الفصل التاسع

المصفوفات

MATRICES

(٩,١) جد $A+B$ ، $A-B$ ، AB ، BA حيث إن :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

تحقق من صحة :

$$(AB)^T = A^T B^T \quad \text{و} \quad det(AB) = det(A)\, det\,(B)$$

الحل :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+3 \\ 1+0 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & 1-3 \\ 1-0 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\times 3 + 1\times 0 & 2\times 3 + 1\times 4 \\ 1\times 3 + 2\times 0 & 1\times 3 + 2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3\times 2 + 3\times 1 & 3\times 1 + 3\times 2 \\ 0\times 2 + 4\times 1 & 0\times 1 + 4\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

يبين هذا المثال البسيط أن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية في العموم ،

أي أن $AB \neq BA$ حتى في الحالات التي يكون فيها كل من AB و BA معرّفاً.

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}^T = (AB)^T$$

$$det\ (A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$$

$$det\ (B) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 0 \times 3 = 12$$

$$det\ (AB) = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 6 \times 11 - 3 \times 10 = 36 = det(A)\, det\ (B).$$

(٩،٢) بيّن كيفية استخدام محدد مصفوفة من الدرجة 3×3 في حساب كل من الضرب المتجهي والضرب الثلاثي القياسي

الحل :

نفرض أن a ، b ، c متجهات إحداثياتها هي :

$$a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = (b_1, b_2, b_3) = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$c = (c_1, c_2, c_3) = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

حيث إن i ، j ، k متجهات وحدة في اتجاه المحاور x ، y ، z على التوالي.

عندئذ:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)i - (a_1b_3 - b_1a_3)j + (a_1b_2 - b_1a_2)k$$

$$= (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2) = a \times b$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)c_1 - (a_3b_1 - b_3a_1)c_2 + (a_1b_2 - b_1a_2)c_3$$

$$= (a \times b)_1c_1 + (a \times b)_2c_2 + (a \times b)_3c_3 = (a \times b) \cdot c$$

من الممكن استخدام خواص المحددات للحصول على بعض خواص الضرب المتجهي والضرب الثلاثي القياسي فمثلاً:

١- $a \times b = -b \times a$ لأنه عنداستبدال صفين (أو عمودين) في مصفوفة نضرب المحدد بالعدد -1 .

٢- إذا كان a موازياً للمتجه b فإن $a \times b = 0$ لأن قيمة المحدد الذي يحتوي على صفين متساويين تساوي صفراً.

٣- إذا كانت a ، b ، c مرتبطة خطياً (أي تقع على المستقيم نفسه أو المستوى نفسه) فإن $(a \times b) \cdot c = 0$ لأن الفرق بين أي صف وتركيب مناسب للصفين الآخرين ينتج عنه صفاً صفرياً.

(٩,٣) جد معكوس المصفوفة التالية :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

وتحقق من المساواة $CC^{-1} = C^{-1}C = I$

الحل :

$$adj(C)$$
$$= \begin{pmatrix} (-1)\times(-1) - 2\times 1 & 1\times 1 - (-1)\times(-1) & (-1)\times 2 - 1\times(-1) \\ 2\times(-1) - 1\times(-1) & 2\times(-1) - 1\times(-1) & 1\times 1 - 2\times 2 \\ 1\times 1 - (-1)\times(-1) & (-1)\times(-1) - 2\times 1 & 2\times(-1) - (-1)\times 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det\,(C) \quad = det\,(C^T) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 2\times(-1) + 1\times 0 + (-1)\times(-1) = -1$$

إذن ، $C^{-1} = \dfrac{adj(C)}{\det\,(C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

وللتحقق من المساواة لاحظ أن :

$$CC^{-1} \quad = \begin{pmatrix} 2-1+0 & 0-1+1 & 2-3+1 \\ 1-1+0 & 0-1+2 & 1-3+2 \\ -1+1+0 & 0+1-1 & -1+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0-1 & -1+0+1 & 1+0-1 \\ 2+1-3 & -1-1+3 & 1+2-3 \\ 0+1-1 & 0-1+1 & 0+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$ $C^{-1}C$.

