الفصل السابع

الأعداد النسبية

Rational Numbers

إن الكسور ليست أرقاماً في الحقيقة... إنما هي أجزاء من أشياء وهذا مختلف.

$\frac{1}{2}$ هو نفس $\frac{1}{3}$ وذلك لأن البسط في كلا العددين يقل عن المقام بمقدار واحد.

إنني أكره الكسور ... ولا أستطيع التعامل معها ولهذا عرفت بأنني لن أفلح في الرياضيات أبداً.

قد تكون سمعت مثل هذه التعليقات والآراء من طلاب يدرسون الإعداد النسبية سواء كنت مدرساً أو ولي أمر. فالأعداد النسبية تعد في بعض الأحيان من المواضيع الصعبة نوعاً ما بالنسبة للطلبة الذين نجحوا بفهم الأعداد الصحيحة والتعامل معها في المراحل الصفية المبكرة. وذلك لأن التعامل مع أرقام تمثل أجزاء ولها عدد لا نهائي من الأسماء ولا تتبع نمطا واضحا كما هو الحال في الأعداد الصحيحة يعد شيئاً مبهماً وغير سهل.

وبالرغم من أن معظم الطلاب لديهم القدرة على تعلم خوارزميات مختلفة لا لأن لديهم ضعف في إدراك المفاهيم المتعلقة بها.

وتوصي دراسة قام بها بوست وآخرون (Post *et al.*1993) حول تطوير المناهج التي تدرس الأعداد النسبية على ضرورة تقديمها بطرق تدعم النظرة

الشمولية لهذه الأعداد وتربطها وتميزها عن الأعداد الصحيحة. وأكدت دراسة سوودر (Sowder,1995) ودراسة كل من مافكوفيتش وسوودر (Mavkovits & Sowder, 1990) على نفس التوصيات السابقة. كما وأكدوا على ضرورة أن يتعلم الطلاب كيفية الانتقال بين التمثيلات المتكافئة للأعداد النسبية بأسلوب سلس. ذلك لأنهم في هذه الحالة يحصلون على فهم أعمق لما تعنيه الأعداد النسبية ويدركون حقيقة أن الأعداد النسبية ليست إلا أعداداً مركباتها أرقام صحيحة مجموعة بطريقة معينة.

في هذه الوحدة سوف نسلط الضوء على أكثر الأخطاء شيوعاً والتي يرتكبها الطلاب أثناء تعلمهم للأعداد النسبية والعمليات المعرفة عليها، كما سنقدم أنماطاً مختلفة لتدريس هذه الأعداد بهدف معالجة مثل هذه الأخطاء.

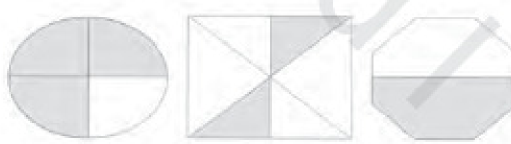
ما الأعداد النسبية؟

تعد الأعداد النسبية أفكاراً رياضية مجردة كما هو الحال في الأعداد الصحيحة، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد (NCTM, 2000) . ويرى كل من كروش و بالدوين (Crouch & Baldwin, 1994) أنه يمكن تمثيل الأعداد النسبية على الشكل $a \div b = c$ إذا وفقط إذا كان $a = bc$ ، أي أن $12 \div 3 = 4$ لأن $4 \times 3 = 12$.

كما أن الكسر $\frac{12}{3}$ يمثل ١٢ مقسوماً على ٣. وبالمثل فإن ٣ تقسم ٦ تكتب على الشكل $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ذلك لأن $6 \times \frac{2}{3} = 4$. إن المقام في العدد النسبي يمثل العدد

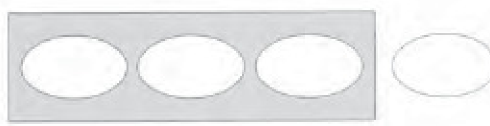
الكلي للوحدات التي يتم على أساسها تقسيم العدد الصحيح. فعلى سبيل المثال فإن المقامات في الأعداد $\frac{12}{3}$ و $\frac{4}{6}$ هي ٣ و ٦ على التوالي. في حين أن البسط في الأول وهو ١٢ والبسط في الثاني وهو ٤ يمثلان عدد الأقسام المستخدمة في كل منها.

يوجد ثلاث طرق لتوضيح الأعداد النسبية على أساس قاعدة الجزء من الكل من المناسب وضعها في منهج المرحلة الابتدائية. في أولى هذه الطرق تمثل المناطق المظللة والكسور علاقة بين الواحد صحيح وأجزائه المتساوية في الحجم والشكل فعلى سبيل المثال يمثل العدد $\frac{3}{4}$ ثلاث قطع من الواحد صحيح مثل ثلاث قطع متساوية من حبة بيتزا مقسمة إلى أربعة أجزاء متساوية ولكون العدد الكلي للقطع هو ٤ تم وضع ٤ في مقام الكسر $\frac{3}{4}$، وبما أن ثلاثة منها تم أكلها على سبيل المثال تم وضع ٣ في بسط الكسر $\frac{3}{4}$. في الشكل التالي تمثل المناطق المضللة الكسور $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{6}$ و $\frac{1}{2}$على التوالي.



أما في الطريقة الثانية فتمثل الكسور عدد الأشياء في مجموعة من الأشياء المنفصلة عن بعضها وباستخدام هذه الطريقة نجد بأن الكسر $\frac{3}{4}$ يشير مثلاً بأن ثلاثة أطفال من أصل أربعة يقرؤون كتاباً ما أو يشير إلى أن ثلاثة صناديق فراولة معبأة من أصل أربعة صناديق. وفي كلتا الحالتين نلاحظ بأن الأطفال يمثلون مجموعة من الأشياء المنفصلة غير المتساوية بالضرورة في الحجم أو الشكل كما هو الحال بالنسبة

للصناديق. وبالمقارنة مع مثال البيتزا المذكور سابقاً يوضح الشكل التالي أن الكسر $\frac{3}{4}$ قد يمثل ثلاث قطع تم أكلها من البسكويت من أصل أربع قطع.



أما الطريقة الثالثة والمسماة طريقة التمثيل الخطي للأعداد النسبية فإنها تتضمن تقسيم وحدة الطول إلى أجزاء كسرية وذلك من خلال تقسيم الخط إلى قطع مستقيمة متساوية في الطول. فعلى سبيل المثال لو نظرنا إلى التمثيل التالي :

وجدنا أن المقام b يمثل العدد ٤ وذلك كون العدد الكلي للقطع المتساوية هو ٤ في حين أن البسط a يمثل العدد ٣ وذلك كون المؤشر يشير إلى ثلاثة أجزاء من القطع الأربعة.

إن أي عدد نسبي يمكن أن تعاد تسميته وذلك بضرب بسطه ومقامه بنفس العدد وعليه فإن الكسر الأصلي يكون بسطه ومقامه مضروبين بالعدد واحد الذي هو العنصر المحايد في عملية الضرب. وأخيراً نؤكد بأن ضرب مقام وبسط العدد النسبي بالرقم نفسه لا تغير قيمته كما في المثال التالي :

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$$

لماذا يعاني الطلاب من الأعداد النسبية؟

هناك عدة أسباب وراء الصعوبة التي يواجهها الطلاب عند تعلمهم للأعداد النسبية من حيث المفاهيم والمهارات منها ما يلي:

١- بالنسبة لطرق التدريس فإنها غالباً ما تركز على الخوارزميات والحفظ أكثر من تركيزها على تمكين الطلاب من المفاهيم وما تعنيه القيم الموجودة في كل من البسط والمقام.

٢- بعض الصعوبات في المنهج تحدث نتيجة لاختلاط الأمر على الطلاب عند تنفيذهم للعمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة وعند تنفيذها على الأعداد النسبية. فعلى سبيل المثال عند جمع الكسور نجد أن العديد من الطلاب يقومون بجمع بسطي الكسرين معاً بدلاً من تأكدهم من حقيقة أن المقامين لا يجمعان وأنه في حال تساوي المقامين نجمع البسطين. بالإضافة إلى ما سبق فإن الطلاب يفترضون بأن ضرب الكسور دائماً ما ينتج عنه مقادير أكبر كما هو الحال مع الأعداد الصحيحة حيث إنه على سبيل المثال فإن 2×6 يساوي ١٢ وهو أكبر من كل من ٢ و ٦ في حين أن $\frac{1}{2}\times6$ يساوي ٣ وهو أصغر من ٦. وبالمثل فإن قسمة الكسور قد يكون ناتجها أكبر من العدد المقسوم كما هو الحال مع المثال $12\div\frac{1}{3}=36$.

٣-إن تقريب الإجابات التي تكون أعدادا نسبية قد تشكل تحدياً للطلبة اكبر من تقريب الإجابات باستخدام الأعداد الصحيحة. وعليه فإنه يجب على الطلاب أن يتمكنوا من تقريب الكسور من خلال علاقتي أكبر من وأصغر من حتى يتمكنوا من الحساب بشكل فاعل. كما أن وجود عدة أسماء للكسر نفسه يؤدي احتمالية أكبر لحدوث الأخطاء.

٤-إن الكسور غير مرتبطة بشكل مباشر بالأشياء المستخدمة يومياً ولذلك ينظر لها كأشياء مجردة (Alverado and Herr, 2003).

٥-قد تكون المرونة في استخدام الرموز مشوشة في أذهان الطلاب كما هو الحال عند تسمية نفس الكسر باستخدام أرقام أكبر أو أصغر في المقام والبسط وعند استخدام الفاصلة العشرية لتمثيله. ويرى ساكسي وآخرون (Saxe, *et. al*, 2005) أنه من الصعب إعادة تسمية الكسور نفسها مع وجود فهم محدود للحجم وفكرة التكافؤ بين الأشياء.

بخصوص الطالبة تاوانا

إن تاوانا هي طالبة بالصف الخامس تبلغ من العمر ١٢ سنة وتحب المدرسة. من صفاتها إنها خجولة نوعاً ما وغالباً ما تطلب العمل لوحدها وبخصوص علاقتها بمدرستها فإنها تتواصل معها بشكل سهل وتحب أن تحصل على توجيهاتها بشكل شفوي ومختصر. ويظهر خجلها بشكل جلي عندما يطلب منها العمل مع أقرانها خصوصاً مع من لا تشعر بالراحة بالتعامل معهم. وفي حال عملها ضمن مجموعات كبيرة نجدها تبدي اعتراضها بشكل واضح وصريح خلال الأنشطة المطلوبة من المجموعة. وبخصوص العمل الجماعي فإنها تحبذ العمل مع شخص واحد فقط من أقرانها خصوصاً إذا كانت فتاة من أصدقائها. وهذا يبين أنها تميل للعمل مع الإناث أكثر من الذكور. أما بخصوص تواصل تاوانا مع الآخرين فهي تمتاز بكونها مستمع جيد ولديها سرعة بديهة في التحدث معهم وتبادل الأفكار. كما أن لديها قدرة جيدة في التعبير عن أرائها وفي فهم ما تعنيه الكلمة وما وراءها. وتحبذ كثيراً أن تشير المعلمة إلى إمكاناتها هذه أمام زملائها في الصف ويسعدها كثيراً الحصول على الإطراء

والمديح لقيامها بواجباتها. أما بخصوص قدرتها على التعامل مع الورقة والقلم فإن تاوانا تمتاز بقدرة جيدة على التعامل معهما حيث إنها تجيد الكتابة بشكل جيد ومنظم وغالباً ما تبدي استيائها إذا كانت المهمة المطلوبة منها شفوية. ويكون أداؤها ضعيفاً فيها خصوصاً إذا ما كانت جالسة في الخلف أو على الجوانب وكان جالساً بجوارها شخص لا ترتاح له. وبخصوص المهام المطلوبة منها من خلال نص مكتوب فهي لا تحبها وغالباً ما تقرأها بشكل سريع ودون تركيز وفي بعض الأحيان لا تقرأها بتاتاً ذلك بان هذه المهام لا تشكل تحدياً بالنسبة لها ولا تستقطبها كتلك التي تطلب منها بشكل مباشر من المعلمة وبلغة تشجعها على القيام بأدائها. ومن مميزات شخصية تاوانا أيضاً عدم حبها للأنشطة المتضمنة للأرقام والألعاب. كما أنها تعترض بشكل كبير إن قدمت لها المعلمة بعضاً من المعززات الحسية (كالملصقات والوجوه الضاحكة وغيرها) ذلك أنها تعتبر مثل هذه الأشياء مخصصة للأطفال الصغار فقط. وتمتاز تاوانا أيضا بحبها للحاسوب في وظائفها الكتابية. ويزعجها كثيراً إذا ما طلب منها العمل ضمن مجموعات خصوصاً عندما تكون الوظيفة المطلوبة منها مكتوبة وبغياب المدرسة.

إن تاوانا طالبة مجتهدة تعمل بشكل جيد ودقيق خصوصاً إذا علمت بأن مكافأتها على مثل هذا الأداء حصولها على وقت حر مع أقرانها الإناث، ويزعجها كثيراً وضعها في أجواء اجتماعية مع أقرانها الذكور ويظهر هذا جلياً من خلال ألفاظها الفظة في مثل هذه الأجواء. وأخيراً يوجد في صف تاوانا منطقة هادئة تحبها كثيراً وعادة ما تطلب أن تذهب إليها.

الأخطاء النمطية: التشخيص، وصف العلاج، وإعادة التأهيل والمعالجة

الخطأ النمطي الأول في العدد النسبي للطالبة تاوانا

تركز المسائل الخمس الأولى في اختبار تاوانا على أساسيات الأرقام حيث إنه يطلب منها في كل من هذه المسائل ربط الكسور بالطرق الثلاث المستخدمة في توضيحها والتي ذكرت سابقاً في بداية هذه الوحدة.

تشخيص الخطأ

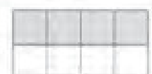
ابدأ الخطوة الأولى بتحديد نقاط القوة لدى تاوانا في المفاهيم والمهارات وبتحديد الأخطاء النمطية والتي تتكشف من خلال الإجابات التي قدمتها في الاختبار. ومن ثم دون ملاحظاتك في الفراغين التاليين:

أخطاء تاوانا النمطية:
نقاط القوة لدى تاوانا:

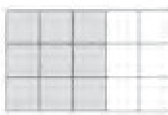
من الملاحظ أن تاوانا تعلم جيداً أنها تتعامل مع الأعداد الكسرية وذلك من خلال تسجيلها لإجابات على شكل كسري. وهي تعي تماماً بأن الكسور تمثل جزءاً من كل كما أنها تستطيع أن تعين نقطة على خط الأعداد إلا أنها تفتقر إلى الإحساس بهذه الكسور ويظهر هذا من خلال عدم ربطها الكسر بالشكل المكافئ له.

ورقة العمل الأولى للطالبة تاوانا

١- ما الكسر الذي يمثله الجزء المظلل.



$\frac{4}{4}$



$\frac{9}{6}$

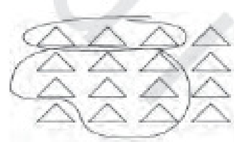
٢- ما الكسر الذي يمثله الجزء المظلل.

$\frac{3}{2}$

$\frac{4}{6}$

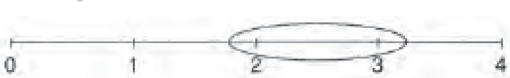
٣- ضع دائرة حول الجزء الذي يمثل $\frac{3}{4}$ المربعات.

