الفصل العاشر

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

(١٠ - ١) مقدمـــة

لقـد سبق لنا في الفصول السابقة دراسة فراغ العينة، وكيفية إيجاد عناصره. وكـذلك دراسة الحوادث واحتمالات هذه الحوادث، وفي هذا الفصل سندرس أحد المفـاهيم الأسـاسية في نظرية الاحتـمال وهو ما يسمى المتغير العشوائي، واحتمالات حدوث قيمه. وكيفية إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية المناظرة لها.

(١٠ - ٢) المتغير العشوائي المتقطع

يعرَّف المتغير العشوائي بصفة عامة بأنه دالة (تقابل) تعرَّف على فراغ العينة **ش**. وتكون قيم المتغير العشوائي (أو المجال المقابل له) **س** (**ش**) عبارة عن مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية. فإذا كان المجال المقابل منتهيًا أو غير منتهٍ وقابلاً للعد فإن المتغير في هذه الحالة يسمى المتغير العشوائي المتقطع أو الوثاب.

ومن أمثلة المتغيرات المتقطعة عدد وحدات العينة في إنتاج إحدى الآلات، عدد الحـوادث المـرورية في مدينـة ما خلال شهر، عدد الركاب الذين يصلون إلى محطة الحافلات خلال ساعة من الزمن، عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقود ن من المرات وهكذا. . .

وعادة يرمز للمتغير العشوائي بالرمز **س** والقيم التي يأخذها هذا المتغير بالرموز

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، . . . . ، س$_{ر}$ ، . . . .

حيث س$_{١}$ ≥ س$_{٢}$ ≥ . . . . ≥ س$_{ر}$ ≥ . . . .

والاحتمالات ح (**س** = س$_{١}$) ، ح (**س** = س$_{٢}$) . . . . . .

وأحيانًا تكتب ح (س$_{١}$) ، ح (س$_{٢}$) ، . . . .

وتسمى دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع.

وهي تحقق الخاصيتين التاليتين معا.

١ ـ جميع قيمها موجبة أو تساوي الصفر أي ح (س) ≥ صفر.

٢ ـ مجموع الاحتمالات لجميع قيم المتغير العشوائي تساوي ١

أي $$\sum_{ر=١}^{ن} ح\,(س_{ر}) = ١$$

وسوف نوضح كيفية إيجاد قيم المتغير العشوائي المتقطع ودالة التوزيع الاحتمالي له بالأمثلة التالية.

مثال (١)

إذا ألقيت قطعة عملة متزنة مرتين متتاليتين، وكان المتغير العشوائي **س** عبارة عن عدد الصور التي تظهر، فأوجد قيم هذا المتغير العشوائي ودالة التوزيع الاحتمالي له.

فراغ العينة **ش** الناتج من إلقاء قطعة العملة مرتين يكون كالتالي:

ش = { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

المتغير **س** = عدد الصور، فيكون قيم **س** لكل عنصر من عناصر فراغ العينة **ش** كالتالي:

س = ٢ للعنصر (ص ، ص)

س = ١ للعنصر (ص ، ك)

س = ١ للعنصر (ك ، ص)

س = صفر للعنصر (ك ، ك)

أي أن قيم المتغير العشوائي $س_١ \geqslant س_٢ \geqslant س_٣$ هي صفر ، ١ ، ٢

ويمكن التعبير عن قيم المتغير العشوائي من الجدول التالي :

ش	(ص ، ص)	(ص ، ك)	(ك ، ص)	(ك ، ك)
س	٢	١	١	صفر

أي أن **س** (**ش**) = { صفر ، ١ ، ٢ } المجال المقابل للمتغير العشوائي وتكون قيم دالة التوزيع الاحتمالي لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي ، بالرجوع إلى فراغ العينة كالتالي :

ح (صفر) = ح (**س** = صفر) = ح [(ك ، ك)] = $\frac{١}{٤}$

ح (١) = ح (**س** = ١) = ح [(ص ، ك) ، (ك ، ص)] = $\frac{٢}{٤}$

ح (٢) = ح (**س** = ٢) = ح [(ص ، ص)] = $\frac{١}{٤}$

ويمكن وضع قيم دالة التوزيع الاحتمالي أو بعبارة أخرى القيم الممكنة للمتغير العشوائي والاحتمالات المناظرة لها في الجدول التالي :

س	صفر	١	٢
ح (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

مثال (٢)

إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة وكان المتغير العشوائي **س** يمثل قيمة الرقم الذي يظهر على الوجه الأعلى فأوجد المجال المقابل للمتغير العشوائي وكذلك دالة توزيعه الاحتمالي .

المجال المقابل **س (ش)** = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
ودالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي نلخص قيمها في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥	٦
ح (س)	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$

مثال (٣)

إذا أُلْقِيَ حجرا نردٍ مرة واحدة وكان المتغير العشوائي **س** يمثل مجموع رقمي الوجهين اللذين يظهران إلى أعلى فأوجد المجال المقابل لهذا المتغير العشوائي، وكذلك دالة توزيعه الاحتمالي.

عند إلقاء حَجَرْي نردٍ يكون فراغ العينة باستخدام شبكة التربيع كالتالي:

الحجر الثاني \ الحجر الأول	١	٢	٣	٤	٥	٦
٦	١ , ٦	٢ , ٦	٣ , ٦	٤ , ٦	٥ , ٦	٦ , ٦
٥	١ , ٥	٢ , ٥	٣ , ٥	٤ , ٥	٥ , ٥	٦ , ٥
٤	١ , ٤	٢ , ٤	٣ , ٤	٤ , ٤	٥ , ٤	٦ , ٤
٣	١ , ٣	٢ , ٣	٣ , ٣	٤ , ٣	٥ , ٣	٦ , ٣
٢	١ , ٢	٢ , ٢	٣ , ٢	٤ , ٢	٥ , ٢	٦ , ٢
١	١ , ١	٢ , ١	٣ , ١	٤ , ١	٥ , ١	٦ , ١

المجال المقابل للمتغير العشوائي **س (ش)** يكون كالتالي:

س (ش) = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

ودالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي يمكن تلخيص قيمها بالجدول التالي:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ح (س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

(١٠ - ٢ - ١) التوقع والتباين

إذا كان لدينا متغير عشوائي **س** يأخذ القيم التالية :

$$\text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \text{س}_{٣} ، \ldots\ldots\ldots ، \text{س}_{\text{ن}}$$

وكانت قيم دالة التوزيع الاحتمالي لهذه القيم هي

$$\text{ح}(\text{س}_{١}) ، \text{ح}(\text{س}_{٢}) ، \ldots\ldots\ldots ، \text{ح}(\text{س}_{\text{ن}}) \text{ على الترتيب}$$

فإن التوقع للمتغير العشوائي **س** ويرمز له بالرمز μ(**س**) ويقرأ توقع **س** يعطى كالتالي :

$$(\textbf{س}) = \text{س}_{١}\,\text{ح}(\text{س}_{١}) + \text{س}_{٢}\,\text{ح}(\text{س}_{٢}) + \ldots + \text{س}_{\text{ن}}\,\text{ح}(\text{س}_{\text{ن}})$$

$$= \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}\ \text{ح}(\text{س}_{\text{ر}}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

