الفصل الثاني

المنحنيات والرسوم

CURVES AND GRAPHS

(٢،١) جد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-1,3)$ و $(3,1)$ ثم جد نقطة تقاطعه مع المستقيم $y = x + 1$.

الحل :

المعادلة العامة للمستقيم هي $y = mx + c$.

بالتعويض عن كلٍ من $(-1,3)$ و $(3,1)$ في المعادلة العامة نحصل على المعادلتين

$$-m + c = 3$$
$$3m + c = 1$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نجد أن $m = -\frac{1}{2}$ و $c = \frac{3}{2}$.

إذن ، معادلة المستقيم هي $2y = 5 - x$.

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم $2y = 5 - x$. مع المستقيم $y = 1 +$ نقوم بحل المعادلتين آنياً لنجد أن $x = 1$ و $y = 2$ وتكون نقطة التقاطع هي $(1,2)$.

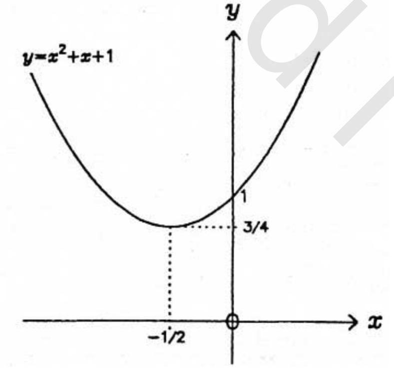
(٢,٢) استخدم طريقة إكمال المربع لإيجاد نقطة انقلاب (انعطاف) المنحنى $y = x^2 + x + 1$ ثم أرسم بيانه.

الحل :

بإكمال المربع نجد أن :

$$y = x^2 + x + 1 \quad = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1$$
$$= (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

وعليه ، فإن أصغر قيمة للمتغير y تكون عندما $x = -\frac{1}{2}$ ونجد من ذلك أن نقطة النهاية الصغرى هي $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.



(٢,٣) جـد معادلة القطـع المكافئ المار بالنقاط (0,3)، (3,0)، (5,8) ما هما جذرا المعادلة ؟

الحل :

المعادلة العامة للقطع المكافئ هي :

$$y = ax^2 + bx + c$$

بالتعويض عن النقاط (0,3) ، (3,0) ، (5,8) في المعادلة أعلاه نحصل على نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 0 \\ 25a + 5b + c &= 8 \end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن $a = 1$ ، $b = -4$ ، $c = 3$.

إذن ، معادلة القطع المكافئ هي $y = x^2 - 4x + 3$.

لإيجاد جذري المعادلة نضع $y = 0$ ونقوم بحل المعادلة التربيعية $x^2 - 4x + 3 = 0$ لنجد أن :

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1) = 0$$

وبهذا نجد أن الجذرين المطلوبين هما $x = 1$ و $x = 3$.

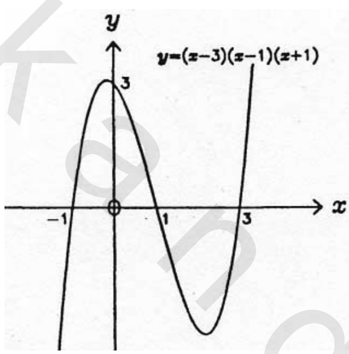
(٢,٤) جد نقاط تقاطع المنحنى $y = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$ مع محوري x و y. ارسم منحنى الدالة التكعيبية ثم جد المجال التي تكون فيه الدالة موجبة ؟

الحل :

عندما $y = 0$ نجد أن $x = -1$ ، $x = 1$ ، $x = 3$.

وعندما $x = 0$ نجد أن $y = 3$. إذن، نقاط التقاطع مع محور x هي $(-1,0)$، $(1,0)$، $(3,0)$ ونقطة التقاطع مع محور y هي $(0,3)$.

من بيان الدالة نجد أن $y > 0$ عندما تكون $|x| < 1$ أو $x > 3$.

