الفصل الثاني

الموجات والاهتزازات
Waves and Vibrations

(٢,١) مقدمة Introduction

إن أحد أكثر الأشكال الشائعة للسلوك الميكانيكي هو الحركة الدورية ؛ بمعنى أنه الفعل الذي يتكرر على فترات منتظمة. ويتضمن هذا تأرجح بندول الساعة والموجات على سطح البركة، على سبيل المثال، بالإضافة إلى أنماط اهتزاز الجزيئات والخواص شبه الموجية للإشعاعات الكهرومغناطيسية عموماً. إن أفضل مثال توضيحي لسمات الاهتزاز هو الحركة التوافقية البسيطة (SHM)، التي تستعمل في أغلب الأحيان كنموذج مثالي لتحليل مواقف الحياة الواقعية.

(٢,٢) الحركة التوافقية البسيطة Simple harmonic motion

لقد لاحظنا في المقطع (١,٦) أن الجسم إذا كان في حالة توازن مستقر فإنه يتراجع في اتجاه "نقطة سكونه" "resting position" إذا حرك بعيداً عنها. وإذا كانت القوة المختزنة داخل الجسم F تتناسب طردياً مع الإزاحة عن موضع الاتزان x، فإنه يمكن

القول بأن الحركة الناتجة تكون توافقية بسيطة. ويمكن صياغة ذلك رياضياً على النحو التالي* :

$$F = -kx \qquad (2.1)$$

حيث k هو ثابت (موجب) له وحدات Nm^{-1} ، وقد تم معاملة F مثل كمية عددية scalar وذلك بفرض أن المُركبة الوحيدة غير الصفرية تكون على طول x.

إن المثال البسيط للمعادلة (2.1) يعطى بالزنبرك الذي يخضع لقانون هوك** ، الذي ناقشناه في المقطع (١,٥,٢)، مع كون k ثابت الزنبرك. إن البندول المتأرجح بزاوية صغيرة أيضاً يتبع المعادلة (2.1)، وذلك لأن قوة الإعادة المماسية عند الإزاحة θ (راديان) من العمودي تكون مساويةللمرُكبة الرأسية المساوية للوزن:

$$F = -mg\theta \qquad (2.2)$$

حيث استخدمنا التقريب التالي $\sin\theta \approx \theta$ عندما $\theta \ll 1$.

(٢,٢,١) الذبذبات الحرة Free oscillations

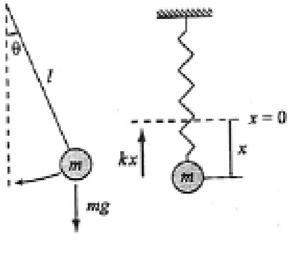
باستخدام قانون الحركة الثاني لنيوتن، يمكن صياغة المعادلة (2.1) كمعادلة تفاضلية مكافئة:

---

* الجدول رقم (٢,١). ثوابت القوة لجزيئات ثنائية الذرة

Molecule	k / N m^{-1}
H_2	510
HCl	478
N_2	2243
O_2	1142
CO	1857

**



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (2.3)$$

التي حلها:

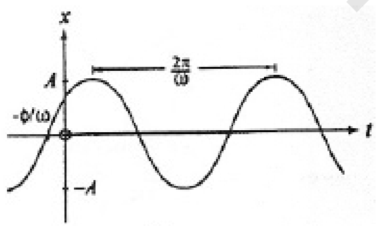
$$x = A\sin(\omega t + \phi) \qquad (2.4)$$

حيث $\omega^2 = k/m$ ؛ A وϕ ثوابت يتم تحديدها من الشروط الحدية، مثل قيم x وdx/dt عند $t = 0$. التفاضل الأول والثاني لـ x، dx/dt وd^2x/dt^2، يعطيان سرعة الجسم وتسارعه على الترتيب. إن دورية الحركة التوافقية البسيطة SHM تظهر بوضوح في مصطلح جيب الزاوية sin، الذي يكرر نفسه كل $2\pi/\omega$ ثانية (بإعطاء ω بالراديان لكل ثانية $rads^{-1}$)*.إن أقصى إزاحة عن موضع التوازن هي $x = \pm A$، وA يشير إلى سعة الاهتزاز. أي تعديل زماني للمعادلة(2.4) فيما يتعلق بـ $x = A\sin(\omega t)$، التي عندها يتزايد x كلما مرت بنقطة الأصل ($t = 0$، $x = 0$)، تكون محتواه في ثابت الطور ϕ عن طريق $x = A\sin(\omega t + \phi)$. إن المقارنة بين فروض جيب الزوايا وجيب التمام تظهر أنه يمكن أن تكتب أيضاً مثل $x = A\cos(\omega t + \Phi)$ حيث $\Phi = (\phi - \pi/2)$.

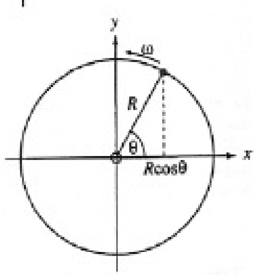
فكرة الدورة، $2\pi/\omega$، أو التردد الزاوي $\omega(rads^{-1})$، هي تذكرة للحركة الدائرية** التي ذكرت في المقطع (١,٧,٢). في الحقيقة، إن معادلات الحركة التوافقية

---

*



**



البسيطة SHM تُصادف أيضاً عند المدار الدائري المنتظم للجسم المتوقع على المحور-x . سوف نبدء بـ ($x = R\cos\theta$) على سبيل المثال، وهذه توضح بسهولة أن:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (2.5)$$

عن طريق استخدام $d\theta/dt = \omega$ و $d^2\theta/dt^2 = d\omega/dt = 0$. وهذا يخبرنا فوراً أن العامل الثابت في المعادلة (2.3)، k/m، يكون مساوياً لمربع التردد الزاوي. بالنسبة لحالة البندول الذي طوله l، فإن مُركبة التسارع المماسي تعطى بـ $l d^2\theta/dt^2$ ؛ ويمكن تأكيد ذلك من المقطع (١,٧,٢) ؛ لكونه مساهماً بـ $d\omega/dt \times r$ إلى dv/dt، ولكنه يتطلب التفكير بحذر. قانون نيوتن الثاني للحركة، والمعادلة (2.2) إذاً يؤدي إلى:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad (2.6)$$

حيث $\omega^2 = g/l$ ، لا يعتمد على كتلة الجسم.