(٩,٤) أثبت أن القيم المميزة للمصفوفة الهرمية جميعها حقيقية وأن المتجهات المميزة المقابلة لقيم مميزة مختلفة متعامدة.

الحل :

لنفرض أن x_j و x_k هما المتجهان المميزان المقابـــلان للقيمتين المميزتـــين λ_j و λ_k على التوالي للمصفوفة الهرميتية A. عندئذ :

$$Ax_j = \lambda_j x_j \tag{١}$$

$$Ax_k = \lambda_k x_k \tag{٢}$$

وبأخذ منقول المعادلة رقم (١) والمرافق المركب للمعادلة رقم (٢) نجد أن :

$$x_j{}^T A^T = \lambda_j x_j{}^T \tag{٣}$$

$$A^* x_k{}^* = \lambda_k{}^* x_k{}^* \tag{٤}$$

(لاحظ أن $(Ax)^T = x^T A^T$ وأن $\lambda^T = \lambda$).

بضرب المعادلة رقم (٣) بالمتجه x_k^* من اليمين وضرب المعادلة رقم (٤) بالمتجه x_j^T من اليسار نحصل على :

$$x_j^T A^T x_k^* = \lambda_j x_j^T x_k^* \tag{٥}$$

$$x_j^T A^* x_k^* = \lambda_k^* x_j^T x_k^* \qquad (٦)$$

بطرح المعادلة رقم (٦) من المعادلة رقم (٥)نجد أن :

$$x_j^T A^T x_k^* - x_j^T A^* x_k^* = \lambda_j x_j^T x_k^* - \lambda_k^* x_j^T x_k^*$$

وبما أن $A^T = A^*$ (لأن A هرميتية) فنرى أن :

$$\left(\lambda_j - \lambda_k^*\right) x_j^T x_k^* = 0$$

بوضع $j =$ نجد أن $\lambda_j = \lambda_j^*$ (لأن $x_j^T x_j^* > 0$)

إذن ، القيم المميزة للمصفوفة الهرميتية هي قيم حقيقية.

وأخيراً ، إذا كان $j \neq k$ و $\lambda_j \neq \lambda_k$ فنجد أن :

$$x_j^T x_k^* = 0$$

وبهذا تكون المتجهات المميزة المقابلة لقيم مميزة مختلفة يجب أن تكون متعامدة.[١]

تُسمى الحالة التي يكون فيها $\lambda_j = \lambda_k$ حالة مضمحلة ، وفي هذه الحالة المتجهات المميزة المقابلة تقع في مستوى واحد. وبما أننا نستطيع الحصول على أي نقطة في المستوى كتركيب خطي لمتجهين أساسيين غير متوازيين في المستوى فنختار

---

(١) لاحظ أن $a^T b^*$ هو الضرب القياسي لمتجهين مركبين a و b ، فإذا كان $a = b$ فنجد $a^T a^* \geq 0$ لأن ذلك هو مربع معيار a. إذا كان $a \neq 0$ و $b \neq 0$ و $a \neq b$ فإنهما يكونان متعامدين إذا كان $a^T b^* = 0$.

المصفوفة حقيقية ومتماثلة فإن $A = A^*$ و $A^T = A$ ، ولذا فهي حالة خاصة من المصفوفة الهرميتية وعليه فإن النقاش السابق يبقى صحيحاً في هذه الحالة أيضاً.

(٩,٥) لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أ) جد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة A .

ب) تحقق من أن المتجهات المميزة متعامدة.

ج) تحقق من أن مجموع القيم المميزة يساوي أثر المصفوفة .

د) تحقق من أن حاصل ضرب القيم المميزة يساوي قيمة محدد المصفوفة .