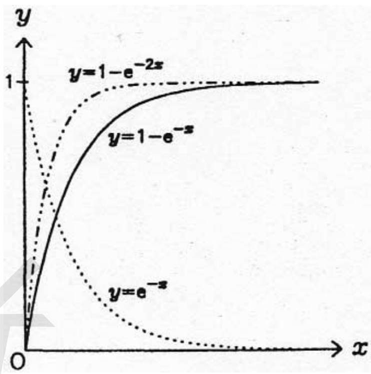


(٢،٥) ارسم بيان كل من الدالتين $y = 1 - e^{-x}$ و $y = 1 - e^{-2x}$ لقيم x الموجبة وارسم أيضاً بيان الدوال $y = e^{-|x|}$ و $y = \frac{1}{x}$ و $y = \frac{1}{x^2-1}$ لجميع قيم x.

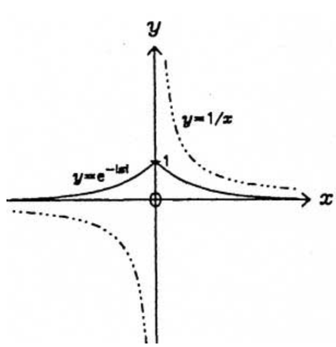
الحل :

بما أن الدالة الأُسية e^{-x} تتناقص من القيمة 1 عندما $x = 0$ إلى القيمة صفر عندما $x \to \infty$ فإن $1 - e^{-x}$ تزداد من نقطة الأصل إلى القيمة التقاربية $y = 1$ عندما تقترب x من اللانهاية. أما الدالة e^{-2x} فهي تتناقص بضعف مُعدل تناقص

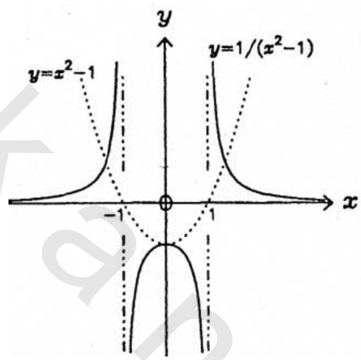
e^{-x} ومن ثم يكون تزايد $1 - e^{-2x}$ أسرع من تزايد $1 - e^{-x}$ إلى القيمة $y = 1$.
بيان كل منهما مبين في الشكل أدناه :



استناداً إلى الفصل الرابع ، كل من $e^{-|x|}$ و $\frac{1}{x}$ غير قابلة للاشتقاق عند نقطة الأصل. ويرجع السبب في ذلك إلى وجود قرنة للدالة الأولى وعدم اتصال الدالة الثانية عند نقطة الأصل. بهذا ، فإن ميل كل منهما غير موجود (غير معرف) عندما $x = 0$.
أيضاً ، $e^{-|x|}$ دالة زوجية ومن ثم بيانها متماثل حول محور y ، والدالة $\frac{1}{x}$ فردية ويكون بيانها متماثل حول نقطة الأصل. بيان كل منهما موضح بالشكل أدناه :



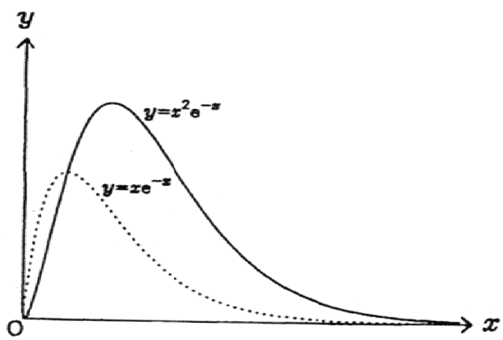
إن أفضل طريقة لرسم بيان دالة معقدة هو تحليلها إلى سلسلة من الخطوات المباشرة. فلرسم بيان الدالة $\frac{1}{x^2-1}$ نرسم أولاً القطع المكافئ $y = x^2 - 1$ ثم نجد مقلوب هذا البيان حيث يتم تحويل القيم الكبرى إلى قيم صغرى والعكس. البيان موضح في الشكل أدناه :



(٢,٦) إذا علمت أن القيم الأسُية هي المسيطرة لقيم x الكبيرة ، ارسم بيان كل من الدالتين $y = xe^{-x}$ و $y = x^2e^{-x}$ لكل $x \geq 0$.

