الفصل الثاني عشر

التكاملات المتعددة

MULTIPLE INTEGRALS

(١٢,١) أثبت أن مساحة القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

تساوي πab .

الحل :

$$A=\iint\limits_{\text{القطع الناقص}}^{a} dxdy = 4\int_{y=0}^{x=a} dx \int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy$$

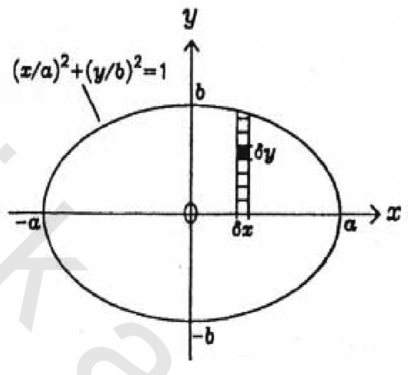
$$= 4\int_0^a [y]_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\, dx$$

$$= \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$$

وباستخدام التعويض $x=a$ نجد أن :

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_0^{\pi/2} cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (cos2\theta + 1)\, d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

إذن ، $A = \pi ab$.



لاحظ أننا استخدمنا التماثل عند حسابنا لمساحة القطع الناقص حيث قمنا بحساب المساحة في الربع الأول ثم حصلنا على المساحة الكلية بضرب المساحة في الربع الأول بالعدد 4. وبصورة عامة إذا كان البيان متماثلاً حول محور y أو نقطة الأصل فإننا نستغل هذا التماثل للتغلب على الصعوبات التي تنشأ أحياناً من حدود التكامل. وأحياناً يكون من المناسب التأكد من أن الحالات الخاصة تعطينا بعض القوانين المعروفة. ففي مثالنا هذا، إذا كان $a = b$ فنحصل على مساحة الدائرة ba^2 حيث إن a هو نصف القطر.

(١٢,٢) بالاستعانة بشكل مناسب، أثبت أن حجم شريحة صغيرة في الإحداثيات القطبية الكروية يساوي $r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$ ومن ثم استخدم ذلك لإيجاد صيغة لحجم الكرة.

الحل :

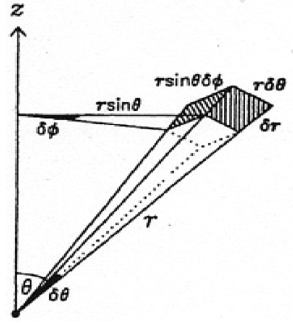
من الشكل المبين أدناه نجد أن حجم عنصر حجمي صغير يساوي $\delta r \times \delta\theta \times r sin\theta \delta\varphi$ ولذا نجد أن حجم شريحة صغيرة يساوي $r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$. من ذلك نرى أن حجم الكرة هو:

$$V = \iiint_{\text{الكرة}}^{r} (\text{حجم شريحة صغيرة})$$

$$= \int_{r=0}^{R} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\,\varphi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \times [-cos\theta]_0^{\pi} \times [\varphi]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{R^3}{3} \times (1+1) \times 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$



ترجع سهولة حساب التكامل الثلاثي أعلاه إلى أن الإحداثيات القطبية الكروية تلائم الطبيعة الهندسية للكرة حيث استطعنا الحصول على ثلاثة تكاملات سهلة. في التمرين التالي سنرى أنه يمكن إجراء الحسابات باستخدام تماثل الكرة.

من الجدير ذكره أيضاً أن الشكل السابق يساعدنا على إيجاد المساحة السطحية للكرة وهي

$$S = \iint_{\text{كرة}} (\text{مساحة شريحة صغيرة})$$

$$= R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$$

(لاحظ أن مساحة الشريحة الصغيرة تساوي $R^2 sin\theta d\theta d\varphi$).

(١٢,٣) أثبت باستخدام الإحداثيات القطبية الأسطوانية أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة تحت بيان الدالة $y = f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$ حول محور x دورة كاملة يساوي:

$$\pi \int_a^b y^2\, dx$$

الحل :

حجم شريحة قطبية أسطوانية يساوي $rdrd\theta dx$. إذن ، حجم الدوران هو :

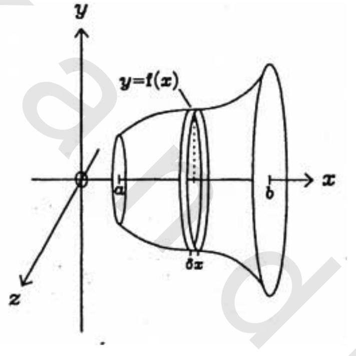
$$V = \iiint_{\text{الجسم}} (\text{حجم شريحة اسطوانية})$$

$$= \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{r=0}^{r=f(x)} r\,dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

ولكن :

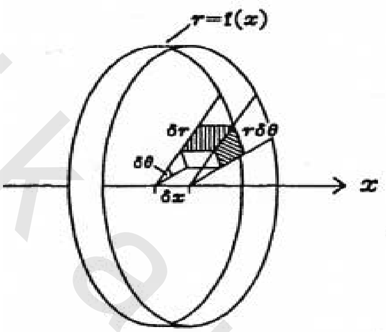
$$\int_{0}^{2\pi} d\theta = 2\pi \quad \text{و} \quad \int_{r=0}^{r=f(x)} r\,dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{f(x)} = \frac{1}{2}[f(x)]^2$$

إذن ، $V = \pi \int_a^b y^2\,dx$.



