الفصل الثالث

الثلاثيات الفيثاغورية ودائرة الوحدة

Pythagorean Triples and the Unit Circle

في الفصل السابق وصفنا جميع حلول المعادلة :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

حيث a ، b و c أعداد الصحيحة.

إذا قسمنا طرفي هذه المعادلة على c^2 نحصل على :

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

وعليه ؛ فإن زوج الأعداد النسبية $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ هو حل للمعادلة :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

جميعنا يعرف ما الذي تمثله المعادلة $x^2 + y^2 = 1$. إنها دائرة C نصف قطرها 1 ومركزها $(0,0)$.

سنستخدم هندسة الدائرة C لإيجاد جميع النقاط على C والتي إحداثياتها أعداد نسبية. لاحظ أن على الدائرة أربع نقاط بديهية ، إحداثياتها أعداد نسبية وهي $(\pm1, 0)$ و $(0, \pm1)$.

افرض أننا قمنا بأخذ أي عدد نسبي m ونظرنا إلى الخط المستقيم المار بالنقطة $(-1,0)$ وميله m (انظر الشكل 3.1). يمكن كتابة معادلة هذا الخط المستقيم على الصورة:

$$L : y = m(x+1) \qquad \text{(صيغة النقطة– الميل)}$$

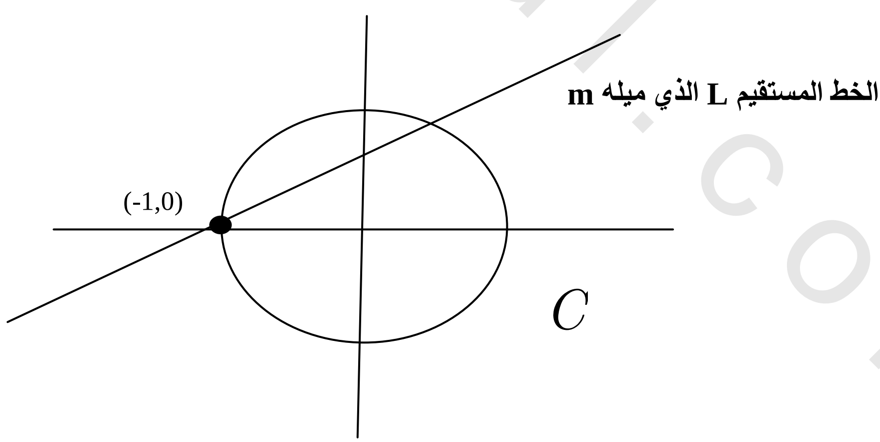
من الواضح من خلال الشكل أن التقاطع $C \cap L$ *يضم نقطتين فقط*، إحداهما $(-1,0)$. المطلوب الآن إيجاد النقطة الأخرى.

لإيجاد نقاط التقاطع بين C و L نحتاج لحل المعادلتين

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{و} \quad y = m(x+1)$$

بدلالة x و y. عوض المعادلة الثانية في المعادلة الأولى وبسط، نحن بحاجة إلى حل:

$$x^2 + (m(x+1))^2 = 1$$
$$x^2 + m^2(x^2 + 2x + 1) = 1$$
$$(m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + (m^2 - 1) = 0.$$



الشكل رقم (٣,١). الدائرة والخط المستقيم.

المعادلة الناتجة ليست إلا معادلة تربيعية ، ونستطيع استخدام الصيغة التربيعية لحلها بدلالة x . لكن هناك طريقة أسهل لإيجاد الحل ، فنحن نعرف أن $x = -1$ حل للمعادلة لأن النقطة $(-1,0)$ تقع على كل من C و L ، وهذا يعني أن بإمكاننا قسمة كثير الحدود التربيعية ، على $(x+1)$ للحصول على الجذر الآخر :

$$\begin{array}{r} (m^2+1)x+(m^2-1) \\ x+1\overline{\big)(m^2+1)x^2+2m^2x+(m^2-1)} \end{array}$$

لذا ؛ فان الجذر الآخر هو حل المعادلة $(m^2+1)x+(m^2-1)$ ، وهذا يعني أن :

$$x = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

نقوم بعد ذلك بتعويض قيمة x هذه في معادلة الخط المستقيم L $y = m(x+1)$ لإيجاد الاحداثي الصادي ،

$$y = m(x+1) = m\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}+1\right) = \frac{2m}{1+m^2}.$$

وعليه ؛ فإنه لأي عدد نسبي m نحصل على عدد نسبي $\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$ يمثل حلاً للمعادلة $x^2+y^2=1$.

