الفصل الرابع

مجموع قوى عليا ونظرية فيرما الأخيرة

Sums of Higher Powers and Fermat's Last Theorem

اكتشفنا في الفصلين الأخيرين أن المعادلة :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

لها الكثير من الحلول في الأعداد الصحيحة a, b, c . من الطبيعي أن تسأل فيما إذا كانت هناك حلول عندما نستبدل الأس 2 بقوة أعلى. على سبيل المثال، هل المعادلات :

$$a^3 + b^3 = c^3 \quad , \quad a^4 + b^4 = c^4 \quad , \quad a^5 + b^5 = c^5$$

لها حلول صحيحة غير صفرية a, b, c ؟ الجواب "لا". حوالي سنة 1637 أثبت "Pierre de Fermat" (فيرما) أنه لا يوجد حل للأس 4 . خلال القرنين $19, 18$ برهن كل من "Leonhard Euler" (ليونارد أويلر) أنه لا يوجد حل للأس 3 . وتعامل كل من "Lejeune Dirichlet" (ديرشله) و "Adrien Legendre" (لجندر) مع الأس 5 . المسألة العامة لإثبات أن المعادلة

$$a^n + b^n = c^n$$

ليس لها حل في الأعداد الصحيحة الموجبة عندما $n \geq 3$ تُعرف بـ "نظرية فيرما الأخيرة". أصبحت هذه النظرية محط الاهتمام على امتداد 350 سنة منذ أن دون فيرما

العبارة التالية في إحدى هوامش كتبه :

"من المستحيل فصل مكعب إلى مكعبين ، أو قوة رابعة إلى قوتين كل منهما لها القوة الرابعة ، أو بشكل عام أي قوة أعلى من القوة الثانية إلى قوتين من نفس القوة. لقد اكتشفت برهاناً صحيحاً لا يتسع له هذا الهامش الصغير."

قليل من الرياضيين اليوم يصدق أن فيرما اكتشف برهاناً صحيحاً "لنظريته" ، والتي سميت نظريته الأخيرة لأنها كانت آخر عبارة من عباراته التي بقيت دون برهان. إن تاريخ نظرية فيرما الأخيرة تاريخ ساحر ، حيث قام بالفعل مئات من الرياضيين بعمل إسهامات مهمة. لدرجة أن ملخصاً مختصراً يمكن بسهولة أن يملأ كتاباً. وحيث إن هذا السرد التاريخي ليس هو هدفنا في هذا الكتاب ، فإننا سوف نعطي فقط لمحة تاريخية عن هذا الموضوع.

إحدى النتائج الأولى العامة على نظرية فيرما الأخيرة ، والتي لم تبحث في أس n محددة ، كانت على يد "Sophie Germain" (صوفي جيرمين) سنة 1823. لقد أثبتت أنه إذا كان كل من p , $2p+1$ عددين أوليين فإن المعادلة $a^p+b^p=c^p$ ليس لها حلول صحيحة a,b,c ، حيث p لا يقسم حاصل الضرب abc . نتيجة أخرى تعود إلى A. Wieferich سنة 1909 لها نفس النتيجة ، إذا كان المقدار 2^p-2 لا يقبل القسمة على p^2 . في أواخر القرن التاسع عشر قام عدد من الرياضيين ، من بينهم " Richard Dedekind" (ريتشارد ديدكند)، و "Leopold Keonecker" (كرونكر)، وبالأخص " Emst Kummer" (كومر)، بتطوير فرع جديد في الرياضيات يسمى نظرية الأعداد الجبرية واستخدموا نظريتهم لإثبات نظرية فيرما الأخيرة للعديد من الأسس ، ولكن بقيت القائمة محدودة. ثم في عام 1985 ، قام L.M. Adleman ، D.R. Heath-Brown ، و E-Fouvry باستخدام نظرية Germain وطرق تحليلية صعبة لإثبات أن هناك عدداً لا نهائيًا من الأعداد

الأولية p بحيث $a^p + b^p = c^p$ ليس لها حل عندما p لا يقسم abc.

