الفصل الرابع

التفاضل

DIFFERENTIATION

(٤,١) جد مشتقة كل مما يلي باستخدام المبادئ الأولية (تعريف المشتقة).

أ) $y = cosx$.

ب) $y = x^n$ حيث إن n عدد صحيح موجب.

ج) $y = \frac{1}{x}$

د) $y = \frac{1}{x^2}$

الحل :

أ)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} (\frac{cos(x + \delta x) - cosx}{\delta x})$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{cos(\delta x)\, cosx - sin(\delta x)\, sinx - cosx}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{(1 - \delta x^2/2)cosx - \delta x sinx - cosx}{\delta x}\right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(-\frac{\delta x}{2} cosx - sinx \right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$.

ب)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{(x+\delta x)^n - x^n}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{x^n + nx^{n-1}\delta x + n\,(n-1)/2x^{n-2}\delta x^2 + \cdots - x^n}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n}{2}(n-1)x^{n-2}\delta x + \cdots \right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

ج)

$$\frac{d}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{1/(x+\delta x) - 1/x}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{x - (x+\delta x)}{x(x+\delta x)\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{-1}{x(x+\delta x)} \right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

د)

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{1/(x+\delta x)^2 - 1/x^2}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{x^2 - (x+\delta x)^2}{x^2(x+\delta x)^2\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{-2}{x(x+\delta x)^2} - \frac{\delta x}{x^2(x+\delta x)^2}\right)$$

إذن ، $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}$.

(٤،٢) أثبت أن ميل المستقيم العمودي على المستقيم $y = mx + c$ يساوي $-\frac{1}{m}$.

الحل :

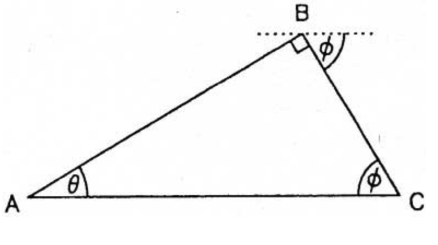
من الشكل المبين أدناه نجد أن :

ميل $\overrightarrow{AB} = \tan\theta = \frac{BC}{AB}$.

ميل $\overrightarrow{BC} = -\tan\varphi = -\frac{AB}{BC}$.

إذن ، ميل $\overrightarrow{AB} = \frac{-1}{\text{ميل}\ \overrightarrow{BC}}$.

وبهذا نخلص إلى أن ميل العمودي على $y = mx + c$ يساوي $-\frac{1}{m}$.



يوجد برهان جبري (ولكنه أطول من البرهان الهندسي) لهذه الحقيقة وإليك هذا البرهان.

نفرض أن إحداثيا نقطة تقاطع المستقيمين هما (x_o, y_o) ونفرض أن (x_1, y_1) نقطة واقعة على أحد المستقيمين وأن (x_2, y_2) نقطة واقعة على المستقيم الآخر. ونفرض أن m و μ ميلا المستقيمان. عندئذ ، بتعريف الميل واستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن :

$$\mu = \frac{y_2 - y_o}{x_2 - x_0} \quad \text{و} \quad m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

و

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_o)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

وبتبسيط المعادلة الأخيرة وإجراء بعض العمليات الجبرية تستطيع بسهولة إثبات أن $\mu = -\frac{1}{m}$.

(٤,٣) استخدم الخاصية الخطية للمؤثر التفاضلي وقانون مجموع المتتالية الهندسية غير المنتهية لإثبات أن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

حيث إن $|x| < 1$ ومن ثم احسب المجموع .

الحل :

لكل $|x| < 1$ لدينا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

(٤،٤) جد مشتقة $\left(\frac{x}{a}\right)$ $y = cos^{-1}$ حيث إن $1 > \left|\frac{x}{a}\right|$. هل النتيجة صحيحة لجميع قيم y ؟ ماهي مشتقة $\left(\frac{x}{a}\right)$ tan^{-1} ؟

الحل :

إذا كان $\left(\frac{x}{a}\right)$ $y = cos^{-1}$ فإن $x = a\cos y$ حيث إن $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$.

وباشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى y نجد أن :

$$\frac{dx}{dy} = -asiny = -a\sqrt{1-cos^2y} = -a\sqrt{1-x^2/a^2}$$

$$= -\sqrt{a^2-x^2}$$

إذن ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

وهذا صحيح فقط في المجال $2n\pi \le y \le (2n+1)\pi$ حيث إن n عدد صحيح ، انظر الشكل المرفق. على سبيل المثال ، إذا كان $\pi < y < 2\pi$ فإن مشتقة الدالة $\left(\frac{x}{a}\right)$ cos^{-1} تساوي $\frac{+1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

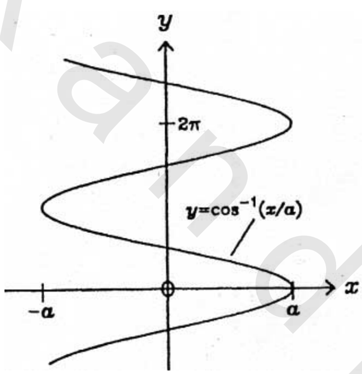
لإيجاد مشتقة $tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ لاحظ أن :

$$y = tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \Leftrightarrow x = a\,tany$$

إذن ،

$$\frac{dx}{dy} = a\,sec^2y = a(1 + tan^2y) = a(1 + \frac{x^2}{a^2}) = \frac{1}{a}\,(a^2 + x^2)$$

ونستنتج أن : $\frac{d}{dx}\left[tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{a}{a^2+x^2}$.



(٤,٥) جد المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ لكل من الدوال التالية :

أ) $y = (2x + 1)^3$ ب) $y = \sqrt{3x - 1}$

ج) $y = cos5x$ د) $y = sin\,(3x^2 + 7)$

هـ) $y = tan^4(2x + 3)$ و) $y = xe^{-3x^2}$

ز) $y = xln(x^2 + 1)$ ح) $y = sinx/x$

الحل :

أ) $\frac{dy}{dx} = 3(2x+1)^2 \times 2 = 6(2x+1)^2$.

افترضنا في هذه المسألة ضمنياً أن $u = 2x + 1$ ومن ثم فإن $y = u^3$.

بعد ذلك استخدمنا قاعدة السلسلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

وحصلنا على النتيجة أعلاه من $\frac{dy}{du} = 3u^2$ و $\frac{du}{dx} = 2$.

ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x-1)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

ج) $\frac{dy}{dx} = -sin5x \times 5 = -5sin5x$

د) $\frac{dy}{dx} = \cos(3x^2+7) \times (6x) = 6x\cos(3x^2+7)$

هـ) $\frac{dy}{dx} = 4tan^3(2x+3) \times sec^2(2x+3) \times 2$

$= 8tan^3(2x+3)sec^2(2x+3)$

في هذا المسألة استخدمنا الصورة التالية لقاعدة السلسلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

حيث إن $v = 2x + 3$ و $u = tanv$ و $y = u^4$.

ومن ثم حصلنا على النتيجة بتعويض المشتقات :

$$\frac{dv}{dx} = 2 \quad و \quad \frac{du}{dv} = sec^2 v \quad و \quad \frac{dy}{du} = 4u^3$$

و) $$\frac{dy}{dx} = xe^{-3x^2}(-6x) + e^{-3x^2} = (1 - 6x^2)e^{-3x^2}$$

استخدمنا في هذا المسألة قاعدة الضرب للمشتقات :

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

حيث إن $u = $ و $v = e^{-3x^2}$. كما أننا استخدمنا قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{dv}{dx}$ حيث إن $w = -3x^2$ و $v = e^w$.

ز) $$\frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{x^2+1} \times 2x + ln(x^2+1) = \frac{2x^2}{x^2+1} + ln(x^2+1)$$

ح) $$\frac{dy}{dx} = \frac{xcosx - sinx}{x^2}$$

في هذه المسألة استخدمنا قاعدة مشتقة خارج قسمة دالتين :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du/dx - u\,dv/dx}{v^2}$$

حيث إن $u = sinx$ و $v = x$.

(٤,٦) جد مشتقة $y = a^x$ حيث إن a ثابت وذلك بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة قبل الاشتقاق.

الحل :

$$y = a^x \Rightarrow lny = ln(a^x) = xlna$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = lna$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = ylna$$

إذن ، $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x lna$.

لاحظ أنه في الحالة الخاصة التي يكون فيها $a = e$ نحصل على:

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x lne = e^x$ وذلك لأن $lne = 1$.