٤- ضع دائرة حول الجزء الذي يمثل $\frac{3}{8}$ المثلثات.



٥- أشر بسهم على المكان الذي يدل على الكسر $\frac{1}{2}$.

٦- ضع دائرة على خط الأعداد على المكان الدال على الكسر $\frac{2}{3}$.



إن المسألتين الأولى والثانية في الاختبار متعلقتان بمفهوم الجزء من الكل للأعداد الكسرية في حين أن المسألتين الثالثة والرابعة متعلقتين بمفهوم الكسور من خلال المجموعات ونلاحظ بأن المسالتين الخامسة والسادسة يقيسان مدى فهم تاوانا للأعداد الكسرية من خلال التمثيل الخطي لها. تظهر إجاباتها لهذه المسائل بأنها لا تدرك أي من الطرق الثلاث في فهم الأعداد الكسرية وتفتقر إلى القدرة على ربط الكسور بالرسوم المكافئة لها حيث نجدها في المسائل رقم ١ و ٢ و ٣ و ٤ تقارن بين عدد الأجزاء المظللة والأجزاء غير المظللة بدلاً من العدد الكلي للأجزاء جميعها وبخصوص التمثيل الخطي للأعداد الكسرية نجدها تخطئ في فهم معنى وحدة الطول على خط الأعداد.

وصف العلاج

بناءً على نقاط القوة والأخطاء النمطية التي ارتكبتها تاوانا قامت المعلمة بكتابة ورقة البيانات للطالبة تاوانا كما في الجدول رقم (٧,١).

الجدول رقم (٧,١). ورقة تحليل بيانات الطالب.

<table>
<tr><td colspan="2">اسم الطالب: تاوانا</td></tr>
<tr><td colspan="2">أعضاء الفريق:</td></tr>
<tr><td colspan="2">السياق</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td></tr>
<tr><td>• في غرفة صفها.
• قريبة من أصدقائها.
• مع أصدقاء من اختيارها.
• منطقة هادئة في غرفة الصف.
• الجلوس أماماً في غرفة الصف.
• العمل لوحدها.</td><td>• في مجموعات كبيرة.
• الجلوس خلفاً في غرفة الصف أو على الأطراف.
• حصة التربية الرياضية وفترة الغداء.
• الجلوس مع أقران لا تحبهم.</td></tr>
</table>

تابع الجدول رقم (٧,١).

تقييم المحتوى	
+	−
المفاهيم المتعلمة I. • رموز الكسور. • فهم الكسور باعتبارها جزءاً من كل. **المفاهيم المتعلمة II.** • الرمز المتعارف عليه لعملية الجمع. • فهم المقصود بعملية جمع الكسور. • تمييز البسط من المقام. • حساب نواتج الجمع بدقة باستخدام حقائق الجمع.	**الخطأ النمطي I.** • تفتقر إلى الإحساس بالكسور فهي تفتقر إلى القدرة على ربط الكسور بالرسوم المكافئة لها وتخطئ في فهم معنى وحدة الطول على خط الأعداد. **الخطأ النمطي II.** • غير قادرة على إيجاد مقام مشترك عندما يكون ذلك ضرورياً عند جمع الكسور.
المفاهيم المتعلمة III. • حقائق الطرح. • خوارزمية طرح الأعداد الصحيحة. **المفاهيم المتعلمة IV.** • حقائق ضرب الأعداد الصحيحة. • معنى إشارة الضرب. **المفاهيم المتعلمة V.** • حقائق الضرب. • صيغة الكسور العادية. • رمز الكسر. معرفة تحويل القسمة إلى ضرب لإيجاد ناتج قسمة كسرين.	**الخطأ النمطي III.** • خوارزمية طرح الكسور عندما تتكون عملية الطرح من خليط بين الأعداد الصحيحة والأعداد الكسرية. • الحس العددي. **الخطأ النمطي IV.** • إجراءات ضرب الكسور. • لا تعرف متى يتوجب عليها إيجاد مقام مشترك. **الخطأ النمطي V.** • لا تستوعب معنى قسمة الكسور في المسائل الحياتية. • غير قادرة على تطبيق قواعد قسمة الكسور بشكل صحيح. • تفتقر إلى الحس العددي بالكسور.

تابع الجدول رقم (٧,١).

العمليات			
المدخلات		المخرجات	
+	-	+	-
• مستمعة جيدة. • مهـارات سماعية قوية. • تتحدث بسهولة مع المعلم. • مواد مكتوبة مقرونة بمساعدة من المعلم.	• المشاريع المكتوبة. • المجموعات الكبيرة الموجهة.	• استخدام جيد للكلمات. •استخدام الحاسوب. •التقديم أمام الصف كاملا. •استيعاب جيد لمعاني الكلمات. •مهارات تحريرية جيدة.	•التقديم أمام مجموعة من الأقران الذين ينتقدونها. •الأنشطة ضمن مجموعات كبيرة.
السلوك			
أكاديمي		اجتماعي	
+	-	+	-
• مهارات لفظية جيدة. • تحب الأنشطة التي لها علاقة بالكلمات والألعاب. • يعاد توجيهها بسهولة.	• تقرأ بسرعة أو ترفض القراءة. • لا تحب الأنشطة والألعاب التي لها علاقة بالأرقام.	• مع قرينها المفضل. • حساسية عالية للعدالة الاجتماعية. • العمل مع البنات. • العمل مع المعلم.	•خجولة. •تنتقد الأقران والمعلمين. •تجادل. •التنابز بالألقاب. •متحدية للطلبة والمعلمين. •الأولاد يخيفونها مما يجعلها عدوانية.

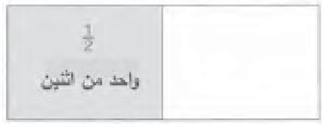
تابع الجدول رقم (٧,١).

التعزيز	
+	–
• التعزيز اللفظي والمدح الاجتماعي. • الفرصة لتعمل مع أقرانها من الإناث. • بلطافة تتقبل المدح اللفظي.	• الوجوه المبتسمة دائماً. • التذكارات. • رموز أنثوية. • أي جوائز مادية.

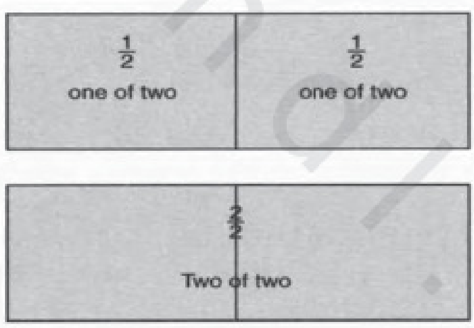
لابد من عمل خطة تطوير رياضي للطالبة تاوانا مستندة على ما تم تشخيصه سابقاً بخصوص أساسيات فهمها للأعداد النسبية والتمثيل الرقمي لهذه الأعداد ويجب أن تتضمن هذه الخطة أهدافاً واضحة بخصوص مفهوم العدد الكسري والقدرة على ربطه بالمعاني المختلفة له. وبما أن تاوانا تميل إلى التعامل مع الأشياء الواقعية ومع الأمثلة ذات الطابع الروائي والقصص فلا بد أن يبدأ معها بمواقف واقعية تصف ما تعنيه الأعداد الكسرية وتربطها بشكل واضح معها وذلك بالاستعانة بأنشطة عملية حتى تتمكن من تطوير مفهوم واضح لديها لهذه الأعداد.

إعادة التأهيل والمعالجة

يظهر الجدول رقم (٧,٢) خطة التطوير الرياضي للطالبة تاوانا للخطأ النمطي الأول لديها. ويهدف النشاط الأول في هذه الخطة إلى تقويم فهم تاوانا للأعداد النسبية من خلال مفهوم الجزء من الكل ومن خلال المجموعات وربط هذين المفهومين مع التمثيل الرقمي لهذه الأعداد ولا بد من البدء مهماً أولاً بالمناطق المظللة ومن ثم بالمجموعات وذلك لأن الأخير يعد أكثر تعقيداً من الأول. ولتبدأ معها بطي ورقة ليصبح لديها مستطيلان متطابقان ولتقم بتظليل أحد هذين المستطيلين كما في الشكل:

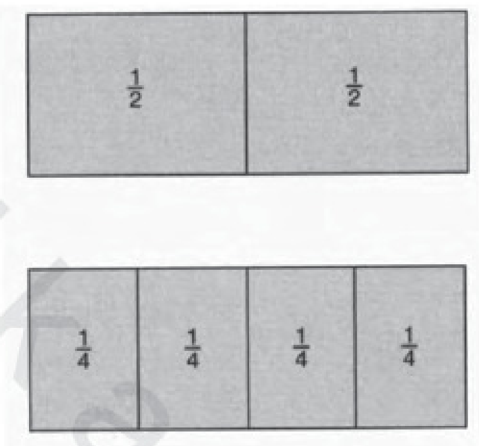


والآن اسأل تاونا عن المستطيلين وتأكد ما إذا أدركت بأنهما متطابقان وأوضح لها بان كتابة العبارة "واحد من اثنين" ومن ثم كتابة $\frac{1}{2}$ فوقها تهدف إلى جعلها تربط بين الرقم $\frac{1}{2}$ والمعنى المراد من ورائه. لا شك بأن تاونا سوف تعي تماما بأن العدد ٢ يمثل عدد الأجزاء المتطابقة التي تم تقسيم الورقة بها وبان العدد (١) يمثل الجزء الذي نهتم به (أي الجزء المظلل). وباستخدام ورقة أخرى أو على ظهر الورقة الأولى وعند تظليل الجزأين كما في الشكل التالي:



سوف تدرك تاونا بأن العدد $\frac{2}{2}$ يمثل الورقة كاملة وذلك لأنه تم تظليل جزأين من أصل جزأين. ولتوضيح الفكرة بشكل أكبر اطلب من تاونا أن تقسم ورقة أخرى إلى أربع مستطيلات متكافئة وذلك بطيها مرتين. ثم اطلب منها أن تظلل واحداً منها وتكتب ما يمثله. سوف تجد بأنها ستسجل العدد $\frac{1}{4}$ (واحد من أربعة) وبما أن تاونا تحب التواصل الشفوي مع مدرستها فإنها ستوضح ما يعنيه العدد ١ وما يعنيه العدد

٤ في الكسر $\frac{1}{4}$. والآن يحبذ وضع الورقة السابقة والورقة الحالية إلى جانب بعضهما كما يلي:



الجدول رقم (٧,٢). خطة التطوير الرياضي رقم (١) للطالبة تاوانا، تطوير مفهوم الكسر.

الوقت		حوالي ٣٠ دقيقة	حوالي ٢٠ دقيقة	حوالي ٢٠ دقيقة
السياق		في غرفة الصف وقريبة من صديق(+)	تجلس في مجموعة تعلمية معظم أفرادها إناث (+)	العمل لوحدها في غرفة الصف (+)
المحتوى		العمل ضمن مجموعات على حقيبة الكسور(+)	تسجيل الرموز الممثلة للأجزاء الكسرية في الحقيبة (+)	المقارنة بين كسرين لتحديد الأكبر بالاستعانة بحقيبة الكسور وتسجيل الناتج ومن ثم ربطها بلعبة "Flag it" (+)
العمليات	المدخلات	تستخدم قطعاً من الورق أو القماش لثنيها إلى كسور (+)	المعلم يقدم إرشادات لفظية للصف بأكمله (+)	تستطيع التحدث مع المعلم حين تحتاج ذلك (+)

تابع الجدول رقم (٧,٢).

	المخرجات	تكتب الجواب على ورقة أو طباعة على الحاسوب (+)	المجوعة عليها تقديم عرض للصف (–)	يجب أن تعرض نتائجها للصف بمساندة من أصدقائها (+)
السلوك	الأكاديمي	التظليل على الكتاب واخذ الملاحظات (+)	تحب استخدام الكلمات للتعبير عن نفسها (+)	يسمح لها بمناقشة المهمة ومن ثم يقوم المعلم بإعطاء ملاحظاته حول المهمة (+)
	الاجتماعي	مع صديقاتها الذين يشاركونها موقفها من العدالة الاجتماعية (+)	الأولاد ممكن أن يخيفوها. تشجع الطالبات على الاستجابة (+)	المعلم يبقى قريباً من المنطقة التي تجلس فيها تاونا (+)
التعزيز		المعلم يمدح لفظياً (+)	المعلم يكافئ المجموعة بمدحهم لفظياً (+)	المعلم يعطي تاونا وقتاً للتواصل الاجتماعي مع زميلاتها (+)

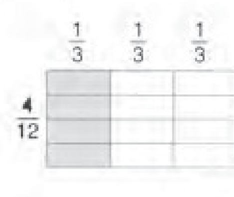
ومن ثم أطلب من تاوانا أن تحدد عدد الأجزاء في الورقة الثانية المكافئ للجزء الواحد في الورقة الأولى. لا بد وأن تلاحظ تاوانا بأن كل جزأين في الورقة الثانية يكافئان جزءاً واحداً في الورقة الأولى وعليه فإن $\frac{2}{4}$ تكافئ $\frac{1}{2}$.

ويمكن الاستمرار على هذا النهج وذلك بتقسيم ورقة ثالثة إلى ثلاثة مستطيلات متكافئة. ويمكن الإشارة هنا إلى أنه إذا تم تقسيم ورقة رابعة إلى أربعة مستطيلات متكافئة فإن جزأين من الورقة الثالثة يكافئان أربعة أجزاء في الورقة الرابعة كما هو موضح في الرسم التالي:

ولتحديد ما تعنيه الأجزاء داخل المستطيل الواحد كما هو مطلوب من المسألتين الأولى والثانية في الاختبار اطلب من تاوانا أن تطوي ورقة إلى جزأين متكافئين وأن تظلل أحدهما ومن ثم اطلب منها أن تطوي الورقة بشكل أفقي ليظهر عندها أربعة أجزاء متكافئة اثنان منها مظللين كما في الشكل التالي :

سوف تلاحظ تاوانا بأنه ابتداءً تم تظليل واحد من اثنين وعندما قامت بطي الورقة مرة أخرى حصلت على جزأين مظللين من أصل أربعة وهما يشغلان نفس الحيز المشغول سابقاً من الورقة وعليه فإن $\frac{1}{2}$ يكافئ $\frac{2}{4}$.

من الممكن أن تستمر تاوانا على هذا النهج من خلال عملها على مثال آخر كأن تطوي ورقة ما إلى ثلاثة أجزاء متكافئة وأن تظلل أحد هذه الأجزاء. ومن ثم اطلب منها أن تطوي الورقة إلى أربعة أجزاء متكافئة بشكل أفقي كما في الشكل التالي :



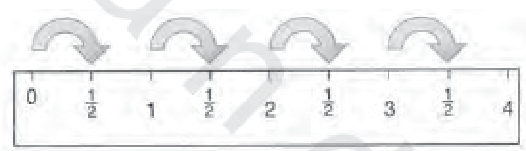
ستلاحظ تاوانا ابتداء بأنه تم تظليل واحد من ثلاثة وعندما قامت بالطي أفقياً لتحصل على أربعة أجزاء متكافئة أصبح لديها أربعة أجزاء مظللة من أصل ١٢ وهي تشغل نفس الحيز الذي يشغله جزء واحد من أصل ثلاثة وعليه فإنها سوف تستنتج بأن العدد $\frac{1}{3}$ يكافئ $\frac{4}{12}$.

