الفصل الخامس

التكامـل

INTEGRATION

(٥,١)	احسب تكامل كل من الدوال التالية بالنسبة إلى x.		
أ)	$x+\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$	ب)	$\sqrt{x}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$
ج)	2^x	د)	e^{2x}
هـ)	$\dfrac{1}{2x-1}$	و)	$sin(2x)+cos\,(3x)$
ز)	$tanx$	ح)	$sin^2(x)$
ط)	$\dfrac{x}{1+x^2}$	ي)	$\dfrac{1}{1+x^2}$

الحل :

أ)

$$\int\left(x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx \quad = \int\left(x+x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-lnx+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-lnx+C$$

ب)
$$\int \sqrt{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \frac{x^{5/2}}{5/2}-\frac{x^{1/2}}{1/2}+C$$
$$= 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}-1\right)+C$$

ج)
$$\int 2^x dx = \frac{1}{ln2}2^x + C$$

د)
$$\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}+C$$

هـ)
$$\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln\,(2x-1)+C$$

فرضنا ضمنياً في هذا التكامل أننا قمنا بتعويض $u = 2x - 1$ ومن ثم $du = 2dx$ وبهذا نحصل على :

$$\int \frac{dx}{2x-1} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}lnu + C$$

و)
$$\int (sin(2x)+cos\,(3x))dx = -\frac{1}{2}cos(2x)+\frac{1}{3}sin\,(3x)+C$$

$$\int tanxdx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -ln(cosx)+C$$
$$= ln(secx)+C$$

بكتابة $tanx = \dfrac{sinx}{cosx}$ يكون من الواضح أن مشتقة المقام هي البسط (باستثناء الإشارة).

وإذا أردنــــا إعطــاء تفاصـــــيل أكثـر نفـــرض أن $u =$ ومــن ثــم $du = -sinxdx$.

ويكون:

$$\int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{du}{u} = -lnu + C$$

ز)

$$\begin{aligned}\int sin^2xdx &= \frac{1}{2}\int (1 - cos(2x))dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin(2x)\right) + C \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin(2x) + C\end{aligned}$$

ح)

$$\int \frac{x}{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}ln(1 + x^2) + C$$

حصلنا على هذا التكامل لأن مشتقة المقام هي البسط (باستثناء معامل ثابت).

أما إذا أردنا تفاصيل التعويض فهو $u = 1 + x^2$ ومن ثم $du = 2xdx$.

ط)

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = tan^{-1}x + C$$

على الرغم من كتابة الإجابة بسطر واحد (لأن هذا هو أحد التكاملات الأساسية) ، إلاّ أنه من الممكن إجراء هذا التكامل بتعويض $x = tan\theta$.

ومن ثم $dx = sec^2\theta d\theta = (1 + tan^2\theta)d\theta = (1 + x^2)d\theta$.

وبهذا يكون:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \int d\theta = \theta + C = tan^{-1}(x) + C$$

(٥,٢) احسب تكامل كل من الدوال التالية بالنسبة إلى .

أ) $\int_0^{\pi/2} sin^4x\, cosxdx$ ب) $\int_0^{\pi/2} sin^4x\, dx$

ج) $\int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}dx$

الحل :

أ)
$$\int_0^{\pi/2} sin^4x\, cosxdx = \left[\frac{1}{5}sin^5x\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{5}\left[sin^5\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin^5(0)\right]$$
$$= \frac{1}{5}$$

إن وجود مشتقة $sinx$ ساعد على إيجاد هذه التكامل بسهولة حيث قمنا بتعويض $u = sinx$ ومن ثم $du = cosxdx$ مما يؤدي إلى

$$\int sin^4x\, cosxdx = \int u^4\, du$$

أما إذا لم تكن مشتقة $sinx$ موجودة فإن إجراء التكامل يحتاج إلى مجهود أكثر ويمكن حسابه في مثل هذه الحالة باستخدام متكرر لصيغة ضعف الزاوية $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$.

ب) باستخدام التمرين (٣,٦) لدينا $8sin^4\theta = cos\,4\theta - 4\,sin\,2\theta + 3$.