إن صورة الجسيم الذي يدور في مسار دائري تشبه أيضاً في رسم أرجاند Argand التخطيطي الذي له معامل ثابت، ولكن لديه الأس يزداد بثبات، وعلى وجه الخصوص، إذا كان:

$$Z = Ae^{i(\omega t+\phi)} \qquad (2.7)$$

حيث $i^2 = -1$، إذاً كلاً من الجزء الحقيقي لـ Z، $\mathrm{Re}\{Z\}$، والجزء التخيلي $\mathrm{Im}\{Z\}$، يؤديان إلى الحركة التوافقية البسيطة SHM ؛ لأن مُركبات المكونين x وy من الرسم الثنائي الأبعاد (مع $z = x + iy$) على التوالي. يتوقف ذلك على العلاقة المهمة التالية:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (2.8)$$

في الواقع، العدد المركب Z في المعادلة (2.7) هو نفسه يوفي شروط المعادلة التفاضلية بالنسبة للحركة التوافقية البسيطة SHM : $d^2Z/dt^2 = -\omega^2 z$.

بالرغم من إنشاء العدد الخيالي i الذي يبدو اصطناعياً بادئ الأمر في أغلب الأحيان، فإن النتيجة الجبرية للأعداد المركّبة تتحول إلى تحسين قوة الأداة الرياضية للتحليل العلمي المتقدم. نستطيع أن ندرك قيمته حتى في السياق الأكثر دراية وذلك بحل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

التي هي نفسها المعادلة (2.5)، التي لها حل افتراضي على الصورة $x = \alpha e^{pt}$ حيث α، و p ثابتان. والمعادلة المساعدة المطابقة هي $p^2 + \omega^2 = 0$ أو $p = \pm i\omega$، تعطي الحل العام كالتالي:

$$x = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}$$

حيث α، β يجب أن يحددان من الشروط الحدية. باستخدام المعادلة (2.8) ومرافقها المُركب، $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$، فإن x يمكن أن يعاد كتابتها كما يلي:

$$x = \mathrm{C}\cos(\omega t) + \mathrm{D}\sin(\omega t)$$

حيث ترتبط الثوابت C وD بالثوابت α، β. والمكافئ لهذه المعادلة (2.4) تكون مؤكدة وذلك بتوسع الزاوية المركبة من $\sin(\omega t + \phi)$، إلى $\sin(\omega t)\cos\phi + \cos(\omega t)\sin\phi$؛ ولذلك نجد أن $C = A\sin\phi$ و $D = A\cos\phi$. ولذا في سياق الأعداد المركّبة، يمكن إعادة صياغة المعادلة (2.7) على الصورة:

$$Z = Be^{i\omega t} \qquad (2.9)$$

حيث $B = Ae^{i\phi}$ هي السعة المركّبة complex amplitude؛ وقيمة الاهتزازة إذن تكون |B|، بطور arg(B)، وتردد زاوي ω.

(٢,٢,٢) الذبذبات الاضمحلالية Damped oscillations

إن الذبذبات التي يعبر عنها بالمعادلتين (2.4) و (2.9)، ما أن تبدأ حتى تستمر إلى مالا نهاية، أي بدون توقف. يمكن أن يفهم هذا فيزيائياً من حقيقة أنه لا توجد آلية

لفقد الطاقة في النظام، وتحقق جبرياً بتوضيح أن الطاقة الكلية (KE + PE) تكون محفوظة:

$$\frac{1}{2}m\left[\frac{dx}{dt}\right]^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{A^2}{2}\left[\omega^2 m\cos^2(\omega t+\phi)+k\sin^2(\omega t+\phi)\right]=\frac{1}{2}A^2\omega^2 m$$

بما أن $\omega^2 = k/m$ و $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. بينما تتبادل الطاقة باستمرار بين الحركية والوضع فإن مجموعها لا يعتمد على الزمن.

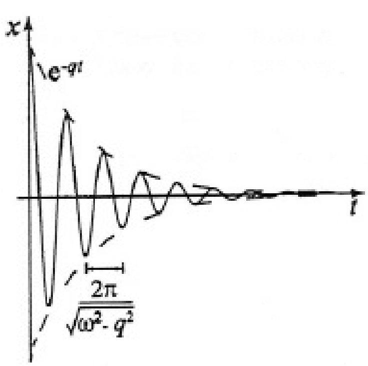
وبرغم ذلك، تتناقص سعة الحركة الاهتزازية في النظام المشابه لنظام البندول الحقيقي، و يمكن أن يخطط لهذا بإدخال مصطلح الفقد الذي يتناسب مع السرعة dx/dt، في المعادلة (2.5):

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x-2q\frac{dx}{dt} \qquad (2.10)$$

حيث العامل 2 يدخل في المعادلة للتبسيط الجبري اللاحق، و$q>0$. ويمكن التفكير في أن المعادلة (2.10) تمثل "كتلة على الزنبرك"، بمعنى: أنه في برميل العسل الأسود (أو بعضٍ من سائل لزج آخر). مع وجود حل افتراضي عال الصورة $x=\alpha e^{pt}$. فإن المعادلة المساعدة تصبح الآن $P^2+2qp+\omega^2=0$ ولديها الجذور المركّبة* $P=-q\pm(q^2-\omega^2)^{1/2}$. وبناءً عليه، فإن الحل العام يكون:

---

*



$$x = e^{-qt}\left[\alpha e^{+t\sqrt{q^2-\omega^2}} + \beta e^{-t\sqrt{q^2-\omega^2}}\right] \qquad (2.11)$$

