الفصل الثامن

المتجهات
VECTORS

(٨،١) بيّن أياً من الكميات التالية هي كمية متجهة

أ) درجة الحرارة ب) المجال المغناطيسي

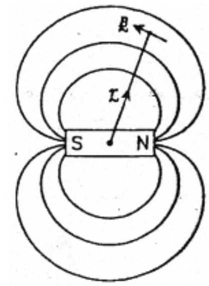
ج) التسارع د) القوة

هـ) الوزن الجزيئي و) المساحة

الحل :

أ) درجة الحرارة كمية قياسية (غير متجهة) لأن التعبير "اتجاه درجة الحرارة" ليس له معنى. لاحظ أن درجة الحرارة تتغير مع تغير المكان وهذا يعتبر متجهاً. فمثلاً ، إذا رفعنا درجة حرارة مكعب معدني عند أحد زواياه وخفضنا درجة حرارة الزاوية المقابلة فينتج عن ذلك توزيع حراري $T(r)$ وهي دالة قياسية في متجه الموقع r.

ب) المجال المغناطيسي كمية متجهة ومن الممكن استخدام البوصلة لتحديد اتجاهه عند أي نقطة. وفي العموم فهو دالة متجهة تعتمد على الموقع وتُكتب $B(r)$. الشكل أدناه يبين قضيباً مغناطيسياً يبين أن اتجاه وقيمة المجال المغناطيسي هما دالتان يعتمدان على متجه الموقع .



$$a = \frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(r) = \ddot{r}$$

$$F = \frac{d}{dt}(mV) = m\frac{d}{dt}(V) = ma$$

ج) و (د) التسارع هو معدل تغير السرعة بالنسبة إلى الزمن والسرعة هي معدل تغير المسافة بالنسبة إلى الزمن. وبما أن المسافة يعبر عنها بمتجه موقع فنجد أن السرعة $v = dr/dt$ والتسارع $a = dv/dt$ هما كميتان متجهتان.

$$a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}\frac{d}{dt}(r) = \ddot{r}$$

ينص قانون الحركة الثاني لنيوتن على أن القوة F تساوي معدل تغير العزم بالنسبة للزمن ويعرّف العزم على أنه حاصل ضرب الكتلة m (وهي كمية قياسية) مع السرعة $\dot{r}$ (وهي كمية متجهة). إذا كانت كتلة جسم ثابتة فإن قانون الحركة الثاني لنيوتن يأخذ العلاقة المشهورة التي تدرس في مادة فيزياء المرحلة الثانوية وهي $F = ma$ حيث إن F و a متجهان وm ثابت.

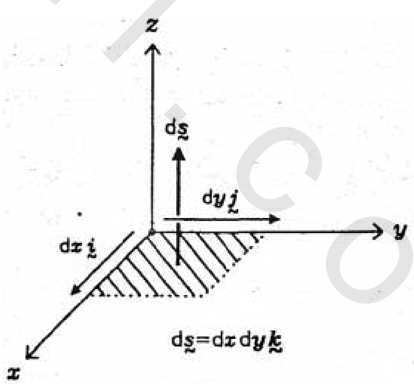
$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{d}{dt}(v) = ma$$

هـ) الوزن الجزيئي كمية قياسية وهو مجموع الأوزان الذرية لذرات الجزيئي وكل من هذه الأوزان هو وزن الذرة بالنسبة إلى $\frac{1}{12}$ من كتلة ذرة C_6^{12}.

في العديد من مجالات العلوم يستخدم مفهوم الوزن على أنه كمية متجهة، فمثلاً ، وزن سيدة كتلتها m هو القوة التي تبذلها السيدة على ميزان. ونرى من قانون نيوتن أن هذا الوزن يساوي mg حيث إن هو متجه التسارع الناتج عن الجاذبية الأرضية والموجه باتجاه مركز الكرة الأرضية.

و) على عكس ماهو متوقع فإن المساحة يمكن اعتبارها كمية متجهة. على سبيل المثال ، إذا كان a و b هما طول ضلعي سطح مائدة مستطيلة فإن كمية المساحة تساوي ab واتجاهها هو اتجاه العمودي على السطح. وبما أن معظم السطوح تأخذ أشكالاً غير منتظمة فإنه لإيجاد مساحتها نعتبر أجزاء صغيرة منها على أنها مستطيلة ومن ثم تكون مساحة السطح تساوي مجموع جميع مساحات الأجزاء الصغيرة المكون منها السطح وهي $s = \int ds$.

$$ds = dxdyk$$



(٨,٢) لنفرض أن متجه الموقع لكل من النقاط الأربـــع A ، B، C، D هو

$a = (1,2,3)$ ، $b = (2,0,1)$ ، $c = (1,1,1)$ ، $d = (5,2,5)$

على التوالي.

