الفصل السابع

# الأعداد المركبة
# COMPLEX NUMBERS

(٧,١) إذا كان $u = 2 + 3i$ و $v = 1 - i$ فجد المركبتين الحقيقية والتخيلية لكلٍ مما يلي

أ) $u + v$ ب) $u - v$

ج) $uv$ د) $u/v$

هـ) $v/u$

الحل :

أ) $u + v = 2 + 1 + i(3 - 1) = 3 + 2i$

ب) $u - v = 2 - 1 + i(3 + 1) = 1 + 4i$

ج)
$$uv = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2$$
$$= 5 + i$$

د)
$$\frac{u}{v} = \frac{2 + 3i}{1 - i} = \left(\frac{2 + 3i}{1 - i}\right) \times \left(\frac{1 + i}{1 + i}\right) = \frac{2 + 2i + 3i + 3i^2}{1 + i - i - i^2}$$
$$= \frac{-1 + 5i}{2}$$

هـ) $$\frac{v}{u} = \left(\frac{1-i}{2+3i}\right) \times \left(\frac{2-3i}{2-3i}\right) = \frac{2-3i-2i+3i^2}{4+9} = \frac{-1-5i}{13}$$

أو

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{u/v} = \left(\frac{2}{-1+5i}\right) \times \left(\frac{-1-5i}{-1+5i}\right) = \frac{2-10i}{1+25} = \frac{-1-5i}{13}$$

**(٧,٢)** إذا كانت $u$ و $v$ كما في التمرين السابق فجد كلاً من :

أ) $|u|$ ب ) $|v|$

ج) $|uv|$ د ) $|u/v|$

هـ) $|v/u|$

**الحل** :

أ) $|u|^2 = uu^* = (2+3i)(2-3i) = 4+9$

إذن ، $|u| = \sqrt{13}$ .

ب) $|v|^2 = vv^* = (1-i)(1+i) = 1+1$

إذن ، $|v| = \sqrt{2}$ .

ج) $|uv|^2 = (uv)(uv)^* = (5+i)(5-i) = 25+1$

إذن ، $|uv| = \sqrt{26}$ .

من الممكن تعميم ذلك بإثبات أن $|uv| = |u||v|$ لأي عددين مركبين.
ولرؤية ذلك، لاحظ أن $(uv)^* = u^*v^*$ ومن ثم فإن:

$$|uv|^2 = (uu)^*(vv)^* = |u|^2|v|^2$$

د) $$\left|\frac{u}{v}\right|^2 = \left(\frac{u}{v}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^* = \left(\frac{-1+5i}{2}\right)\left(\frac{-1-5i}{2}\right) = \frac{1+25}{4}$$

إذن، $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

وهذا يبين مرة أخرى أن مقياس خارج القسمة يساوي خارج قسمة المقياسين ويمكن إثبات ذلك بملاحظة أن:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^* = \frac{u^*}{v^*}$$

لكل $u$ و $v$.

هـ) $$\left|\frac{v}{u}\right|^2 = \left(\frac{v}{u}\right)\left(\frac{v}{u}\right)^* = \left(\frac{-1-5i}{13}\right)\left(\frac{-1+5i}{13}\right) = \frac{1+25}{169}$$

إذن، $\left|\frac{v}{u}\right| = \frac{2}{\sqrt{26}}$.

وهذا يبين أن $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ لأي عدد مركب $z$ وفي حالتنا $|v/u| = 1/|u/v|$.

| |
|---|
| **(٧,٣)** إذا كان $z = 1 + i\sqrt{3}$ فارسم كلاً مما يلي على مخطط أرجاند: $z$، $z^*$، $z^2$، $z^3$، $iz$، $\frac{1}{z}$ |