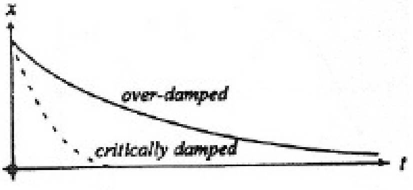
إذا كانت $q = 0$، فإن المعادلة (2.10) تختزل إلى المعادلة (2.5)، ومن ثم فإن المعادلة (2.11) تؤدي إلى حركة توافقية بسيطة وغير مضمحلة كما تم ذكرها سابقاً في المقطع (١,٢,٢): $x = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t} = A\sin(\omega t + \phi)$. وعندما يكون $0<q<w$ نحصل على حركة توافقية بسيطة SHM مضمحلة*: $x = [\alpha e^{i\omega_0 t} + \beta e^{-i\omega_0 t}]e^{-qt} = Ae^{-qt}\sin(\omega_0 t + \phi)$ حيث $\omega_0^2 = \omega^2 - q^2$. وهذا يعني أن للذبذبات تردداً زاوياً هو $(\omega^2-q^2)^{1/2}$ لكن سعة هذه الذبذبات تقل أسياً مع الزمن. وإذا كان العسل الأسود لزجاً جداً؛ أي $q > w$، فإننا نحصل على اضمحلال فقط دون أي ذبذبات: $x = \alpha e^{-(q+q_0)t} + \beta e^{-(q-q_0)t}$ حيث $q_0 = (q^2 - \omega^2)^{1/2} < q$. وأخيراً، الحالة الخاصة عندما $q = \omega$ تعطي تثبيطاً حرجاً، وهذه الحالة هامة لمصنعي ماص الصدمات: $x = (\alpha + \beta)e^{-qt}$، من أجل وجود تداعٍ سريع لـ $x = 0$.

(٢,٢,٣) الذبذبات القسرية (الإجبارية) Forced oscillations

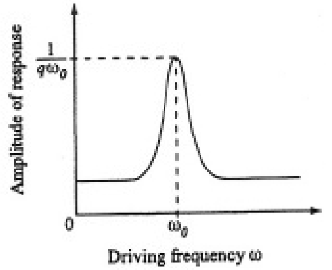
للتغلب على الفقد في السعة نتيجة الاحتكاك ومقاومة الهواء عند دفع أرجوحة طفل؛ نميل أحياناً لإعطائه هزات دورية. إنه مثال يومي عمّا يسمى بالحركة التوافقية البسيطة SHM القسرية**. بدلاً عن جذب الكتلة المعلقة بالسقف لأسفل بواسطة سلك

---

*



**



حلزوني (نابض) وتركها تتأرجح ، بمعنى أن الثبات يصنع نفسه للاهتزاز عند تردد ω.
كيف يستجيب النظام؟

حسناً، إذا كان ω_0 هو التردد الطبيعي للنظام المكون من السلك الحلزوني (الزنبرك) والكتلة ($\omega_0=(k/m)^{1/2}$)، وهو عرضة لقوة مثبطة معرفة بواسطة q، فإن معادلة الحركة تتميز بالمعادلة التفاضلية غير المتجانسة التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2q\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\sin(\omega t) \qquad (2.12)$$

وهذه المعادلة لها نفس المعادلة المساعدة كما في المعادلة (2.10)، وتؤدي إلى تداعي الدالة التكاملية للمعادلة (2.11). ويمكن التأكيد بأن حل التكامل الخاص بتجريب $x=C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t)$ في المعادلة (2.12) حيث إن C، D ثابتان. إن الوسيط الجبري هو أسهل نوعاً ما ؛ إذا استخدمنا شكلية العدد المركب البديل، واستخدامنا $Z=Be^{i\omega t}$ ، كحل لـ $d^2Z/dt^2+2qdZ/dt+\omega_0^2z=e^{i\omega t}$ ؛ وينتج عن ذلك أن:

$$B=(\omega_0^2-\omega^2+iq\omega)^{-1}$$

وبالعودة إلى مناقشتنا المختصرة عن السعة المركّبة في نهاية المقطع (٢.٢.١)، فإن قيمة الذبذبات القسرية الناتجة عند تردد ω هي:

$$|B|=\sqrt{BB^*}=\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2q^2\right)^{-1/2} \qquad (2.13)$$

حيث B^* هو المرافق المركب لـ B. ولذلك تملك $|B|$ القيمة الأكبر عندما $\omega=\omega_0$، لـ $1/(q\omega_0)$، وتقل كلما زاد الفرق $\omega_0^2-\omega^2$. ويعتبر هذا تعزيزاً للاستجابة كلما كان التردد المدفوع مطابقاً للتردد الطبيعي يسمى الذي الرنين، ويلعب دوراً هاماً في العلوم. وهذا يعطي فكرة عن كيفية يمكن ضبط الراديو والتلفزيون للحصول على قناة محددة،

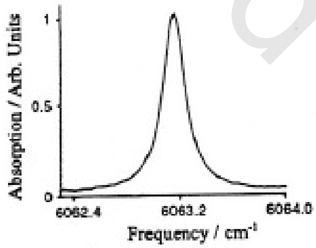
ونكون قادرين على فهم الأسس الفيزيائية لخطوط الامتصاص في طيف الأشعة تحت الحمراء* للجزيء، وهكذا.

(٢,٣) الذبذبات المقترنة والأنماط الطبيعية Coupled oscillators and normal modes

يمكن فهم الأنماط الاهتزازية للجزيء بواسطة تحليلها من ناحية أسلوب التجمع لعنصر الكتل المرتبطة معاً بالزنبرك. رياضياً، يكون هذا مكافئاً لدراسة مجموعة من الذبذبات التوافقية المقترنة البسيطة، إنه نموذج مناسب عندما تكون قيمة الاهتزازات صغيرة؛ لأن مفكوك متسلسلة تايلور Taylor series من الدرجة الثانية للطاقة الكامنة (تتناسب مع x^2، أو قطع مكافئ) حول موضع توازنها سيكون تقريباً جيداً لنموذج لينارت–جونز Lennard-Jones للطاقة الكامنة الجيدة (x^{-12} - x^{-6}) حول الحد الأدنى؛ وهذا له أهمية خاصة بالنسبة لسعات كبيرة، لا توافقية، مثل التي تمنع التداخل الذري وتسمح بتفكك الرابطة** .