أما تباين المتغير العشوائي **س** ويرمز له بالرمز σ^2(**س**) ويقرأ تباين **س** يعطى كالتالي :

$$\sigma^2(\textbf{س}) = [\text{س}_{١} - \mu(\text{س}_{١})]^{٢}\,\text{ح}(\text{س}_{١}) + \ldots + [\text{س}_{\text{ن}} - \mu(\text{س}_{\text{ن}})]^{٢}\,\text{ح}(\text{س}_{\text{ن}})$$

$$= \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} [\text{س}_{\text{ر}} - \mu(\text{س}_{\text{ر}})]^{٢}\,\text{ح}(\text{س}_{\text{ر}}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

ويمكن تبسيط (٢) لتصبح في الصورة التالية :

$$\sigma^2 = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}^{٢}\ \text{ح}(\textbf{س}_{\text{ر}}) - (\mu)^{٢} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

والجذر التربيعي للتباين يسمى الانحراف المعياري ، ونرمز له بالرمز σ

مثال (٤)

أوجد التوقع (μ) والتباين (σ^2)، والانحراف المعياري (σ) للمتغير العشوائي **س** في مثال (١) السابق

يمكن تلخيص خطوات الحل كما في الجدول التالي:

س	صفر	١	٢
$س^٢$	صفر	١	٤
ح (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

$$\mu = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \, ح\,(س_ر)$$

$$= صفر \times \frac{١}{٤} + ١ \times \frac{١}{٢} + ٢ \times \frac{١}{٤}$$

$$= ١$$

$$\sigma^2 = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \, ح\,(س_ر) - (\mu)^٢$$

نجـد أولا:

$$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ ح\,(س_ر) = (صفر)^٢ \times \frac{١}{٤} + (١)^٢ \times \frac{١}{٢} + (٢)^٢ \times \frac{١}{٤}$$

$$= ١,٥$$

بالتعويض بهذه القيمة يكون لدينا

$$\sigma^2 = ١,٥ - (١)^٢$$

$$= ٠,٥$$

ومن ذلك نجد أن

$$\sigma = \sqrt{٠,٥} = ٠,٧١$$

مثـال (٥)

أوجد التوقع (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) للمتغير العشوائي س في مثال (٣) السابق

نلخص الحل في الجدول التالي:

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
$س^٢$	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	١٢١	١٤٤
ح (س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

نعلم أن:

$$\mu = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \; ح\,(س_ر)$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٣٦} + ٣ \times \frac{٢}{٣٦} + \ldots\ldots + ١٢ \times \frac{١}{٣٦}$$

$$= ٧$$

أما التباين فهو:

$$\sigma^2 = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \; ح\,(س_ر) - \mu^٢$$

نحسب أولا المقدار

$$\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \; ح\,(س_ر) = ٤ \times \frac{١}{٣٦} + ٩ \times \frac{٢}{٣٦} + \ldots\ldots + ١٤٤ \times \frac{١}{٣٦}$$

$$= ٥٤,٨٣$$

ومن ذلك نجد أن:

$$\sigma^2 = ٥٤,٨٣ - ٤٩ = ٥,٨٣$$

أي أن:

$$\sigma = \sqrt{٥,٨٣} = ٢,٤١$$

(١٠ ـ ٣) المتغير العشوائي المتصل

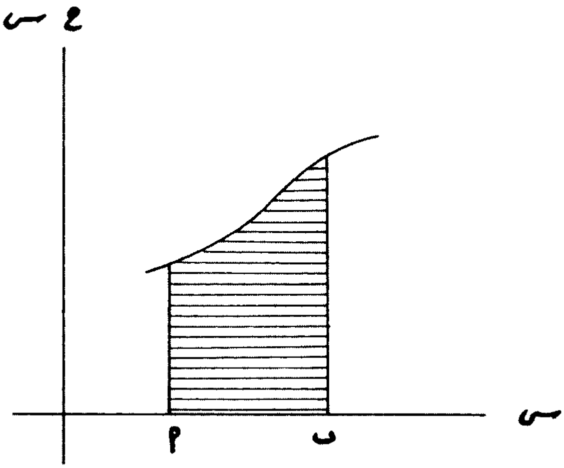
سبق لنا دراسة المتغير العشوائي المتقطع، وذكرنا أن المجال المقابل له منتهٍ أو غير منتهٍ، ولكنه قابل للعد. والمتغير العشوائي المتصل (المستمر) هو الذي يكون مجاله المقابل غير قابل للعد. أي أن قيم المتغير تكون هي جميع القيم لفترة ما (أ ، ب) مثلاً.

ومن أمثلة المتغير العشوائي المتصل أوزان أو أطوال مجموعة من الطلاب أو الدخل السنوي لمجموعة من الأسر أو أعمار الزوجات لمجموعة من الأسر أو درجات الحرارة في فترة ما . . . إلخ . فإذا قمنا بدراسة ظاهرة الوزن لمجموعة من الطلاب فإن المتغير العشوائي الذي يمثل وزن طالب ما يختلف من طالب إلى آخر. ويمكن أن يأخذ أي قيمة داخل فترة (أ ، ب). فإذا وجدنا وزن طالب ما س$_١$ وطالب آخر س$_٢$ فإنه يمكن أن نجد طالبًا ثالثًا وزنه س$_٣$ يقع بين س$_١$ ، س$_٢$ مهما كانت القيمتان س$_١$ ، س$_٢$ قريبتين من بعضهما. ولهذا فإن المتغير **س** الذي يمثل الوزن يكون متصلا ومن ذلك يمكن ملاحظة أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل أي قيمة محددة يساوي صفرًا، ولذلك لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير المتصل بجدول كما سبق أن فعلنا في حالة المتغير العشوائي المتقطع . نعبر عادة عن احتمال المتغير العشوائي المتصل بدالة احتمال، ومقدار الاحتمال عبارة عن المساحة المحصورة تحت المنحنى الخاص بتلك الدالة ومحور السينات، وتسمى هذه الدالة دالة الكثافة الاحتمالية، ونرمز لها بالرمز د (س) التي تحقق الشرطين التاليين:

١ ـ د (س) $\geqslant$ صفر أي قيم دالة الكثافة موجبة دائمًا.

٢ ـ $\int_{-\infty}^{\infty}$ د (س) دس = ١ أي أن المساحة تحت المنحنى لدالة كثافة الاحتم
يساوي واحدًا صحيحًا.