(٤,٧) جد $\frac{dy}{dx}$ لما يلي :
أ) $x = t(t^2 + 2)$ و $y = t^2$
ب) $x^2 = ysin(xy)$

الحل :

أ) باستخدام قاعدة السلسلة لدينا :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{dy}/{dt}}{{dx}/{dt}} = \frac{2t}{3t^2 + 2}$$

ب) باشتقاق طرفي المعادلة $x^2 = y(sinxy)$ ضمنياً بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\begin{aligned} 2x &= y\frac{d}{dx}[sin(xy)] + sin\,(xy)\frac{d}{dx}[y] \\ &= ycos(xy)\frac{d}{dx}[xy] + sin\,(xy)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$= y\cos(xy)\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+\sin(xy)\frac{dy}{dx}$$

$$= y^2\cos(xy)+\frac{dy}{dx}[xy\cos(xy)+\sin(xy)]$$

إذن ، $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y^2\cos(xy)}{xy\cos(xy)+\sin(xy)}$

(٤,٨) جد النقاط الحرجة وصنفها لكل من الدوال التالية :

أ) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{6}-x^3$

ب) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

ج) $U(r)=4\varepsilon\left[\left(\dfrac{\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\dfrac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$ حيث إن $r\geq 0$ و ε و σ ثابتان

د) $P(r)=\dfrac{r^2}{8a_o^3}(2-\dfrac{r}{a_o})e^{-r/a_o}$ حيث إن $r>0$ و a_o ثابت

الحل :

أ) لإيجاد النقاط الحرجة نضع المشتقة الأولى صفراً فنرى أن :

$$f'(x)=x^4-\frac{2x^3}{3}-3x^2=\frac{1}{3}x^2(3x^2-2x-9)$$

الآن $f'=0$ عندما $x=0$ أو $\frac{1\pm2\sqrt{7}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{4+108}}{6}=x$.

إذن ، توجد نقاط حرجة عندما $x=0$ أو $x=\frac{1-2\sqrt{7}}{3}$ أو $x=\frac{1+2\sqrt{7}}{3}$.

الآن ، لتصنيف النقاط الحرجة نجد المشتقة الثانية :

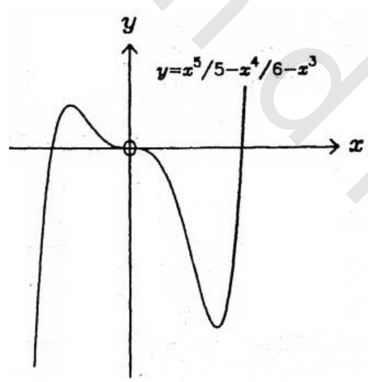
$$f''(x) = 4x^3 - 2x^2 - 6x$$

عندما $x = 0$ نجد أن $f''(x) = 0$ ومن ثم فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل في تحديد ماهيتها. ولكن بملاحظة أن $(x) \longrightarrow -x^3$ عندما $x \longrightarrow 0$ نخلص إلى وجود نقطة انقلاب عندما $x = 0$.

عندما $x = \frac{1-2\sqrt{7}}{3}$ نجد أن $f''(x) < 0$ ومن ثم توجد نقطة عظمى .

عندما $x = \frac{1+2\sqrt{7}}{3}$ نجد أن $f''(x) > 0$ ويكون للدالة نقطة صغرى في هذه الحالة.

الشكل أدناه يبين منحنى الدالة :



ب) $$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-4x(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$=\frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

الآن ، $f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x \pm 1$

ومن ثم للدالة نقطتان حرجتان عندما $x=1$ و $x=-1$.

وبما أن $f''(1)=-\frac{1}{2}<0$ وأن $f''(-1)=\frac{1}{2}>0$

فيوجد قيمة عظمى عندما $x=1$ وقيمة صغرى عندما $x=-1$.

ج) $r>0$,

$$U(r)=4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

$$U'(r)=4\varepsilon\left[-12\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{11}\frac{\sigma}{r^2}+6\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{5}\frac{\sigma}{r^2}\right]$$

$$=\frac{24\varepsilon}{\sigma}\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}-2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13}\right]$$

$$U''(r)=\frac{24\varepsilon}{\sigma}\left[-7\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\frac{\sigma}{r^2}+26\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}\frac{\sigma}{r^2}\right]$$

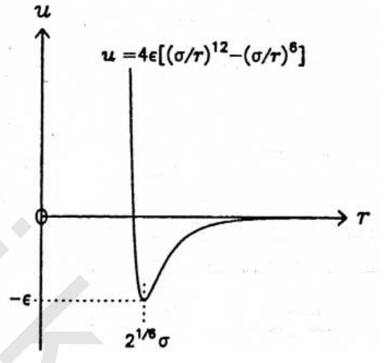
$$=\frac{24\varepsilon}{\sigma^2}\left[26\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{14}-7\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{8}\right]$$

الآن ، $U'(r)=0 \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\left[1-2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]=0$

إذن ، $r\to\infty$ أو $r=2^{1/6}\sigma$.