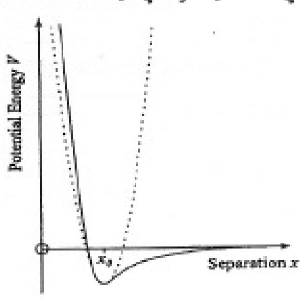
---

*



خط اهتزاز منفرد في نغمة عالية التردد في طيف الأشعة تحت الحمراء لـ CO_2

**



(الخط المتصل) لينارت– جونز و (الخط المنقط) وضع توافقي

(٢,٣,١) الجزيئات ثنائية الذرة والكتل المختزلة

Diatomic molecules and reduced mass

في مقطع (٢,٢)، اعتبرنا حالة تعليق الكتلة من زنبرك مربوط بالسقف؛ لأنه أحد الأمثلة السهلة عن الذبذبات التوافقية البسيطة. الحالة المشابهة الأكثر شيوعاً للذبذبات التوافقية البسيطة في الكيمياء هي الجزيء ثنائي الذرة. سوف نقوم بدراسة سلوك هذا الوضع في حالة كتلتين m_1 و m_2 مرتبطتين معاً تحت تأثير ثابت صلادة مادة الزنبرك k تبعاً لقانون هوك.

نظراً لاهتمامنا فقط باهتزازات الجزيء وليس بإجمالي حركته الانتقالية أو الدورانية، دعنا نعرف المسافة الفاصلة بين الذرات لتكون x_0+X، حيث x_0 تمثل الاتزان، وX الانحراف عنها. إذن بتطبيق قانون الحركة الثاني لنيوتن لـ m_1 وm_2 على التوالي، بإحداثيات x_2 وx_1 نحصل على:

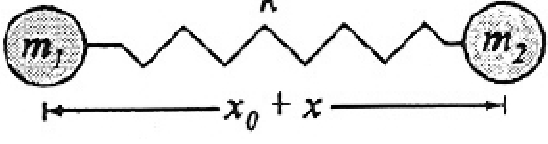
$$kX = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \qquad (2.14a)$$

$$-kX = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \qquad (2.14b)$$

بطرح المعادلة (2.14a) من المعادلة (2.14b) وباستخدام $x_2 - x_1 = x_0 - X$*، بحيث $d^2x_2/dt^2 - d^2x_1/dt^2 = d^2X/dt^2$، تنتج معادلة الحركة التوافقية البسيطة SHM من أجل اضطرابات X:

---

*



$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\left[\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right]kx \qquad (2.15)$$

في الواقع، إن هذه تشبه حالتنا السابقة للمعادلة (2.3) باستثناء أن الكتلة المفردة m سابقاً تستبدل بـ $\mu = m_1 m_2 /(m_1 + m_2)$. إذا كانت الكتلتان متساويتان، فإن μ تكون مساوية لنصف قيمتهما على انفراد. وعندما تكون إحدى الذرات أخف بكثير من الأخرى، فإن قيمة μ تكون مهملة*، ويمكن إيضاح ذلك عن طريق تمثيل سلوك الثقيلة كمرساة مثبة، والخفيفة تحدث حركة توافقية بسيطة SHM. وبإعطاء علاقة μ إلى m_1 وm_2، فإن الشكل السابق يسمى الكتلة المختزلة.

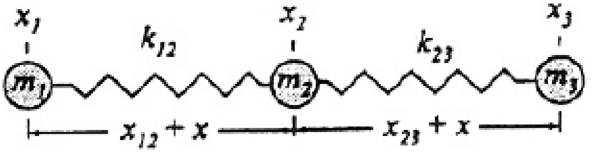
(٢,٣,٢) الجزيء ثلاثي الذرة الخطي A linear triatomic molecule

كمثال أكثر أهمية قليلاً، دعنا نعتبر اهتزازات الشد للجزيء ثلاثي الذرة الخطي. بدلالة الكتل الثلاثة m_1، m_2 و m_3 بإحداثيات x_1، x_2 و x_3، بفرض أن ثوابت الزنبرك وفواصل التوازن هم k_{12}، k_{23}، x_{12} و x_{23}؛ كالسابق، من المفيد تعريف $x_2 - x_1 = x_{12} + X$ و $x_3 - x_2 = x_{32} + Y$ ** علماً بأن X و Y يمثلان امتدادات الزنبركين. بتطبيق قانون الحركة الثاني لنيوتن على كل من m_1، m_2 و m_3 على التوالي، نحصل على التالي:

---

* تمرين (٢,١): يتكون طيف الأشعة تحت الحمراء لـ $^{75}Br^{19}F$ من خط كثيف عند $380 cm^{-1}$. احسب ثابت القوة لـ $^{75}Br^{19}F$.

**



$$k_{12}X = m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} \tag{2.16a}$$

$$k_{23}y - k_{12}x = m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} \tag{2.16b}$$

$$-k_{23}y = m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} \tag{2.16c}$$

يمكن أن تجمع هذه المعادلات معاً لنحصل على معادلتين للمشتقة الثانية لكل من X و Y بطرح المعادلة (2.16b) من المعادلة (2.16a) وطرح المعادلة (2.16c) من المعادلة (2.16b):

$$\frac{k_{23}Y}{m_2} - k_{12}X\frac{(m_1+m_2)}{m_1m_2} = \frac{d^2X}{dt^2} \tag{2.17a}$$

$$\frac{k_{12}Y}{m_2} - k_{23}X\frac{(m_2+m_3)}{m_2m_3} = \frac{d^2Y}{dt^2} \tag{2.17b}$$

وبالتفحص جيداً للمعادلتين (2.17a) و (2.17b) يتضح أن هناك مجموعتين خطيتين لـ X و Y، $\alpha X + \beta Y$ حيث α و β ثابتان، تحقق المعادلة:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\alpha X + \beta Y) = -\omega^2(\alpha X - \beta Y) \tag{2.18}$$

والأنماط المركبة والمميزة عن طريق $\alpha X + \beta Y$ تنتج حركة توافقية بسيطة بتردد ω.