ولإيجاد احتمال أن يقع المتغير في الفترة [أ ، ب] نحسب المساحة المظللة والموضحة بالرسم وتسمى ح (أ $\leqslant$ **س** $\leqslant$ ب)



شكل (١٠ - ١): المساحة تحت المنحنى للفترة (أ إلى ب)

حيث إن

$$ح\ (أ \leqslant س \leqslant ب) = \int_{أ}^{ب} د\ (س)\ دس$$

مثـال (٦)

أثبت أن الدالة التالية

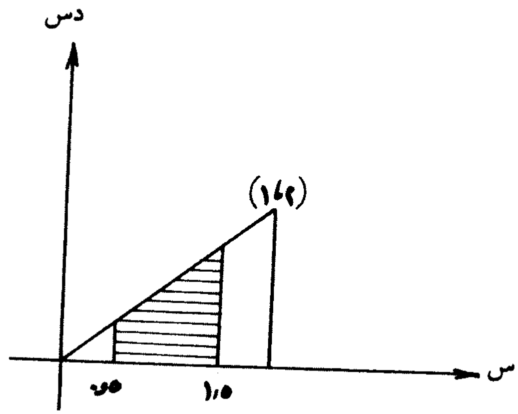
$$د\ (س) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ س & صفر \leqslant س \leqslant 2 \\ صفر & خلاف\ ذلك \end{cases}$$

تكون دالة كثافة احتمال. ثم أوجد قيمة ح ($1 \leqslant س \leqslant \frac{3}{2}$). هذه الدالة دائما موجبة أي تحقق الشرط الأول وهو د (س) $\geqslant 0$ وذلك لجميع قيم س داخل الفترة من $0 \leqslant س \leqslant 2$

وان

$$\int_{صفر}^{2} \frac{1}{2}\ س\ دس = 1$$

الدالة د (س) هي دالة كثافة احتمال وتوضح بالرسم



شكل (١٠ ـ ٢): إيجاد قيمة ح $\left(\frac{١}{٢} \leqslant \text{س} \leqslant \frac{٣}{٢}\right)$

ملحوظة: التكامل السابق هو مساحة المثلث القائم الزاوية التي قاعدته طولها ٢ وارتفاعه ١ أي أن المساحة $= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ = ١$

ولإيجاد الاحتمال ح $\left(\frac{١}{٢} \leqslant \text{س} \leqslant \frac{٣}{٢}\right)$ والموضح بالجزء المظلل في الرسم بطريقتين كالتالي

(١) ح $\left(\frac{١}{٢} \leqslant \text{س} \leqslant \frac{٣}{٢}\right) = \int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{دس} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٤}\right]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{٢}$

(٢) مساحة شبه المنحرف المظلل في الرسم = ح $\left(\frac{١}{٢} \leqslant \text{س} \leqslant \frac{٣}{٢}\right) = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \left[\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢}\right] = \frac{١}{٢}$

(١٠ ـ ٣ ـ ١) حساب التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل

يمكن حساب التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل مثل ما سبق بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع، وذلك باستبدال الرمز مجـ الممثل للمجموع بالرمز $\int$ الممثل للتكامل ويكون

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س د (س) دس} \quad \cdots\cdots \text{(٤)}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س}^{\text{٢}}\ \text{د (س) دس} - (\mu)^{\text{٢}} \quad \cdots\cdots \text{(٥)}$$

مثال (٧)

احسب التوقع والتباين لدالة المتغير العشوائي المتصل الذي دالة كثافته الاحتمالية معطاة في مثال (٦) السابق.

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س د (س) دس}$$

$$\therefore \mu = \int_{\text{صفر}}^{\text{٢}} \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س دس} = \int_{\text{صفر}}^{\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}}\ \text{دس}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٦}}\right]_{\text{صفر}}^{\text{٢}} = \frac{\text{٨}}{\text{٦}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س}^{\text{٢}}\ \text{د (س) دس} - (\mu)^{\text{٢}}$$

$$\therefore \sigma^2 = \int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \text{س}^{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س دس} - \left(\frac{\text{٤}}{\text{٣}}\right)^{\text{٢}}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٨}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٢}} - \frac{\text{١٦}}{\text{٩}} = \text{٢} - \frac{\text{١٦}}{\text{٩}} = \frac{\text{٢}}{\text{٩}}$$

ملاحظة

سبق لنا دراسة المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة والتوزيعات الاحتمالية لهما بصفة عامة. ودراسة التوزيعات الاحتمالية تساعدنا في الحصول على النتائج التي

تستخدم في الاستدلال الإحصائي الذي بواسطته تتخذ القرارات على أساس علمي سليم.

وفيما يلي نكتفي بدراسة بعض التوزيعات المهمة التي لها تطبيقات كثيرة في الحياة العملية مثل توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون للمتغير العشوائي المتقطع والتوزيع المعتدل (الطبيعي) للمتغير العشوائي المتصل.

(١٠ ـ ٤) توزيع ذي الحدين

توجد كثير من الظواهر في الحياة تكون النتائج الممكنة لها واحدة من اثنتين إحداهما تسمى نجاحًا وتحدث باحتمال ح والثانية تسمى فشلاً وتحدث باحتمال ل حيث إن ل = ١ − ح. وعند تكرار هذه التجربة عددًا من المرات ولتكن ن فإننا نحصل في كل مرة إما على حالة نجاح باحتمال ح، أو فشل باحتمال قدره ل. والمتغير العشوائي س الذي يمثل عدد مرات النجاح من هذا النوع يقال إنه يتبع توزيع ذي الحدين.

التوزيع الاحتمالى ح (س) لتوزيع ذي الحدين يعطى بالعلاقة التالية

$$\text{ح}(\text{س}) = \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن}-\text{س}} \qquad \ldots\ldots\ldots (٦)$$

حيث إن س = صفر، ١، ٢، ......، ن

ويستخدم هذا التوزيع في الحياة العملية لكثير من الظواهر مثل المعيب والسليم في الإنتاج، والتدخين وعدم التدخين لمجموعة من طلاب الجامعة، النجاح والرسوب في الامتحان لمجموعة من الطلاب، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها، إصابة هدف معين أو عدم إصابته وهكذا.. إلخ.

ويمكن حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري للمتغير الذي يتبع توزيع ذي الحدين كالتالي:

$$\mu = \sum_{\text{س}=\text{صفر}}^{\text{ن}} \text{س}\ \text{ح}(\text{س})$$

$$\mu = \sum_{\text{س}=\text{صفر}}^{\text{ن}} \text{س} \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن}-\text{س}}$$

$$\therefore \mu = \text{ن ح} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٧)$$

$$\sigma^2 = \sum_{\text{س}=\text{صفر}}^{\text{ن}} (\text{س} - \mu)^{٢}\ \text{ح}(\text{س})$$

$$= \sum_{\text{س}=\text{صفر}}^{\text{ن}} \text{س}^{٢}\ \text{ح}(\text{س}) - (\mu)^{٢}$$

$$= \sum_{\text{س}=\text{صفر}}^{\text{ن}} \text{س}^{٢} \cdot \binom{\text{ن}}{\text{س}} \text{ح}^{\text{س}} \text{ل}^{\text{ن}-\text{س}} - \text{ن}^{٢} \text{ح}^{٢}$$

$$= \text{ن ح ل} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٨)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{ن ح ل}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٩)$$

مثال (٨)

إذا ألقيت قطعة نقود متزنة مرتين فأوجد قيم المتغير العشوائي **س** الذي يمثل ظهور عدد الصور، وكذلك التوزيع الاحتمالي، والتوقع (μ) والتباين (σ^2) له بطريقتين مختلفتين.