وبهذا يكون :

$$\int_0^{\pi/2} sin^4x\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (cos(4x) - 4\,cos(2x) + 3)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}sin(4x) - 2\,sin(2x) + 3x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}(sin2\pi - sin0) - 2(sin\pi - sin\theta) + 3\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\right]$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$ [١]

ج) لنفرض أن $I = \int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}$.

بوضع $u^2 = 2x + 1$ نجد أن $2udu = 2dx$.

إذن ،

$$I = \int_{u=1}^{u=3} \frac{\frac{1}{2}(u^2 - 1) + 3}{u}(udu)$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} + 3\right)du$$

$$= \left[\frac{1}{6}u^3 + \frac{5}{2}u\right]_1^3$$

---

(١) المترجم: كما ذُكر في نهاية حل الفقرة (أ) من هذا التمرين فإنه يمكن استخدام التطبيق المتكرر لصيغة ضعف الزاوية $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$ لحساب هذا التكامل وبصورة عامة تكامل أي دالة على الصورة $sin^n(x)$ أو $cos^n(x)$ حيث إن n عدد صحيح موجب زوجي.

$$= \frac{27}{6} + \frac{15}{2} - \frac{1}{6} - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{13}{3} + 5 = 9\frac{1}{3}$$

وطريقة أخرى لحساب هذا التكامل هي استخدام التكامل بالأجزاء حيث نكامل $(2x+1)^{-1/2}$ ونشتق $x+3$ لنحصل على :

$$\int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \left[\left[(x+3)\sqrt{2x+1}\right]\right]_0^4 - \int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$$

$$= 21 - 3 - \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^4$$

$$= 18 - \frac{1}{3}\left[9^{3/2} - 1\right]$$

$$= 18 - \frac{26}{3} = 9\frac{1}{3}$$

(٥,٣) احسب تكامل كل من صيغ الكسور الجزئية المقدمة في التمرين(١,٩).

الحل :

أ)

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= ln(x-3) - ln(x-2) + C$$

$$= ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C$$

ب)

$$\int \frac{x^2-5x+1}{(x-1)^2(2x-3)}dx$$
$$= 3\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 9\int \frac{dx}{x-1} - 17\int \frac{dx}{2x-3}$$
$$= -\frac{3}{x-1} + 9\,ln(x-1) - \frac{17}{2}\,ln(2x-3) + C$$

ج)

$$\int \frac{11x+1}{(x-1)(x^2-3x-2)}dx$$
$$= \int \frac{3x+5}{x^2-3x-2}dx - 3\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x-2}dx + \frac{19}{2}\int \frac{dx}{x^2-3x-2} - 3\int \frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{3}{2}ln(x^2-3x-2) + \frac{19}{2}\int \frac{dx}{(x-3/2)^2 - \left(\sqrt{17}/2\right)^2}$$
$$- 3\,ln(x-1) + C$$
$$= 3\,ln\left(\frac{\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}\right) - \frac{19}{\sqrt{17}}tanh^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right) + K$$

لحساب هذا التكامل استخدمنا العديد من المعالجات (كما هو الحال في الكثير من التكاملات). بدأنا بوضع الدالة المكاملة كمجموع كسور جزئية كما هو مبين في التمرين (١,٩) وبعد ذلك كتبنا البسط على الصورة $3x+5 = \frac{3(2x-3)}{2} + \frac{19}{2}$ وبهذا حصلنا على الجزء الأول من التكامل. ثم قمنا بإكمال المربع للمقام x^2-3x-2 وذلك لاستخدام القاعدة المعلومة $\frac{d}{d\theta}\left[tanh^{-1}\left(\frac{\theta}{a}\right)\right] = \frac{a}{a^2-\theta^2}$. كان من الممكن أيضاً استخدام $tanh^{-1}\left(\frac{\theta}{a}\right) = \frac{1}{2}ln\left(\frac{a+\theta}{a-\theta}\right)$ أو إثبات ذلك من التكامل بتحليل المقام.

$$\theta^2 - a^2 = (\theta - a)(\theta + a)$$

حيث إن $\theta = x - \frac{3}{2}$ و $a = \frac{\sqrt{17}}{2}$ ومن ثم استخدام الكسور الجزئية.