احسب كلاً مما يلي :

أ) $a + b - c - d$

ب) $2a - 3b - 5c + \frac{1}{2}d$

ج) منتصف كل من $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

الحل :

أ)
$$a + b - c - d = (1 + 2 - 1 - 5, 2 + 0 - 1 - 2\,, 3 + 1 - 1 - 5) = (-3, -1, -2)$$

ب)
$$2a - 3b - 5c + \frac{1}{2}d = (2(1) - 3(2) - 5(1) + \frac{5}{2}, 2(2) - 3(0) - 5(1) + \frac{2}{2}, 2(3) - 3(1) - 5(1) + \frac{5}{2}) = (-13/2\,, 0, 1/2)$$

ج) نقطة منتصف $\overrightarrow{BC}$ هي :

$$b + \frac{1}{2}(c - b) = \frac{1}{2}(b + c) = \frac{1}{2}(3,1,2)$$

نقطة منتصف $\overrightarrow{AD}$ هي :

$$\frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2}(6,4,8) = (3,2,4)$$

(٨،٣) إذا كانت a ، b ، c ، d هي المتجهات المبينة في التمرين (٨،٣) فاحسب :

أ) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطتين A و C .

ب) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بنقطتي منتصفي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

ج) المعادلات الديكارتية للمستقيمين $r = a + \lambda b$ و $r = c + \lambda d$.

الحل :

أ) لإيجاد المعادلة المتجهة للمستقيم نحتاج لمتجه من نقطة الأصل إلى نقطة على المستقيم ولتكن A ومن ثم نحتاج إلى متجه باتجاه $\overrightarrow{Ac} = c - a$. وعليه تكون المعادلة المتجهة للمستقيم هي :

$$\begin{aligned} r &= a + \lambda(c - a) \\ &= (1,2,3) + \lambda(1 - 1,1 - 2,1 - 3) \\ &= (1,2,3) + \lambda(0,1,2) \end{aligned}$$

ب) نقطة منتصف $\overrightarrow{AB}$ هي :

$$e = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(3,2,4)$$

نقطة منتصف $\overrightarrow{CD}$ هي :

$$f = \frac{1}{2}(c + d) = \frac{1}{2}(6,3,6)$$

المعادلة المتجهة للمستقيم هي :

$$r = e + \lambda(f - e) = \frac{1}{2}(3,2,4) + \frac{1}{2}\lambda(3,1,2)$$

ج) بما أن $r = a +$ فإن :

$$(x, y, z) = (1 + 2\lambda, 2{,}3 + \lambda)$$

وتكون المعادلات الديكارتية للمستقيم هي :

$$\lambda = \frac{x-1}{2} = z - 3 \quad \text{و} \quad y = 2 \quad .$$

وبما أن $r = c + \lambda d$ فإن :

$$(x, y, z) = (1 + 5\lambda, 1 + 2\lambda, 1 + 5\lambda)$$

وتكون المعادلات الديكارتية للمستقيم هي :

$$\lambda = \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{5} \quad .$$

(٨,٤) إذا كانت a ، b ، c ، d كما في التمرين (٨,٢) فجد ما يلي :

أ) $a \cdot b$ ، $a \cdot c$ ، $a \cdot d$.

ب) الزاوية بين b و c والزاوية بين c و d .

ج) $(a \cdot c)b$ و $(a \cdot b)c$.

الحل :

أ)

$$a \cdot b = (1,2,3) \cdot (2,0,1) = 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 5$$

$$a \cdot c = (1,2,3) \cdot (1,1,1) = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 6$$

$$a \cdot d = (1,2,3) \cdot (5,2,5) = 1 \times 5 + 2 \times 2 + 3 \times 5 = 24$$

ب)

$$cos\left(\widehat{BOC}\right) = \frac{b \cdot c}{|b||c|} = \frac{2 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{3}}$$

إذن ، $\widehat{BOC} = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = 39.2^{\circ}$.

$$\widehat{COD} = cos^{-1}\frac{c \cdot d}{|c||d|} = cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{3}\sqrt{54}}\right) = cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{8}{9}}\right) = 19.5^{\circ}$$

ج) $(a \cdot c)b = 6(2,0,1) = (12,0,6)$

$$(a \cdot b)c = 5(1,1,1) = (5,5,5)$$

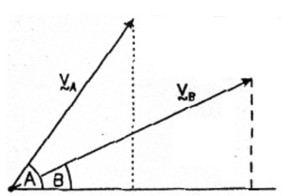
نُذَّكر القارئ أن الكميات مثل $(a \cdot c)b$ هي كميات متجهة.

