الفصل الثالث

حساب المثلثات

TRIGONOMETRY

(٣,١) باســــــتخدام تعريف الراديان ودالة الجيب بيّن أن $\sin\theta \approx \theta$ عندما تكون θ ومن ثم بيّن أن ذلك يؤدي إلى $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

الحل :

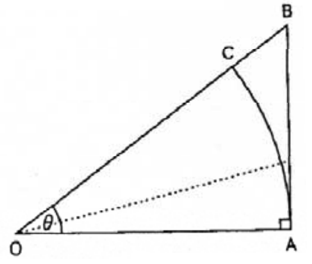
بالاستعانة بالرسم المقدم في الشكل أدناه نجد :

$$\sin\theta = \frac{AB}{OB} \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\text{طول القوس } AC}{OC}$$

ولكن طول القوس $AC \longrightarrow AB$ و $OC \longrightarrow OB$ عندما $\theta \longrightarrow 0$.

إذن ، $\sin\theta \approx \theta$ عندما $\theta \ll 1$.

وبما أن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ فيكون $\cos\theta = 1 - 2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$ ونستنتج أن $\frac{\theta^2}{2}$ $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ عندما يكون $\theta \ll 1$.



(٣،٢) إذا كان $t = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ فتجد كل من $tan\,\theta$ و $cos\,\theta$ و $sin\,\theta$ بدلالة t.

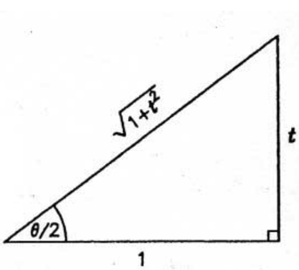
الحل :

إذا كان $t = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ فبالاستعانة بالشكل المرفق ومبرهنة فيثاغورس نجد أن :

$$sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{و} \quad cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

الآن :

$$\begin{aligned}
sin\,\theta &= 2\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2} \\
cos\,\theta &= cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
tan\,\theta &= \frac{sin\,\theta}{cos\,\theta} = \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}
\end{aligned}$$



يُستخدم هذا التعويض في حساب تكاملات بعض الدوال المثلثية حيث تفاضله هو:

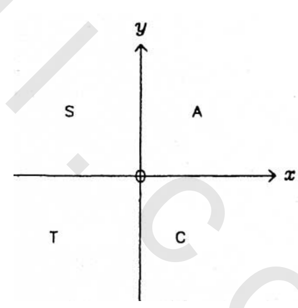
$$dt = \frac{1}{2} sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2}\left[1 + tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] d\theta$$

أي أن $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$.

(٣,٣) حل المعادلات التالية في المجال $-\pi < \theta < \pi$.

أ) $tan\,\theta = -\sqrt{3}$ ب) $sin(3\theta) = -1$ ج) $4cos^3\theta = \cos\theta$

الحل :



أ) حلول المعادلة $t\,an\theta = -\sqrt{3}$ هي $\theta = -\frac{\pi}{3}$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3}$

ب) إذا كانت $sin(3\theta) = -1$ فإن $3\theta = -\frac{5\pi}{2}$ أو $3\theta = -\frac{\pi}{2}$ أو $3\theta = \frac{3\pi}{2}$.

إذن ، $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ أو $\theta = -\frac{\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ج) $4cos^3\theta - cos\,\theta = 0 \Rightarrow cos\,\theta\,(4cos^2\theta - 1) = 0$

ونجد أن $cos\,\theta = 0$ أو $\cos\theta \pm \frac{1}{2}$.

إذن ، $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ أو $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$.

(٣,٤) اكتب $a\,sin\,\theta + b\,cos\,\theta$ على الصورة $A\,sin(\theta+\varphi)$ حيث إن A و φ يُكتبان بدلالة a و b. ثم حل المعادلة $sin\,\theta + cos\,\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$

الحل :

بما أن $sin(\theta+\varphi) = A\,cos\,\varphi\,sin\,\theta + A\,sin\,\varphi\,cos\,\theta$

فنجد $a\,sin\,\theta + b\,cos\,\theta = A\,cos\,\varphi\,sin\,\theta + A\,sin\,\varphi\,cos\,\theta$

وبمقارنة المعادلتين نجد أن :

$$A\cos\varphi = a$$
$$A\sin\varphi = b$$

وبهذا يكون $\frac{sin\,\varphi}{cos\,\varphi} = tan\,\varphi = \frac{b}{a}$

و $a^2 + b^2 = A^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) = A^2$.