ومن ضمن الأنشطة الأخرى التي يمكن أن تتبعها في إعادة التأهيل النشاط التالي الذي يركز على النموذج الخطي من خلال خط الأعداد وذلك بأن تقوم تاوانا بفص شريحة رفيعة من الورق ومن ثم تقوم بتعيين الصفر عليها من أقصى اليسار وتعين العدد واحد إلى اليمين من الصفر بمقدار ٣ إنشات تقريباً. وبعد ذلك تقوم بطي القطعة الواصلة بين العدد صفر والعدد واحد عدة مرات حتى تحصل على ستة أجزاء متساوية في الطول ومن ثم تقوم بترقيم هذه الأجزاء باستخدام الأرقام $\frac{1}{6}$ و $\frac{2}{6}$ و $\frac{3}{6}$ و $\frac{4}{6}$ و $\frac{5}{6}$ و $\frac{6}{6}$ على التوالي بحيث تحصل على الشكل التالي :

من المهم لتاوانا أن تعين الصفر على أقصى اليسار لتميزه عن الواحد ذلك لأن معظم الطلاب يبدؤون العد ابتداءً من العدد واحد دون الانتباه إلى أن الوحدة الواحدة يجب أن تحدد ابتداءً من الصفر. ولتوضيح ما تعنيه الكسور باستخدام خط الأعداد من المفيد أن تتخيل تاوانا أنها برفقة صديقها ابتداءً من بيتها الذي يقع حيث العدد صفر وانتهاءً بمكان ما حيث يقع العدد واحد. والآن لو طلبت منها أن تعين منتصف هذه المسافة على شريحة الورقة فما عليها إلا أن تطوي هذه الشريحة إلى

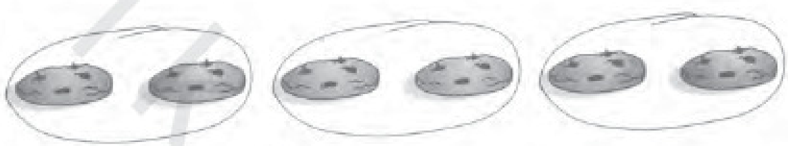
جزأين متساويين لتجد بأن المنتصف والذي يمثله العدد $\frac{1}{2}$ مساوي تماماً للعدد $\frac{3}{6}$ وفي هذه الحالة يمكنها أن تكتب الرقم $\frac{1}{2}$ بنفس مكان الرقم $\frac{3}{6}$. ويمكن استخدام نفس الآلية لتعيين العدد $\frac{2}{3}$ على خط الأعداد باستخدام مضاعفات العدد $\frac{1}{6}$. وفي هذه الحالة سوف تدرك تاوانا كيفية قياس المسافات وليس فقط النظر إلى أرقام معينة على خط الأعداد.

لا بد أن تعي تاوانا أنها عندما تنتقل على أي فترة طولها وحدة واحدة يمكن لها أن تعين العدد $\frac{1}{2}$ ليمثل منتصف المسافة بين بداية الفترة ونهايتها كما يوضح الشكل التالي:

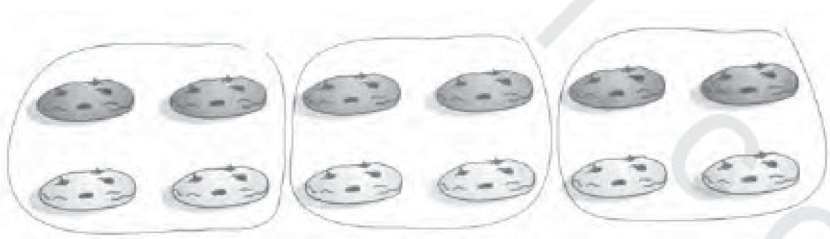


وبخصوص الأرقام المنفصلة يمكن فهمها بالاستعانة بأشكال من النوع نفسه مثل البسكويت أو السيارات أو الكلاب أو اللعب. ومن الممكن أن تقوم تاوانا بالاستعانة بأشياء من واقع الحياة مثل الأزرار. وبقيامها بمثل هذا الإجراء لا بد وأن تكتب العدد ٦ في المقام كونه يمثل عدد العناصر في المجموعة المستخدمة. ومن ثم تقوم بكتابة العدد 2 في البسط والذي يمثل عدد الأزرار المحصورة في دائرة كما في الشكل التالي:

وباتباعها لهذه الطريقة نجد بأن البسط يمثل عدد الأشياء المهتم بها من أصل جميع الأشياء وبهذه الحالة يكون التعبير عن ذلك إما بعدد قطع البسكويت التي ترغب بأكلها أو عدد الحيوانات الأليفة التي ترغب في تربيتها من أصل جميع قطع البسكويت أو جميع الحيوانات الأليفة على التوالي. وبخصوص حقيقة أن $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ يمكن أن تمثلها تاوانا على النحو التالي:



ولا بد أن تلاحظ أن واحدة من هذه المجموعات الثلاثة تمثل إثنتين من أصل ستة قطع بسكويت وتستنتج بأن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{6}$ متكافئين. ولو نظرنا إلى المثال التالي والذي تستخدم تاوانا فيه ضعف الكمية السابقة، أي:



نجد بأن ٤ قطع من أصل ١٢ يعبر عنها أيضاً بالعدد $\frac{1}{3}$. وفي هذه الحالة يجب أن تضع تاوانا في المقام العدد الكلي الجديد لقطع البسكويت وأن تضع في المقام العدد المهتمة به وهو عدد القطع داخل المربع بدلاً من أن تضع العدد المتبقي من قطع

البسكويت في المقام كما يظهره الخطأ النمطي الذي أظهره أداؤها في الاختبار. إن اتباع مثل هذه الأنشطة في إعادة التأهيل يمكن تاوانا من الفهم الصحيح لما تعنيه الأعداد الكسرية ويمكنها من سهولة الانتقال من النصف إلى الربعين وبالعكس. وبهذا تستطيع أن تفهم العلاقة بين ما تعنيه الأرقام في سياق الأعداد النسبية.

ومن ضمن الآليات الأخرى التي يمكن اتباعها في إعادة التأهيل الاستعانة بالألوان المختلفة للتمييز بين المقام والبسط أو باستخدام المربعات حيث إن هذا قد يساعد تاوانا أكثر خصوصاً وإنها تحب الأنشطة التي يُستخدم فيها القلم والورقة. ولها إذا رغبت باستخدام الألوان فيمكن أن تستخدم لونين مختلفين للبسط والمقام وإذا ما رغبت باستخدام المربعات فيمكن أن تستخدمها على الشكل التالي:

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

الخطأ النمطي الثاني للطالبة تاوانا في الأعداد النسبية

قم بتشخيص النوع الآخر من الأخطاء التي تقوم تاوانا بارتكابها في تعاملها مع الكسور وذلك من خلال تحليل الأمثلة الموجودة في ورقة العمل الثانية للطالبة تاوانا. والتي تمثل أسئلتها إيجاد ناتج الجمع للأعداد الكسرية ذات المقام المشترك وغير المشترك.

ويمكن التأكد من الخطأ النمطي الذي ترتكبه تاوانا من خلال تفحص ما إذا قامت بارتكابه بشكل منضبط أم لا.

ورقة العمل الثانية لتاوانا

1. $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

2. $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12}$

3. $4\frac{2}{4} + \frac{5}{1} = 4\frac{7}{5}$

4. $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

6. $4\frac{3}{7} + 5\frac{2}{9} = 9\frac{5}{16}$

تشخيص الخطأ

ابتداءً قم بالتحقق من المستوى المعرفي للطالبة تاوانا والمهارات المكتسبة لـديها في إجراء عمليات الجمع ومن ثم تفحص الآلية الخاطئة التي ترتكبها في عمليات الجمع وبعد ذلك قم بتدوين ملاحظاتك في الفراغين التاليين :

أخطاء تاوانا النمطية :
نقاط القوة لدى تاوانا :

من الملاحظ أن تاوانا تعلم جيداً أن جمع البسط يتم بمعزل عن جمع المقامات، كما أنها قامت بتسجيل نواتج الجمع على شكل كسور. إلا أنها قامت بجمع المقامات مع بعضها بنفس الطريقة التي طبقتها على البسوط. ولا تبدي حلولها أية أدلة تؤكد فهمها الصحيح لما تعنيه الأعداد الكسرية ذلك أنه لا يوجد أي مبرر يؤدي بها إلى أن تكتب ناتج الجمع $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ ليكون $\frac{3}{10}$ (مسألة رقم ١ في ورقة العمل الثانية). حيث إن ناتج الجمع في هذه الحالة لا بد وأن يكون أقل من أحد العددين المجموعين. وهذا يدلل على أنها تقوم بإجراء الجمع بطرقة لا تؤدي إلى استنتاجات منطقية. وعليه فإن على تاوانا أن تعمل على حل المسائل بالاستعانة بتمثيل واقعي يعبر عما تعنيه الأعداد الكسرية المستخدمة فيها. انظر الجدول رقم (٧,١) الذي يبين ورقة تحليل البيانات للطالبة تاوانا.

وصف العلاج

يجب على تاوانا أن تبدأ العمل مستعينة بالوسائل التوضيحية مثل تلك الموجودة في حقيبة الدكتور لويد الخاصة بالكسور والتي تحتوي على قطع بلاستيكية تكون مع بعضها البعض وحدة واحدة من الأشكال.

كما أن استخدام ورق الرسوم المظلل قد يكون فاعلاً في الفهم من خلال الرسوم التوضيحية. وفي حال ما بدأت تاوانا العمل مستعينة بالوسائل التوضيحية ومن ثم بالرسوم التوضيحية، تصبح مهمتها أكثر سهولة عند الانتقال للتعامل مع الأرقام المجردة، ذلك بأن مثل هذه الآلية تكسبها فهماً أكثر شمولية عند تعاملها مع جمع الكسور وتهيئها بشكل أفضل لاكتساب مهارة تنفيذ خوارزمية الجمع في مثل هذه الحالة.

إعادة التأهيل والمعالجة

يبين الجدول رقم (٧,٣) خطة التطوير الرياضي للطالبة تاونا والتي تحتوي على آلية واضحة لتنفيذ عملية جمع الكسور. ومن المهم أن هذه الخطة تأخذ بعين الاعتبار كافة العوامل الأكاديمية المؤثرة في طريقة تعلم تاوانا دون أي تغيير أو تعديل.

تعد حقيبة الدكتور لويد إحدى الوسائل المستخدمة في تفسير ما تعنيه الأعداد الكسرية في إطار الوحدة الواحدة أو المناطق المظللة حيث إنها تحتوي على مربع كبير من البلاستيك يمثل الوحدة الواحدة "١" ، كما يحتوي على مربعات مقسومة إلى أنصاف وأثلاث وأرباع وأخماس وأسداس وأثمان وأعشار واحد أعشار وخمسة أعشار تكون في مجملها المربع الكبير.

بداية دع تاونا تضع المربع الكبير الذي يمثل الوحدة الواحدة أمامها. بحيث يكون لها بمثابة المرجع الذي تجمع عليه كل القطع الأخرى. فعلى سبيل المثال يمكن لتاوانا أن تغطي المربع بكاملة بالمستطيلات الخمسة الخضراء لتستنتج بأن هذه الخمسة أجزاء المتساوية تشكل الوحدة الواحدة وبالتالي يمكن تسمية كل من هذه الأجزاء بالخمس أو $\frac{1}{5}$ كما بينا في الدروس السابقة. وفي هذه الحالة يمكن لتاوانا وعندما تضع أحد هذه الأجزاء على المربع الكبير أن تقول بأنها أكلت خمس كعكة حلوى، كما أنها وعندما تسأل ما مجموع خمسين وخمس يكفي أن تضيف جزأين آخرين للمربع الكبير لتجد بأنه يصبح لديها ثلاثة أخماس وفي هذه الحالة يمكنها أن تكتب بأن $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$. وبناءً على ما تقدم تستنتج تاوانا بأن جمع الأرقام في البسط يعطي النتيجة الصحيحة بشرط أن لا تجمع المقامات لهذه الأعداد وعليه فإن جمع خمسين لا يعطي عشرين كما فعلت في ورقة العمل سابقاً. وبهذه الطريقة يمكن لتاوانا أن تحدد الجواب الصحيح وتشرح آلية الحل.

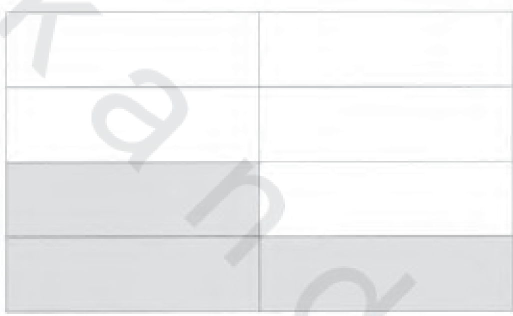
الجدول رقم (٧,٣). خطة التطوير الرياضي رقم (٢) للطالبة تاوانا، جمع الكسور.

الوقت		٢٥–٣٠ دقيقة	٣٠ دقيقة	٢٠ دقيقة
السياق		في غرفة الصف وقريبة من صديق (+)	تجلس في مجموعة تعلمية معظم أفرادها إناث (+)	العمل لوحدها في غرفة الصف (+)
المحتوى		العمل على مفهوم جمع الكسور ذات المقامات المتشابهة بتجميع القطع من حقيبة الكسور (+).	العمل مع مجموعة من الطلاب على توليد مسائل حياتية والطلب من بقية الطلاب حلها (+)	لعب لعبة "تركيب الكسور العادية" ولعبة "اسحب كسراً" مع طلبة آخرين ضمن مجموعات صغيرة.
العمليات	المدخلات	طرح مسائل شفوية(+)	مسائل مقترحة من المعلم والطلاب(+)	تستطيع التحدث مع المعلم حين تحتاج ذلك (+)
العمليات	المخرجات	تكتب الجواب على ورقة أو طباعة على الحاسوب (+)	المجوعة عليها تقديم عرض للصف (−)	يجب أن تعرض نتائجها على أقرانها (+)
السلوك	الأكاديمي	استخدام حقيبة الكسور	تشرح لفظياً الجمع بجميع حالاته (+)	يسمح لها بمناقشة المهمة ومن ثم يقوم المعلم بإعطاء ملاحظاته حول المهمة (+)
السلوك	الاجتماعي	العمل مع قرين (+)	تعزيز مقدم من الطالبات (+)	المعلم يبقى قريباً من المنطقة التي تجلس فيها تاونا (+)
التعزيز		المعلم يمدح لفظياً ويقدم جوائز عينية (+)	المعلم يكافئ المجموعة بمدحهم لفظياً (+)	المعلم يعطي تاونا وقتاً للتواصل الاجتماعي مع زميلاتها (+)

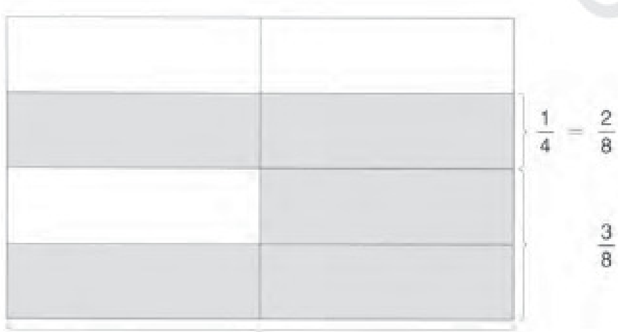
والآن لتقم تاوانا بالعمل على جمع كسور يكون أحد مقاميها من مضاعفات المقام الآخر كالنصف والربع على سبيل المثال. ومن المحبذ أن تكون المسألة في سياق ما من واقع الحياة كما في المثال التالي:

افرض أنه طلب منها أن تدهن ثلاثة أثمان أحد جدران غرفة النوم وطلب من صديقتها أن تدهن ربعاً آخر من هذا الجدار. فكم مجموع ما تم دهنه من هذا الجدار؟

بداية تقوم تاوانا بتغطية المربع الكبير بثلاثة أجزاء من أصل ثمانية مكونة له كما في الشكل التالي:



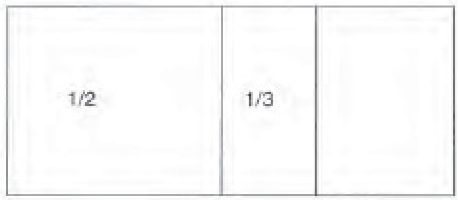
ومن ثم تقوم بإضافة ما يمثل ربع المربع الكبير أي $\frac{2}{8}$ إلى ما هو موجود سابقاً لتجد بأنه يصبح لديها خمسة أجزاء من أصل ثمانية أي $\frac{5}{8}$. وفي هذه الحالة تقوم بكتابة ما يلي $\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$. ويوضح الرسم التالي ما قامت به.



