الفصل السادس

متسلسلة تايلور
TAYLOR SERIES

(٦,١) جد متسلسلة تايلور للدالة $sin\,(x+\frac{\pi}{6})$ لقيم x الصغيرة.

الحل :

$$f(x)=sinx \quad ، \quad f(\pi/6)=1/2$$
$$f'(x)=cosx \quad ، \quad f'(\pi/6)=\sqrt{3}/2$$
$$f''(x)=-sinx \quad ، \quad f''(\pi/6)=-1/2$$
$$f'''(x)=-cosx \quad ، \quad f'''(\pi/6)=-\sqrt{3}/2$$
$$f''''(x)=sinx \quad ، \quad f''''(\pi/6)=1/2$$

ولكن $$f(x+a)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\frac{x^3}{3!}f'''(a)+\cdots$$

إذن ، $$sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{12}x^3+\frac{1}{48}x^4+\cdots$$

(٦,٢) جد صيغة ذات الحدين للمقدار $(1+x)^n$. وبكتابة $\sqrt{c}$ على الصورة $a(1+b)^{i/2}$ حيث إن a و b ثابتان مناسبان ، احسب $\sqrt{8}$ و $\sqrt{17}$ مقربة لأربع مراتب عشرية.

obeikandi.com

الحل :

$f(x) = x^n$ ، $f(1) = 1$

$f'(x) = nx^{n-1}$ ، $f'(1) = n$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ ، $f''(1) = n(n-1)$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ ، $f'''(1) = n(n-1)(n-2)$

ولكن

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \cdots$$

إذن ،

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \cdots$$ حيث إن $|x| < 1$.

إذا كان $n = \frac{1}{2}$ فإن:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$ حيث إن $|x| < 1$.

$$\sqrt{8} = \sqrt{9-1} = 3\sqrt{1-1/9}$$

وبهذا يكون

$$\begin{aligned}\sqrt{8} &= 3\left[1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{9}\right)^3 - \frac{5}{128}\left(-\frac{1}{9}\right)^4 + \cdots\right] \\ &= 3\left[1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{648} - \frac{1}{11664} - \frac{5}{839808} - \cdots\right] \\ &= 2.8284 \quad \text{(مقرباً لأربع مراتب عشرية)}\end{aligned}$$

كذلك :

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1+1/16}$$

ونرى أن

$$\sqrt{17} = 4\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{16}\right)^3-\cdots\right]$$

$$= 4\left[1+\frac{1}{32}-\frac{1}{2048}-\frac{1}{65536}+\cdots\right]$$

$= 4.1231$ (مقرباً لأربع مراتب عشرية)

من المعلوم أن تقارب صيغة ذات الحدين سريع جداً عندما يكون $|x| \to 0$.

فمثلاً ، إذا أضفنا الحد x^2 (وهو -1.25×10^{-15}) عند حساب :

$\sqrt{1.0000001} = (1+10^{-7})^{1/2}$ فإننا نحصل على تقريب أفضل من التقريب الذي نحصل عليه باستخدام معظم الآلات الحاسبة.

إن أفضل طريقة لحساب $\sqrt{a^2+b^2}$ حيث إن $a \gg b$ هي باستخدام مفكوك ذات الحدين :

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= a\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^4+\frac{1}{16}\left(\frac{b}{a}\right)^6-\cdots\right]$$

وذلك لتلافي ما يُسمى "خطأ التقريب" حتى لو استخدمت أجهزة حاسب آلي عالية الدقة.

(٦،٣) جد متسلسلة تايلور لكل من $ln\,(1+x)$ و $ln\,(1-x)$ ومن ثم جد متسلسلة قوى للدالة $ln[(1+x)/(1-x)]$

الحل :

$$f(x) = lnx \quad ، \quad f(1) = 0$$
$$f'(x) = x^{-1} \quad ، \quad f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -x^{-2} \quad ، \quad f''(1) = -1$$
$$f'''(x) = 2x^{-3} \quad ، \quad f'''(1) = 2$$
$$f''''(x) = -6x^{-4} \quad ، \quad f''''(1) = -6$$
$$f'''''(x) = 24x^{-5} \quad ، \quad f'''''(1) = 24$$

ولكن $f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \frac{x^3}{3!}f'''(a) + \cdots$

إذن،

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$ حيث إن $|x| < 1$.

وبتعويض $x = -$ في الصيغة أعلاه نجد أن :

$$ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$$ حيث إن $|x| < 1$.

وبهذا يكون

$$ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ln(1+x) - ln\,(1-x)$$
$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$ حيث إن $|x| < 1$.

(٦,٤) جد متسلسلة ماكلورين للدالة $cos^{-1}(x)$.