وبما أن $U(r)\to 0$ عندما $r\to\infty$ فإنها ليست نقطة حرجة وبهذا النقطة الحرجة الوحيدة تحدث عندما $r=2^{\frac{1}{6}}\sigma$ وعندها تكون للدالة قيمة صغرى لأن $U''(2^{\frac{1}{6}}\sigma)>0$.

بيان الدالة مبين بالشكل أدناه.



الدالة $U(r)$ هي دالة الكُمون (٦,١٢) للينارد جونز وتُستخدم عادة لتقريب الطاقة الكامنة بين الجزيئات.

بينما لا توجد تفاعلات بين مكونات الغاز المثالي لكن هناك تفاعلات بين مكونات الغازات الحقيقية ، فمثلاً ، يوجد تنافر قصير المدى لمنع جزيئين من احتلال فراغ واحد وجاذبية طويلة المدى (من نمط ثنائي استقطاب محدث وثنائي استقطاب تفاعلي المعروف بنمط (فان دوالز) وتضعف هذه الجاذبية كلما ابتعدت الجزيئات بعضها عن بعض. تمثل القيمة الأمثل للفصل r التوازن بين هاتين القوتين المتضادتين وتحدث عند القيمة الصغرى للدالة $U(r)$.

د) $$P(r) = \frac{r^2}{8a_o^3}\left(2 - \frac{r}{a_o}\right)^2 e^{-r/a_o} \qquad , r \geq 0$$

$$P'(r) = \frac{1}{8a_o^3}\left[-\frac{r^2}{a_o}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)^2 + 2r\left(2-\frac{r}{a_o}\right)^2 - \frac{2r^2}{a_o}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\right]e^{-r/a_o}$$

$$= \frac{r}{8a_o^3}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + 4\right]e^{-r/a_o}$$

$$P''(r) = \frac{1}{8a_o^3}\left\{\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + r\right]\right.$$

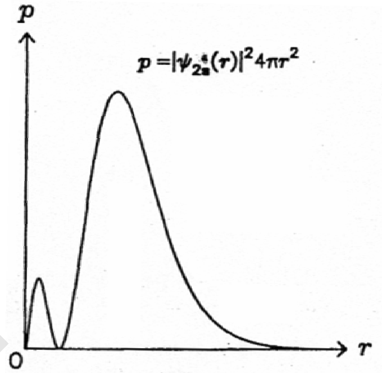
$$-\frac{4}{a_o}\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + 4\right] + \frac{r}{a_o}\left(2-\frac{r}{a_o}\right)\left[2\frac{r}{a_o} - 6\right]$$

$$\left.-\frac{r}{a_o}(2-\frac{r}{a_o})\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 6\frac{r}{a_o} + 4\right]\right\}e^{-r/a_o}$$

$$= \frac{1}{8a_o^3}\left[\left(\frac{r}{a_o}\right)^4 - 12\left(\frac{r}{a_o}\right)^3 + 40\left(\frac{r}{a_o}\right)^2 - 40\left(\frac{r}{a_o}\right) + 8\right]e^{-r/a_o}$$

الآن ، $P'(r) = 0$ عنـــــــــدما $r = 0$ أو $r = 2a_0$ أو $r = (3 \pm \sqrt{5})a_0$ أو $r \longrightarrow \infty$.

إذن ، توجد نقاط حرجة عندما $r = 2a_0$ أو $r = (3 \pm \sqrt{5})a_0$ ، أما عندما يكون $r = 0$ أو $r \longrightarrow \infty$ فلا توجد نقاط حرجة. توجد قيمة صغرى واحـدة عنـدما $r = 2a_0$ لأن $P''(2a_0) > 0$ وقيمتـان عظميتـان عنـدما $r = (3 \pm \sqrt{5})a_0$ لأن $P''((3 \pm \sqrt{5})a_0) > 0$. بيـان الدالـة موضـح في الشكل أدناه.



الدالة $P(r)$ هي دالة الكثافة الإشعاعية الاحتمالية لإلكترون ذرة هيدروجين في الحالة $2s$. أي أن احتمال وجود إلكترون في الفترة الصغيرة من r إلى $r + \delta r$ عن النواة يساوي $P(r)\delta r$ حيث إن $P(r) = |\Psi_{2s}|^2 4\pi r^2$. علاوة على القيمة العظمى الأساسية عندما $r = (3 + \sqrt{5})a_0$ حيث الاحتمال الأكبر لوجود الإلكترون فتوجد قيمة عظمى أصغر وهي أقرب إلى النواة عندما $r = (3 - \sqrt{5})a_0$ وتعتبر مؤشراً على تأثير الاختراق ، كما تقدم معلومات مهمة عن سلوك الإلكترونات عند غلاف الذرة.