وعند الطلب من تاوانا التأكد ما إذا كان حاصل جمع أربعة اتساع وثلث هو $\frac{5}{12}$ (المسألة رقم أربعة في ورقة العمل) فبإمكانها أن تقوم بذلك بالاستعانة بالحقيبة أو بورقة الرسم المظللة من خلال وضع اتساع على المربع الكبير وتعيين أربعة منها أو ترقيمهم ومن ثم تقوم بإضافة ما يمثل ثلث المربع الكبير (أي $\frac{3}{9}$) إلى جوار الأربعة اتساع السابقة لتجد بأن لديها $\frac{7}{9}$ بخلاف جوابها في ورقة العمل والذي كان $\frac{5}{12}$. يوضح الشكل التالي ما قامت به تاوانا.

ولتعميم الفهم والمهارة التي توصلت إليهما تاوانا يفضل أن تقوم بحل أمثلة أخرى مثل إيجاد حاصل جمع $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}$ والتي تحتاج فيه تاوانا لأن تستخدم ١٢ جزءاً متساوياً تكون في مجموعها المربع الكبير الذي يمثل الوحدة الواحدة.

في بعض حالات الجمع قد لا يكون هناك أي علاقة بين المقامات كأن تكون مختلفة ولا يكون أحدها مضاعفاً للآخر كما في الأمثلة $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ او $\frac{2}{9}+\frac{5}{7}$. ولحل مسألة مثل $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ فإن وضع الجزء الذي يمثل $\frac{1}{2}$ مع الجزء الذي يمثل $\frac{1}{3}$ يجعل من الصعب إيجاد ناتج الجمع بشكل واضح ومفهوم كما في الشكل التالي :



ولكن يمكن لتاوانا أن تقوم بوضع الجزء الذي يمثل $\frac{1}{3}$ مع الجزء الذي يمثل $\frac{1}{2}$ بزاوية قائمة لإيجاد المنطقة المشتركة بينهما والتي تمثل المقام المشترك كما في الشكل التالي:

ومن ثم تستطيع تاوانا أن تجد الجزء الذي يمثل المنطقة الناتجة عن تقاطع النصف والثلث والذي هو السدس. وبعد ذلك اطلب من تاوانا أن تستبدل الثلث باستخدام الأسداس أي بسدسين وتستبدل النصف باستخدام الأسداس أي ثلاثة أسداس كونها تعرف ذلك. وأخيراً اطلب منها أن تضع السدسين وإلى جوارها الثلاثة أسداس على المربع الكبير لتجد بأن مجموعهما هو $\frac{5}{6}$. ويمكن ربط هذه الخوارزمية بشيء من الواقع. اطلب من تاوانا أن تكتب $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ كونها تعرف هذا وذلك بالعمل بشكل عكسي، بمعنى أن تبدأ بكتابة $\frac{\square}{6}=\frac{1}{2}$ ومن ثم تملأ الفراغ بالرقم الصحيح وهو ٣ في هذه الحالة. بعد ذلك اطلب منها أن تعمم ما تعلمته في

كتابة الكسور المكافئة وذلك بأن تجد الرقم المطلوب بضرب المقام الأصلي به لتحويله إلى المقام الجديد. لابد وأن تلاحظ تاوانا بأنها تحتاج ضرب المقام الاصلي وهو ٢ بالعدد ٣ لتحصل على العدد ٦ وهو المقام الجديد. إن قاعدة ضرب كل من البسط والمقام بالعدد نفسه يمكن تعميمها كما في الأمثلة التالية :

$$\frac{1}{2}\times\frac{\boxed{3}}{\boxed{3}}=\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{\boxed{2}}{\boxed{2}}=\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{6}$$

5

وعندما تقوم تاوانا بما سبق تستنتج بأنها تحتاج إلى مقامات مشتركة قبل أن تقوم بعملية الجمع. كما أن ضرب المقامات (3×2) سوف يؤدي إلى المقام الجديد المشترك وهو العدد ٦. ويمكن لتاوانا ان تستخدم هذه القاعدة لأي عملية جمع. ويمكن تعزيز هذه القاعدة عند الطلاب من خلال أنشطة وتمارين كتلك الموجودة في نهاية هذه الوحدة. كما أن الأنشطة من خلال الألعاب تكون فاعلة مع طلبة مثل تاوانا التي تستمتع بمثل هذه الأنشطة.

قد يتضمن أي نشط تعليمي لجمع الكسور النقاط التالية :

١-قم بتمثيل الأعداد المجموعة باستخدام أجزاء مناسبة عند وضعها على المنطقة الممثلة للوحدة الواحدة.

٢-إذا كانت جميع الأجزاء الكسرية تمثل نفس الجزء من الوحدة الواحدة (المقام) قم بعد هذه الأجزاء ومن ثم سجل العدد الكلي.

٣-إذا كانت الأجزاء الكسرية تمثل أجزاء مختلفة من الوحدة الواحدة (المقامات احدها من مضاعفات الآخر أو لا يوجد علاقة بينهما) قم باستبدال أحد الأجزاء الكسرية أو كلاهما باستخدام نفس الجزء من الوحدة الواحدة.

٤-قم بعد الأجزاء الجديدة جميعها ومن ثم سجل العدد الكلي.

الخطأ النمطي الثالث في الأعداد النسبية للطالبة تاوانا

تتضمن ورقة العمل الثالثة للطالبة تاوانا مسائل تقيس قدرتها على التعامل مع طرح الأعداد عندما تكون خليطاً بين الأعداد الصحيحة والأعداد الكسرية بمعنى طرح أعداد صحيحة من أعداد كسرية أو طرح أعداد كسرية من أعداد صحيحة أو طرح خليط من الأعداد الصحيحة والكسرية من خليط من الأعداد الصحيحة والكسرية. ولا تتضمن المسائل الحالات التي تكون فيها المقامات غير متشابهة وغير مشتركة في بعض العوامل وإنما ركزت جميعها على قياس فهمها للأعداد المكونة من خليط من الأعداد الصحيحة والكسرية وكيفية التعامل مع مثل هذه الأعداد في عملية الطرح.

تشخيص الخطأ

بداية قم بتحديد نقاط القوة التي أبدتها تاوانا في حلولها للمسائل الموجودة في ورقة العمل وقم بتحديد الأخطاء النمطية التي ارتكبها عند حلولها لتلك المسائل. ولاحظ كيفية تعاطيها مع التمارين من حيث معرفتها بالعمليات الحسابية الأخرى ومعرفتها بالأعداد الصحيحة ومن ثم دون ملاحظاتك في الفراغين التاليين:

أخطاء تاوانا النمطية:
نقاط القوة لدى تاوانا:

من الملاحظ أن تاونا تعرف القيام بعملية الطرح بشكل سليم وتعلم جيداً أنها تتعامل مع كسور ويتضح هذا من خلال إجاباتها التي كانت على شكل كسور. ولكن في المسائل رقم ١ ورقم ٢ في ورقة العمل واجهت صعوبة في إعادة تسمية العدد المطروح منه حيث إنها كتبت الجزء الكسري من العدد المطروح كما هو في ناتج

الطرح وكأن المسألة كانت جمعا بين عددين أحدهما عدد صحيح والآخر عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسري.

ورقة العمل الثالثة للطالبة تاوانا

1. 3
$-1\ \frac{1}{2}$
$2\ \frac{1}{2}$

2. 6
$-\ 3\ \frac{3}{5}$
$3\ \frac{3}{5}$

3. $\overset{3}{\cancel{4}}\ \frac{\overset{1}{1}}{3}$
$-\ 2\ \frac{2}{3}$
$1\ \frac{9}{3}$

4. $\overset{5}{\cancel{6}}\ \overset{1}{\frac{2}{9}}$
$-\ 3\ \frac{5}{9}$
$2\ \frac{7}{9}$

5. $\overset{5}{\cancel{6}}\ \overset{1}{\frac{1}{7}}$
$-3\ \frac{2}{7}$
$2\ \frac{9}{7}$

6. $7 = 6\ \frac{10}{6}$
$-\ \frac{4}{6}\quad \frac{4}{6}$
$6\ \frac{6}{6}$

أما في باقي المسائل فكانت تاوانا تستقرض عشرة كما يجب عند تعاملها مع طرح الأعداد الصحيحة مع بعضها البعض. من الواضح أن الصعوبات عند تاوانا سببها القيمة المكانية للأرقام لأنها تتبع القواعد السابقة في العدة التسمية باستقراض العشرات كما هو الحال عند التعامل مع الأعداد الصحيحة، وليس لديها القدرة

الكافية لربط الأرقام المجردة المستخدمة مع ما تعنيه عملية الطرح وكل ما تفعله هو تذكر خوارزميات سابقة واستخدامها في المكان غير المناسب.

وصف العلاج

بما أن خبرة تاوانا قليلة في التعاطي مع عملية الطرح في حالة الأعداد الكسرية فإنها بحاجة إلى العمل بالاستعانة بالمناطق المظللة أو قصاصات الورق التي يتم قصها لتوضيح عملية الطرح بين الأعداد المكونة من خليط بين الأعداد الصحيحة والأعداد الكسرية. ولا بد لها من التعامل مع الوسائل الإيضاحية والرسومات كخطوة أساسية قبل التعامل مع القواعد الخوارزمية المتبعة في الطرح في كل من الأمثلة التي ستقوم بحلها، كما يجب عليها إتباع الخطوات التالية في حلها:

١-استخدام الطرق المختلفة التي توضح ما تعنيه الأعداد الكسرية.

٢-تسجيل النتائج وخطوات العمل.

٣-ربط الرموز بالرسومات التوضيحية المستخدمة.

إعادة التأهيل والمعالجة

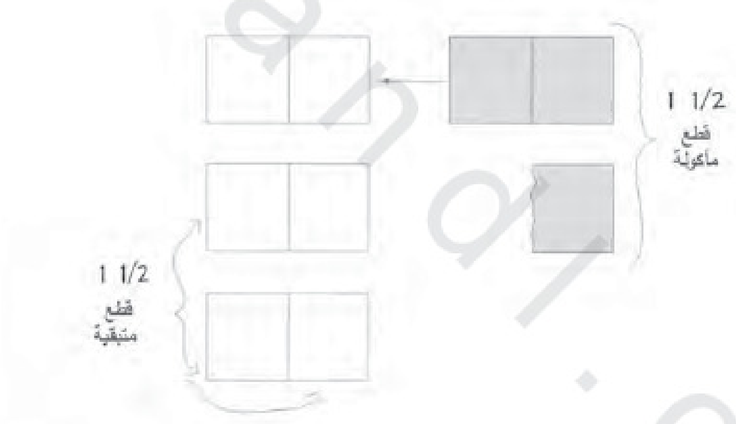
بناءً على نقاط القوة التي أبدتها تاوانا في ورقة العمل وبناءً على الأخطاء النمطية المتبعة في حلولها لمسائل ورقة العمل وبناءً على التشخيص سابق الذكر فلا بد أن تكون خطة إعادة التطوير مشابهة لتلك الموجودة في الجدول رقم (٧,٤). وبما أن المسألتين الأوليتين في ورقة العمل يحتويان التعامل مع عددين أحدهما عدد صحيح والآخر عدد مكون من خليط بين العدد الصحيح والعدد الكسري فلا بد وان يطلب من تاوانا التعامل مع مثال من واقع الحياة كأن يطلب منها مثلاً إعداد ثلاث قطع مستديرة من البيتزا ليتم تقديمها في حفلة ما بحيث يتم في هذه الحفلة تقديم قطعة بيتزا كاملة ونصف قطعة أخرى والمطلوب معرفة قطع البيتزا المتبقية.

الجدول رقم (٧,٤). خطة التطوير الرياضي رقم (٣) للطالبة تاوانا، طرح الكسور.