من جهة أخرى ، إذا كان لدينا الحل (x_1,y_1) في $\mathbb{Q}$ فإن ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (x_1,y_1) و $(-1,0)$ سيكون عدداً نسبيًّا ، وعليه ، وبأخذ جميع القيم المحتملة لـ m ؛ فإن العملية التي قمنا بوصفها سابقا ستنتج جميع الحلول للمعادلة $x^2+y^2=1$ في $\mathbb{Q}$ [ما عدا النقطة $(-1,0)$ والتي تقع على الخط العمودي الذي ميله " $m=\infty$ "]. نلخص النتائج التي حصلنا عليها في النظرية التالية.

نظرية (١, ٣). *أي نقطة على الدائرة :*

$$x^2 + y^2 = 1$$

والتي إحداثياتها أعداد نسبية يمكن الحصول عليها باستخدام القاعدة :

$$(x, y) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \frac{2m}{1 + m^2}\right)$$

وذلك بالتعويض بأعداد نسبية بدلا عن m. [ما عدا النقطة $(-1,0)$ والتي تمثل قيمة النهاية عندما "$m \to \infty$"].

السؤال الآن هو كيف ترتبط هذه القاعدة الخاصة بالنقاط النسبية على دائرة بالقاعدة الخاصة بالثلاثيات الفيثاغورية؟ إذا قمنا بكتابة العدد النسبي m على شكل كسر u/v فإن القاعدة أعلاه تصبح :

$$(x, y) = \left(\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \frac{2uv}{u^2 + v^2}\right),$$

وبالتخلص من المقامات نحصل على الثلاثي الفيثاغوري

$$(a, b, c) = \left(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2\right).$$

وهذه طريقة أخرى لوصف الثلاثيات الفبثاغورية ، على الرغم من أننا نحتاج إلى وضع بعض القيود على كل من u و v للحصول على الثلاثيات الفيثاغورية الأولية.

يمكنك ربط ما تقدم بالقاعدة الواردة في الفصل الثاني ، وذلك بوضع :

$u = \dfrac{s + t}{2}$ و $v = \dfrac{s - t}{2}$.

تمارين

(٣.١) كما رأينا، فإننا نحصل على كل ثلاثي فيثاغوري (a,b,c) حيث b زوجي، من الصيغة :

$$(a,b,c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$$

وذلك من خلال التعويض بأعداد صحيحة مختلفة للمتغيرين u , v . فمثلاً، $(u,v) = (2,1)$ تعطي أصغر ثلاثي $(3,4,5)$.

(a) إذا كان للعددين u , v عامل مشترك، اشرح لماذا لا يكون (a,b,c) ثلاثيًّا فيثاغوريًّا أوليًّا.

(b) أعط مثالاً على عددين صحيحين $u > v > 0$ ليس لهما عامل مشترك وفي نفس الوقت لا يكون $(a,b,c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ ثلاثيًّا فيثاغوريًّا أوليًّا.

(c) إعمل جدول لكل الثلاثيات الفيثاغورية التي تنتج عند تعويضك بجميع القيم v , u بحيث $1 \le v \le u \le 10$.

(d) استخدم جدولك من الفقرة (c) لإيجاد شروط بسيطة على v , u تؤكد أن $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ ثلاثي فيثاغوري أولي.

(e) برهن أن شروطك في (d) تعمل بشكل صحيح.

(٣.٢) (a) إستخدم الخطوط المارة بالنقطة $(1,1)$ لوصف جميع النقاط الواقعة على الدائرة:

$$x^2 + y^2 = 2$$

التي إحداثياتها أعداد نسبية.

(b) أين يكمن الخطأ إذا حاولت تطبيق نفس الإجراء لإيجاد جميع النقاط الواقعة على الدائرة $x^2 + y^2 = 3$ التي إحداثياتها أعداد نسبية؟

(٣,٣) أوجد صيغة لجميع النقاط الواقعة على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ والتي إحداثياتها أعداد نسبية.

[مساعدة: خذ الخط المار بالنقطة $(-1,0)$ والذي ميله m عدد نسبي، وأوجد صيغة بدلالة m للنقطة الثانية التي يتقاطع عندها الخط مع القطع الزائد].

(٣,٤) المنحنى:

$$y^2 = x^3 + 8$$

تقع عليه النقطتان $(-7/4, 13/8)$, $(1, -3)$. الخط المار بهاتين النقطتين يقطع المنحنى في نقطة أخرى فقط. أوجد هذه النقطة الثالثة. هل يمكنك أن تشرح لماذا إحداثيات هذه النقطة الثالثة عددان نسبيان؟