**الحل:**

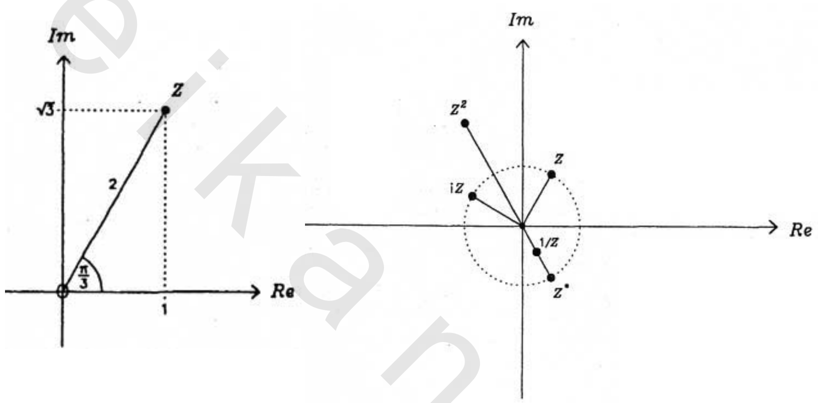
$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$$

أي أن مقياس $z$ يساوي 2 والإزاحة الزاوية هي $60^\circ$.

إذن ،

$z^3 = 8e^{i\pi} = -8$ ، $z^2 = 4e^{i2\pi/3}$ ، $z^* = 2e^{-i\pi/3}$ ، $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/3}$ ،

$iz = e^{i\pi/2}2e^{i\pi/3} = 2e^{i(\pi/3+\pi/2)}$.




**(٧,٤)** حل المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$ .

**الحل :**

لاحظ أولاً أنه إذا كان $z^2 + bz + c = 0$ فإن:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ . وبهذا يكون:

$$z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1$$

إذن ، $$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$ .

**(٧,٥)** حل المعادلات التالية :

أ) $z^5 = 1$ ب) $z^5 = 1 + i$

ج) $(z+1)^5 = 1$ د ) $(z+1)^5 = z^5$

ارسم حلول الفقرة (أ) باستخدام مخطط أرجاند.

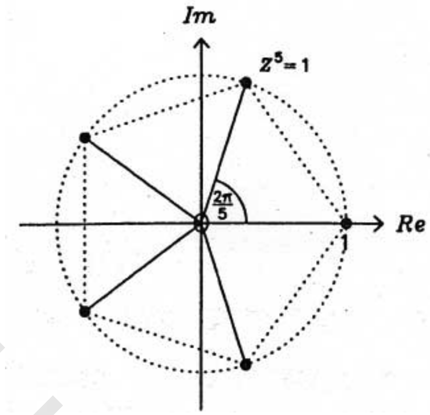
**الحل :**

أ ) لاحظ أن $z^5 = 1 = e^{i2\pi n}$ حيث إن $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. من ذلك نستنتج أن $z = e^{i2\pi n/5}$ حيث إن $n = 0,1,2,3,4$.

على الرغم من أن النتيجة أعلاه صحيحة لجميع قيم $n$ ، إلاّ أن عدد الحلول المختلفة يساوي5. إن اختيارنا لقيم $n$ ليس وحيداً فمن الممكن أن نجد الحلول الخمسة المختلفة لو عوّضنا عن بالقيم $0, \pm1, \pm2$. إن وجود خمسة حلول مختلفة هو أمر متوقع لأن عدد جذور أي كثيرة حدود من الدرجة يساوي وهذه الجذور إما أن تكون حقيقية أو مركبة ، وإذا كان الجذر مركباً فإن مرافقه جذر أيضاً. أي أن الجذور المركبة يجب أن يكون عددها عدداً زوجياً (كما رأينا في التمرين ٧،٤).

ب) $z^5 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+2\pi n)}$ حيث إن $n$ عدد صحيح.

إذن ، $z = 2^{1/10}e^{i(\pi/4+2\pi n)/5} = 2^{1/10}e^{i\pi(1+8n)/20}$ حيث إن :
$n = 0,1,2,3,4$.




ج) $(z+1)^5 = 1 = e^{i2\pi n}$ حيث إن $n$ عدد صحيح.