بدلاً من حل المعادلة (2.18) بالنسبة إلى α، و β، و ω، وهي معطى المعادلة (2.17)، لثلاث كتل اعتباطية وزنبركين مختلفين، دعنا نبسط التحليل عن طريق تقييد أنفسنا بالحالة الخاصة لـ $m_1 = m_3 = m$ و $k_{12} = k_{23} = k$، هذا يقودنا إلى الجزيئات مثل O=C=O، ويستثنى قول HCN. بتعريف m_2 ليكون M، تصبح المعادلة (2.17) كما يلي:

$$\frac{k}{M}(Y - X) - k\frac{X}{m} = \frac{d^2X}{dt^2} \tag{2.19a}$$

$$-\frac{k}{M}(Y-X)-k\frac{Y}{m}=\frac{d^2Y}{dt^2} \qquad (2.19b)$$

وبجمع وطرح المعادلتين (2.19a) و (2.19b)على التوالي نحصل على :

$$\frac{d^2}{dt^2}(X+Y)=-\frac{k}{m}(X+Y) \qquad (2.20a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(X-Y)=-\left[\frac{1}{m}+\frac{2}{M}\right]k(X-Y) \qquad (2.20b)$$

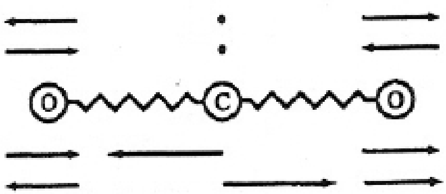
وبذلك يكون لدينا تعبيران واضحان للنموذج في المعادلة (2.18) باعتبار أن $\alpha=\pm\beta$.

إن النمط الأول أسهل للفهم : $X+Y=x_3-x_1-(x_{12}+x_{23})$، أو الاضطراب في حالة فصل كتلتين مساويتين، بدورة ذبذبات ذات حركة توافقية بسيطة من $2\pi(m/k)^{1/2}$. بمعنى آخر، أن تظل الذرة المركزية ثابتة (نسبة إلى الذرات الخارجية)، مؤثرة مثل مرساة ثابتة والذرات الخارجية تهتز بالتردد المتوقع $(k/m)^{1/2}$، وهي تتحرك معاً نحو بعضها أو بعيداً عن بعضها في نفس الوقت*. إن الحل الثاني يحتاج إلى تفكير أكثر : $X-Y=2x_2-x_3-x_1-(x_{12}-x_{23})$، أو الاختلاف بين الاضطرابات على جانبي الكتلة المركزية يتذبذب بدورة حركة توافقية بسيطة SHM لـ $2\pi(mM/(2m+M)k)^{1/2}$. وهذا يعني أن الذرات الخارجية تهتز عن طريق التحرك بشكل متزامن في نفس الاتجاه وبالتعارض مع الذرة الوسطى.

(٢,٣,٣) تحليل النمط الطبيعي Normal mode analysis

بعد أن تناولنا بسهولة زوج من أسهل الأمثلة لاهتزازات الجزيء، دعنا نحدد الإجراء المتبع لتحليل الحالة العامة. إذا كان لدينا العدد N من الذرات في جزيء معين،

*



فإن أول شيء نقوم به هو عمل قائمة الإحداثيات $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ التي تمثل إزاحتها عن نقطة الاتزان. ومن ثم تطبيق قانون الحركة الثاني لنيوتن على كل ذرة تباعاً ؛ فنحصل على زوج N (متجه) من المعادلات التفاضلية ؛ ويمكن كتابة كل ذلك بإيجاز باستخدام رمز مصفوفة المتجهات :

$$MX = \frac{d^2 X}{dt^2} \qquad (2.21)$$

حيث M هو مصفوفة مربعة لها مُركبات تتضمن الكتل وثوابت الزنبرك ، وX هو متجه ، أو مصفوفة الأعمدة لإحداثيات اضطراب الذرة. وبما أننا نبحث عن ذبذبات ذات حركة توافقية بسيطة SHM ، فإنه من المناسب أن نجرب الحل على الصورة $X = X_0 e^{i\omega t}$ حيث X_0 هو مستقل لا يعتمد على الزمن t. إن هذا يؤدي إلى معادلة القيم الذاتية التالية :

$$MX_0 = -\omega^2 X_0 \qquad (2.22)$$

حيث إن الكمية القياسية ω^2 والمتجه X_0 الذي يحقق ذلك يسمى القيمة الذاتية والمتجه الذاتي لـM على التوالي. في الواقع ، ونظراً لأن كل اضطراب ذرة يتطلب ثلاثة إحداثيات ، فإن المعادلة (2.22) يكون لها العدد 3N من الحلول : مجموعة من الترددات التوافقية التي يمكن أن تُؤكد عن طريق إيجاد جذور متعددة الحدود المعطاة بالمعادلة المميزة :

$$\det(M + \omega^2 I) = 0 \qquad (2.23)$$

حيث I يمثل مصفوفة الوحدة ، وله نفس الرتبة مثل $M(3N \times 3N)$ ، وترمز det للمحدد. إن استبدال كل من ω_j بالنسبة إلى $j = 1, 2, 3, \ldots, 3N$ في المعادلة (2.22) ، ينتج المتجهات الذاتية $(X_0)_j$ المتطابقة.

في حالة اهتزازات الجزيء ، تعرف حلول المعادلة (2.22) بالأنماط الطبيعية. إن $(X_0)_j$ ذات المجموعات الخطية المختلفة لمتجهات الإزاحة

الأصلية $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$، تمثل نظاماً إحداثياً فيه معادلات الحركة تكون منفردة، وكل واحدة منها تمثل حركة توافقية بسيطة SHM منفردة، بترددها الفردي. ولأنه لا يوجد تبادل للطاقة بين الأنماط الطبيعية مع الزمن؛ فإن الإجمالي هو تماماً مجموع كل مكون.

