الفصل الرابع عشر

المعادلات التفاضلية الجزئية

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(١٤,١) جد $f(x,y)$ للتفاضل التام :

$$df = ycos(xy)dx + [xcos(xy) + 2y]dy$$

الحل :

إذا كانت $f = f(,y)$ فإن :

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right)_y dx + \left(\frac{df}{dy}\right)_x dy$$

وبما أن التفاضل تام فإن :

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_y = ycos(xy) \quad (١)$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_x = xcos(xy) + 2y \quad (٢)$$

بمكاملة (١) بالنسبة إلى x نجد أن :

$$f(x,y) = sin(xy) + g(y) \qquad (٣)$$

باشتقاق (٣) بالنسبة إلى نجد أن :

$$\left(\frac{df}{dy}\right)_x = xcos(xy) + \frac{dg}{dy} \qquad (٤)$$

من (٢) و (٤) نجد أن :

$$xcos(xy) + \frac{dg}{dy} = xcos(xy) + 2y$$

ونرى أن $\frac{d}{dy} = 2y$ ومنه $g(y) = y^2 + C$.

إذن ، $f(x,y) = sin(xy) + y^2 + C$.

لاحظ أنه كان بالإمكان حل هذا التمرين بطرق أخرى. على سبيل المثال ، بمكاملة (٢) بالنسبة إلى y واشتقاق الناتج بالنسبة إلى x ثم مقارنة ذلك مع (١) نحصل على دالة $h'(x)$ وبمكاملة هذه الدالة بالنسبة إلى x نحصل على المطلوب. ومن الممكن الحصول على الحل نفسه (باستثناء ثابت) مباشرة وذلك بمقارنة $f(,y)$ مع ناتج تكامل المعادلتين رقمي (١) و (٢).

(١٤،٢) أثبت أن $u(,t) = exp\,(-x^2/4kt)/\sqrt{4kt}$ حل لمعادلة الانتشار

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k\partial^2 u}{\partial x^2}$$

الحل :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x = exp(-x^2/4kt)\left[\frac{\partial}{\partial t_x}\left(\frac{1}{\sqrt{4kt}}\right) + \frac{1}{\sqrt{4kt}}\frac{\partial}{\partial t_x}\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)\right]$$

$$= exp(-x^2/4kt)\left[-2k(4kt)^{-3/2} + \frac{x^2}{4kt^2\sqrt{4kt}}\right]$$

$$= exp(-x^2/4kt)\left[\frac{x^2}{t} - 2k\right](4kt)^{-3/2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t = \frac{exp(-x^2/4kt)}{\sqrt{4kt}}\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)$$

$$= -2xexp(-x^2/4kt)(4kt)^{-3/2}$$

إذن ،

$$\frac{k\partial^2 u}{\partial x^2} = k\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t$$

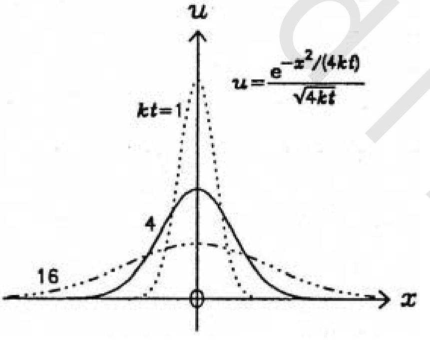
$$= -2kexp(-x^2/4kt)\left[\frac{\partial}{\partial x_t}(x) + x\frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{-x^2}{4kt}\right)\right](4kt)^{-3/2}$$

$$= -2kexp(-x^2/4kt)\left[1 - \frac{x^2}{2kt}\right](4kt)^{-3/2}$$

ونخلص إلى أن $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

يفسّر هذا الحل لمعادلة الانتشار كيفية انتشار الحرارة في قضيب معدني أو تركيز المذاب في محلول الذوبان مع الزمن. ففي اللحظة t تأخذ دالة التوزيع (في المتغير x) شكل دالة المعرفة غير المحدودة لجاوس (تسمى هذه الدالة في الاحتمال والاحصاء بدالة التوزيع الطبيعي). عندما يكون مركزها عند نقطة الأصل فإن بيانها يشبه بيان الدالة الأُسية التربيعية $exp(-x^2/2\sigma^2)$ (انظر الشكل التالي).