الوقت		٢٠ دقيقة	٢٥-٣٠ دقيقة	٣٠ دقيقة
السياق		في غرفة الصف وقريبة من صديق(+)	تجلس في مجموعة تعلمية (+)	العمل لوحدها في غرفة الصف (+)
المحتوى		إشراك الطلاب في لعبتي "الربط الدقيق بين الكسور وأسمائها بالكلمات" و" أكبر أو أصغر" والاستعانة بخط الأعداد لتمثيل خطوات العمل (+)	العمل مع مجموع من الطلاب على توليد مسائل حياتية والطلب من بقية الطلاب حلها (+)	الاستعانة بالأجزاء الكسرية في حقيبة الكسور وفي إجراء عمليات طرح الكسور ذات المقامات المتشابهة والمختلفة (+)
العمليات	المدخلات	الصف يقترح مسائل حياتية (+)	المعلم يقدم إرشادات لفظية للصف (+)	تستطيع التحدث مع المعلم حين تحتاج ذلك (+)
	المخرجات	تكتب الجواب على ورقة أو طباعة على الحاسوب (+)	المجموعة عليها تقديم عرض للصف (-)	تزويد المعلم بأسماء الفائزين (+)
السلوك	الأكاديمي	الاستعانة بالرسومات والوسائل المساعدة لتمثيل الإجابات (-)	توضيح مفهوم المطروح منه بالاستعانة بحقيبة الكسور والرسومات التوضيحية (+)	يسمح لها بمناقشة المهمة مع المعلم (+)
	الاجتماعي	العمل مع الأناث (+)	التدرب مع قرين(+)	المعلم يبقى قريباً من المنطقة التي تجلس فيها تاونا(+)
التعزيز		المعلم يمدح لفظياً ويقدم جوائز عينية (+)	المعلم يكافئ كل زوج من الطلاب (+)	المعلم يعطي تاونا وقتاً للتواصل الاجتماعي (+)

في هذه الحالة يمكن لتاوانا أن تقوم برسم ثلاث قطع مستديرة من البيتزا ومن ثم تقوم بتظليل واحدة كاملة ونصف أخرى (مقدار ما تم أكله في الحفلة) وبعد ذلك تحدد الكمية المتبقية كما في الشكل التالي :

وبإمكان تاونا أن ترسم ثلاث قطع بيتزا مستطيلة الشكل وتقوم بنفس الخطوات السابقة كما يوضح الشكل التالي :



من المؤكد أن تاوانا سوف تلاحظ أنه بقي قطعة ونصف من البيتزا وفي هذه الحالة لا بد أن تكتب حلها على الشكل :

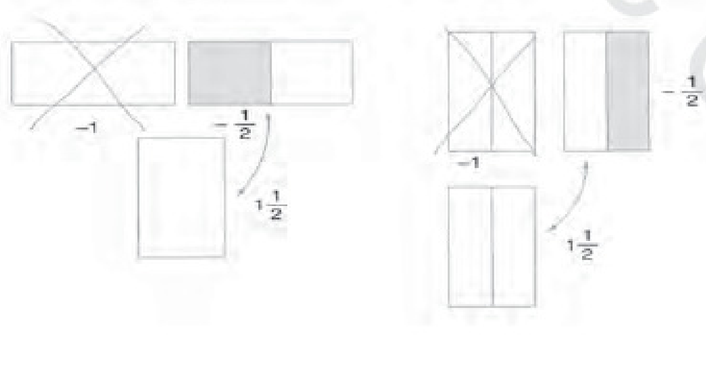
$$3-1\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$$

إلى جانب رسوماتها. ومن الممكن لتاوانا أن تكرر ما قامت به على مثال آخر كأن تقوم بطرح العدد $3\frac{3}{5}$ من العدد ٦ لتجد أن ما بقي معها هو العدد $2\frac{2}{5}$ وليس

العدد $3\frac{3}{5}$ الذي ينتج معها في حال اتبعت نفس الإستراتيجية التي نتج عنها الخطأ النمطي الذي ارتكبته في ورقة العمل والذي كانت تقوم فيه بطرح الجزء الصحيح في العدد المطروح من الجزء الصحيح في العدد المطروح منه وُتبقي على الجزء الكسري في العدد المطروح كما هو.

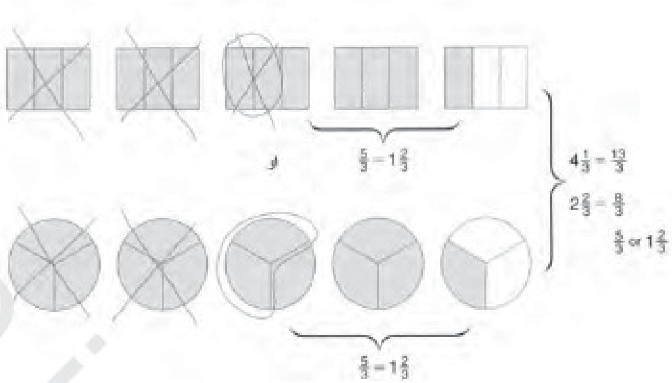
والآن يمكن أن تسأل تاوانا عن كيفية التعامل مع الأرقام دون الاستعانة بقطعة البيتزا أو الرسوم التوضيحية كأن يطلب منها إيجاد ناتج العملية $3-1\frac{1}{2}$ دون الاستعانة بأية وسائل مساعدة. من المتوقع أن تفكر في حل هذه المسألة كما يلي: بدايةً تطرح ١ من ٣ ليبقى معها ٢ ومن ثم تطرح من ٢ العدد $\frac{1}{2}$ ليبقى معها $1\frac{1}{2}$. لا شك بأن هذه الخوارزمية المبتكرة تجعل الحسابات الرقمية عند تاوانا منطقية وتقود تفكيرها في الاتجاه الصحيح. وإلا من المفيد حث تاوانا على استخدام الخوارزمية المختصرة التالية والتي تستند على إعادة تسمية العدد ٣ ليصبح على الشكل $2\frac{2}{2}$ وبعد ذلك تقوم بطرح $1\frac{1}{2}$ منه كما يوضح الشكل التالي:

الخوارزمية المختصرة	الخوارزمية المخترعة
$\begin{array}{rcr} 3 & = & 2\ 2/2 \\ -\ 1\ 1/2 & = & 1\ 1/2 \\ \hline & & 1\ 1/2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ -\ 1\ 1/2 \\ \hline 2 \\ -\ 1/2 \\ \hline 1\ 1/2 \end{array}$

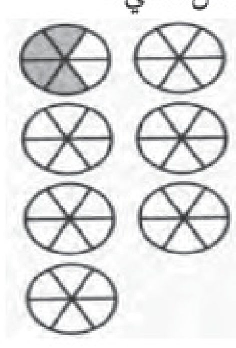


أما بخصوص المسائل ٣ و ٤ و ٥ في ورقة العمل فالمطلوب في كل منها طرح عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسري من عدد آخر مكون أيضاً من عدد صحيح وآخر كسري. وقد كشف حلها لهذه المسائل بأنها قامت وكما هو الحال مع الأعداد الصحيحة باستقراض واحد من الجزء الصحيح في العدد المطروح منه وإضافته كعشرة إلى بسط الجزء الكسري من العدد المطروح منه أيضا ومن ثم قامت بالطرح. إن مثل هذه الأخطاء ذات دلالة بالنسبة للطلبة عندما يقومون باستخدام قواعد تعلموها سابقاً وتوظيفها في خبراتهم الجديدة.

والآن يمكن لتاوانا التحقق ما إذا كانت إجاباتها صحيحة أم لا من خلال الاستعانة بالرسومات التوضيحية. وبما أن تاوانا لا تحبذ تصحيح أخطائها بشكل مباشر دون التفسير والسياق المقنع بالنسبة لها فمن المفضل عدم إخبارها مسبقاً بالمسائل التي أجابتها بشكل صحيح والتي أجابتها بشكل خاطئ في ورقة العمل ويحبذ ترك المجال لها لتكتشف ذلك بنفسها. وفي تلك الحالة يكون لديها فرصة في تصحيح خوارزميتها بنفسها وذلك من خلال العمل بالرسومات التوضيحية أولاً ثم الانتقال إلى الأرقام المجردة دون استخدام أي وسائل مساعدة. فعلى سبيل المثال لو قامت تاوانا بإعادة حل المسألة رقم 3 في ورقة العمل والتي كانت إيجاد ناتج العملية $4\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}$ وذلك بالاستعانة بالرسوم التوضيحية فمن المتوقع أن يكون عملها على النحو التالي :



وعليه تكون الإجابة الصحيحة هي $1\frac{2}{3}$ وليس $1\frac{1}{3}$ كما أجابت سابقا في ورقة العمل. في هذه الحالة لا بد وأن يطلب منها إعادة تسمية الأعداد المستخدمة لتصبح بدلالة الثلث. بمعنى إعادة تسمية العدد $4\frac{1}{3}$ ليصبح $\frac{13}{3}$ ويعاد تسمية العدد $2\frac{2}{3}$ ليصبح $\frac{3}{8}$ ومن ثم تنفذ عملية الطرح لتجد بأن الناتج هو $\frac{5}{3}$ والذي يمكن تبسيطه ليكون $1\frac{2}{3}$. وبناءً على ما تقدم لابد لتاوانا بأن تدرك بأن كتابة الأعداد المكونة من جزء صحيح وآخر كسري على شكل كسر فقط يسهل وبشكل فاعل عملية الطرح ويؤدي بالضرورة إلى إجابات صحيحة. وأخيراً وبخصوص عملية طرح عدد كسري من عدد صحيح مثل المسألة $7 - \frac{4}{6}$ يمكن أن تتم إعادة التأهيل بالاستعانة برسوم كما هو في الشكل التالي:



وفي هذه الحالة سوف تجد تاوانا بأن ناتج الطرح هو $\frac{38}{6}$ أو $6\frac{2}{6}$. والآن يمكن لتاوانا أن تستخدم خوارزمية تحويل العدد الصحيح إلى عدد مكون من جزء صحيح وآخر كسري وبعد ذلك تقوم بتنفيذ عملية الطرح.

من المهم جداً أن تطلب من تاوانا أن تُكون عدداً من المسائل بطريقتها الخاصة وبسياق قصصي يفسر سبب استخدامها للأرقام المستخدمة في هذه المسائل ذلك لأن مثل هذه الوسائل تساعد كثيراً في اختبار الفهم والمهارة عندها. وبما أن تاوانا تفضل العمل ضمن مجموعات صغيرة أو على مبدأ الواحد لواحد فمن الواجب تشجيعها على اختيار صورة من مجلة ما والطلب منها تأليف قصة بخصوصها وتطبيقها على مسألة من مسائل طرح الكسور ويجب أن تبين الصورة جواب المسألة أو يمكن لتاوانا أن ترسم صورة تظهر الجواب. إن مثل هذه الإستراتيجيات تساهم بشكل كبير وممتاز في فهم الطالب الحسي للأرقام الكسرية بشكل عام وتساعد كثيراً في تنفيذه لعملية الطرح بين الأعداد المكونة من جزء صحيح وآخر كسري.

الخطأ النمطي الرابع للطالبة تاوانا في الأعداد الكسرية :

تركز ورقة العمل الرابعة على عملية الضرب حيث يطلب فيها من تاوانا العمل على ضرب الكسور العادية مع بعضها وضرب الكسر العادي مع الكسر المركب ومن ثم ضرب الكسر المركب مع الكسر المركب. وسوف تكشف هذه المسائل إذا ما كانت تاوانا بضرورة توحيد المقامات في عملية الضرب أم لا (الجواب طبعاً لا).

تشخيص الخطأ

بداية يجب تحديد نقاط القوة لدى تاوانا وتحديد الأخطاء النمطية المتبعة في حلولها مع الأخذ بعين الاعتبار فهمها لعملية الضرب وضرب الكسور وبعض

الحقائق الأساسية المعروفة ومن ثم دون ملاحظاتك بالفراغين التاليين :

أخطاء تاوانا النمطية :
نقاط القوة لدى تاوانا :

من خلال تفحص حلول تاوانا في ورقة العمل نلاحظ بأنها تستطيع إيجاد ناتج الضرب للأعداد الصحيحة بشكل صحيح وتدرك بأن إجاباتها للمسائل تكون أعداداً كسرية ، إلا أنها وفي حالة ضرب الكسور العادية نجدها تقوم بالضرب وكأن العملية هي الجمع بمعنى أنها تقوم بتوحيد المقامات قبل تنفيذ عملية الضرب. كما أنها تقوم بضرب الأعداد الصحيحة والكسرية بشكل منفصل مع إدراكها بشكل بسيط بأن الأعداد المركبة تمثل مقداراً واحداً. يبين الجدول رقم (٧,١) ورقة تحليل البيانات للطالبة تاوانا في عملية الضرب.

وصف العلاج

تحتاج تاوانا لأن تستخدم حقيبة الأعداد الكسرية والرسوم التوضيحية لإيجاد نواتج الضرب الصحيحة وبما أنها تحبذ المسائل العملية فمن المفيد أن يتم تأهيلها في عملية ضرب الكسور من خلال مسائل من واقع الحياة. وعند حلها للمسائل المتضمنة في ورقة العمل بشكل صحيح من المفيد حثها على مقارنة إجاباتها هذه مع إجاباتها السابقة عندما وحدت فيها مقامات الكسور أو عندما تعاملت مع الكسور المركبة المستخدمة في الضرب على أنها مكونة من أربعة أجزاء منفصلة. وفي حال قيامها بتلك المقارنات تسنح لها الفرصة بأن تطور أسلوباً خاصاً بها لتفسير إجاباتها الصحيحة وما تعنيه عمليات ضرب الكسور.

سؤال : ما السؤال الأكثر شيوعاً بين الطلاب بخصوص حساب الكسور؟

جواب : هل احتاج توحيد المقامات؟

إعادة التأهيل والمعالجة

يبين الجدول رقم (٧,٥) خطة التطوير الرياضي للطالبة تاوانا. ومن المهم أن تعطى هذه الطالبة موقفاً من الحياة العملية تستخدم فيه ضرب الكسور كما في المثال التالي:

الجدول رقم (٧,٥). خطة التطوير الرياضي رقم (٤) للطالبة تاوانا، ضرب الكسور.

الوقت		٢٠ دقيقة	٢٥-٣٠ دقيقة	٣٠ دقيقة
السياق		في غرفة الصف وقريبة من صديق (+)	تجلس لوحدها (+)	تمارس الألعاب مع زملائها في الصف (+)
المحتوى		العمل على مفهوم ضرب الكسور وذلك بتجميع القطع من حقيبة الكسور(+)	تسأل الطلاب الآخرين لحل مسائل على ضرب الكسور من كل نوع (+)	لعب لعبة Shaping Computation ولعبة Bingo للتدرب (+)
العمليات	المدخلات	تستخدم أمثلة قامت هي بكتابتها (+)	المعلم يقدم الإرشادات لفظياً لطلاب الصف (+)	تستطيع التحدث مع المعلم حين تحتاج ذلك (+)
	المخرجات	استخدام مجموعة من الوسائل المساعدة (+)	تقديم عرض للمعلم (+)	الفائزون يحصلون على جوائز (+)
السلوك	الأكاديمي	تستخدم مسائل مكتوبة من قبل الطلاب (+)	تحب استخدام الكلمات للتعبير عن نفسها (+)	يسمح لها بمناقشة الألعاب مع المعلم (+)
	الاجتماعي	تعمل لوحدها (+)	منشغلة لوحدها(+)	المعلم يبقى قريباً من المنطقة التي تجلس فيها تاونا(+)

تابع الجدول رقم (٧,٥).

التعزيز	المعلم يمدح لفظياً ويقدم جوائز عينية(+)	المعلم يكافئ تاوانا بجعلها تقود اللعب في المرحلة اللاحقة(+)	المعلم يعطي تاونا وقتاً للعب مزيداً من الألعاب(+)

ورقة العمل الرابعة للطالبة تاوانا

1. $\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{5}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{30}{10}$

2. $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{12}{15}\times\frac{10}{15}=\frac{120}{15}$

3. $4\frac{2}{4}\times 5=4\frac{2}{4}\times\frac{20}{4}=4\frac{40}{4}$

4. $6\times\frac{2}{3}=\frac{18}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{36}{3}$

5. $2\frac{2}{3}\times 3\frac{3}{4}=2\frac{8}{12}\times 3\frac{9}{12}=6\frac{72}{12}$

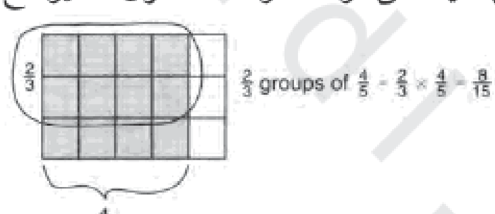
6. $4\frac{3}{7}\times 5\frac{2}{9}=4\frac{27}{63}\times 5\frac{14}{63}=20\frac{378}{63}$

أبقى صديقي $\frac{3}{5}$ قطعة بيتزا بعد انتهاء الحفلة التي دعوت فيها أصدقائي. وفي المساء شعرت بالجوع وقررت أن آكل نصف ما أبقاه صديقي من قطعة البيتزا. سؤالي هو ما مقدار ما سوف آكله مما تبقى من قطعة البيتزا تلك؟

باستخدام حقيبة الأعداد الكسرية في حل أول مسألتين في ورقة العمل ما على تاوانا سوى أن تقوم بوضع ثلاثة أخماس على المربع الكبير (الممثل للوحدة الواحدة) تمثل ما بقي من قطعة البيتزا عند انتهاء حفلتها، ووضع نصف على مربع كبير آخر (ممثل للوحدة الواحدة) تمثل مقدار ما تفكر في أكله من باقي قطعة البيتزا تلك.