كمثال بسيط لكنه أساسي لهذا التحليل العام، دعنا نعيد حالة الجزيء ثنائي الذرة من المقطع (٢،٣،١). بتعريف x_1 وx_2 لتكون الإزاحات الـ m_1 وm_2 من التوازن على طول اتجاه الرابطة، ومقارنة المعادلتين (2.14) و (2.21)يتضح أن المصفوفة المنطبقة $M(2\times2)$ هي:

$$M = \begin{bmatrix} -k/m_1 & k/m_1 \\ k/m_2 & -k/m_2 \end{bmatrix}$$

ومن ثم، ترددات النمط الطبيعي من المعادلة (2.23) تعطى بواسطة:

$$\det\begin{bmatrix} \omega^2 - k/m_1 & k/m_1 \\ k/m_2 & \omega^2 - k/m_2 \end{bmatrix} = \left[\omega^2 - \frac{k}{m_1}\right]\left[\omega^2 - \frac{k}{m_2}\right] - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0$$

ويختزل هذا إلى $\omega^2\left[\omega^2 - k(1/m_1 + 1/m_2)\right] = 0$ * بحيث $\omega = 0$ أو$\omega=(k/\mu)^{1/2}$ حيث $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. ومن ثم، بمساعدة المعادلة (2.22)، فإننا نستعيد نتيجة الكتلة المختزلة μ من أجل النمط الطبيعي $(x_1, x_2) \propto (1, -m_1/m_2)$. بالرغم من ذلك، لم يكن لدينا سابقاً الحل $\omega = 0$! وهذا لأنه مرتبط بالحركة الانتقالية، وبما أن النمط الطبيعي $(x_1, x_2) \propto (1,1)$، تم استبعاده في وقت سابق، لكونه غير هام، خلال صياغتنا للمشكلة.

يجب أن نلاحظ أنه باعتبار إزاحات مثل الرابطة فقط x_1 و x_2، فإن التحليل قد قيد باهتزازات الشد. إذا وضعنا أيضاً في الاعتبار الاضطرابات في الاتجاهات العمودية

---

* عندما $\omega^2 = 0$ فإن المعادلة (2.22) تختزل إلى $x_1 = x_2$

عندما $\omega^2 = k/\mu$ فإن المعادلة (2.22) تختزل إلى $x_1/m_2 = -x_2/m_1$.

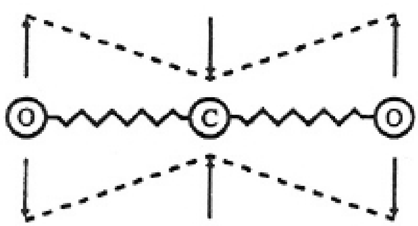
y_1، y_2 ، z_1 و z_2 فإنه يوجد لدينا $3 \times 2 = 6$ من الحلول للمعادلة (2.22) بالنسبة للجزيء ثنائي الذرة. إن تردداً واحداً فقط يمكن أن يكون غير صفري، وبالرغم من ذلك، ومع وجود ثلاثة من أصل خمسة حركات انتقالية مطابقة على المحاور x، y، وz؛ فإن الحركتين الأخريين تمثلان الدوران حول المحاور y وz. إنها، في الحقيقة، النتيجة العامة لتكوين جزيء N من الذرات الذي لديه $3N$-6* من الأنماط الاهتزازية؛ وإذا كان خطياً، فإنه يكون لديه $3N$-5 (لأن عزم القصور الذاتي على طول المحور النووي البيني يكون صغيراً جداً). لذلك بالنسبة لحالة ثاني أكسيد الكربون O = C = O، فإنه يجب أن يوجد $3 \times 3 - 5 = 4$ من الأنماط الاهتزازية. وفي المقطع (٢,٣,٢) وجدنا اثنين فقط من الأنماط الاهتزازية ولأن صياغتنا هدفت إلى ذبذبات الشد فحسب. الاثنان الآخران هما حركات الثني في الاتجاهات العرضية y و z؛ ويكون لهما تردداً منخفضاً، إشارة إلى أن ثابت القوة يكون أصغر لهذه الأنماط، نظراً لأنها أسهل في تشويه الجزيء بالثني من الشد.

(٢,٤) الحركة الموجية Wave motion

بالإضافة إلى الذبذبات التوافقية البسيطة، هناك نوع آخر للحركة الدورية موجود كثيراً في العلوم هو الحركة الموجية؛ يشارك كثيراً هذا النوع عموماً مع رياضيات الحركة التوافقية البسيطة، بالرغم من أنه أكثر تعقيداً نوعاً ما بسبب تضمنها

---

*



أعداداً متزايدة من المتغيرات. وبالنسبة للبندول، على سبيل المثال، وصفت الذبذبات بواسطة إزاحة الكتلة كدالة في الزمن؛ الموجة الناشئة على سلك، بينما تميزت بالتشويه، من ناحية الاتجاه y، الذي استحث عند النقطة x على طوله عند الزمن t. بمعنى آخر، $x = x(t)$ بالنسبة للحركة التوافقية البسيطةSHM، كما في المعادلة (2.4)، حيث إن $y = y(x, t)$ للموجة.

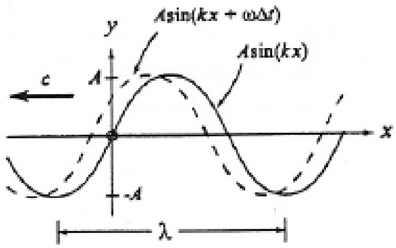
(٢,٤,١) المعادلة الموجية The wave equation

بمتابعة المقطع (٢,٢,١) فإنه لن يكون مناسباً التوقع بأن يكون الحل للموجة "التوافقية" على الصورة التالية:

$$y = A \sin(\omega t + Kx) \qquad (2.24)$$

حيث ω هي التردد الزاوي، كما في السابق، وK ثابت. بالنسبة للوضع على طول السلك، $y = A\sin(\omega t + \phi)$ ويمكن القول بأن الاهتزازة الناشئة تكون جيبية مع السعة A، التردد ω وثابت الطور ϕ. وبالمثل، بالنسبة للزمن المعطى t، $y = A\sin(Kx + t)$ بحيث إن صورة السلك ستعرض منحنى جيبي لـ y مع x*. إن الهزة اللحظية التي تستغرق فترة زمنية وجيزة Δt سوف ينتج عنها $y = A\sin(Kx + \tau + \omega\Delta t)$ وهي مطابقة تماماً للصورة السابقة المتوقعة باستثناء الانتقال من اليسار لـ $\omega\Delta t/2\pi$ من الطول الموجي λ؛ وذلك بسبب التغير في عامل الطورر. التسلسل لمثل هذه الصور يمكن أن يكون فكرة الصورة في فيلم فيديو، كاشفاً أن المعادلة (2.24) تمثل منحنى جيبي، $y = A$

*



$\sin(Kx)$، متحركاً جسمانياً من اليمين إلى اليسار ؛ لهذا السبب تسمى موجة متقدمة أو نقالة.