(٨,٥) استخدم الضرب القياسي لإثبات أن :

$$\cos(A \pm B) = cosAcosB \pm sinAsinB$$

الحل :

نفرض أن v_A و v_B متجهان في المستوى xy وأن A و B هما الزاويتان اللتان يكوناهما مع محور x على التوالي (كما هو مبين في الشكل أدناه). عندئذ :



$$v_A = |v_A|(cosA, sinA, 0) \quad \text{و} \quad v_B = |v_B|\,(cosB, sinB, 0)$$

ومن ذلك نجد أن : $v_A \cdot v_B = |v_A||v_B|\cos\,(A - B)$.

ومن ناحية أخرى : $v_A \cdot v_B = |v_A||v_B|(cosAcosB + sinAsinB + 0)$.

وبهذا يكون :

$$cos(A-B)=cosAcosB+sinAsinB$$

وبوضع $B=-C$ نجد أن :

$$cos(A+C)=cosAcosC-sinAsinC$$

(لاحظ أن $sin(-\theta)=-sin\theta$).

(٨,٦) إذا كانت، b ، c ، d كما في التمرين (٨,٢) فجد كلاً ما يلي :

أ) $a\times b$ ، $\times c$ ، $a\times d$.

ب) الزاوية بين b و c والزاوية بين c و d .

ج) اكتب معادلة كلٍ من المستقيمين في التمرين (٨,٣) الفقرة (ج) على الصورة $r\times p=q$.

الحل :

أ)

$$\begin{aligned} a\times b &= (1,2,3)\times(2,0,1)\\ &= (2\times 1-3\times 0,3\times 2-1\times 1,1\times 0-2\times 2)\\ &= (2,5,-4)\\ a\times c &= (1,2,3)\times(1,1,1)\\ &= (2\times 1-3\times 1,3\times 1-1\times 1,1\times 1-2\times 1)\\ &= (-1,2,-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a\times b &= (1,2,3)\times(5,2,5)\\ &= (2\times 5-3\times 2,3\times 5-1\times 5,1\times 2-2\times 5)\\ &= (4,10,-8) \end{aligned}$$

ب)

$$sin(\widehat{BOC})=\frac{|b\times c|}{|b||c|}=\frac{|(-1,-1,2)|}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}\sqrt{3}}$$

إذن ، $(\widehat{BOC}) = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = 39.2^{\circ}$.

وهذا يتفق مع ما وجدناه في التمرين (٨,٤).

$$(\widehat{COD}) = sin^{-1}\left(\frac{|c \times d|}{|c||d|}\right) = sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}\sqrt{54}}\right) = sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 19.5^{\circ} .$$

ج) بما أن الضرب المتجهي لأي متجه b مع نفسه يساوي صفراً $(b \times b = 0)$ فمن الممكن كتابة المعادلة $r = a + \lambda b$ على الصورة المطلوبة بضرب طرفيها بالمتجه b لنحصل على $r \times b = a \times b + \lambda b \times b = a \times b$ وبهذا يكون $r \times (2,0,1) = (2,5,-4)$.

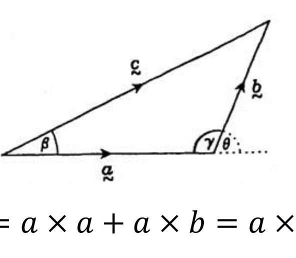
وبالمثل ، $r \times d = c \times d$. أي أن : $r \times (5,2,5) = (3,0,-3)$.

(٨,٧) استخدم الضرب المتجهي لإثبات قاعدة الجيب للمثلث.

الحل :

لنفرض أن المثلث منشأٌ من المتجهات a، b، c وأن $c = a + b$ (كما هو مبين في الشكل أدناه). عندئذ :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$



$$a \times c = a \times (a + b) = a \times a + a \times b = a \times b$$

لنفرض أن β هي الزاوية بين a و c (تقابل الضلع b) وأن θ الزاوية بين a و b.