إذن ، $A = \sqrt{a^2+b^2}$ و $\varphi = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

ولحل المعادلة $sin\,\theta + cos\,\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$ لاحظ أولاً أن :

$sin\,\theta + cos\,\theta = \sqrt{2}\,sin(\theta + \frac{\pi}{4})$. وبهذا يكون :

$$\sqrt{2}\,sin(\theta+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

أي أن $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

ونجد أن $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$ أو $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}$.

إذن ، $\theta = \frac{\pi}{12}$ أو $\theta = \frac{5\pi}{12}$.

(٣,٥) أثبت أن $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ ومن ثم اكتب $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

الحل :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$
$$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$$
$$= 2(4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1) - 1$$
$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin 4\theta = 2\sin 2\theta\cos 2\theta$$
$$= 2(2\sin\theta\cos\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$= 4\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta$$

(٣,٦) أثبت أن $8\sin^4\theta = \cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3$ ومن ثم اكتب $8\cos^4\theta$ بصورة مشابهة.

الحل :

$$cos\,2\theta = 1 - 2sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1$$

ولذا نرى أن :

$$8sin^4\theta = 8(sin^2\theta)^2 = 8\left(\frac{1 - cos2\theta}{2}\right)^2$$
$$= 2(1 - 2cos2\theta + cos^2 2\theta)$$
$$= 2 - 4\,cos\,2\theta + (2cos^2 2\theta - 1) + 1$$
$$= 3 - 4cos2\theta + cos4\theta$$

$$8cos^4\theta = 8(cos^2\theta)^2 = 8\left(\frac{cos2\theta + 1}{2}\right)^2$$
$$= 2(cos^2 2\theta + 2cos2\theta + 1)$$
$$= (2cos^2 2\theta - 1) + 1 + 4cos2\theta + 2$$
$$= cos4\theta + 4cos2\theta + 3$$

(٣,٧) أثبت أن :

$$cos\theta + cos3\theta + cos5\theta + cos7\theta = 4cos\theta cos2\theta cos4\theta$$

الحل :

بما أن $cosA + cosB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right) cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ فإن :

$cos5\theta + cos7\theta = 2cos6\theta cos\theta$ و $cos\theta + cos\,3\theta = 2cos2\theta cos\theta$

(لاحظ أن $cos(-\theta) = cos\theta$). وبهذا يكون :

$$\begin{aligned} cos\theta + cos3\theta + cos5\theta + cos7\theta &= 2cos\theta(cos2\theta + cos6\theta) \\ &= 2cos\theta(2cos4\theta cos2\theta) \\ &= 4cos\theta cos2\theta cos4\theta \end{aligned}$$

(٣,٨) باستخدام صيغة التحليل جد   حيث إن $0 < \theta <$ التي تحقق المعادلة :

$$cos\theta = cos2\theta + cos4\theta$$

الحل :

$$cos2\theta + cos4\theta = 2cos3\theta cos\theta$$

وبهذا نرى :

$$cos\theta = cos2\theta + cos4\theta \Rightarrow cos\,\theta(1 - 2cos3\theta) = 0$$

وعليه فإن :

$cos3\theta = \frac{1}{2}$ أو $cos\theta = 0$. ولذا نجد أن :

$3\theta = \frac{\pi}{3}$ أو $\frac{5\pi}{3}$ أو $\frac{7\pi}{3}$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$. وبهذا يكون :

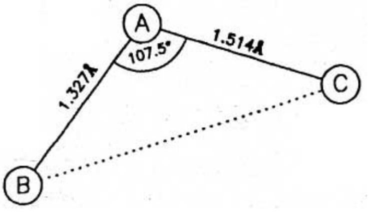
$\theta = \frac{\pi}{9}$ أو $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{5\pi}{9}$ أو $\frac{7\pi}{9}$.

(٣,٩) إذا كان طول رابطين بين ذرات جزئ ثلاثي الذرة هما $1.327A^\circ$ و $1.514A^\circ$ وكان مقياس زاوية الربط وصل بينهما يساوي 107.5° فاحسب المسافة بين أبعد ذرتين (انظر الشكل أدناه).

الحل :

باستخدام قاعدة جيب التمام لدينا :

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)cos\left(\widehat{BAC}\right)$$
$$= (1.327)^2 + (1.514)^2 - 2 \times 1.327 \times 1.514 \times cos\ (107.5^{\circ})$$
$$= 5.2614A^{\circ 2}$$



وعليه فإن المسافة بين الذرتين B و C هي:

$BC = \sqrt{5.2614A^{\circ 2}} = 2.294A^{\circ}$.