حيث العرض يساوي الثابت σ وهو الانحراف المعياري (σ^2 يسمى التباين). في حالة الانتشار يكون $\sigma \propto \sqrt{t}$ ، أي أن الانتشار يتضاعف كلما ازداد الزمن أربعة أمثال وهكذا.



أما المعامل $\dfrac{1}{\sqrt{4}}$ فهو حد معياري يضمن أن يكون تكامل الانتشار ثابتاً مع الزمن ، أي أن العدد الكلي لجزيئات المذاب يبقى عدداً ثابتاً بغض النظر عن كيفية انتشارها. في حالة توزيع جاوس الطبيعي $exp(-x^2/2\sigma^2)$ يكون الحد المعياري يساوي $\left(\sigma\sqrt{2}\pi\right)^{-1}$.

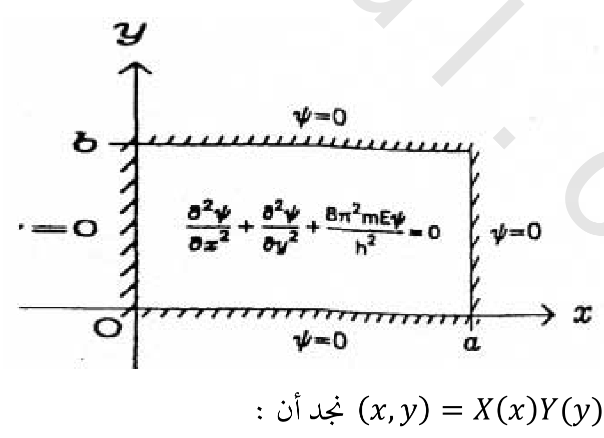
(١٤,٣) لتكن :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{8\pi^2 mE\Psi}{h^2} = 0$$

هي معادلة شرودينغر للإلكترونات الحرة في فضاء ثنائي البعد. جد دوال الموج Ψ ومستويات الطاقة المسموحة E إذا كانت الحدود الشرطية هي :

$$\Psi(0, y) = 0$$
$$\Psi(x, 0) = 0$$
$$\Psi(a, y) = 0$$
$$\Psi(x, b) = 0$$

الحل :



بوضع $(x, y) = X(x)Y(y)$ نجد أن :

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{8\pi^2 mE\text{XY}}{h^2} = 0$$

أي أن :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{8\pi^2 mE}{h^2}=-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=w^2$$

ونرى أن $\frac{d^2Y}{dy^2}=-w^2Y$ و $\frac{d^2X}{dx^2}=-\left(\frac{8\pi^2 mEXY}{h^2}-w^2\right)X$.

إذن ، $Y=Csin(wy)+Dcos(wy)$ و $X=Asin(\Omega x)+Bcos(\Omega x)$

حيث إن $\Omega^2=\frac{8\pi^2 mE}{h^2}-w^2$. وبهذا تكون الحلول :

$$\Psi(x,y)=[Asin(\Omega x)+Bcos(\Omega x)][Csin(wy)+Dcos(wy)]$$

ولكن $\Psi(0,y)=0 \;\Rightarrow B=0$

$$\Psi(x,0)=0 \;\Rightarrow D=0$$

$\Psi(a,y)=0\Rightarrow sin\,(\Omega a)=0$. أي أن $\Omega=\pi/a$ حيث إن k عدد صحيح.

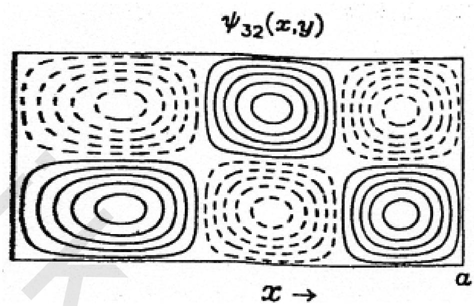
$\Psi(x,b)=0\Rightarrow sin\,(wb)=0$. أي أن $w=\pi/a$ حيث إن l عدد صحيح.