سبق لنا في مثال (١) إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ح (س) كما هو موضح بالجدول التالي:

س	صفر	١	٢
ح (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

لقد وجدنا من مثال (٤) أن التوقع μ = ١ و σ^2 = ٠,٥
وباستخدام توزيع ذي الحدين ليكون احتمال ظهور الصورة ح = $\frac{١}{٢}$ وعدم ظهور الصورة ل = $\frac{١}{٢}$ وعدد الرميات ن = ٢

وحيث إن المجال المقابل للمتغير العشوائي س هو المجموعة { صفر ، ١ ، ٢ } وحيث إن المتغير العشوائي = عدد الصور، ويتبع توزيع ذي الحدين فإن دالة التوزيع الاحتمالي له هي :

$$ح(س) = \binom{ن}{س} ح^{س} ل^{ن-س}$$ حيث س = صفر، ١، ٢

وبالتعويض عن قيم س نجد أن :

$$ح(صفر) = \binom{٢}{صفر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{صفر}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-صفر} = \frac{١}{٤}$$

$$ح(١) = \binom{٢}{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{١}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-١} = \frac{١}{٢}$$

$$ح(٢) = \binom{٢}{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢-٢} = \frac{١}{٤}$$

وبالتعويض عن ن ، ح يمكن إيجاد التوقع والتباين لهذا التوزيع كما يلي :

$$\mu = ن ح = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$$

$$\sigma^2 = ن ح ل = ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٠,٥$$

وهي نفس النتائج السابقة.

مثال (٩)

أوجد احتمال ظهور عدد ٤ صور عند إلقاء قطعة نقود متزنة عشر مرات متتالية، وكذلك التوقع والتباين للمتغير العشوائي س الذي يمثل عدد ظهور الصور.

الحـــل

في هذا المثـال يصعب كتابة عناصر فراغ العينة لكبر عدد نقاط فراغ العينة، ويكـون من السهل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين بدون الحاجة لمعرفة جميع عناصر فراغ العينة.

من المثال لدينا:

$$ن = ١٠ \ ، \ س = ٤ \ ، \ ح = ل = \frac{١}{٢}$$

ونعلم أن دالة التوزيع الاحتمالية

$$ح(س) = \binom{ن}{س} ح^{س} ل^{ن-س} \qquad \text{حيث س = صفر، ١، ٢، ... ، ن}$$

ولقيمة س = ٤ يكون الاحتمال هو:

$$ح(٤) = \binom{١٠}{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠-٤} = ٠,٢٩$$

ولإيجاد التوقع والتباين والانحراف المعياري نكتب:

$$\mu = ن ح = ١٠ \times \frac{١}{٢} = ٥ \qquad \text{صـــور}$$

$$\sigma^2 = ن ح ل = ١٠ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ٢,٥$$

$$\sigma = \sqrt{٢,٥} = ١,٥٨ \qquad \text{صـــور}$$

مثـال (١٠)

إذا كان ١٠٪ من انتاج أحد مصانع مصابيح الإضاءة غير سليم، وسحبنا عينة مكونة من ٤ مصابيح فأوجد ما يلي:

ا) احتمال أن يكون من بينها مصباح تالف.

ب) احتمال أن يوجد مصباح تالف على الأقل.

الحـــل

نفرض أن المتغير العشوائي **س** = عدد المصابيح التالفة ويتبع توزيع ذي الحدين حيث إن ن = ٤ ، ح = ١ر٠ ، ل = ٠,٩

ودالة التوزيع الاحتمالية هي:

$$ح(س) = \binom{٤}{س} ح^{س} ل^{٤-س} \qquad \text{حيث س = صفر، ١، ٢، ٣، ٤}$$

أي أن

أ) $ح(١) = \binom{٤}{١}(٠,١)^{١}(٠,٩)^{٤-١} = ٠,٢٩$

ب) ح (على الأقل مصباح تالف) = ١ - ح (صفر)

$$ح(س \geqslant ١) = ١ - \binom{٤}{صفر}(٠,١)^{صفر}(٠,٩)^{٤-صفر}$$

$$= ١ - ٠,٦٥٦ = ٠,٣٤٤$$

مثـال (١١)

لنفرض أنه يوجد من بين كل ٥٠٠ سيارة من إنتاج مصنع معين لإنتاج السيارات ٥٠ سيارة غير سليمة أي غير صالحة للاستعمال، سحبت عينة مكونة من ٤ سيارات من انتاج ذلك المصنع، أوجد احتمال أن يكون من بينها ثلاث سيارات غير صالحة للاستعمال.

الحـــل

نفرض أن المتغير العشوائي **س** يمثل عدد السيارات غير الصالحة ويتبع توزيع ذي الحدين من المثال لدينا:

$$ن = ٤ \text{ ، } س = ٣ \text{ ، } ح = \frac{٥٠}{٥٠٠} = ٠,١ \text{ ، } ل = ٠,٩$$

ودالة التوزيع الاحتمالية لمتغير يتبع توزيع ذي الحدين هي:

$$ح(س) = \binom{ن}{س} ح^{س} ل^{ن-س} \qquad \text{حيث س = صفر، ١، ٢، . . . ، ن}$$

ومن ذلك يمكن حساب الاحتمال عندما س = ٣ كما يلي:

$$ح(٣) = (\frac{٤}{٣})(٠,١)^{٣}(٠,٩)^{٤-٣}$$

$$= ٤ \times ٠,٠٠١ \times ٠,٩ = ٠,٠٠٣٦$$

(١٠ ـ ٥) توزيـع بواســون

توجد في الحياة العملية كثيرا من الظواهر تتبع توزيع بواسون مثل عدد المكالمات التليفونية التي تصل إلى مكتب التليفونات خلال دقيقة. أو عدد الحوادث التي تحدث في شارع معين خلال يوم واحد، أو عدد الركاب الذين يصلون إلى محطة الحافلات خلال دقيقة. أو عدد الأخطاء المطبعية في صفحة من صفحات القاموس.. والتوزيع الاحتمالي ح (س) لتوزيع بواسون يعطى كالتالي:

$$ح(س) = \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} \quad ؛ \quad \text{حيث س = صفر، ١، ٢، .... (١٠)}$$

حيث إن س = صفر ، ١ ، ٢ ، ...، م = مقدار ثابت موجب، هـ = أساس للوغاريتم الطبيعي أي أن هـ = ٢,٧١٨ تقريبًا و$\underline{|س}$ = س × (س − ١)... ٢ × ١..