وبهذا يكون :

$$\begin{aligned} a \times b &= |a||b|sin\theta \\ a \times b &= a \times c = |a||c|sin\beta \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن :

$$|b|sin\theta = |c|sin\beta$$

الآن ، بفرض أن γ هي الزاوية المقابلة للضلع c فإن $\gamma + \theta = \pi$ (أو 180°) وأن $sin\gamma = sin(\pi - \theta) = sin\theta$.

إذن ،
$$\frac{|b|}{sin\beta} = \frac{|c|}{sin\gamma}$$

وبالمثل، باستخدام $\times\ b$ نجد أن :

$$\frac{|a|}{sin\ \alpha} = \frac{|c|}{sin\gamma}$$

(٨,٨) إذا كانت a ، b ، c ، d هي كما في التمرين (٨,٢) فاحسب :

أ) $a \cdot (b \times c)$ ، $a \cdot (c \times d)$ ، $a \cdot (b \times d)$.

ب) أي ثلاثة من متجهات الموضع الأربعة تقع في مستوى واحد ؟

ج) للمستوى في الفقرة (ب) ، جد المعادلة الديكارتية والمعادلة المتجهة ثم جد المسافة العمودية بينه وبين نقطة الأصل.

الحل :

أ)
$$\begin{aligned} a \cdot (b \times c) &= (1,2,3) \cdot [(2,0,1) \times (1,1,1)] \\ &= (1,2,3) \cdot (-1,-1,2) = 3 \end{aligned}$$

$$a \cdot (c \times d) = (1,2,3) \cdot [(1,1,1) \times (5,2,5)]$$
$$= (1,2,3) \cdot (3,0,-3) = -6$$
$$a \cdot (b \times d) = (1,2,3) \cdot [(2,0,1) \times (5,2,5)]$$
$$= (1,2,3) \cdot (-2,-5,4) = 0$$

ب) إذا كان الضرب الثلاثي القياسي لأي ثلاثة متجهات يساوي صفراً فإن حجم متوازي السطوح المنشأ بواسطة هذه المتجهات يساوي صفراً. وهذا يحدث فقط إذا كانت المتجهات تقع على مستقيم واحد أو مستوى واحد. ومن الفقرة (أ) وجدنا أن $a \cdot (b \times d) = 0$ وبهذا تكون المتجهات a، b، d في مستوى واحد.

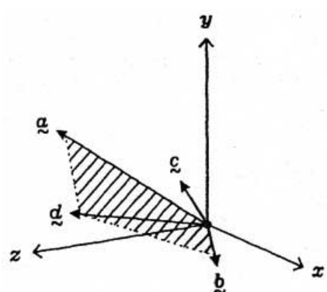
ج) المتجه العمودي n على المستوى هو الضرب المتجهي لأي متجهين في المستوى ، وليكن $a \times b$. ونرى أن:

$$n = a \times b = (2,5,-4)$$

إذن معادلة المستوى المتجهة هي:

$$r \cdot (2,5,-4) = d$$

حيث إن r نقطة في المستوى و d ثابت (انظر الشكل أدناه).



بأخذ $r = a$ (على سبيل المثال) نجد أن :

$$d = (1,2,3) \cdot (2,5,-4) = 0$$

وبهذا تكون المعادلة المتجهة للمستوى هي :

$$r \cdot (2,5,-4) = 0$$

أو $(x, y, z) \cdot (2,5,-4) = 0$.

وأما المعادلة الديكارتية للمستوى فهي :

$$2x + 5y - 4z = 0$$

أما بالنسبة للمسافة العمودية بين المستوى ونقطة الأصل فهي تساوي صفراً لأنها تساوي الطرف الأيمن من معادلة المستوى المتجهة عندما يكون المتجه العمودي على المستوى هو متجه طوله 1. ويمكن أن نجد ذلك بقسمة طرفي المعادلة على المقدار $|(2,5,-4)|$ وهذا لا يغير من قيمة الطرف الأيمن للمعادلة المتجهة أعلاه.

(٨,٩) احسب الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $(1,2,4)$ ، $(2,0,-3)$ ، $(-4,4,17)$. هل هي مستقلة خطياً ؟ هل من الممكن كتابة المتجه الثالث كتركيب خطي للمتجهين الآخرين ؟ إذا كانت الإجابة بنعم فجد هذا التركيب الخطي.