يعرف الطول الموجي λ بأنه المسافة الفاصلة بين أقرب نقطتين متشابهتين ومتتاليتين على المنحنى ؛ أي هو المسافة بين أي قمتين متتاليتين، أو قاعين متتاليين، على سبيل المثال. وهذا يترجم إلى الشرط $K\lambda=2\pi$ (راديانات)، ويوضح أن K يتناسب مع مقلوب λ :

$$K=2\pi/\lambda \qquad (2.25)$$

يعرف K بالعدد الموجي، ويعطى عادة بوحدات cm^{-1} . كما في المقطع (٢،٢،١)، واعتبار عامل الطوراللحظي، $\omega T = 2\pi$ راديانات، يؤدي إلى النتيجة بأن الدورة T مرتبطة عكسياً مع التردد* :

$$T = 2\pi/\omega = 1/f \qquad (2.26)$$

حيث تقاس f بالهيرتز إذا كانت ω بـ $rads^{-1}$. وبما أن T هي الزمن المستغرق للموجة لكي تنقل إلى طول موجي وحيد ؛ فإن سرعتها c تعطى بالعلاقة :

$$c = \lambda/T = f\lambda = \omega/K \qquad (2.27)$$

حيث استخدمنا المعادلة (2.25) و(2.27).

إن نظير المعادلة (2.24)، هو الموجة المنتقلة من اليسار إلى اليمين، ويتم الحصول عليها بطرح العاملين في حد جيب الزاوية :

$$y = A\sin(\omega t - Kx) \qquad (2.28)$$

أو $y = A\sin(Kx - \omega t)$. مرة أخرى، كما في حالة الحركة التوافقية البسيطة، يمكن أن نستخدم ترقيم الأعداد المركبة لتوضيح الموجات :

* تمرين (٢،٢): احسب تردد الاهتزاز لجزيء H_2 باستخدام ثابت القوة المعطى في الجدول ٢،١، ثم قدر دورة الاهتزاز.

$$y = Ae^{i(\omega t - Kx)} \quad \text{أو} \quad y = Ae^{i(\omega t + Kx)}$$

حيث إن كلاً من الأجزاء الحقيقية والتخيلية تنتج موجات متقدمة ويمكن أن يكون A الآن مُركبّاً. يعطى قيمة المعامل $|A|$ السعة، وقيمة الأس $\arg(A)$ هو عامل الطور.

المعادلة التفاضلية الجزئية الواصفة للحركة الموجية يمكن أن تشتق من قانون الحركة الثاني لنيوتن، وتأخذ الصورة:

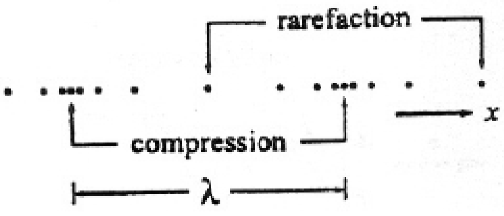
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (2.29)$$

حيث C هي السرعة الموجية. حتى الآن اعتبرنا أن y إزاحة السلك العمودية على اتجاه طوله x، وعلى هذا النحو قد اعتبرناها موجة مستعرضة. بالنسبة للموجات الصوتية، على أية حال، فإن y تمثل ضغط الهواء كدالة في الموضع والزمن؛ الضغوط المترددة والتخلخلات التي تحتويها موجة الصوت تشكل ذبذبات على طول اتجاه الحركة، وهو مثال للموجة الطولية*.

إن سرعة الموجات حددت فيزيائياً عن طريق الجذر التربيعي لنسبة مصطلح "المرونة" الذي يتميز به استعاد القوة، وعامل شبه الكتلة. من ثم، سرعة الموجات المستعرضة على سلك مشدودة بتوتر q وكتلة لكل وحدة طول μ هي $c = (q/\mu)^{1/2}$؛ وبالنسبة للموجات الطولية على طول كتل متصلة بالزنبركات $c = L(k/m)^{1/2}$، حيث L هي المسافة الفاصلة بين الكتل، و K ثابت الزنبرك، و m هي قيمة كل كتلة، $c =$

---

*



$(E/\rho)^{1/2}$ في حالة قضيب صلب رفيع، حيث E هو معامل يونج Young's modulus وρ هو الكثافة، و $c = (B/\rho)^{1/2}$ في الغاز حيث B هي معامل الحجم (عادة مقربة بـ $p\gamma$ حيث p هي الضغط وγ هي نسبة السعات الحرارية الأساسية C_p/C_v).

مع أن الموجات على السلك هي الأكثر سهولة للدراسة، إلاَّ أنها مقيدة إلى بعد واحد فقط. وعليه، فإنه يمكن إزالة هذا التقييد بتعميم المعادلة (2.29) إلى التالي:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (2.30)$$

حيث ∇^2 هي نسخة متعددة الأبعاد لعامل الاشتقاق الثاني $\partial^2/\partial x^2$، وψ هي الكيان الذي يتغير كدالة لمتجه الموضع r والزمن: $\psi = \psi(r, t)$. أما في حالة بعدين متعلقين بالتموجات على بحيرة أو اهتزازات طبلة، على سبيل المثال، فإنها تكون $\nabla^2\psi = \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2$ في الإحداثيات الديكارتية Cartesian coordinates. الإحداثيات القطبية أكثر ملائمة بالنسبة إلى الحالات ذات التماثل الدائري، ولكن التعبيرات عن $\nabla^2\psi$ تصبح أكثر تعقيداً. إن تعميم حلول الموجة المتنقلة الذي ناقشناه سابقاً يعتبر حالة بسيطة حيث إن Kx يمكن استبدالها بسهولة عن طريق حاصل الضرب القياسي $\boldsymbol{K.r}$؛ بوضوح في حالة ترقيم مركب:

$$\psi = Ae^{i(\omega t + K\cdot r)}$$

لذلك فإن العدد الموجي يسمى الآن متجه الموجة K، ومازال مقدارها مرتبطاً بـ λ من خلال المعادلة (2.25) $|\mathbf{K}| = 2\pi/\lambda$، واتجاهها يعطي اتجاه انتشار الموجة.