هـ) جد مصفوفة الاستقصار باستخدام متجهات مميزة معيرة للمصفوفة .

و) تحقق من صحة المساواة $OO^T = O^TO = I$.

ز) تحقق من أن تحويل التماثل $O^TAO = \Lambda$ هو بالفعل مصفوفة قطرية عناصر قطرها هي القيم المميزة للمصفوفة A.

الحل :

أ) القيم المميزة للمصفوفة A هي حلول المعادلة المميزة $det(A - \lambda I) = 0$.

الآن :

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1)$$

$$= \lambda(1+\lambda)(\lambda-2)$$

إذن ، القيم المميزة هي $\lambda = 0$ ، $\lambda = -1$ ، $\lambda = 2$.

لإيجاد المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة نقوم بحل المعادلة :

$$(A-\lambda I)X = 0$$

أي حل نظام المعادلات :

$$\begin{aligned} x + z &= \lambda x \\ -y &= \lambda y \\ x + z &= \lambda z \end{aligned}$$

لكل قيم λ.

عندما $\lambda = 0$ نحصل على النظام :

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

وبحل هذا النظام نجد أن المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = 0$ هي :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$ حيث إن t عدد حقيقي.

بوضع $t = 1$ نحصل على المتجه المميز $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ وبتعيير هذا المتجه نحصل على المتجه المميز المعير (طوله يساوي 1).

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

عندما $\lambda = -1$ نحصل على النظام:

$$\begin{aligned} 2x + z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

ونرى بحل هذا النظام أن المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = -1$ هي:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ حيث إن t عدد حقيقي.

بوضع $t = 1$ نحصل على المتجه المميز المعير.

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

عندما $\lambda = 2$ نحصل على النظام:

$$\begin{aligned} -x + z &= 0 \\ -3y &= 0 \end{aligned}$$

وبحل النظام نجد أن المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda = 2$ هي:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ حيث إن t عدد حقيقي.

وبوضع $t = 1$ والتعيير نحصل على المتجه المميز المعير:

$$X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ب) بما أن :

$$X_1 \cdot X_2 = X_1^T X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \times 0 + 0 \times 1 + (-1) \times 0] = 0$$

$$X_1 \cdot X_3 = X_1^T X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \times 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$X_2 \cdot X_3 = X_2^T X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1] = 0$$

فنجد أن القيم المميزة متعامدة.

ج) $trace(A)$ (أثر A) هو مجموع عناصر قطر A. أي أن:

$$trace(A) = 1 - 1 + 1 = 1$$

مجموع القيم المميزة هو:

$$0 - 1 + 2 = 1$$

ومن ثم فهما متساويان.

د) حاصل ضرب القيم المميزة يساوي $0 \times (-1) \times 2 = 0$ أما محدد المصفوفة فهو:

$$det(A) = \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -1 \times (1 - 1) = 0$$

ونرى أن حاصل ضرب القيم المميزة يساوي محدد المصفوفة.

هـ) مصفوفة الاستقطار هي :

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و) لاحظ أن:

$$OO^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

$$O^T O = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

ونرى أن $O^T = O^T O = I$.

ز) لاحظ أن:

$$O^T A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ولذا فإن :

$$O^T A O = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

أي أن :

$$O^T A O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

عند حسابنا للقيم والمتجهات المميزة لمصفوفة حقيقية متماثلة (أو هرميتية) يكون من المناسب التحقق من أن :

١- مجموع القيم المميزة يساوي أثر المصفوفة.

٢- المتجهات المميزة متعامدة.

٣- حاصل ضرب القيم المميزة يساوي محدد المصفوفة.

وإذا لم تتحقق أي من هذه الخواص فهذا يعني وجود خطأ في حساب القيم والمتجهات المميزة.

ويجب التأكد أيضاً من أن جميع القيم المميزة حقيقية.