الحل :

بيان كل منهما مبين في الشكل أدناه :



(٢,٧) جــد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

الحل :

بإكمال المربع نجد أن :

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4 \quad \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 4$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 = 3^2$$

وبهذا يكون المركز هو $(1,-2)$ ونصف القطر يساوي 3.

لاحظ أن طريقة إكمال المربع التي استخدمناها تحول المعادلة الأصلية إلى معادلة على الصورة :

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

ومن ثم يكون مركز الدائرة عند النقطة (x_o, y_o) ونصف قطرها يساوي r.
وطريقة أخرى لإيجاد المركز ونصف القطر تكون بملاحظة أن المعادلة العامة للدائرة هي :

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2hy + c = 0$$

مركزها هو $(-g,-h)$ ونصف قطرها يساوي $\sqrt{g^2 + h^2 - c}$.

(٢,٨) ارسم القطع الناقص ٣٦ = $x^2 + 4y^2$ ثم جد كلاً من الاختلاف المركزي وإحداثيات البؤرتين ومعادلة كل من الدليلين.

الحل :

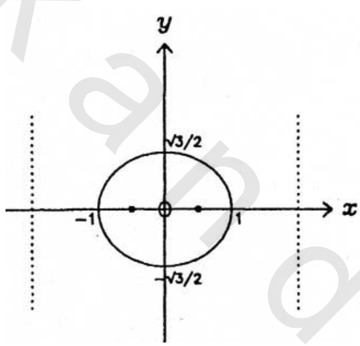
أبسط معادلة للقطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

حيث إن المحورين الرئيس هما محورا x و y بطولين a^2 و ^{2} على التوالي.

ولذا ، نجد معادلة القطع المطلوب هي $+\ x^2\ \frac{4}{3}\ 1 = y^2$.

وعليه فإن ، $a = 1$ و $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وبيان القطع مبين في الشكل أدناه :



العلاقة التي تربط الاختلاف المركزي بالقيمتين وهي $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$ وبهذا يكون $\varepsilon = \frac{1}{2}$. البؤرتان هما $(\pm a\varepsilon, 0)$. أي $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ في هذا المثال. الدليلان هما المستقيمان $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm 2$.

(٢،٩) بتحليل المعادلة أولاً أو بأي طريقة أخرى مناسبة ، ارسم بيان المعادلة :

$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$$

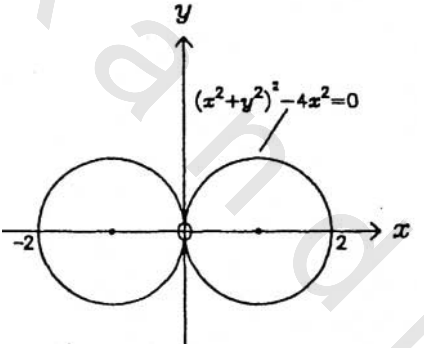
الحل :

بالتحليل كفرق بين مربعين $(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$ نجد أن :

$$(x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x) = 0$$

أي أن $x^2 - 2x + y^2 = 0$ أو $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

وبإكمال المربع لكل منهما نجد أن $(x-1)^2 + y^2 = 1$ أو $(x+1)^2 + y^2 = 1$ وبهذا فإن المعادلة الأولى دائرة مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها 1 والمعادلة الثانية دائرة مركزها $(-1,0)$ ونصف القطر 1 والبيانين هما :



إذا افترضنا أننا لم نقدم إرشاد التحليل سابقاً فإن أبسط طريقة لتناول المعادلة هي بكتابة :

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2$$

ومن ثم أخذ الجذر التربيعي للطرفين لنحصل على :

$$x^2 + y^2 = \pm 2x$$

وهذا بدوره يؤدي إلى معادلة دائرتين كما في السابق.

(٢,١١) ارسم القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ مبيناً الخطوط المقاربة.

الحل :

البيان موضح في الشكل أدناه :