إذن ، $z+1 = e^{i2\pi n/5}$. أي أن $z = e^{i2\pi n/5} - 1$ حيث إن $n = 0, \pm 1, \pm 2$

د) بما أن $(z+1)^5 = z^5$ فإن $\left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = 1 = e^{i2\pi n}$ حيث إن $n$ عدد صحيح. ومنه فإن $\frac{z+1}{z} = e^{i2\pi/5}$. الآن :

$$\frac{z+1}{z} = e^{i2\pi n/5} \quad \Rightarrow z+1 = ze^{i2\pi n/5}$$

$$\Rightarrow z\left(e^{i2\pi n/5} - 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{e^{i2\pi n/5} - 1}$$

$$\Rightarrow z = \frac{e^{-i2\pi n/5} - 1}{(e^{i2\pi n/5} - 1)(e^{-i2\pi n/5} - 1)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2[1 - cos\,(2\pi n/5)]}\left(e^{-i2\pi n/5} - 1\right)$$

حيث إن $n = 1,2,3,4$.

لاحظ أن $n \neq 0$. لأنه لو كان $n = 0$ فإن المقام $e^{i2\pi n/5} - 1 = 0$ وهذا غير ممكن.

إن وجود أربعة حلول فقط لهذه المعادلة يرجع إلى كون أنها معادلة من الدرجة الرابعة وليست من الدرجة الخامسة ومن الممكن رؤية ذلك بسهولة بفك المقدار $(z+1)^5$ ومساواته بالطرف الأيمن $z^5$ لنحصل على المعادلة $5z^4 + 10z^3 + 10z^2 + 5z + 1 = 0$

| |
|---|
| **(٧,٦)** استخدم $e^{iA}$ و $e^{iB}$ لإثبات صحة المتطابقين (٣,١٠) و(٣,١٣). |

**الحل** :

نعلم أن $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ وأن $e^{i(A+B)} = e^{iA}e^{iB}$. الآن:

$$e^{i(A+B)} = e^{iA}e^{iB}$$
$$\Rightarrow cos(A+B) + isin(A+B) = (cosA + isinA)(cosB + isinB)$$
$$= cosAcosB - sinAsinB + i(sinAcosB + cosAcosB)$$

وبمساواة المركبة الحقيقية في الطرف الأيسر مع نظيرتها في الطرف الأيمن والمركبة التخيلية في الطرف الأيسر مع نظيرتها في الطرف الأيمن نجد أن:

$$\begin{aligned} cos\,(A+B) &= cosAcosB - sinAsinB \\ sin\,(A+B) &= sinAcosB + cosAcosB \end{aligned}$$

**(٧,٧)** استخدم مبرهنة ديموفوار لكتابة كلٍ من $sin4\theta$ و $cos4\theta$ بدلالة قوى $sin\theta$ و $cos\theta$

**الحل :**

$$cos4\theta + isin4\theta \quad = (cos\theta + isin\theta)^4$$

$$= cos^4\theta + 4icos^3\theta sin\theta + 6i^2cos^2\theta sin^2\theta + 4i^3cos\theta sin^3\theta + i^4sin^4\theta$$

$$= cos^4\theta - 6cos^2\theta sin^2\theta + sin^4\theta + i[4cos^3\theta sin\theta - 4cos\theta sin^3\theta]$$

وبمقارنة طرفي المعادلة نجد أن :

$$cos4\theta \quad = cos^4\theta - 6cos^2\theta sin^2\theta + sin^4\theta$$

$$sin4\theta \quad = 4cos^3\theta sin\theta - 4cos\theta sin^3\theta$$

إن هذا الاستخدام لمبرهنة ديموفوار للتعبير عن $cos4\theta$ و $sin4\theta$ بدلالة قوى $sin\theta$ و $cos\theta$ أسهل من استخدام صيغة ضعف الزاوية للدالتين $sin2\theta$ و $cos2\theta$.