> Sophie Germain. (1776-1831) صوفي جيرمين هي رياضية فرنسية لها أعمال مهمة في نظرية الأعداد والمعادلات التفاضلية. كانت معروفة جداً لعملها على نظرية فيرما الأخيرة، حيث أعطت معياراً بسيطاً وكافيًّا لإثبات أن المعادلة $a^p + b^p = c^p$ ليس لها حل عندما لا يقبل ناتج الضرب abc القسمة على p. أيضاً لها عمل في علم الصوتيات والمرونة، خصوصاً نظرية اهتزاز الصفائح. وكطالبة رياضيات فقد أجبرت على أخذ بعض المواد بالمراسلة في كلية "إيكول التقنية" في باريس؛ لأنهم لا يقبلون النساء كطالبات. ولنفس السبب، بدأت مراسلاتها مع (جاوس) مستخدمة الاسم المستعار "Blanc"، ولكن في النهاية عندما كشفت عن هويتها أُعجب جاوس بما فيه الكفاية بعملها ليوصي لها بدرجة فخرية من جامعة جوتنجن "Gottingen"؟

في عام 1986 قدم "Gerhard Frey" أسلوبا جديدا للهجوم على مسألة فيرما باستخدام فكرة تسمى المعيارية. عُدلت فكرة Frey على يد كل من "Jean-Pierre Serre"، و "Ken Ribet"، وأثبتوا على التوالي أنه إذا كانت حدسية المعيار صحيحة، فإن نظرية فيرما الأخيرة صحيحة. بشكل أكثر دقة، أثبت Ribet أنه إذا كان كل منحنى ناقصي[١] نصف مستقر Semistable هو معياري modular[٢] فإن نظرية فيرما الأخيرة صحيحة. حدسية المعيار، التي تؤكد أن كل منحنى ناقصي نسبي هو معياري، كانت

---

(١) المنحنى الناقصي هو نوع من أنواع المنحنيات، وهو ليس قطع ناقص، معادلته العامة على الشكل:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

حيث a,b,c أعداد صحيحة. المنحنى الناقصي يكون نصف مستقر إذا كان المقداران $3b - a^2$ و $27c - 9ab + 2a^3$ ليس لهما عامل مشترك غير العدد 2 وتحقق كذلك بعض الشروط الأخرى. سوف ندرس المنحنيات الناقصية في الفصول 48-43.

(٢) يقال عن المنحنى الناقصي إنه معياري إذا وجد تطبيق إليه من نوع خاص من المنحنيات تسمى المنحنيات المعيارية.

في ذلك الوقت حدسية صاغها Goro Shimura و Tutaka Taniyama. أخيراً وفي عام 1994 ، أعلن Andrew Wiles عن برهان على أن كل منحنى ناقصي نسبي نصف مستقر هو معياري ، وبذلك يكتمل برهان نظرية فيرما الأخيرة التي استمرت 350 سنة بدون برهان. برهان Wiles ، والذي يحتاج لمعرفة عميقة جداً بنظرية الأعداد الجديدة وبالهندسة الجبرية ، معقد جداً علينا لوصفه بالتفصيل ، ولكن سنحاول أخذ فكرة سطحية عنه في الفصل الثامن والأربعون.

بعض الاكتشافات الرياضية أو العلمية تنشأ في فراغ. حتى السيد إسحق نيوتن – العبقرية العظيمة لا تلاحظ نفسها بسبب تواضعها – كتب " إذا كنت قد رأيت أبعد ، فهذا لأني وقفت على أكتاف العمالقة ".