ومن ذلك نجد أن:

التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع يعطي كالتالي:

$$\because \mu = \sum_{س=٠}^{\infty} س \; ح(س)$$

$$\therefore \mu = \sum_{س=٠}^{\infty} س \; \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} = م$$

$$\therefore \sigma^2 = \sum_{س=٠}^{\infty} س^{٢} \; ح(س) - (\mu)^{٢}$$

$$\because \sigma^2 = \sum_{س=٠}^{\infty} س^{٢} \; \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} - م^{٢} = م$$

$$\sigma = \sqrt{م}$$

مثـال (١٢)

إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية على أحد الطرق هو حادث واحد فأوجد احتمال أن يحدث في يوم ما حادثان.

الحـل

المتغير العشوائي **س** يمثل عدد الحوادث اليومية على الطريق، ويتبع توزيع بواسون بدالة احتمال:

$$ح(س) = \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} \qquad \text{حيث س = صفر، ١، ٢ . . . .}$$

وفي مثالنا الحالي س = ٢ ، م = ١ وبذلك يكون:

$$ح(٢) = \frac{(١)^{٢} هـ^{-١}}{\underline{|٢}} = ٠,١٨٤$$

نتيجة

عندما يكون الاحتمال ح صغيرًا جدًا (أقل من ٠,٠٥)، ن كبيرًا جدًا (أكبر من ٣٠) في توزيع ذي الحدين فإن توزيع ذي الحدين يؤول إلى توزيع بواسون ويكون الثابت م = ن ح، وتعتبر هذه النتيجة مهمة في الحياة العملية وفي كثير من التطبيقات، ونوضح ذلك بالأمثلة التالية.

مثـال (١٣)

إذا كانت نسبة المعيب في مصنع مصابيح كهربية هي ٢٪ فإذا أخذنا عينة عشوائية مكونة من ٣٠٠ مصباح فأوجد احتمال أن يوجد في هذه العينة مصباح واحد على الأكثر معيب.

الحـل

لاحظ أن ح = ٠,٠٢ < ٠,٠٥ و ن = ٣٠٠ > ٣٠ وبالتالي فإن توزيع

المتغير العشوائي س والذي يمثل عدد المصابيح المعيبة يمكن تقريبه بتوزيع بواسون حيث

$$م = ن ح \quad = \quad ٣٠٠ \times ٠,٠٢ = ٦$$

$$\because \quad ح(س) = \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} \qquad \text{حيث س = صفر، ١، ٢، . . .}$$

$$\therefore \quad ح(\text{صفر}) = \frac{(٦)^{\text{صفر}} هـ^{-٦}}{\underline{|\text{صفر}}} = هـ^{-٦} = ٠,٠٠٢٤٨$$

$$، \quad ح(١) = \frac{(٦)^{١} هـ^{-٦}}{\underline{|١}} = ٠,٠١٤٨٧$$

ح (على الأكثر مصباح معيب) = ح (٠) + ح (١)

$$ح(س \leqslant ١) = ٠,٠٠٢٤٨ + ٠,٠١٤٨٧ = ٠,٠١٧٣٥$$

مثال (١٤)

كتاب يحتوي على ٤٠٠ صفحة وعلم أن عدد الأخطاء المطبعية به هو ٢٠٠ خطأ موزعة على صفحات الكتاب. أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة على ٣ أخطاء فقط.

الحل

المتغير العشوائي س يمثل عدد الأخطاء في الصفحة

$ح = \frac{١}{٤٠٠}$ هو احتمال الحصول على صفحة بها أخطاء ، ن = ٢٠٠

$$م = ن ح = ٢٠٠ \times \frac{١}{٤٠٠} = ٠,٥$$

$$ح(س) = \frac{م^{س} هـ^{-م}}{\underline{|س}} \qquad \text{حيث س = صفر، ١، ٢، . . .}$$

$$ح(٣) = \frac{(٠,٥)^{٣} هـ^{-٠,٥}}{\underline{|٣}} = ٠,٠١٢٦$$

(١٠ ـ ٦) التوزيع المعتدل (الطبيعي)

يعتبر التوزيع المعتدل (أو الطبيعي) من أهم التوزيعات الإحصائية وهو توزيع متصل، وأن معظم الظواهر الطبيعية تتبع التوزيع المعتدل مثل ظاهرة الطول والوزن والذكاء في الإنسان . . . إلخ والمنحنى التكراري لهذا التوزيع متماثل حول المتوسط (أن يتطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) ومعظم المشاهدات تتركز حول المتوسط، وطرفاه يتقاربان من المحور الأفقي ويمتدان إلى مالا نهاية، والمساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح ويتحدد المنحنى تمامًا بمعرفة المتوسط (μ) والانحراف المعياري (σ) وتعطى دالة كثافة الاحتمال د (س) كالتالي.

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\text{ط}}}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{س}-\mu}{\sigma}\right)^{2}} \qquad \ldots\ldots (11)$$

حيث إن $-\infty <$ س $< \infty$ ، $-\infty < \mu < \infty$ ، $\sigma \geq$ صفر

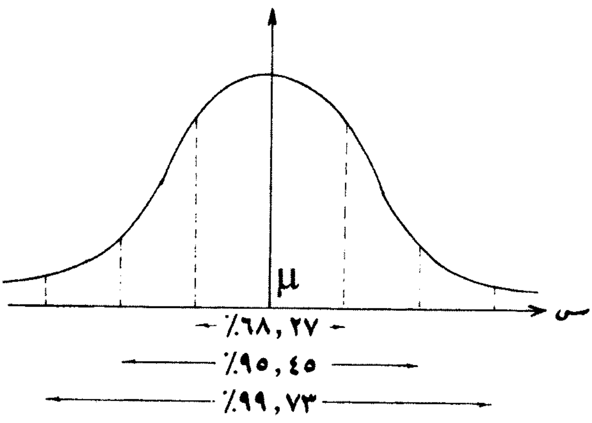
ولقد وجد أن نسب البيانات على جانبي محور التماثل أي الخط المار بالمتوسط (تو) تكون كالتالي:

٦٨,٢٧٪ تقريبا تقع في الفترة ($\mu - \sigma$ ، $\mu + \sigma$)

٩٥,٤٥٪ تقريبا تقع في الفترة ($\mu - 2\sigma$ ، $\mu + 2\sigma$)

٩٩,٧٣٪ تقريبا تقع في الفترة ($\mu - 3\sigma$ ، $\mu + 3\sigma$)

كما هو موضح بالرسم في الشكل التالي:

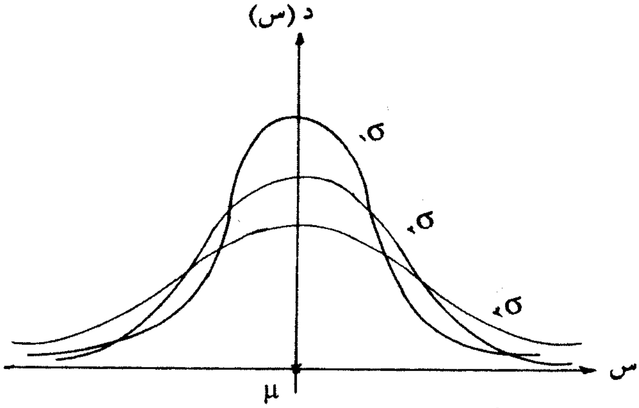


شكل (١٠ - ٣)