الحل :

متسلسلة ماكلورين هي حالة خاصة لمتسلسلة تايلور عندما يكون $a = 0$ (حول نقطة الأصل). ومن الممكن الحصول عليها بالطريقة الاعتيادية. أي بإيجاد

obeikandi.com

مشتقات $cos^{-1}(x)$ ومن ثم قيم هذه المشتقات عندما $x = 0$. ولكننا سنستخدم طريقة أسهل من ذلك وهي إيجاد مشتقة $cos^{-1}(x)$ مرة واحدة فقط ومن ثم استخدام صيغة ذات الحدين واجراء التكامل للناتج حداً حداً.

بوضع $(x) = cos^{-1}(x)$ نجد أن $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-1/2}$

ولكن $(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$

إذن ،

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$
$$= C - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 - \cdots$$

وبما أن $cos^{-1}(0) = \frac{1}{2}$ فإن $C = \frac{\pi}{2}$. إذن ،

$$cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \cdots$$

يجب ملاحظة أن متسلسلة ماكلورين صحيحة فقط عندما يكون $|x| < 1$ و $0 \le cos^{-1}(x) \le \pi$.

(٦,٥) احسب قيمة النهايات التالية :

أ) $\lim_{x\to 0} \frac{sinax}{x}$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - 1}{x}$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{2cosx + xsinx - 2}{x^4}$

obeikandl.com

الحل:

أ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{ax - a^3\,x^3/6 + \cdots}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(a - \frac{a^3}{6}x^2 + \cdots\right)$$

$$= a$$

أو باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$.\quad \lim_{x\to 0}\frac{sinax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{1}$$

$$= a$$

ب)

$$\lim_{x\to 0}\frac{cosx - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \cdots\right)$$

$$= 0$$

أو باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$.\quad \lim_{x\to 0}\frac{cosx - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-sinx}{1} = 0$$

ج)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2cosx + xsinx - 2}{x^4}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{2(1 - x^2/2 + x^4/24 - \cdots) + x(x - x^3/6 + \cdots) - 2}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12} + O(x^2)\right)$$

$$= -\frac{1}{12}$$

obeikandi.com

الرمز $O(x^2)$ (من درجة x^2) يعني أن الحدود المحذوفة تحتوي على حدود من الدرجة الثانية فأكثر.

أو بتطبيق قاعدة لوبيتال ثلاث مرات :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2cosx + xsinx - 2}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{-sinx + xcosx}{4x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-xsinx}{12x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-sinx}{12x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-cosx}{12}\\ &= -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

(٦،٦) إذا علمت أن للمعادلة $x^3 + 3x^2 + 6x - 3 = 0$ جذراً حقيقياً واحداً فقط فجد هذا الجذر مقرباً لخمس مراتب عشرية باستخدام طريقة نيوتن ورافسون.

الحل :

نفرض أن $f(x) = 3x^2 + 3x^2 + 6x - 3$. عندئذ ، $f'(x) = x^3 + 6x + 6$

إذا كان $f(x_n) \approx 0$ فإن التقريب الأفضل لحل المعادلة $f(x) = 0$ هو x_{n+1} الذي يحقق :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + 3x_n^2 + 6x_n - 3}{3x_n^2 + 6x_n + 6}$$

obeikandl.com

نبدأ بوضع $x_o = 0$ ، $f(x_o) = -3.000$

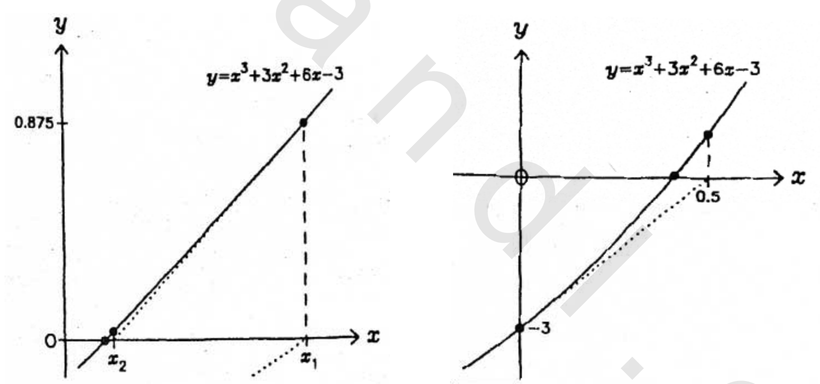
$x_1 = 0.5$ ، $f(x_1) = 0.875$

$x_2 = 0.4102564$ ، $f(x_2) = 0.03552$

$x_3 = 0.4062950$ ، $f(x_3) = 0.00006633$

$x_4 = 0.4062876$ ، $f(x_4) = 0$

أي أن $^3 + 3x^2 + 6x - 3 = 0$ عندما يكون $x = 0.40629$ (مقرباً لخمس مراتب عشرية).



obeikandl.com