هنا قائمة ببعض أسماء العمالقة ، جميعهم رياضيون معاصرون ، ساهمت أعمالهم بشكل مباشر أو غير مباشر في برهان Wiles الرائع. تنوع الجنسيات في القائمة يسلط الضوء على الطابع العالمي للرياضيات الحديثة. والأسماء حسب الترتيب الأبجدي هي :

Spencer Bloch (USA), Henri de Carayol (France), John Coates (Australia), Pierre Dellbne (Belgium), Ehud de Shalit (Israel), Fred Diamond (USA), Gred Faltings (Germany), Matthias Flach (Germany), Gerhard Frey (Germany), Alexander Grothendieck (France), Yves Hellegouarch (France), Haruzo Hida (Japan), Kenkichi Iwasawa (Japan), Kazuya Kato (Japan), Nick Katz (USA), V.A. Kolyvagin (Russia), Ernst Kunz (Germany), Robert Langlands (Canada), hendrik Lenstra (The Netherlands), Wen-Ching Winnie Li (USA), Barry Mazur (USA), Andre Neron (France), Ravi Ramakrishna (USA), Michel Raynaud (France), Ken Ribet (USA), Karl Rubin (USA), Jean-Pierre Serre (France), Goro Shimura (Japan), Yutaka Taniyama (Japan), John Tate (USA), Richard Taylor (England), Jacques Tilouine (France), Jerry Tunnell (USA), Andre Weil (France), Andrew Wikes (England).

تمارين

(٤,١) اكتب من صفحة إلى صفحتين عن سيرة حياة واحد أو أكثر من الرياضيين التالية أسماؤهم. صِف إنجازاتهم الرياضية خصوصاً في نظرية الأعداد، واذكر بعض التفاصيل عن حياتهم. كذلك ضعهم في سياق تاريخي تصف فيه الزمن الذي عاشوا فيه، من الناجية (العلمية ، السياسية ، الاجتماعية ، الخ).

(a) Niels Abel, (b) Claude Gaspar Bachet de Meziriac, (c) Richard Dedekind, (d) Diophantus of Alexandria, (e) Lejeune Dirichlet, (f) Eratosthenes, (g) Euclid of Alexandria, (h) Leonhard Euler, (i) Pierre de Fermat, (j) Leonardo Fibonacci, (k) Karl Friedrich Gauss, (l) Sophie Germain, (m) David Hilbert, (n) Carl Jacobi, (o) Leopold Kronecker, (p) Ernst Kummer, (q) Joseph-Louis Lagrange, (s) Joseph Liouville, (t) Marin Mersenne, (u) Hermann Minkowski, (v) Sir Isaac Newton, (w) Pythagoras, (x) Srinivasa Ramanujan, (y) Bernhard Riemann, (z) P.L. Tchebychef (also spelled Chebychev).

(٤,٢) المعادلة $a^2 + b^2 = c^2$ لها الكثير من الحلول في الأعداد الصحيحة الموجبة، بينما المعادلة $a^3 + b^3 = c^3$ ليس لها حل في الأعداد الصحيحة الموجبة. هذا التمرين يطلب منك البحث عن حلول المعادلة.

$$a^3 + b^3 = c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

في الأعداد الصحيحة حيث $1 \le a \le b \le c$.

(a) المعادلة $(*)$ لها الحل $\left(a,b,c\right) = \left(2,2,4\right)$. أوجد ثلاثة حلول أخرى في الأعداد الصحيحة الموجبة.

[مساعدة: ابحث في الحلول التي على الشكل $\left(a,b,c\right) = \left(xz, yz, z^2\right)$. ليس كل خيار لـ x, y, z سوف يكون حلاً ؛ لذلك عليك أن تختار منها أيها يصلح أن يكون حلاً].

(b) إذا كان $\left(A, B, C\right)$ حلاً للمعادلة $(*)$ وإذا كان n أي عدد صحيح ، بيّن أن $\left(n^2A, n^2B, n^3C\right)$ هو أيضاً حل للمعادلة $(*)$. سوف نقول إن الحل $\left(a, b, c\right)$ للمعادلة $(*)$ هو حل أولي Primitive إذا لم يكن على الشكل $\left(n^2A, n^2B, n^3C\right)$ لأي $n \geq 2$.

(c) اكتب أربعة حلول أولية للمعادلة $(*)$. [أي أعد حل (a) باستخدام الحلول الأولية فقط].

(d) الحل $\left(2, 2, 4\right)$ فيه $a = b$. أوجد جميع الحلول الأولية والتي فيها $a = b$.

(e) أوجد حلاً أولياً للمعادلة $(*)$ فيه $a > 10000$.