصنيف مقادير مشتريات الطلاب في إحدى محلات (مراكز) بيع الأدوات الكتابية بإحدى الكليات لعينة من الطلاب مكونة من ١٠٠ طالب كانت كالتالي:

جدول التوزيع التكراري لمشتريات الطلاب

المبيعات لأقرب ريال	١ ـ ٢	٣ ـ ٤	٥ ـ ٦	٧ ـ ٨	٩ ـ ١٠
عدد الطلاب	٢٠	٤٠	٢٥	١٠	٥

أوجد المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المعياري للمبيعات.

٣ ـ عند دراسة استهلاك مجموعة مكونة من ٨٠ سيارة من سيارات جامعة الملك سعود لكل جالون من البنزين كانت كالتالي:

جدول التوزيع التكراري لإستهلاك البنزين
لمجموعة من سيارات جامعة الملك سعود

عدد الأميال لكل جالون	عدد السيارات
١٦ ـ ١٧	٨
١٨ ـ ١٩	٢٢
٢٠ ـ ٢١	٣٠
٢٢ ـ ٢٣	١٢
٢٤ ـ ٢٥	٨
المجموع	٨٠

احسب الانحراف المعياري لعدد الأميال لكل جالون.

٤ ـ البيانات التالية تمثل الأجر اليومي لعينة مكونة من ١٠٠ عامل من عمال عاديين في إحدى المؤسسات الصناعية:

جدول التوزيع التكراري للأجر اليومي لمجموعة من العمال

الأجر اليومي بالريال	عدد العمال
أقل من ٣٥	١٤
٣٥ ـ ٣٧	٢٧
٣٨ ـ ٤٠	٣٠
٤١ ـ ٤٣	٢٠
أكبر من ٤٣	٩
المجمــوع	١٠٠

احسب تشتت الأجور باستخدام مقياس مناسب.

٥ ـ الجدول التالي يمثل درجات عينتين من طلاب قسم الاجتماع في كلية الآداب

جدول التوزيع التكراري للدرجات لعينتين من طلاب قسم الاجتماع

فئـات الدرجـات	٤٠ ـ ٤٩	٥٠ ـ ٥٩	٦٠ ـ ٦٩	٧٠ ـ ٧٩	٨٠ ـ ٨٩	٩٠ ـ ٩٩
درجات المجموعة الأولى	٥	٩	١٤	١٢	١٠	-
درجات المجموعة الثانية	٤	١٢	١٦	١١	٥	٢

أي المجموعتين أكثر تشتتا؟

٦ ـ فيما يلي أعمار عينتين من طلاب الصف الثاني في مدرستين مختلفتين مقربة لأقرب سنة

المدرسة الأولى: ٦، ٧، ٦، ٧، ٧، ٨، ٩، ٨، ٧، ٦، ٧

المدرسة الثانية: ٧، ٨، ٨، ٨، ٩، ١٠، ٩، ٦، ٦، ٨، ٧، ٨

أوجد في أي المدرستين تكون أعمار الطلاب أكثر تشتتا.

٧ ـ الجدول التالي يمثل توزيع ١٠٠ أسرة حسب عدد الأفراد

جدول التوزيع التكراري لأعداد أفراد مجموعة من الأسر

عدد الأفراد	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد الأسر	٣	٥	١٤	٢٢	٢٥	١٦	٩	٦	١٠٠

احسب الانحراف المعياري لعدد أفراد الأسر.

٨ ـ الجدول التالي يبين عدد المواليد الموتى خلال سنة في إحدى المدن طبقا لعمر الأم.

جدول التوزيع التكراري لأعمار الأمهات حسب أعداد المواليد الموتى

عمر الأم	٢٠ ـ ٢٤	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤
عدد المواليد	٦	١٠	١٢	٨	٤٠

أوجد الانحراف المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

٩ ـ الجدول التالي يبين توزيع عدد الشقق حسب الإيجار السنوي في أحد الأحياء بمدينة ما.

جدول التوزيع التكراري لإيجارات مجموعة من الشقق

الإيجار بآلاف الريالات	٦ ـ ٨	٩ ـ ١١	١٢ ـ ١٤	١٥ ـ ١٧	١٨ ـ ٢٠	٢١ ـ ٢٣
عدد الشقق	٤	١١	١٥	٢٤	١٠	٦

احسب الانحراف المعياري لإيجار الشقق.

١٠ ـ الجدول التالي يمثل توزيع الإنفاق الشهري لعدد من الأسر غير السعودية في إحدى المدن.

جدول التوزيع التكراري للإنفاق الشهري لمجموعة من الأسر

الإنفاق بمئات الريالات	٨ - ١٠	١١ - ١٣	١٤ - ١٦	١٧ - ١٩	٢٠ - ٢٢	٢٣ - ٢٥
عدد الأسر	٣	١٨	١٧	٢٥	١٠	٧

احسب المدى ونصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط والمعياري ومعامل الاختلاف للإنفاق.

١١- في دراسة عن أطوال وأوزان مجموعة من الطلاب كانت النتائج كما يلي:

الأطوال: مجـ س = ٣٤٠٠ ، مجـ $س^٢$ = ٥٧٨٤٨٠

والجدول التكراري للأوزان هو:

فئات الوزن	٦٠ - ٦٤	٦٥ - ٦٩	٧٠ - ٧٤	٧٥ - ٧٩	٨٠ - ٨٤
التكرار	٢	٤	٩	٤	١

قارن بين تشتت الأطوال والأوزان.

١٢- بإضافة ٤ إلى كل رقم في مجموعة البيانات:

٦ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٧ ، ٦

نحصل على مجموعة البيانات التالية:

١٠ ، ٨ ، ٩ ، ٦ ، ١١ ، ١٠

ا) بين أن للمجموعتين نفس الانحراف المعياري ووسطين مختلفين مع بيان العلاقة بين الوسطين؟

ب) بضرب المجموعة الأولى في ٢ ثم إضافة ٤ نحصل على مجموعة البيانات التالية:

١٦ ، ١٢ ، ١٤ ، ٨ ، ١٨ ، ١٦

ما هي العلاقة بين الانحرافات المعيارية والأوساط لمجموعتي البيانات الأولى والأخيرة.

١٣ـ في دراسة عن أحد النباتات التي لها نفس العمر كانت أطوالها كما في الجدول التالي:

جدول التوزيع التكراري لأطوال مجموعة النباتات لها نفس العمر

فئات الطول	٢٠ ـ ٢٤	٢٥ ـ ٢٩	٣٠ ـ ٣٤	٣٥ ـ ٣٩	٤٠ ـ ٤٤
التكـــرار	١٤	٥٢	٥٠	٣٦	٨

ا) احسب الالتواء لهذه النباتات باستخدام ثلاثة مقاييس.

ب) قارن بين النتائج من حيث وصفها للتوزيع.

جـ) اذكر مزايا وعيوب كل مقياس ثم احسب مقياسا لتفلطح هذا التوزيع.