لاحظ أننا لم نستطع حساب التكامل الثلاثي في هذا المثال كحاصل ضرب ثلاثة تكاملات أحادية بسيطة كما كان الحال في التمرين (٢، ١٢) ، ويرجع السبب إلى أن نصف القطر (أي أعلى قيمة للاحداثي r) تعتمد على الاحداثي x ، $r = f(x)$ ، ولهذا نستطيع حساب التكامل بالنسبة إلى θ لأنه مستقل عن الآخرين ولكننا لانستطيع فصل التكاملين بالنسبة إلى r و x لأن حدودهما متداخلة ، وفي الحقيقة إن محاولة تغيير ترتيب التكاملات يؤدي إلى تكاملات معقدة.

إذا قمنا بتقسيم الشكل الذي يمثل التكاملين بالنسبة إلى θ و r فنرى أن هذه الشرائح عبارة عن أقراص حجم كل منها يساوي $\pi[f(x)]^2$ (تذكر أن مساحة الدائرة تساوي πR^2). وبهذا يكون حجم جسم الدوران هو مجموع هذه الأقراص من $x = a$ إلى $x = b$ (انظر الشكل المبين أدناه).



أخيراً ، بما أن الكرة تنتج عن دوران نصف دائرة $x^2 + y^2 = R^2$ حيث إن $y \geq 0$ دورة كاملة فإننا نستطيع إيجاد حجمها كالتالي :

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

(١٢,٤) احسب التكامل :

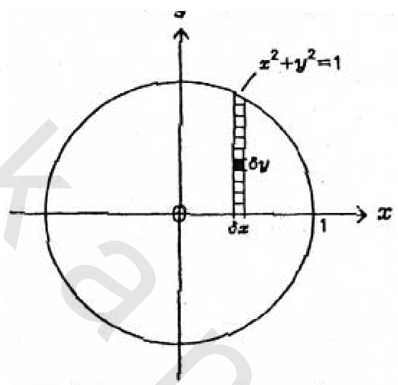
$$\iint x^2(1 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

في المنطقة التي تمثلها دائرة الوحدة (أي $x^2 + y^2 = 1$) وذلك باستخدام :

أ) الإحداثيات الديكارتية. ب) الإحداثيات القطبية.

الحل :

أ) باستخدام خاصية التماثل للدالة المكاملة $x^2(1-x^2-y^2)$ على دائرة الوحدة (انظر الشكل أدناه) نجد أن :



$$\iint\limits_{x^2+y^2=1}^{x} x^2(1-x^2-y^2)dxdy = 4\int_{x=0}^{x=1} x^2\,dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy$$

$$= 4\int_0^1 x^2\left[y - x^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{1-x2}} dx$$

$$= 4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\left[1 - x^2 - \frac{1-x^2}{3}\right]dx$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2}dx$$

الآن ، بوضع $x = sin\theta$ نجد أن $dx = cos\theta d\theta$ ويكون :

$$\int_{0}^{1} x^2(1-x^2)^{3/2}dx = \int_{0}^{\pi/2} sin^2\theta\, cos^4\theta d\theta$$

ولكن :

$$sin^2\theta sos^4\theta = (sin\theta cos\theta)^2 cos^2\theta$$

$$= \frac{sin^2(2\theta)}{4} \times \frac{1+cos\,(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{1-cos\,(4\theta)}{8} \times \frac{1+cos\,(2\theta)}{2}$$

$$= \frac{1+cos(2\theta) - cos(4\theta) - \frac{1}{2}(cos(2\theta) + cos\,(6\theta)}{16}$$

$$= \frac{2+cos(2\theta) - 2\,cos(4\theta) - cos(6\theta)}{32}$$

وبهذا نرى أن :

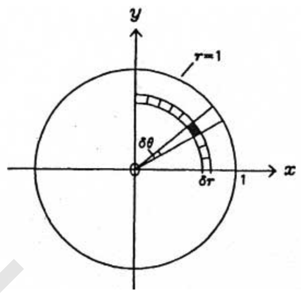
$$\iint\limits_{x^2+y^2=1}^{x} x^2(1-x^2-y^2)dxdy = \frac{1}{12}\int_{0}^{\pi/2} [2+\cos(2\theta) - 2\cos(4\theta) - \cos(6\theta)]d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\left[2\theta + \frac{sin\,(2\theta)}{2} - \frac{sin\,(4\theta)}{2} - \frac{sin\,(6\theta)}{6}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{12}$$

ب) في الإحداثيات القطبية لدينا $dxdy = rdr$ ولذا باستخدام التعويض

$x = rcos\theta$ و $y = rsin\theta$ نجد أن:



$$\iint\limits_{x^2+y^2=1} x^2(1-x^2-y^2)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2=1} r^2cos^2\theta(1-r^2)rdrd\theta$$

$$= 4\int_{r=0}^{r=1} (r^3-r^5)\,dr \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 4\left[\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{cos(2\theta)+1}{2}d\theta$$

$$= 4(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\left[\frac{sin\,(2\theta)}{4}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 4\times\frac{3-2}{12}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

وهذا يتفق مع ما وجدنا في الفقرة (أ).

لاحظ أن استخدام الإحداثيات القطبية في هذا المثال وفر الكثير من الجهد ويرجع السبب في ذلك إلى أن حساب التكامل يتم على دائرة وبهذا تكون الإحداثيات القطبية أنسب من الإحداثيات الديكارتية. أما لو كانت المنطقة بشكل مستطيل أو مثلث قائم الزاوية فإن الإحداثيات الديكارتية تكون هي الأفضل.