نسب الإحتمالات حول محور التماثل (المتوسط μ)

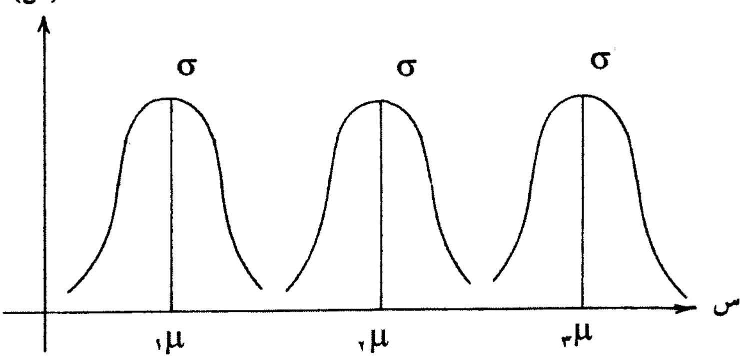
من هذه النسب السابقة نلاحظ ما يأتي

١ ـ إذا كان لدينا مجموعة من التوزيعات لها نفس المتوسط (μ) وتختلف القيم للانحراف المعياري (σ) لكل توزيع فيكون لها جميعا محور تماثل واحد وهو المحور المار بالمتوسط (μ) وتزداد درجة التفلطح للتوزيع كلما ازدادت قيمة (σ) كما هو موضح بالشكل التالي حيث: $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.



شكل (١٠ ـ ٤): أشكال المنحنى الطبيعي بمتوسط ثابت تو وانحراف معياري متغير

٢ ـ أما إذا كانت المجموعة من التوزيعات لها الانحراف المعياري نفسه ولها متوسطات مختلفة حيث $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ فإن شكل التوزيعات يكون كالتالي



شكل (١٠ ـ ٥): بعض أشكال المنحنى الطبيعي بانحراف معياري ثابت μ ومتوسط متغير

(١٠ ـ ٦ ـ ١) التوزيع المعتدل القياسي (المعياري)

يعرَّف التوزيع المعتدل القياسي بأنه توزيع معتدل له متوسط يساوي الصفر وله انحراف معياري يساوي الواحد الصحيح (أي أن μ = صفر ، σ = ١).

وسوف نرمز للمتغير العشوائي الذي له توزيع معتدل قياسي بالرمز **ص** والقيم التي يأخذها بالرمز $ص_1$ ، $ص_2$ ، .... ولدالة كثافته بالرمز ق (ص)، حيث

$$ق(ص) = \frac{1}{\sqrt{2ط}} هـ^{\frac{-ص^2}{2}} ، \quad -\infty < ص < \infty$$

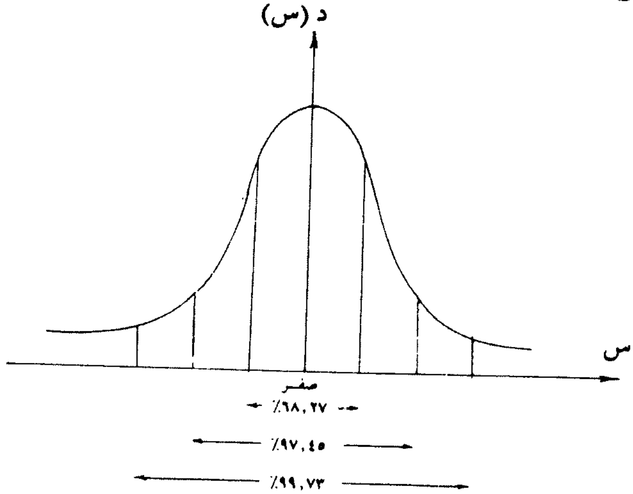
وهذا التوزيع يكون متماثلاً حول المحور الرأسي المار بنقطة الأصل وتكون نسب البيانات له كالتالي:

٦٨,٢٧٪ في الفترة (-١ ، ١)

٩٧,٤٥٪ في الفترة (-٢ ، ٢)

٩٩,٧٣٪ في الفترة (-٣ ، ٣)

ونوضح النسب السابقة على المنحنى التكراري للتوزيع المعتدل القياسي كما يلي:

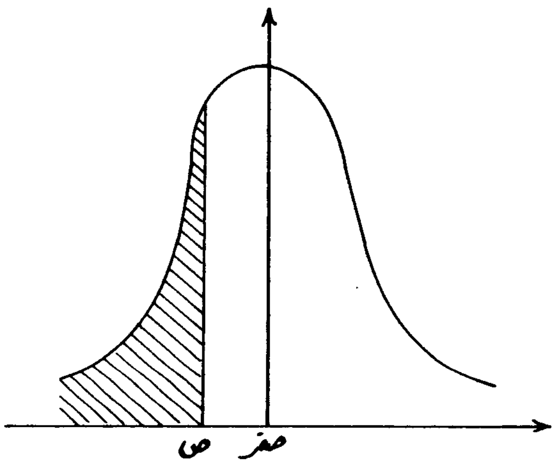


شكل (١٠ ـ ٦): نسب الاحتمالات حول محور التماثل (μ = صفر)

والمساحة تحت هذا المنحنى تساوي الواحد الصحيح وأن معظمها يقع داخل الفترة (−٣ ، ٣) ونادرًا ما نجد قيمة تقع خارج هذه الفترة ولقد حسب الإحصائيون جداول احصائية تعطى قيمة المساحة تحت المنحنى المعتدل القياسي من جهة اليسار لأي قيمة من قيم المتغير العشوائي داخل الفترة (− ٣ ، ٣) والممثلة لقيمة الاحتمال المعطى كالتالي:

$$ح\ (\textbf{ص} \geqslant ص) = ق\ (ص) = \int_{-\infty}^{ص} ق\ (س)\ دس \qquad \ldots\ldots\ldots\ (١٢)$$

ونوضح بالرسم قيمة الاحتمال المعطى بالعلاقة (١٢) وهو عبارة عن الجزء المظلل كالتالي



شكل (١٠ ـ ٧): قيمة ح (**ص**⩾ ص)

والجداول المعطاة في نهاية الكتاب جدول رقم (٢) تعطى قيمة ق (ص) لقيم المتغير العشوائي **ص** داخل الفترة (−٣ ، ٣) وذلك حتى الكسر المئوي لقيم ص كما سيتضح في الأمثلة التالية.

ملحوظة:

يوجد عدد غير نهائي من التوزيعات المعتدلة الممثلة لتوزيعات كثير من الظواهر الطبيعية المختلفة، مثل ظاهرة الوزن، أو ظاهرة الطول، أو ظاهرة الذكاء

للإنسان. . . الخ، ويكون لها متوسطات مختلفة وكذلك انحرافات معيارية مختلفة، وتختلف هذه المتوسطات والانحرافات المعيارية من مجتمع إلى آخر.

