الفصل الحادي عشر

التكاملات الخطية

LINE INTEGRALS

(١١,١) أثبت أن تكامل $y^3dx + 3xy^2dy$ لا يعتمد على المسار وذلك بحسابه من $(0,0)$ إلى $(1,1)$ باتباع المسارين :

أ) $y = x^2$

ب) المستقيمان من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ ومن $(1,0)$ إلى $(1,1)$.

الحل :

أ) بما أن $y = x^2$ فإن $dy = 2xdx$. عندئذ ،

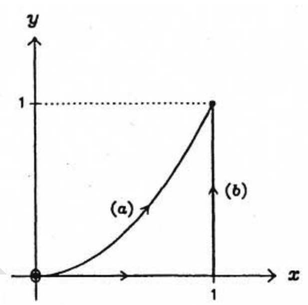
$$\int_{\text{المسار (أ)}}^{x} y^3dx + 3xy^2dy = \int_{x=0}^{x=1} (x^6 + 6x^6)\, dx = [x^7]_0^1 = 1 \quad .$$

ب) من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ لدينا $y = 0$ و $dy = 0$

ومن $(1,0)$ إلى $(1,1)$ لدينا $x = 0$ و $dx = 0$.

وبهذا نرى أن :

$$\int_{\text{المسار (ب)}}^{x} y^3dx + 3xy^2dy = 0 + \int_{y=0}^{y=1} 3y^2dy = [y^3]_0^1 = 1 \quad .$$



إن حساب تكامل $y^3dx + 3xy^2dy$ على المسارين (أ) و (ب) دليل على أنه لا يعتمد على المسار ولكن البرهان العام يكون بإثبات صحة الشرط :

$$\frac{\partial}{\partial y_x}(y^3) = \frac{\partial}{\partial x_y}(3xy^2)$$

(١١,٢) احسب التكامل $xydl$ على المسارين (أ) و (ب) المقدمين في التمرين (١١,١)

الحل :

باستخدام مبرهنة فيثاغورس لدينا :

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

أ) للمسار $y = x^2$ لدينا $\frac{dy}{dx} = 2x$. حينئذ ،

$$\int_{\text{المسار (أ)}}^{x} xydl = \int_{x=0}^{x=1} x^3\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

بوضع $u^2 = 1 + 4x^2$ نجد أن $2udu = 8xdx$

ونرى أن :

$$\int_{\text{المسار (أ)}}^{x} xydl = \int_{u=1}^{u=\sqrt{5}} \frac{(u^2-1)}{4} u \frac{udu}{4}$$

$$= \frac{1}{16}\int_{1}^{\sqrt{5}} (u^4 - u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{16}\left[5\sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{16} \times \frac{(75-25)\sqrt{5} - 3 + 5}{15}$$

$$= \frac{50\sqrt{5}+2}{16 \times 15} = \frac{25\sqrt{5}+1}{120}$$

ب) من $(0,0)$ إلى $(1,0)$ لدينا $y = 0$ و $dl = dx$

ومن $(1,0)$ إلى $(1,1)$ لدينا $x = 1$ و $dl = dy$. إذن ،

$$\int_{\text{المسار (ب)}}^{x} xy\,dl = 0 + \int_{y=0}^{y=1} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ .$$

(١١,٣) إذا كان C_V لا يعتمد على الحجم V وكان :

$\delta q = C_V dT + (RT/V)dV$ ليس تفاضلاً تاماً حيث إن R ثابت فأثبت أن المعادلة تصبح تامة بعد قسمة طرفيها على T . ما أهمية ذلك في ديناميكا الحرارة؟

الحل :

بما أن C_V على لايعتمد V فإن :

$$\frac{\partial}{\partial V_T}(C_V) = 0$$

ولكن $\frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{RT}{V}\right) = \frac{R}{V} \neq 0$.

إذن ، $\frac{\partial}{\partial T_V}(C_V) \neq \frac{\partial}{\partial V_T}\left(\frac{RT}{V}\right)$.

ونرى من ذلك أن $\delta q = C_V dT + \frac{RT}{V} dV$ ليس تفاضلاً تاماً.

ولكن بعد قسمة طرفي المعادلة على نجد أن :

$$\frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{C_V}{T}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{R}{V}\right)$$

وبهذا يكون :

$$\frac{\delta q}{T} = \frac{C_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV$$

تفاضلاً تاماً.

تمثل δ في ديناميكا الحرارة ، التغير في الحرارة ، وبما أنها ليست تفاضلاً تاماً فإن حرارة النظام لاتعتمد فقط على الزمن الحاضر والشروط البدائية ولكن إلى كيفية الوصول لهذا الوضع. على سبيل المثال ، للانتقال من الحالة (P_1, V_1, T_1) إلى (P_2, V_2, T_2) من الممكن أن يكون الضغط والحجم ثابتين ودرجة الحرارة متغيرة أو العكس.

أما $\delta q/T$ نتمثل التغير في الإنتروبيا. وبما أن $\delta q/T$ تفاضل تام فإن :

$$\int \frac{\delta q}{T}$$

لا يعتمد على الطريقة التي اتبعها النظام للانتقال من الحالة :

(P_2, V_2, T_2) الحالة إلى (P_1, V_1, T_1).

الإنتروبيا هي دالة حالة، أي أن قيمتها تعتمد على الحالة ولا تعتمد على كيفية الوصول إلى تلك الحالة.

من الجدير ذكره هنا أن $\frac{1}{T}$ هو معامل التكامل لهذه المسألة. أي أنه الحد الضارب الذي يحول تفاضل غير تام إلى تفاضل تام. وكان من الممكن الحصول عليه باعتباره دالة $w(T)$ تعتمد على الحرارة فقط من الشرط :

$$\frac{\partial}{\partial V_T}\left(\mathrm{C_V w(T)}\right) = \frac{\partial}{\partial T_V}\left(\frac{RT}{V}w(T)\right) \Longrightarrow 0 = \frac{RT}{V}\frac{dw}{dT} + \frac{R}{V}w$$

لاحظ أننا استخدمنا التفاضل التام $\frac{dw}{dT}$ عوضاً عن الجزئي $\left(\frac{\partial w}{\partial T}\right)_V$ لأنها دالة تعتمد على T فقط.

بتبسيط المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{dw}{dT} = \frac{-w}{T}$$

وهذه معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى (ندرسها في الفصل الثالث عشر) وحلها هو $w = \frac{A}{T}$ حيث إن A ثابت.