يوضح الشكل ما قامت بعمله بالاستعانة بحقيبة الأعداد الكسرية:

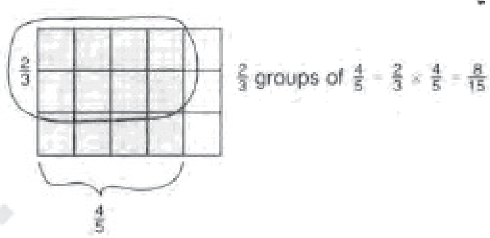
والآن لمعرفة مقدار ما ستأكله ما عليها سوى أن تضع نصف الوحدة الواحدة فوق الثلاثة أخماس المعينة على الوحدة الواحدة الأخرى كما يوضح الشكل التالي:



ويعدّ القطع الموجودة داخل الدائرة الموضحة في الرسم أعلاه (التي تمثل نصف المجموعة المكونة من ثلاثة أخماس) تجد بأن مقدار ما ستأكله من قطعة البيتزا تلك يساوي ثلاثة أعشارها. ومن خلال ما سبق تستنتج تاوانا بأنه في عملية ضرب الكسور العادية يتم ضرب البسوط معاً وضرب المقامات معاً.

أما بخصوص المسألة الثانية في ورقة العمل فيمكن لتاوانا أن تستعين بحقيبة الأعداد الكسرية في حلها بنفس الطريقة السابقة وذلك بأن تضع ثلثي الوحدة

الواحدة فوق أربعة أخماس الوحدة الواحدة الأخرى لتجد ناتج ضرب $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$ كما يوضح الشكل التالي:



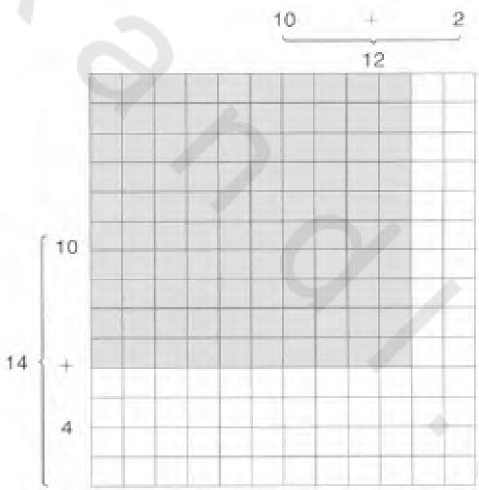
وبعد القطع الموجودة داخل الدائرة في الرسم أعلاه تجد بان ناتج الضرب هو $\frac{8}{15}$.

إن قيام تاوانا بمقارنة حلها الذي تم بالاستعانة بحقيبة الأعداد الكسرية مع حلها الذي اتبعته في ورقة العمل يضعها في تناقض واضح مما يتيح لها فرصة التأكد بأن الإستراتيجية التي اتبعتها في ورقة العمل والتي كانت توحد فيها المقامات قبل إجراء الضرب هي إستراتيجية خاطئة.

أما بخصوص مسائل رقم ثلاثة وأربعة في ورقة العمل فإنها تتضمن عمليات ضرب كسور مركبة (مكونة من جزء صحيح وآخر كسري). ومن الشائع كما فعلت تاوانا أن يقوم الطالب بضرب الأجزاء الصحيحة في كلا العددين مع بعضهما وأن يقوم بضرب الأجزاء الكسرية في العددين مع بعضهما أيضاً كل على حدا. إن مثل هذا النمط من الأخطاء يشبه ذلك الذي يحدث عند ضرب عددين مكونين من خانتين والذي يقوم فيه الطالب بضرب الخانات المتناظرة بشكل منفصل معتقداً بأن الآحاد والعشرات غير مترابطات وعليه فانه يضرب أحاد العددين معا بشكل منفصل. والمثال التالي يوضح ما ذكرناه سابقاً بخصوص ضرب الكسور المركبة:

$$2\,2/3 \times 3\,3/4 = (2 \times 3) + (2/3 \times 3/4)$$
$$4\,3/5 \times 6\,1/2 = 4 \times 6 + (3/5 \times 1/2)$$

من الأفضل لتاوانا أن تبني مفهوماً خاصاً بها لما يعنيه ضرب كافة العوامل مع بعضها البعض ويحبذ كخطوة أولى أن تبدأ بإيجاد ناتج ضرب عددين صحيحين ثنائي الخانات كونها تملك خبرة كافية للتعامل مع الأعداد الصحيحة كأن تبدأ بإيجاد ناتج الضرب 14×12. ولتستعين بالمصفوفات في إيجاد ناتج الضرب هذا وذلك بتكوين مصفوفة مكونة من 12 عموداً و ١٤ صفاً وتقوم بعد الخانات التي تحتويها هذه المصفوفة والذي هو 168. ومن ثم تقارن هذا الجواب مع الجواب المختلف الذي تحصل عليه في حال ضربها للخانات المتناظرة في العددين 12 و 14 بشكل منفصل أي أن تجد نواتج الضرب 4×2 و 10×10 وتجمع الجوابين مستعينة بالمصفوفات على الشكل التالي:



والآن لتقم تاوانا بالانتقال إلى ضرب الكسور المركبة وربطها بالآلية التي قامت فيها بضرب الأعداد الصحيحة ثنائية الخانة. ولتبدأ بكتابة المسألة $3\frac{3}{4}\times2\frac{2}{3}$ على الشكل $(3+\frac{3}{4})\times(2+\frac{2}{3})$ كما فعلت سابقاً عند كتابة المسألة 12×14 على الشكل $(4+10)\times(2+10)$. لأن هذا يقودها إلى الآلية الصحيحة في إيجاد الجواب والذي هو إيجاد ناتج العمليات $(2\times3)+(2\times\frac{3}{4})+(\frac{2}{3}\times3)+(\frac{2}{3}\times4)$.

في الواقع إن تجزئة العملية الأصلية إلى عدد كبير من العمليات قد يؤدي إلى أخطاء حسابية وتعقيدات أكثر إلا أن الهدف مما سبق هو مساعدة تاوانا على فهم ما يعنيه ضرب الكسور المركبة من الأساس. أما بخصوص إيجاد نواتج ضرب الكسور المركبة فيحبذ أن تقوم الطالبة أولاً بتحويل هذه الكسور إلى كسور عادية ومن ثم تقوم بتنفيذ عملية الضرب ذلك لأن مثل هذه الإستراتيجية تكون أكثر فاعلية مما أوضحناه سابقاً كما يبين المثال التالي :

$$2\ 2/3 = 8/3 \qquad \frac{8}{3} \times \frac{15}{4} = \frac{120}{12}$$
$$3\ 3/4 = 15/4$$

إن أي نشاط تعليمي بخصوص عملية ضرب الكسور لا بد وأن يتضمن ما يلي :

١-تمثيل المعامل الثاني الذي يمثل الجزء المطلوب ضربه على المنطقة الممثلة للوحدة الواحدة.

٢-تمثيل المعامل الأول الذي يمثل مقدار ما هو مأخوذ من المعامل الثاني فوق المنطقة الممثلة للمعامل الثاني.

٣-عد المقدار الممثل للمنطقة المشتركة بين المنطقتين في ٢ والتي تمثل جزءاً من الجزء.

الخطأ النمطي الخامس للطالبة تاوانا في الأعداد النسبية

تتضمن ورقة العمل الخامسة عدة مسائل طلب من تاونا فيها إجراء قسمة كسر عادي على كسر عادي وإيجاد ناتج قسمة كسر مركب على كسر مركب. ومن المهم التأكد ما إذا كان الخطأ الذي ترتكبه تاوانا في إحدى المسائل يشابه خطأها في أي مسألة أخرى من نفس النوع بحيث يسهل تحديد الأخطاء النمطية المرتكبة من قبل تاوانا في ورقة العمل هذه.

تشخيص الخطأ

قم بتحديد نقاط القوة والأخطاء النمطية التي تظهرها حلول تاوانا لمسائل ورقة العمل من حيث فهمها لعملية القسمة وما تعنيه قسمة الأعداد الكسرية ، ومن ثم دون ملاحظاتك في الفراغين التاليين :

أخطاء تاوانا النمطية :
نقاط القوة لدى تاوانا :

ورقة العمل الخامسة للطالبة تاوانا

1. $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

2. $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{12}$

3. $4\frac{2}{4} \div 5 = 4\frac{4}{2} \times \frac{5}{1} = 4\frac{20}{2}$

4. $3 \div \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{18}$

5. $2\frac{2}{3} \div 3\frac{3}{4} = 2\frac{3}{2} \times 3\frac{4}{3} = 6\frac{12}{6}$

6. $4\frac{3}{7} \div 5\frac{2}{9} = 4\frac{7}{3} \times 5\frac{9}{2} = 20\frac{63}{6}$

من الملاحظ أن تاوانا تعلم أنه عند قسمة الأعداد الكسرية فإن عليها أن تلجأ إلى مقلوب الكسر وتحويل العملية إلى الضرب إلا أنها لا تعرف لماذا وكيف يتم ذلك ويتضح هذا من خلال استخدامها لمقلوب المقسوم أو لمقلوب الكسرين بشكل خاطئ عند تحويل عملية القسمة إلى الضرب. وهذا يؤكد على أنها تفهم بشكل محدد خوارزمية قسمة الكسور وتتذكر بأن عليها استخدام مقلوب أحد الكسور ولكنها غير متأكدة ما إذا كان مقلوب المقسوم أو المقسوم عليه. أما بخصوص نواتج الضرب في الخطوة الثانية من خوارزمية القسمة فإن تاوانا أجابت عليها بشكل صحيح. وبخصوص ورقة تحليل البيانات الخاصة بأدائها في ورقة العمل الخاصة فإنها تشبه تلك الموجودة في الجدول رقم (٧,١).

إعادة التأهيل والمعالجة

يبين الجدول رقم (٧,٦) خطة التطوير الرياضي للطالبة تاوانا لتحسين فهمها لقسمة الأعداد الكسرية وقدرتها على حسابها. ومن المهم أن يبدأ العمل معها من خلال مسألة من واقع الحياة تحتاج فيها إلى إيجاد ناتج قسمة أعداد كسرية كما في المثال التالي:

الجدول رقم (٧,٦). خطة التطوير الرياضي رقم (٥) للطالبة تاوانا، خطة تطوير رياضي لقسمة الكسور.

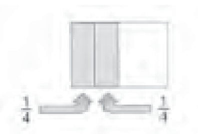
الوقت	٣٠-٣٥ دقيقة	٢٠-٢٥ دقيقة	٣٠ دقيقة
السياق	في غرفة الصف وقريبة من صديق (+)	تجلس في مجموعة تعلمية (+)	تمارس الألعاب مع زملائها في الصف ومع شريك (+)

تابع الجدول رقم (٧,٦).

المحتوى		تمييز القطع الموجودة في حقيبة الكسور وتمثيلها بالرمز المناسب (+)	إيجاد حلول للمسائل المطروحة من طلاب الصف ومن طلاب مجموعتها (+)	ممارسة لعبتي "الكسور المتكافئة على طريقة القمار" و "حساب الاشكال" للتدرب على القسمة (+)
العمليات	المدخلات	تحل مسائل من كتابة طلاب الصف (+)	المعلم يقدم الإرشادات لفظياً لطلاب الصف (+)	تستطيع التحدث مع المعلم حين تحتاج ذلك (+)
	المخرجات	تسجيل الإجابات (+)	توضح طريقة الحل للمعلم (+)	تسجل النتائج (+)
السلوك	الأكاديمي	استخدام مسائل في سياق قصصي من صنع الطلاب (+)	تحب استخدام الكلمات للتعبير عن نفسها (+)	يسمح لها بمناقشة المهمة مع المعلم (+)
	الاجتماعي	تعمل مع شريك من الإناث (+)	تتلقى التعزيز من شريكها (+)	المعلم يبقى قريباً من المنطقة التي تجلس فيها تاونا (+)
التعزيز		المعلم يمدح لفظياً ويقدم جوائز عينية (+)	المعلم يكافئ المجموعة بمنحهم درجات إضافية (+)	المعلم يعطي تاونا وقتا للعب مزيد من الألعاب (+)

افرض أن لديها نصف قطعة من الكيك، وافرض أن لديها عدد من الأصدقاء يحتاج كل واحد منهم أن يأكل ربع قطعة الكيك كاملة فما هو العدد الكلي لهؤلاء الأصدقاء؟

في هذه المسألة يجب على تاوانا أن تبدأ بتحديد نصف المربع الكبير الذي يمثل الوحدة الواحدة على أنه يمثل نصف قطعة الكيك التي لديها ومن ثم تقوم بتجزئة هذا النصف إلى أرباع كما في الشكل التالي :



ومن ثم تقوم بمقارنة هذا بما فعلته عند حلها لهذه المسألة في ورقة العمل أي عندما وجدت أن ناتج القسمة فيها يساوي ناتج عملية الضرب $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$ والتي كان جوابها هو $\frac{1}{8}$ وهو جواب خاطئ. والآن وللتعبير عن الموقف المذكور في المسألة السابقة بدلالة الأرقام فإن المطلوب في المسألة هو إيجاد ناتج قسمة العدد $\frac{1}{2}$ على العدد $\frac{1}{4}$ أي إيجاد ناتج العملية .

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

ولإيجاد الجواب اطلب من تاوانا أن تقوم بضرب المقام بمقلوبة لتحصل على العدد واحد وللحفاظ على المساواة يجب عليها أن ضرب نفس هذا المقلوب بالبسط أي أن :

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{2}=\frac{4}{2}=2}{\frac{1}{4}\times\frac{4}{1}=\frac{4}{4}=1=1}$$

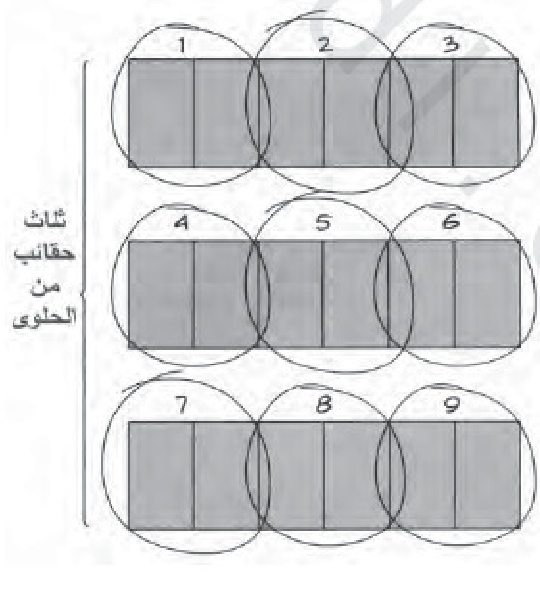
وتلخيص ما قامات به هو أنها ضربت البسط وهو العدد $\frac{1}{2}$ بمقلوب المقام وهو العدد $\frac{4}{1}$ لتحصل على الجواب $\frac{4}{2}$ أو ٢. وهو الجواب الصحيح لهذه المسألة. ويبين المثال التالي حلاً لمسألة مشابهة للمسألة السابقة :

$$\frac{\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1} = \frac{10}{9}$$

أما بخصوص مساعدة تاوانا في تصحيح أخطائها عند قسمة عدد صحيح على عدد كسري فإنه يمكن تذكيرها بالمثال الذي يتضمن قسمة العدد $\frac{1}{2}$ على العدد $\frac{1}{4}$ والذي تعلمت فيه القيام بضرب العدد المقسوم بمقلوب العدد المقسوم عليه لإيجاد ناتج القسمة. ومن ثم يطلب منها العمل على حل المثال التالي:

افرض أن لديها ثلاث ألواح من الحلوى وافرض أنه طلب منها تقسيم هذه الألواح إلى ألواح صغيرة بحيث تحتوي كل منها على سدسي ما تحتويه اللوح الواحدة من أصل ثلاثة ألواح لديها. والمطلوب هو إيجاد عدد هذه الألواح الصغيرة.