يمكن تحويل كل هذه التوزيعات إلى توزيع واحد وهو التوزيع المعتدل القياسي. إذا علمنا لأي توزيع متوسطه (μ) وانحرافه المعياري (σ) فإن القيمة المعيارية ص المناظرة لأي قيمة س مثلاً لهذا التوزيع تعطى بالعلاقة التالية

$$ص = \frac{س - \mu}{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١٣)$$

مثال (١٥)

إذا كان متوسط أوزان مجموعة من طلاب الجامعة هو ٦١ كجم وانحراف معياري هو ٤ فأوجد القيم المعيارية لأوزان عدد الطلاب التي كانت أوزانهم هي ٥٠، ٥٨، ٦٧، ٧٢.

حيث إن المتوسط μ = ٦١ والانحراف المعياري σ = ٤

القيمة المعيارية للطالب الأول هي $ص_١ = \frac{س_١ - \mu}{\sigma} = \frac{٥٠ - ٦١}{٤}$

$$= \frac{-١١}{٤} = -٢,٧٥$$

القيمة المعيارية للطالب الثاني $ص_٢ = \frac{٥٨ - ٦١}{٤} = \frac{-٧}{٤} = -,٧٥$

القيمة المعيارية للطالب الثالث $ص_٣ = \frac{٦٧ - ٦١}{٤} = \frac{٦}{٤} = ١,٥$

القيمة المعيارية للطالب الرابع $ص_٤ = \frac{٧٢ - ٦١}{٤} = \frac{١١}{٤} = ٢,٧٥$

مثال (١٦)

باستخدام البيانات في مثال (١٥) أوجد أوزان الطلاب الحقيقية إذا علم أن الأوزان القياسية لهم هي -٢,٣ ، ١,٧

حيث إن القيم المعيارية تعطى بالعلاقة التالية

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

أي أن

$$\text{س} = \mu + \text{ص}\ \sigma$$

الوزن الحقيقي المناظر للقيمة -٢,٣ يكون س_1 حيث

س_1 = ٦١ + ٤ × (-٢,٣)

= ٦١ - ٩,٢

= ٥١,٨ كجم

والوزن المناظر للقيمة المعيارية ١,٧ هو س_2 ويعطى كالتالي

س_2 = ٦١ + ٤ × ١,٧

= ٦٧,٨ كجم.

مثال (١٧)

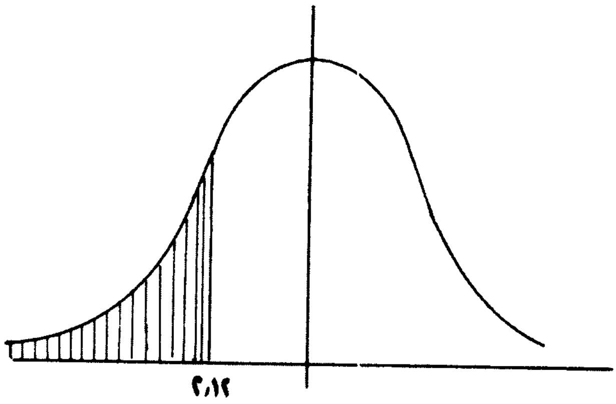
باستخدام الجداول الإحصائية أوجد قيم الاحتمالات التالية

ق (-٢,١٢٠) و ق (١,٣٣)

لإيجاد قيمة الاحتمال ق (-٢,١٢٠) نبحث في العمود الأول من الجدول عن القيمة -٢,١ ، ثم نتحرك أمام هذه القيمة أفقيا حتى نصل إلى العمود الرأسي الذي رأس عنوانه الرقم ٠,٠٢ فتكون هي المساحة المطلوبة أي أن

ق (-٢,١٢٠) = ٠,٠١٧٠٠

ونوضح هذه المساحة بالرسم كالتالي:

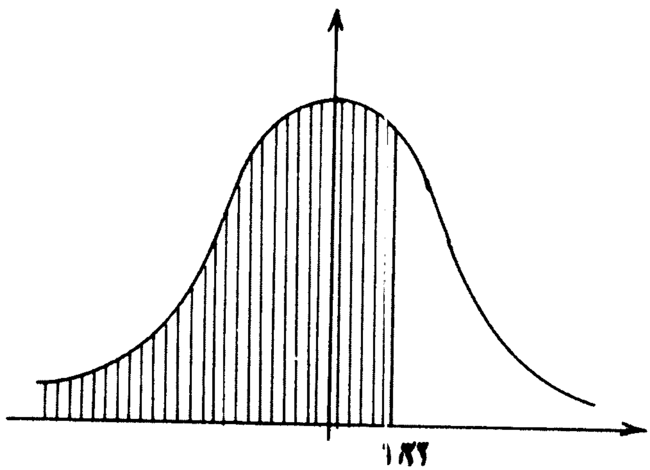


شكل (١٠ ـ ٨): قيمة ح (ص≤ -٢,١٢)

وكذلك لإيجاد الاحتمال ق (١,٣٣) نبحث في العمود الأول عن القيمة ١,٣ ثم نتحرك أفقيا حتى نصل إلى العمود الرأسي تحت الرقم ٠,٠٣ فيكون الاحتمال هو:

ق (١,٣٣) = ٠,٩٠٦٥٨

ونوضحه بالجزء المظلل في الرسم التالي :



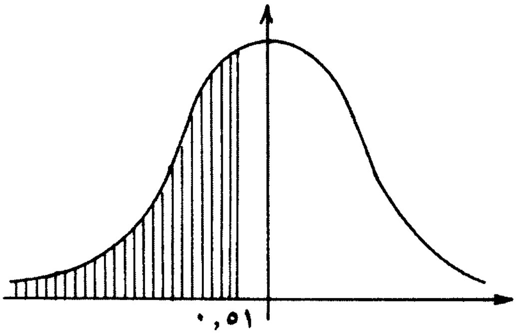
شكل (١٠ ـ ٩): قيمة ح (ص≤ ١,٣٣)

مثال (١٨)

إذا كان المتغير العشوائي **ص** له توزيع معتدل قياسي فأوجد قيم الاحتمالات التالية ح (**ص** ≤ -٠,٥١) و ح (٠,٣ ≤ **ص** ≤ ١,٩١)

لتسهيل حساب الاحتمال المطلوب نرسم المنحنى الطبيعي القياسي ونحدد على المحور الأفقي قيم ص ثم نظلل المساحة التي على يسار القيمة ص كما يلي:

ح (**ص** ≤ -٠,٥١) توضح بالرسم كالتالي:

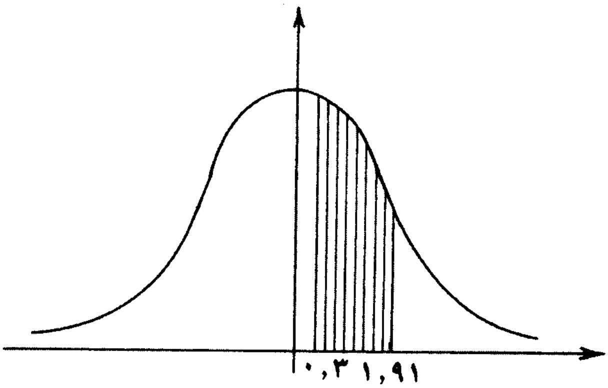


شكل (١٠ - ١٠) قيمة ح (ص ≤ -٠,٥١)