إذن ، الحلول هي :

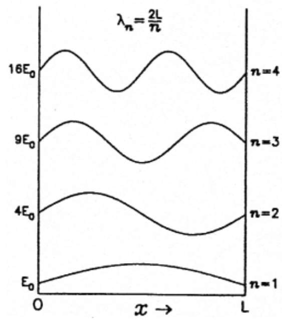
$$\Psi_{kl}(x,y)=A_{kl}\,sin(k\,\pi x/a)\,sin(l\,\pi y/b)$$

حيث إن $l=1,2,3,\cdots$ و $k=1,2,3,\cdots$.

ولكن $E = \frac{h^2(\Omega^2+w^2)}{8\pi^2 m}$. وعليه نجد أن $E_{kl} = \frac{h^2}{8}\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}\right)$.



هذا التمرين هو الحالة في الفضاء ثنائي البعد لمسألة ميكانيكا الكم القياسية "الجزئ في الصندوق". أما حالة الفضاء أحادي البعد فيمكن وصفها بالشكل المبين أدناه لزنبرك ، البعد بين طرفيه (بعد شده) يساوي L. وهذا يعني أن L يساوي نصف أطوال الموجات. أي أن $L = \frac{n\lambda}{2}$ حيث إن $n = 1,2,3,\cdots$ و λ طول الموجة. ينص قانون بروجلي على أن العلاقة بين العزم المرتبط مع طول الموجة الكمية λ هو $P = h/\lambda$ حيث إن h هو ثابت بلانك. ولذا فالطاقة الحركية $P^2/2m$ حيث إن m كتلة الجزئ هي $h^2/(2m\lambda^2) = h^2n^2/(8mL^2)$. إن الصيغة E_{kl} المبينة في التمرين هي مجموع إسهامين من البعد 1 وأن Ψ_{kl} هي حاصل ضرب حلين بالاتجاهين x و y.



(١٤،٤) لتكن :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$$

هي معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية (r,θ). استخدم طريقة فصل المتغيرات لإثبات وجود حلول على الصورة :

$$\Phi(r,\theta) = (A_o\theta + B_o)(C_o lnr + D_o)$$

و

$$\Phi(r,\theta)\left[A_p \cos(p\theta) + B_p \sin(p\theta)\right](C_p r^p + D_p r^{-p})$$

حيث إن A ، B ، C ، D ، p ثوابت.

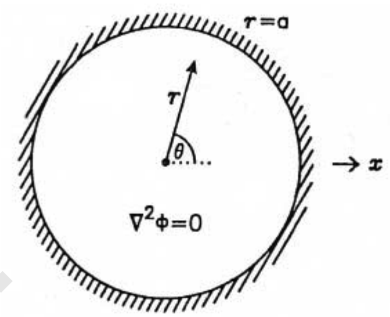
إذا كانت Φ دالة في متغير واحد θ فما تأثير ذلك على P ؟

حل المعادلة في الحالات التالية :

أ) $\Phi(a,\theta) = T\cos\theta$ حيث إن $0 < r < a$.

ب) $\Phi(a,\theta) = T\cos^3\theta$ حيث إن $0 < r < a$.

الحل :



بوضع $(r,\theta) = R(r)\theta(\theta)$ نجد أن :

$$\theta\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\theta}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\theta}{d\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{d\theta^2} = p^2$$

$$\Rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} = p^2R \quad \text{و} \quad \frac{d^2\theta}{d\theta^2} = -p^2\theta$$

في الحالة الخاصة $p = 0$ نرى أن :

$$r\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d\Theta}{\theta} = A_o$$

$$\Rightarrow r\frac{dR}{dr} = C_o \quad \text{و} \quad \Theta(\theta) = A_o\theta + B_o$$

ولكن $\int dR = C_o\int\frac{dr}{r} \Rightarrow R(r) = C_o lnr + D_o$.