(٥,٤) استخدم التكامل بالأجزاء لإثبات ما يلي :

أ) $\int x\, sinx dx = C - xcosx + sinx$

ب) $\int sinx\, e^{-x} dx = C - \frac{1}{2}(sinx + cosx)e^{-x}$

الحل :

أ)

$$\int x\, sinx dx = -xcosx + \int cosx\, dx$$

$$= -xcosx + sinx + C$$

ب)

بوضع $I = \int (sinx)\, e^{-x} dx$ نرى أن :

$$I = -e^{-x} sinx + \int e^{-x} cosx\, dx$$

$$= -e^{-x} sinx - e^{-x} cosx - \int e^{-x} sinx\, dx$$

$$= -(sinx + cosx)e^{-x} - I$$

إذن ،

$$\int sinx\, e^{-x} dx = -\frac{1}{2}(sinx + cosx)e^{-x} + C$$

(٥,٥) إذا كان :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} sin^n xdx \qquad \text{حيث إن } n \geq 1$$

فأثبت أن $nI_n = (n-1)I_{n-1}$ ومن ثم استخدم هذه العلاقة لحساب I_5 و I_8

الحل :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} sin^{n-1} xsinxdx \quad \text{حيث إن } n \geq 1$$

إذن :

$$I_n = [-sin^{n-1}x\ cosx]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} sin^{n-2}x\ cos^2xdx$$

$$= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} sin^{n-2}x\,(1 - sin^2x)dx$$

$$= (n-1)\left\{\int_0^{\pi/2} sin^{n-2}x\ dx - \int_0^{\pi/2} sin^nx\ dx\right\}$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

وبهذا يكون :

$$\frac{I_n}{(n-1)} + I_n = I_{n-2}$$

إذن ، $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ حيث إن $n \geq 1$.

بما أن :

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$$

فإن:

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} I_1$$

ولكن

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} sinx\, dx = [-cosx]_0^{\pi/2} = 1$$

إذن ،

$$I_5 = \frac{8}{15}$$

أيضاً :

$$I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} I_4 = \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0$$

ولكن $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$. إذن :

$$I_8 = \frac{35\pi}{256}$$

(٥،٦) إذا كان $(-x) = -f(x)$ فأثبت أن $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

جد صيغة مماثلة للتكامل إذا كانت f دالة متماثلة (أي زوجية).

الحل :

لاحظ أن :

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= -\int_{a}^{0} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (\text{بوضع} \;\; x = -u) \\
&= \int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad (\text{لأن} \;\; \mathrm{R}(-u) = -f(u)) \\
&= -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0
\end{aligned}
$$

للحصول على النتيجة أعلاه بدأنا بتجزئة التكامل من $-a$ إلى a إلى جزئين (جزء لقيم x الموجبة والجزء الآخر لقيم x السالبة). بعد ذلك استخدمنا التعويض $u = -x$ (وبهذا $du = -dx$) ومن ثم استفدنا من كون الدالة المكاملة تخالفية وبدلنا حدود التكامل. وبهذا جصلنا على الفرق بين تكاملين متساويين. إن تكامل الأول بالنسبة إلى u والآخر بالنسبة إلى x لايؤثر على قيمة التكامل المحدد لأن القيمة النهائية للتكامل تعتمد فقط على a وليس على الطريقة التي كتبت فيها الدالة كدالة في المتغير x أو في المتغير u.

في الحالة التي تكون فيها الدالة تماثلية ، أي $f(-x) = f(x)$ فإن الخطوات السابقة تؤدي إلى :

$$
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx
$$

في الحقيقـة ، يمكـن كتابـة أي دالـة كترتيـب خطـي لـدالتين أحـداهما تماثليـة والأخرى تخالفية على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

حيث الجزء الأول من الطرف الأيمن دالة تماثلية والجزء الثاني دالة تخالفية.