(٢,٤,٢) مبدأ التراكب Principle of superposition

أحد الأشياء التي تميز سلوك الموجات عن الجسيمات والأجسام الصلبة هي الطريقة التي تتفاعل بها مع بعضها. ترتد الجسيمات أو تلتصق معاً عند الاصطدام، بينما تمر الموجات دون عوائق. ويمكن أن يكون الاهتمام بتأثيرات التداخل في منطقة التراكب، فإن سلوك موجتين بعد التداخل يكون هو نفسه قبل التداخل.

رياضياً، يكون التشويه الناتج ψ بسبب مجموعة من الموجات العديدة ψ_1، ψ_3 ,......, ψ_2 يعطى ببساطة عن طريق جمعها معاً:

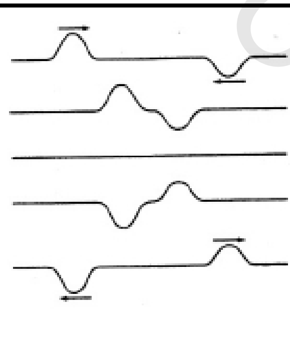
$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \ldots\ldots \tag{2.31}$$

إن الحالة بسيطة إذا كان لدينا موجتين أي $\psi = \psi_1 + \psi_2$؛ حيث إن قمم وقاعات الموجة ψ_1 تتقابل مع قمم وقاعات الموجة ψ_2 على التوالي، إن ذلك يؤدي إلى تقوية الموجة نتيجة التدخل البناء constructive interference؛ وعندما يوجد عدم تطابق، بحيث إن قمم الموجة ψ_1 تتداخل قاعات الموجة ψ_2، فإنه ينتج عنه اختزال في مقدار الموجة بسبب التداخل الهدام* destructive interference.

المناقشة التفصيلية للظواهر الموجية، مثل انعكاس وانكسار وحيود الضوء، سوف نتركها للفصل السابع الخاص بدراسة البصريات، إن الضوء أو الإشعاع الكهرومغناطيسي، الذي يمكن اعتباره مثل موجة تقدمية مستعرضة تتعامد فيها المجالات الكهربية والمغناطيسية بالتبادل. مع ذلك، يجب أن نلاحظ، أن الطاقة المحمولة بالموجة تتناسب مع مربع السعة $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ إذا استخدمنا ترقيماً مركباً، ويحدد هذا عادة ما يتم قياسه تجريبياً، وفي حالة الموجتين، تكون $|\psi_1 + \psi_2|^2$.

---

*



(٢,٤,٣) الموجات الموقوفة Standing waves

كمثال توضيحي لمبدأ التراكيب، دعنا نعتبر ما يحدث عندما تتقابل موجتان متشابهتان متحركتان معاً في اتجاهين متعاكسين. وفقاً للمعادلتين (2.31) و(2.24) فإننا نحصل على:

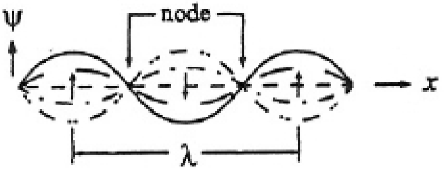
$$\begin{aligned}\psi &= A[\sin(\omega t+Kx)+\sin(\omega t-Kx)]\\ &= 2A\sin(\omega t)\cos(Kx)\end{aligned} \tag{2.32}$$

حيث نتج التبسيط عن طريق استخدام الصيغة المناسبة من علم المثلثات. إن فصل الحدود x و t في المعادلة (2.32) يعني أن كل النقاط على طول "السلك" ترتفع وتهبط معاً عند نفس الطور، ولكن بسعات مختلفة. بالتفصيل، إن التذبذب يكون كبيراً عندما تكون $Kx = n\pi$، حيث n هو عدد صحيح، ويكون صفراً عندما $Kx = (n+1/2)\pi$؛ وباستخدام المعادلة (2.25)، يتحول هذا إلى بطون antinodes عند $x = n\lambda/2$ وعقد nodes عند $x = (2n+1)\lambda/4$ على التوالي*. يوضح الفيلم الزمني أن نمط الموجة لا يتحرك إلى اليسار أو اليمين؛ بمعنى أن الموجة موقوفة، وهي ذات طول موجي هو ضعف المسافة الفاصلة بين أي عقدتين أو بطنين متتاليتين.

بالرغم من أننا أنتجنا موجة موقوفة عن طريق تراكب موجتين متنقلتين، نستطع أيضاً الحصول عليها مباشرة بحل المعادلة (2.29) عن طريق تطبيق الشروط الحدية الخاصة التي لا تحدث إزاحة عند نهاية الطرف الأيسر أو الأيمن: $y(0) = y(L) = 0$، على سبيل المثال، في وتر الكمان ذي الطول L فإنه يكون مثبتاً عند كلا الطرفين، معطياً $\lambda = 2L/n$ بالنسبة إلى $n = 1, 2, 3, 4,...$.

---

*



(٢,٤,٤) الضربات (الدقات) Beats

عندما يتم تشغيل نوتتين معاً بترددات مختلفة قليلاً لكن سعاتها متشابهة ، فإن الصوت يتزايد ويقل ببطء ويمكن أن تسمع الضربات. نستطيع أن نحلل هذا الموقف بسهولة ولكن باستخدام المعادلة (2.27) يكون من المناسب صياغة $\omega t+kx$ على الصورة $\omega\,(t+x/c)$ ، ومن ثم نحصل على :

$$\psi = A\sin\left[\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)\right] + A\left[(\omega+\delta\omega)\left(t+\frac{x}{c}\right)\right] \approx 2A\sin\left[\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)\right]\cos\left[\frac{\delta\omega}{2}\left(t+\frac{x}{c}\right)\right] \qquad (2.33)$$

حيث افترضنا أن اختلافات التردد $\delta\omega<<\omega$. إن ناتج المعادلة (2.33) ينتج الموجة الأصلية بسعة معدلة بأحد الترددات $\delta\omega/2$ ؛ هذا الظرف المتفاوت ببطء هو أصل الضربات*.

---

*