يمكن لتاوانا أن تبدأ العمل على حل هذه المسألة بالاستعانة بالرسم التالي:



ومن ثم تلاحظ تاوانا بأنها سوف تقوم بعد تسع حصص تمثل كل منها سدسي اللوح الواحد من ثلاثة ألواح لديها وباستخدام الخوارزمية نفسها سوف تسجل حلها على الشكل :

$$\frac{3}{1} \div \frac{2}{6} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{2}{6}} = \frac{\frac{3}{1}.\frac{6}{2}}{\frac{2}{6}.\frac{6}{2}} = \frac{18}{\frac{2}{1}} = \frac{9}{1}$$

وعند قيام تاوانا بحل مسألة مثل قسمة العدد ٦ على العدد $\frac{1}{2}$ مستخدمة نفس الإستراتيجية السابقة لتحصل على الجواب ١٢ سوف يتعزز عندها حقيقة أن عملية القسمة تتحول إلى ضرب العدد المقسوم بمقلوب العدد المقسوم عليه. أما بخصوص قسمة كسر مركب على كسر مركب آخر كما في المسألة $3\frac{3}{4} \div 2\frac{2}{3}$ (مثال ٦) فإنه من المهم لتاوانا أن تقوم أولاً بتحويل هذين الكسرين إلى كسرين عاديين ومن ثم تستخدم نفس الإستراتيجية السابقة في إيجاد ناتج القسمة. وفي حال اتباعها لهذه الخطوات فإنها ستقوم بتحويل $2\frac{2}{3}$ الى $\frac{8}{3}$ وتحويل $3\frac{3}{4}$ الى $\frac{15}{4}$ ومن ثم تقوم بحساب ناتج القسمة باتباع الخوارزمية السابقة التي تحول فيها القسمة إلى ضرب.

ملخص لإستراتيجيات التدريس

من الضروري خلال الدروس والأنشطة المتعلقة بالعدد النسبي التأكيد على إدراك المفاهيم والقدرة على اتباع الخوارزميات وتنفيذها من قبل الطلاب. كما أن الاستعانة بالرسوم التوضيحية والوسائل المساعدة يجب أن تكون من المكونات المهمة في الدرس الواحد حتى يتمكن الطالب من إدراك ما يعنيه العدد الكسري واكتساب مهارة الحساب في الأعداد النسبية. ذلك أن الربط المباشر بين الأمثلة الرياضية

والمسائل العملية من واقع الحياة وكذلك الربط بين الأرقام والأشياء المحسوسة يؤسس لفهم أعمق وقدرة مميزة على الحساب.

ويجب أن تدرس الكسور من خلال الأسلوب التدريسي الذي يعتمد على الإعداد المسبق بأسلوب متدرج من حيث تطوير المفهوم. كما أن استخدام فكرة الجزء من الوحدة الواحدة يسهل عملية الفهم للكسور، ويجب البدء به قبل الانتقال إلى توضيح المفاهيم باستخدام المجموعات وخط الأعداد.

وفي حال إدراك الطالب لمفهوم العدد الكسري يبدأ معه العمل على الحساب في هذه الأعداد وبخصوص عمليتي الجمع والطرح في هذه الأعداد يجب البدء مع الطالب بالمسائل التي تتضمن كسوراً ذات مقام مشترك ومن ثم الانتقال به إلى مسائل تتضمن كسوراً مقام أحدها من مضاعفات مقام الكسر الآخر مثل $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ أو $\frac{1}{2}-\frac{5}{12}$ ومن ثم الانتقال به إلى مسائل مثل $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ أو $\frac{1}{2}-\frac{4}{7}$ والتي يحتاج فيها الطالب إلى إعادة تسمية الكسور لتكون ذات مقام مشترك. وبخصوص عمليتي الضرب والقسمة فلاشك أن التعامل فيها مع مسائل تتضمن كسوراً عادية أسهل من التعامل مع مسائل تتضمن كسوراً مركبة.

وفي حال تمكن الطالب من فهم الأعداد الكسرية وتسمياتها المختلفة يجب أن يتم تدريسه العمليات الحسابية في هذه الأعداد بالاستعانة بالمواد الحسية والرسوم التوضيحية ومن خلال التفاعل معه ومناقشة حلوله وحثه على تفسير إجاباته والتحقق من صحتها ومنطقيتها.

أنشطة تدريسية

نشاط ١: تركيب الكسور العادية بالاستعانة بحجري نرد

يمكن أن يشارك في هذا النشاط مجموعات مكونة من ثلاث أو أربع طلاب.

الهدف

ترتيب الكسور العادية من الأصغر إلى الأكبر.

المواد

ورقة ، قلم رصاص ، حجري نرد بلونين مختلفين لكل مجموعة.

الإرشادات

١-تقوم كل مجموعة بطي الورقة إلى نصفين ومن ثم طي الناتج مرة أخرى إلى نصفين (يؤدي هذا إلى الحصول على أربعة أعمدة).

٢- تكتب أسماء اللاعبين الأربعة في الجزء الأعلى من الأعمدة الأربعة.

٣- يمثل أحد حجري النرد البسط ويمثل الآخر المقام في كل مجموعة.

٤- يقوم الطالب الأول في المجموعة برمي حجر النرد الذي يمثل البسط ويسجل الرقم الذي يحصل عليه على أنه بسط الكسر الأول ومن ثم يقوم نفس الطالب برمي حجر النرد الآخر الذي يمثل المقام ويسجل الرقم الذي يحصل عليه على انه مقام الكسر الأول. على سبيل المثال لو كان الرقم الذي حصل عليه الطالب من رمي حجر النرد الأول هو ٣ وكان الرقم الذي حصل عليه من رمي حجر النرد الثاني هو ٤ فإن الطالب يقوم في هذه الحالة بتسجيل الكسر $\frac{3}{4}$ في العمود الذي يمثل اسمه.

٥-يكرر كل من الطالب الثاني والثالث والرابع في المجموعة نفسها ما قام به الطالب الأول وتستمر اللعبة إلى أن يحصل كل من الطلاب الأربعة على عشرة كسور عادية.

٦-يقوم كل من الطلاب الأربعة بترتيب الكسور العشرية التي حصل عليها من الأصغر للأكبر أو من الأكبر للأصغر.

٧-يحصل كل طالب في حال كان ترتيبه صحيحاً على نقطة واحدة.

٨-في نهاية النشاط يكون الفائز هو الذي يحصل على أكبر عدد من النقاط في المجموعة.

نشاط ٢: اسحب كسراً

يمكن أن يشارك في هذا النشاط مجموعات مكونة من طالبين.

الهدف

يعزز هذا النشاط مفهوم جزء من كل ومفهوم الكسور المتكافئة.

المواد

- مكعب مرقمة أوجهه بالأرقام 1/2 ، 1/3 ، 2/3 ، 1/4 و 3/4 أما على الوجه الأخير فمكتوب عبارة "احذف واحداً".
- ٢٤ قطعة صغيرة متماثلة لكل لاعب في المجموعة.

الارشادات

١- يضع كل لاعب القطع الأربع وعشرين التي يمتلكها أمامه.

٢-يقوم اللاعب الأول في المجموعة برمي المكعب ويمثل الكسر الذي يحصل عليه النسبة التي سوف يأخذها من الأربع وعشرين قطعة التي يمتلكها اللاعب الآخر، بمعنى أنه لو قام الطلب (أ) برمي المكعب وحصل على الكسر $\frac{1}{4}$ فإنه سوف يأخذ من الطالب الآخر ربع الأربع وعشرين قطعة التي يمتلكها أي ست قطع ليصبح

لدى اللاعب الآخر ١٨ قطعة فقط. وذلك لأن ربع الأربع وعشرين يساوي $\frac{6}{24}$ أي أن $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$. وإذا ما قام الطالب (ب) برمي المكعب وحصل على الكسر $\frac{1}{2}$ فإنه سوف يأخذ من الطالب (أ) ما مقداره نصف الأربع وعشرون قطعة التي يمتلكها أي اثنتا عشرة قطعة ليبقى لديه مثلها فقط وذلك لأن نصف الأربع وعشرين يساوي 12 أي أن $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$. وفي حال حصول أي من اللاعبين عند رمي المكعب على عبارة "احذف واحداً" فإن اللاعب الذي قام بالرمي سيأخذ في هذه الحالة قطعة واحدة من القطع التي يمتلكها اللاعب الآخر.

٣-تستمر اللعبة إلى أن يبقى لدى أحد اللاعبين قطعة واحدة فقط وفي هذه الحالة يكون هو الخاسر.

يمكن التعديل على هذا النشاط بإحدى الطرق التالية :

١-تغيير الكسور المكتوبة على أوجه المكعب.

٢-تغيير عدد القطع الصغيرة المتماثلة التي يمتلكها كل لاعب في بداية النشاط.

٣-يمكن للاعبين الاستعانة بورقة وقلم رصاص أو بأله حاسبة لتساعدهم على إيجاد الكسور المتكافئة أثناء اللعب.

نشاط ٣: التحريك على خط الأعداد

يمكن أن يشارك في هذا النشاط جميع طلبة الصف.

الهدف

تعزيز تعامل الطلاب مع خط الأعداد وتعزيز فهمهم للمفهوم الخطي للكسور العادية.

المواد المستخدمة

ورق غير مسطر أو شريط ملصقات.

الإرشادات

١- تقسيم خط الأعداد إلى مضاعفات العدد سدس $\left(\frac{1}{6}\right)$ أو أي كسر آخر متفق عليه مسبقاً.

٢- يقوم كل طالب بتحريك المؤشر على خط الأعداد لإيجاد قيمة الكسر المفقود. على سبيل المثال في رقم ١ في الأسفل يبدأ الطالب حركته من عند الموضع الذي يمثل الكسر $\left(\frac{1}{6}\right)$.

٣- يقوم الطلاب بملء الفراغ الموجود في كل من العبارات الأربع (في الأسفل) ومن ثم يقومون بتسليم حلولهم إلى المعلمة.

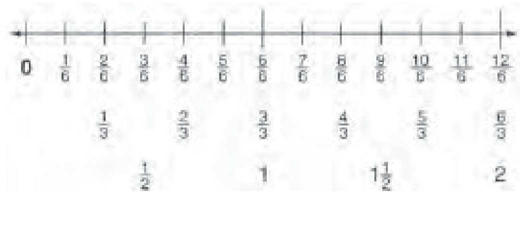
$$1.\ \frac{5}{6}-\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=------$$

$$2.\ \frac{3}{6}+\frac{5}{6}-\frac{2}{6}+------=\frac{8}{6}$$

$$3.\ ----+\frac{1}{6}-\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=1\frac{1}{2}$$

$$4.\ 1\frac{5}{6}-(---)+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=1\frac{5}{6}$$

توضيح



نشاط ٤: اصنع علماً

يعد هذا النشاط مناسباً لجميع طلبة الصف.

الهدف

تعزيز إدراك الطلاب لمفهوم الأجزاء الكسرية من الوحدة الواحدة.

المواد

قطعة من الورق المقوى، قلم رصاص، مسطرة، صمغ، مصاصة عصير وقاعدة تثبيت إسفنجية.

الإرشادات

١- يختار الطلاب أحد الكسور ليعبر عن علمهم وباستخدام القلم والمسطرة يقوم الطلاب بتقسيم قطعة الورق المقوى إلى أجزاء كسرية تبعا لهذا الكسر على سبيل المثال يمثل العلم " أرض النصف" والعلم "أرض الربع" والعلم " أرض الثلث" وهكذا على النحو التالي:

٢- بعد تقسيم الورقة يقوم الطلاب بتلوين كل جزء بلون مختلف.

٣- على ورقة أخرى مماثلة يقوم الطلاب بكتابة اسم بلد بدلالة الكسر الذي اختاروه وكتابة قصة متعلقة بهذا البلد. على سبيل المثال "اكتب عن بلد "أرض الربع" التي يعيش سكانها في منازل تشكل مساحتها ربع مساحة الأراضي الأخرى..."

٤- يقوم الطلاب بتثبيت العلم من الجنب بمصاصة العصير كحمالة له ومن ثم يغرسون أسفل هذه المصاصة بقاعدة التثبيت الإسفنجية.

٥- يمكن الطلب من الطلاب صناعة مجموعة من الأعلام تعبر عن نفس الكسر بطرق مختلفة.

نشاط ٥: النسب في الخرائط

يمكن القيام بهذا النشاط من قبل جميع طلبة الصف أو من قبل مجموعات صغيرة منهم أو أزواج من الطلاب.

الهدف

عمل تكامل بين موضوعي الرياضيات والجغرافيا.

المواد

خريطة عرض كبيرة للولايات المتحدة الأمريكية، جدول بيانات وخرائط مصغرة للولايات في الولايات المتحدة توزع على الطلاب.

الإرشادات

١-يبدأ المدرس العمل من خلال مناقشات مع طلبة الصف يسأل فيها مثلاً ما هي نسبة الولايات التي تقع إلى الغرب من نهر المسيسبي؟ وما هي نسبة الجزر في الولايات المتحدة الأمريكية؟ وما هي نسبة الولايات التي لها حدود مشتركة مع المكسيك؟ سجل النسب في الجدول بجانب خريطة العرض الكبيرة.

٢-يقسم الطلاب إلى أزواج للعمل معاً باستخدام خريطة الولايات المتحدة الأمريكية التي وزعت عليهم سابقاً ويقوموا باحتساب نسب مختلفة متعلقة بالولايات المتحدة الأمريكية.

٣-يتبادل الطلاب النتائج التي حصلوا عليها ويقوموا بتحديد الكسر المعبر عن النسبة الأكبر التي حصلوا عليها، والنسبة الأقرب إلى الكسر 1/2 وهكذا. من الضروري أن تقوم كل مجموعة بتفسير القيم التي يحددونها ومدى منطقيتها ومن المهم أيضاً طرح أسئلة جديدة أخرى متعلقة بما حصلوا عليها من نسب.

تعديل على النشاط

يمكن أن يأخذ الطلاب الخرائط إلى منازلهم للحصول على نسب أخرى من خلال أبويهم وأقاربهم وغيرهم ومن ثم يقوموا بمناقشتها مع زملائهم داخل غرفة الصف في اليوم التالي.

نشاط ٦: الربط الدقيق بين الكسور وأسمائها بالكلمات

هذا النشاط مناسب لمجموعات مكونة من فردين .