أي أن

ح (**ص** ≤ -٠,٥١) = ق (-٠,٥١) = ٠,٣٠٥٠

ح (٠,٣ ≤ **ص** ≤ ١,٩١) توضح بالرسم كالتالي:



شكل (١٠ - ١١): قيمة ح (٠,٣ ≤ ص ≤ ١,٩١)

ح (٠,٣ ⩽ ص ⩽ ١,٩١) = ق (١,٩١) − ق (٠,٣)
= ٠,٩٧١٩٣ − ٠,٦١٧٩٠
= ٠,٣٥٤٠٣

مثـال (١٩)

إذا كانت درجات مجموعة مكونة من ٥٠٠ طالب في أحد المواد تتبع التوزيع المعتدل بتوقع قدره ٧٠ درجة وانحراف معياري قدره ٥ درجات فاحسب عدد الطلاب فيما يلي :

ا ـ الحاصلون من ٦٦ درجة إلى ٧٦ درجة
ب ـ الحاصلون على أكثر من ٨٠ درجة
جـ ـ الحاصلون على أقل من ٦٠ درجة

الحـــل

لحل هذا المثال نجد على الترتيب ما يلي :

ا) لإيجاد عدد الطلاب نوجد المساحة المحصورة بين القيم المعيارية فتكون التكرار النسبي ، وبضرب هذا التكرار النسبي في عدد الطلاب نحصل على عدد الطلاب المطلوب

٦٦ درجة بالوحدات المعيارية = $\frac{٦٦ - ٧٠}{٥}$ = $-\frac{٤}{٥}$ = −٠,٨

٧٦ درجة بالوحدات المعيارية = $\frac{٧٦ - ٧٠}{٥}$ = $\frac{٦}{٥}$ = ١,٢

ح (٦٦ ⩽ س ⩽ ٧٦) = ح (−٠,٨ ⩽ ص ⩽ ١,٢)
= ق (١,٢) − ق (−٠,٨)
= ٠,٨٨٤٩ − ٠,٢١١٩ = ٠,٦٧٣٠

عدد الطلاب الحاصلين من ٦٦ درجة إلى ٧٦ = ٥٠٠ × ٠,٦٧٣
≃ ٣٣٧ طالبـا

ب) ٨٠ درجة بالوحدات المعيارية $= \frac{٨٠ - ٧٠}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

ح (س > ٨٠) = ١ − ح (س ⩽ ٨٠)

= ١ − ح (ص ⩽ ٢)

= ١ − ق (٢)

= ١ − ٠,٩٧٧٢٥

= ٠,٠٢٢٧٥

عدد الطلاب الحاصلين على أكثر من ٨٠ درجة = ٥٠٠ × ٠,٠٢٢٧٥

= ١١ طالبـــا

جـ) ٦٠ درجة بالوحدات المعيارية $= \frac{٦٠ - ٧٠}{٥} = -٢$

ح (س ⩽ ٦٠) = ح (ص ⩽ −٢)

= ٠,٠٢٢٧٥

عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٦٠ درجـة = ٥٠٠ × ٠,٠٢٢٧٥

≃ ١١ طالبـــا

(١٠ ـ ٧) تمار يـــن

١ ـ اوجد التوقع (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) لكل من التوزيعات التالية:

ا)

س	٢	٣	٧
ح (س)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$

ب)

ص	٣-	٢-	٤	٥
ح (ص)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$

جـ)

ع	١	٢	٣	٤	٥
ح (ع)	٠,٢	٠,١	٠,٢	٠,١	٠,٤

٢ ـ صنعت قطعة نقود بحيث كان ح (ص) = $\frac{٢}{٣}$ ، ح (ك) = $\frac{١}{٣}$ القيت هذه القطعة ثلاث مرات فإذا كان س هو المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الصور. اوجد التوزيع الاحتمالي وتوقع وتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع.

٣ ـ إذا كان احتمال أن يكسب الفريق ا في أي مباراة هو $\frac{٣}{٤}$. فإذا لعب الفريق ا أربع مباريات فأوجد احتمال أن يكسب هذا الفريق

ا) مباريتان فقط.

ب) مباراة واحدة على الأقل.

جـ) أكثر من نصف المباريات.

٤ ـ عين توقع (متوسط) عدد الأولاد في مجتمع الأسر التي بها ستة أطفال بفرض أن احتمال أي طفل في الأسرة بنت مساوٍ لاحتمال أن يكون ولدًا، ما هو احتمال أن يكون لدى الأسرة عدد من الأولاد مساوٍ لمقدار هذا التوقع؟

٥ ـ إذا كان توزيع بواسون يعطى كالتالي

ح (س ، م) = $\frac{م^{س}}{\underline{|س}}$ هـ$^{-م}$ حيث س = صفر، ١، ٢، . . . ،م > صفر

فأوجد الاحتمالات التالية :

ح (٣ ، $\frac{١}{٤}$) ، ح (٤ ، ٢) ، ح (٧ ، ١)

٦ - إذا كانت نسبة المصابين بمرض معين في بلد ما ٠,٠٠٢ . ما هو احتمال عدم وجود أي مصاب بهذا المرض في حي يسكنه ٤٠٠٠ نسمة؟

٧ - إذا كان هناك ٤٠٠ خطأ مطبعي موزعة على صفحات كتاب به ٣٠٠ صفحة أوجد احتمال أن تحتوي صفحة معينة

ا) على خطأ واحد أو أكثر.

ب) على ثلاثة أخطاء بالضبط.

٨ - إذا كان المتغير العشوائي ص له توزيع طبيعي قياسي ق (ص) فأوجد قيم الاحتمالات التالية باستخدام الجداول الإحصائية :

ا) ق (٠,٢١).

ب) ق (٢,١٥).

جـ) ق (-١,١٢).

د) ح (ص $\geqslant$ ١,٢٤).

هـ) ح (ص > ٠,٨١).

و) ح (-١,١٢ $\geqslant$ ص $\geqslant$ ٠,٦٢).

٩ - إذا كانت ٣٠٠ ورقة من أوراق نبات الغار لها توزيع معتدل بمتوسط μ = ١٤٢ ملليمتر، وانحراف معياري σ = ١٠ ملم، فأوجد عدد الأوراق التالية :

ا) ما بين ١٤٠ ملم، ١٥٠ ملم

ب) أكبر من ١٦٠ ملم

جـ) أقل من ١٣٠ ملم.

١٠- إذا كان ٢٠٪ من انتاج آلة لصناعة المسامير تالف. . فأوجد احتمال أن يكون من بين ٤ مسامير أختيرت عشوائيًا.

ا) مسمار واحد تالف.