ويكون الحل في الحالة $p = 0$ هو :

$$\Phi(r,\theta) = (A_o\theta + B_o)(C_o \ln r + D_o)$$

أما إذا كان $p \neq 0$ فإن :

$$\Theta = A_p \cos(p\theta) + B_p \sin(p\theta)$$ (حركة توافقية بسيطة)

لحل المعادلة : $r^2 \dfrac{d^2R}{dr^2} + r\dfrac{dR}{dr} = p^2R$ ضع $R(r) = r^\alpha$.

حينئذ ، $\dfrac{d^2R}{dr^2} = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ و $\dfrac{dR}{dr} = \alpha r^{\alpha-1}$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha = p^2 r^\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = p^2 \Rightarrow \alpha = \pm p$$

$$\Rightarrow R(r) = C_p r^p + D_p r^{-p}$$

إذن ، يكون الحل في هذه الحالة هو :

$$\Phi(r,\theta) = \left[\theta A_p \cos(p\theta) + B_p \sin(p\theta)\right]\left(C_p r^p + D_p r^{-p}\right)$$

الآن ، إذا كانت Φ دالة في المتغير θ فقط فيكون :

$\Phi(r,\theta) = \Phi(r,\theta + 2\pi n)$ لكل عدد صحيح n.

إن ذلك غير محقق إذا كان $p = 0$. أما إذا كان $p \neq 0$ فإن ذلك محقق عندما يكون p صحيحاً. أي $p = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

إذا أردنا إيجاد الحلول المنتهية عندما $r = 0$ فنرى أن $D_p = 0$ ، ويكون الحل العام :

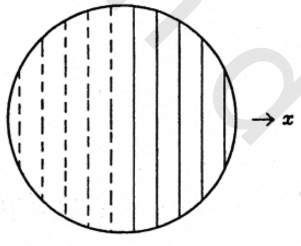
$$\Phi(r,\theta) = \sum_p \left[A_p \cos(p\theta) + B_p \sin(p\theta)\right] C_p r^p$$

أ) $$\Phi(a,\theta) = T\cos\theta$$

$A_p = 0$ عندما يكون $p \neq 1$ و $\Rightarrow B_p = 0$

$$\Rightarrow T\cos\theta = A_1 C_1 a\cos\theta \quad \Rightarrow \quad A_1 C_1 = T/a$$

إذن ، الحل هو $\Phi(r,\theta) = \frac{Tr}{a}\cos\theta$.



$\Phi(a,\theta)=T\cos\theta$

ب) $\Phi(a,\theta) = T\cos^3\theta$. عندئذ ،

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{8}$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$$

إذن ،
$$\Phi(a,\theta) = \frac{3T}{4}cos\theta + \frac{T}{4}cos3\theta$$

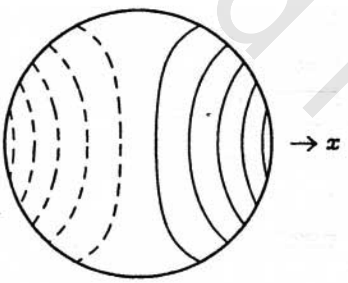
$A_p = 0$ عندما يكون $p \neq 1$ أو $p \neq 3$ و $\Rightarrow B_p = 0$

$$\Rightarrow \Phi(r,\theta) = A_1C_1rcos\theta + A_3C_3r^3cos3\theta$$

وباستخدام الشرط $r = a$ نجد أن :

$$\frac{3T}{4} = A_1C_1a \quad \text{و} \quad \frac{T}{4} = A_3C_3a^3$$

إذن ، الحل هو: $\Phi(r,\theta) = \frac{3Tr}{4a}cos\theta + \frac{Tr^3}{4a^3}cos3\theta$.



$\Phi(a,\theta)=T\cos^3\theta$