الحل :

$$(1,2,4) \cdot [(2,0,-3) \times (-4,4,17)] = (1,2,4) \cdot (12,-22,8) = 0 \; .$$

وبما أن الضرب الثلاثي القياسي يساوي صفراً فإما أن تقع المتجهات على خط مستقيم واحد وإما أن تقع على مستوى واحد. وبهذا فإن المتجهات مرتبطة خطياً

(ليست مستقلة خطياً). وبما أن المتجهات ليست مضاعفات لبعضها بعضاً ومن ثم فهي ليست متوازية ونرى أنها تقع في مستوى واحد ومن ثم يكون بالإمكان كتابة المتجه الثالث كتركيب خطي للمتجهين الآخرين

$$(-4,4,17) = \alpha(1,2,4) + \beta(2,0,-3) \qquad (*)$$

حيث إن α و β ثابتان. وللحصول على قيمة كل من الثابتين α و β نضرب طرفي المعادلة قياسياً بمتجه عمودي على $(2,0,-3)$ وهو $(3,0,2)$ لنحصل على:

$$\begin{aligned}(-4,4,17)\cdot(3,0,2) &= \alpha(1,2,4)\cdot(3,0,2) + \beta(2,0,-3)\cdot(3,0,2)\\ \Rightarrow 22 &= 11\alpha + 0\end{aligned}$$

ونجد أن $\alpha = 2$. وبالتعويض عن قيمة α في المعادلة $(*)$ والحل نجد أن: $\beta = -3$.

إذن،

$$(-4,4,17) = 2(1,2,4) - 3(2,0,-3).$$

(٨,١٠) استخدم التمرين (٨,٤) للتحقق من صحة المتطابقة "$ABACAB$"

الحل :

$$\begin{aligned}a\times(b\times c) &= (1,2,3)\times[(2,0,1)\times(1,1,1)]\\ &= (1,2,3)\times(-1,-1,2) = (7,-5,1)\end{aligned}$$

$$(a\cdot c)b - (a\cdot b)c = 6(2,0,1) - 5(1,1,1)\ (7,-5,1)$$

ومن ثم فإن متطابقة "$ABACAB$"

$$\underbrace{a\times(b}_{AB}\times c) = \underbrace{(a\cdot c)}_{AC}\,b - \underbrace{(a\cdot b)}_{AB}\,c$$

محققة.

(٨,١١) تُعرّف مقلوبات المتجهات a ، b ، c كالتالي :

$$c' = (a \times b)/s \text{ ،} b' = (c \times a)/s \text{ ،} a' = (b \times c)/s$$

حيث إن $s = a \cdot (b \times c)$.

أثبت أن $a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = 1$ وأن $a \cdot b' = a \cdot c' = 0$.

احسب الضرب الثلاثي القياسي للمقلوبات بدلالة s. إذا كان x تركيباً خطياً للمقلوبات فأثبت أن معامل a' هو $a \cdot x$

الحل :

بضرب المتجهات a ، b ، c قياسياً بالمتجهات a' ، b' ، c' على التوالي نحصل على :

$$a \cdot a' = a \cdot (b \times c)/s = s/s = 1$$
$$b \cdot b' = b \cdot (c \times a)/s = s/s = 1$$
$$c \cdot c' = c \cdot (a \times b)/s = s/s = 1$$

(لاحظ أن $[a, b, c] = a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$).

كما أن :

$$a \cdot b' = a \cdot (c \times a)/s = 0$$
$$a \cdot c' = a \cdot (a \times b)/s = 0$$

وذلك لأن الضرب الثلاثي القياسي يحتوي على متجهين متساويين.

الضرب الثلاثي القياسي للمقلوبات هو :

$$
\begin{aligned}
a' \cdot (b' \times c') &= (b \times c) \cdot \big((c \times a) \times (a \times b)\big)/s^3 \\
&= (b \times c) \cdot ([b \cdot (c \times a)]a - [a \cdot (c \times a)]b)/s^3 \\
&= (b \times c) \cdot (sa - 0)/s^3 \\
&= a \cdot (b \times c)/s^3 \\
&= s/s^2 = 1/s
\end{aligned}
$$

وأخيراً ، إذا كان $x = \propto a' + \beta b' + \gamma c'$ فإن :

$$a \cdot x = \propto a \cdot a' + \beta a \cdot b' + \gamma a \cdot c' = \propto +0 + 0$$

إذن ، $\propto = a \cdot x$. وبالمثل، $\beta = b \cdot x$ و $\gamma = c \cdot x$.

تُستخدم مقلوبات المتجهات كثيراً في تبسيط مسائل علم البلوريات وفيزياء الجوامد.