**(٧,٨)** أثبت أن $cos^6\theta = (cos6\theta + 6cos4\theta + 15cos2\theta + 10)/32$

**الحل :**

$$cos^6\theta \quad = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^6$$

$$= \frac{e^{i6\theta} + 6e^{-i4\theta} + 15e^{i2\theta} + 20 + 15e^{-i2\theta} + 6e^{-i4\theta} + e^{-i6\theta}}{2^6}$$

$$=\frac{1}{32}\left[\frac{\left(e^{i6\theta}+e^{-i6\theta}\right)}{2}+6\frac{\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}\right)}{2}+15\frac{\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)}{2}+\frac{20}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{32}(cos6\theta+6cos4\theta+15cos2\theta+10)$$

**(٧,٩)** استخدم تعريف الدوال الزائدية لإثبات أن :

$$sinh(x+y)=sinhxcoshy+coshxsinhy$$

ثم جد صيغة مشابهة للدالة $cosh\,(x+y)$

**الحل :**

بما أن $cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$ وأن $sinh\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$ فإن :

$sinhxcoshy+coshxsinhy$

$$=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}$$

$$=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$$

$$=sinh\,(x+y)$$

وبالمثل ،

$cosh\,(x+y)$

$$=\frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y} + e^{-x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{x-y}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= coshxcoshy + sinhxsinhy$$

**(٧,١٠)** احسب كلاً من :

أ) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cosk\theta}{k!}$$

ب) $$\int e^{ax}\, sin(bx)\, dx$$

**الحل** :

أ)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cosk\theta}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{R}e\{e^{ik\theta}\}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{R}e\left\{\frac{e^{ik\theta}}{k!}\right\}$$

$$= \mathcal{R}e\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{i\theta}\right)^{k}}{k!}\right\}$$

ولكن

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{k}}{k!} = 1 + \Phi + \frac{\Phi^{2}}{2!} + \frac{\Phi^{3}}{3!} + \cdots = exp\,(\Phi)$$

إذن،

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{cosk\theta}{k!} = \mathcal{R}e\{exp\,(e^{i\theta})\}$$

$$= \mathcal{R}e\{exp\,(cos\theta + isin\theta)\}$$

$$= \mathcal{R}e\{exp\,(e^{cos\theta} e^{isin\theta})\}$$

وبهذا يكون:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{cosk\theta}{k!} = \mathcal{R}e\{e^{cos\theta}[cos(sin\theta)+isin(sin\theta)]\}$$
$$= e^{cos\theta}cos\,(sin\theta)$$

لاحظ أنه يمكن الحصول على المجموع المرادف للدالة $sink\theta/k!$ من $k=0$ إلى $k=\infty$ من السطر ما قبل الأخير وهذا المجموع يساوي $e^{cos\theta}sin\,(sin\theta)$ ذلك لأن خطوات الحل متشابهة ما عدا استبدال الجزء الحقيقي $\mathcal{R}e\{\}$ بالجزء التخيلي $Im\{\}$.

ب) $$\int e^{ax}\,sin(bx)\,dx = \int e^{ax}\,Im\{e^{ibx}\}dx$$
$$= \int Im\{e^{ax}e^{ibx}\}\,dx$$
$$= Im\left\{\int e^{x(a+ib)}\,dx\right\}$$
$$= Im\left\{\frac{e^{x(a+ib)}}{a+ib}+C\right\}$$

لكن $$\frac{1}{a+ib} = \left(\frac{1}{a+ib}\right)\times\left(\frac{a-ib}{a-ib}\right) = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

إذن، $$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = Im\left\{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a-ib)(cosbx + isinbx)+C\right\}$$
$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(asinbx-bcosbx)+K$$

مرة أخرى نستطيع حساب تكامل الدالة $e^{ax}cos\ (bx)$ من السطر ما قبل الأخير باستبدال الجزء التخيلي $Im\{\}$ بالجزء الحقيقي $\mathcal{R}e\{\}$. وبهذا نكون قد حسبنا تكاملين دون إضافة جهد جديد. من الممكن حساب هذا التكامل أيضاً باستخدام طريقة التكامل بالأجزاء (مرتان) ولكن طريقتنا السابقة أسهل لأننا احتجنا فقط لحساب تكامل أُسي واحد. لاحظ أيضاً أن الثوابت $K, b, a$ جميعهاحقيقية.