الهدف

التدرب على إيجاد صيغ مكافئة للأعداد الكسرية وعلى طرق التعبير عن الكسور بالكلمات.

المواد

ثلاثون بطاقة ١٥ منها معنونة بالكسور 1/2 ، 1/3 ، 2/3 ، 1/4 ، 2/4 ، 3/4 ، 1/5 ، 2/5 ، 3/5 ، 4/5 ، 1/6 ، 2/6 ، 3/6 ، 4/6 ، 5/6 و ١٥ أخرى معنونة بأسماء هذه الكسور.

الإرشادات

يقوم الطلاب بالعمل على هذا النشاط باستخدام الكسور وأسمائها المقابلة بالكلمات ويبدأ اللعب بوضع الثلاثين بطاقة على طاولة بحيث يكون اتجاه المكتوب على كل بطاقة إلى الأسفل(مخفي) ومن ثم يقوم كل طالب بسحب بطاقتين في نفس الوقت عندما يحين دوره في اللعب. في حال تطابقت البطاقتان(متكافئتان) يحتفظ بهما وإذا اختلفتا يعيدهما إلى الطاولة. يستمر الطلاب في اللعب إلى أن يتطابق كل زوج من البطاقات الثلاثين.

نشاط ٧: الحساب باستخدام الأشكال

يناسب هذا النشاط جميع طلبة الصف أو أي مجموعات صغيرة منهم.

الهدف

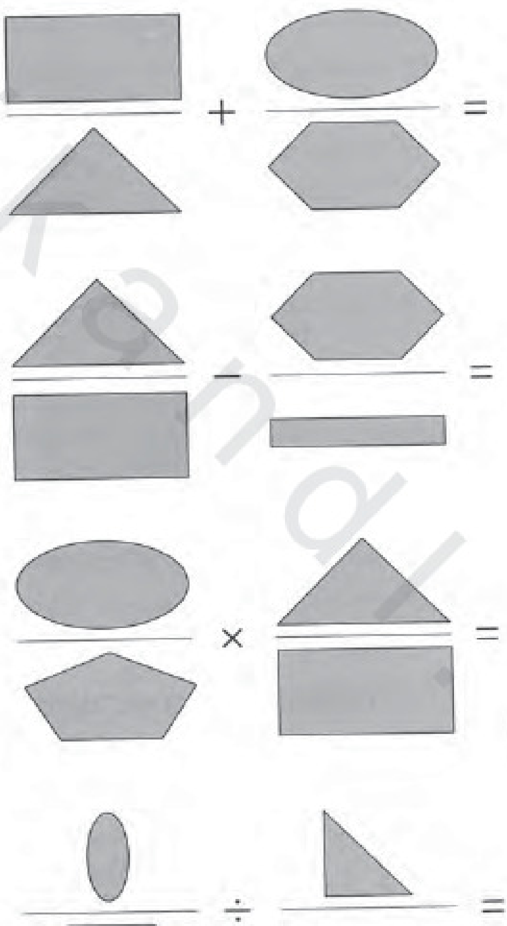
تعزيز الحساب في الأعداد الكسرية

المواد

ملصقات لأشكال هندسية مختلفة، مكعبان مكتوب على أوجه أحدهما الأرقام من ١-٦ ومكتوب على أوجه الآخر الأرقام من ٤ - ٩.

الإرشادات

١- تقوم كل مجموعة بتحديد العملية الحسابية المزمع تنفيذها وتحديد أيضاً ما إذا كان الرابح في هذه الجولة من يحصل على الناتج الأكبر أو الأصغر بعد تنفيذ هذه العملية.



٢-يقوم قائد اللعب في كل مجموعة برمي المكعبين ويبلغ لاعبي مجموعته بالأرقام الظاهرة.

٣-يكتب كل لاعب الرقم الناتج من رمي المكعبين في أحد الأشكال الموجودة في المسالة ومن ثم يقوم بحل المسالة.

٤-يحصل اللاعبون على النقاط عند حصولهم على النواتج الأكبر أو الأصغر من تنفيذ العمليات الحسابية بحسب ما تم الاتفاق عليه قبل بدء اللعبة.

نشاط ٨: تجميع الأجزاء الكسرية لتشكل وحدة واحدة

هذا النشاط معد لجميع الطلاب في الصف.

الهدف

تشكيل الوحدة الواحدة من خلال تجميع الأجزاء الكسرية المناسبة.

المواد

١-مكعب مرقمة أوجهه بالأرقام 1/2، 1/4، 1/8، 1/16، 2/4 و 3/4.

٢-حقيبة الدكتور لويد للأجزاء الكسرية أو مجموعتين من القطع الورقية تمثل أنصاف الوحدة الواحدة وأرباعها وأثمانها وأنصاف أثمانها (1/16 من الوحدة الواحدة).

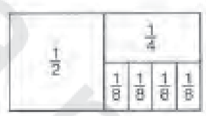
٣-ورقة بيضاء بحجم المربع الذي يمثل الوحدة الواحدة أو الموجود في حقيبة الدكتور لويد.

الإرشادات

توضع الأجزاء الكسرية في منتصف الطاولة ويكون لدى كل لاعب ورقة بيضاء تمثل الوحدة الواحدة. يقوم كل طالب برمي المكعب المرقم ويبدأ اللعب اللاعب الذي يحصل على أكبر كسر عند رمي المكعب ومن ثم يقوم هذا اللاعب

برمي المكعب ومن ثم يأخذ الجزء الكسري المكافئ للرقم الذي يحصل عليه من الحقيبة أو من مجموعتي القطع الورقية وبعد ذلك يقوم اللاعب بوضع هذا الجزء على الورقة البيضاء التي لديه.

في حال حصول اللاعب في أي مرحلة من مراحل اللعب يتقاطع الجزء المكافئ له مع ما هو موجود على الورقة التي بحوزته فإنه لا يقوم بوضعه في الورقة مرة أخرى. كما أن من حق الطالب قبل قيام أحد زملائه برمي المكعب أن يعيد أحد الأجزاء الكسرية التي لديه إلى منتصف الطاولة. يفوز في هذا النشاط أول لاعب يغطي الورقة التي لديه بكافة الأجزاء المكونة للوحدة الواحدة.



نشاط ٩: أكبر أو أصغر

هذا النشاط مناسب لمجموعات كبيرة أو صغيرة أو ثنائية من الطلاب.

الهدف

يعزز هذا النشاط من إدراك الطلاب للأعداد النسبية.

المواد

بطاقات معنونة بكسور مختلفة.

الإرشادات

١-يقسم طلبة الصف إلى فريقين أو إلى أزواج من الطلاب.

٢-يتم خلط البطاقات ومن ثم توضع البطاقات بحيث يكون اتجاهها إلى الأسفل.

٣-في الجولة الأولى يسحب كل لاعب من الفريقين بطاقة واحدة.

٤-الطالب الذي تحتوي بطاقته على الكسر الأكبر يربح بطاقة زميله.

٥-الفائز في النشاط هو الطالب أو الفريق الذي يكون لديه أكبر عدد من البطاقات في نهاية الشوط أو اللعبة.

نشاط ١٠: لعبة الكسور المتكافئة على طريقة القمار

هذا النشاط مناسب لمجموعات مكونة من أربعة أو خمسة طلاب.

الهدف

تدريب الطلاب على الصيغ الرياضية المختلفة للكسور المتكافئة بما فيها الصيغة المركبة (جزء صحيح وجزء كسري).

المواد

- بطاقة أبعادها 3×3 ومقسمة إلى تسعة أجزاء (يحتوي عدد منها على كسور عادية ويحتوي البعض الآخر على كسور مركبة) تمثل رقعة اللعب.
- كروت لعب (شدة) يحتوي كل منها على أحد الكسور أو ما يكافئها من الموجود في رقعة اللعب.
- يحتوي كرت اللعب على أحد المفاهيم التي تفسر ما يعنيه الكسر مثل مفهوم جزء من كل.

الإرشادات

طريقة لعب هذا النشاط تشبه لعبة القمار حيث يقوم الشخص الذي يدير اللعب بسحب أحد كروت اللعب والاحتفاظ به كمرجع (جوكر) بالنسبة للاعبين ومن ثم يقوم كل لاعب بسحب أحد كروت اللعب ومن يحصل منهم على كرت يحتوي على كسر يكافئ الموجود في الكرت المرجع يقوم بتغطية الجزء الموجود في رقعة اللعب بقرص صغير. يكون الفائز في هذه اللعبة من يحصل على ثلاثة أقراص مرتبة على شكل خط أفقي أو عمودي أو قطري.

الكرت المرجع

$\frac{1}{3}$		

رقعة اللعب

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{100}$
$\frac{10}{12}$	أي شيء	$\frac{9}{15}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{10}$

يمكن التعديل على هذه اللعبة كما يلي

قد تحتوي كروت اللعب على مسائل حسابية بحيث يقوم الطالب بحلها ويكون الحل الصحيح موجوداً في رقعة اللعب.

أسئلة المناقشة

١ – في كل من الأمثلة التالية قم بتحديد القيم الكسرية استناداً لمفهوم جزء من كل :

نبات اليقطين في مزرعة ما : ....

كمية العشب المنوي قصه في حديقة ما : ....

عدد الطباشير الملون في صندوق ما : ....

مقدار ما أكل من فطيرة واحدة : ....

كمية الحليب المتبقية في كأس ما : ....

فسر إجاباتك

٢ –اكتب مثالاً من واقع الحياة يعبر عن فهم خاطئ عند الطلاب بخصوص تقدير نسبة جزء من كل ، مثل مقدار الطعام الموجود في صحن واحد أو الواجبات المنزلية المنجزة بشكل كامل أو الوقت المستغرق في مشاهدة التلفاز أو مقدار الحلوى التي تم أكلها.

٣-صف إحدى الخوارزميات المستخدمة في الحساب في الأعداد الصحيحة والتي لا تنطبق على الحساب في الأعداد النسبية ووضح السبب في ذلك.

٤-هل كانت تعلم الكسور صعبة بالنسبة إليك ولماذا؟

٥-اذكر مواد نتعامل معها في حياتنا اليومية غير المستطيلات يمكن الاستفادة منها بشكل فاعل عند تعليم المفاهيم والعمليات الحسابية المتعلقة بالأعداد الكسرية.

٦-ما هي الفائدة من تدريس العمليات الحسابية باستخدام كسور أحد مقاماتها مضاعفات المقام الآخر مثل $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ قبل تدريس هذه العمليات باستخدام كسور لا علاقة بين مقاماتها مثل $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$. وضح إجابتك.

٧-وضح السبب وراء تقديم مسائل للطلبة مثل $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ قبل تعرضهم لمسائل مثل $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$.

٨-لماذا يعد استخدام الرسوم التوضيحية والمواد المساعدة في التعبير عن العبارة $3\frac{1}{4}=\frac{12}{4}$ من الإستراتيجيات الفاعلة في تعليم الأعداد الكسرية. اذكر مثالاً على مواد يمكن أن يستعين بها الطلاب في إعادة تسمية الكسور المركبة بدلالة الكسور العادية ثم اذكر ثلاثة أسئلة يمكن أن تسألها للطلبة.

٩-ارسم شكلاً يعبر عن المعنى الحسي للعمليتين $\frac{2}{3}\times 5$ و $\frac{2}{3}\div 5$ ومن ثم صف موقفاً من واقع الحياة يبين الحاجة للتعامل مع مثل هاتين العمليتين.

المراجـــــع

Alverado, A. E ., & Herr, P. R. (2003). *Inquiry-based learning using everyday objects:Hands-on instructional strategies that promote active learning in grades 3-8.* California: Corwin Press.

Behr, M. J .. Lesh, R.. Post, T. R.. & Silver. E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.). *Acquisition oJ mathematics concepts and processes.* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Behr, M. J .. Wachsmuth. I.. Post, T. R.. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of ra- tional numbers: A clinical teaching experiment. *JournalJor Research in Mathematics Education.* 15. 323-34l.

Bezuk, N. D .. & Bieck, M. (1993). Current research on rational numbers and common fractions: Summary and implications for teachers. In D. T. Owens (Ed.). *Research ideas Jor the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 118-136). *New York:MacmiHan.*

Crouch. R.. & Baldwtn, G. (1964). *MathematicsJor elementary teachers.* New York: John Wiley and Sons. Inc.

Empson. S. B. (2003). Low performing students and teaching fractions for understanding: An interactive analysis. *Journal Jor Research* in *Mathematics Education. 34(4),* 305-343.

Flores, A.. & Klein, E. (2005). From students' problem solving strategies to connections in fractions. *Teaching Children Mathematics.* 11(9). 452-457.

Huinker. D. (1998). Letting fractional algorithms emerge through problem solving. In L. J. Morrow & M. J. Kenney [Eds.], *The teaching and learning oJ algorithms in school mathematics* (1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. pp. 170-182). Reston. VA: NCTM.

Kieren. T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. In G. Leinhardt & R. T. Put- nam (Eds.), *Analysis oJ arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323-371). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieren, T. E. (1995). Creating spaces for learning fractions. In J. T. Sowder & B. Schappelle (Eds.), *Providing aJoundationb Jor teaching mathematics* in *the middle grades* (pp. 31-65). Albany. NY: SUNY Press.

Kilpatrick, J .. Swafford. J .. & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up. helping childrenlearn mathematics.* Washington. DC: National Academy Press.

Lappan, G .. & Bouck, M. K. (1998). Developing alogorithms for adding and subtracting fractions. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of alqo- rithms* in *school mathematics* (1998 Yearbook for the *National Council of Teachers oJ Mathematics. pp.* 183-197). Reston, VA: NCTM.

Lesh, R.. Post. T. R.. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mack. N. K. (1995). Confounding whole number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education.* 26. 422-441.

Markovits, Z ., & Sowder, J. T. (1991). *Students' understanding oJ the relationship between fractions and decimals.* Focus on Learning Problems in Mathematics. 13(1), 3-11.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standardsJor school mathematics.* Reston, VA: Author.

Neumer, C. (2007). Mixed numbers made easy: Building and converting mixed numbers and improper fractions. *Teaching Children Mathematics,* 14(4), 488-492.

Ortiz, E. (2002). A game involving fraction squares. *Teaching Children Mathematics, 7(4),* 218-222.

Ploger, D., & Rooney, M. (2005). Teaching fractions: Rules and reason. *Teaching Children Mathematics,* 12(1), 12.

Post, T. R., Cramer, K. A., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implica- tions of research on learning, teaching, and assessing rational number concepts. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integra tion oJ research* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Post, T. P., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. J. (1985). Order and equivalence of ra- tional numbers: A cognitive analysis. *Journalfot Research in Mathematics Education,* 16, 18-36.

Richardson, L. I. (1996). Dr. *Loyd'sJraction kit.* St. Louis, MO: Pegasus Publishing.

Saxe, G. B., Tayler, E., McIntosh, *C.,* & Gearhart, M. (2005). Representing fractions with standard notation: A developmental analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(2), 135-157.

Sowder, J. T. (1995). Instructing for rational number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing* a *Joundation Jor teaching mathematics in the middle grades* (pp. 15-30). Albany: State University of New York Press.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realistic approach. In T. P. Carpenter, E. Fenneman, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration oJ research* (pp. 289-325). Hillsdale, NJ: Erlbaum.