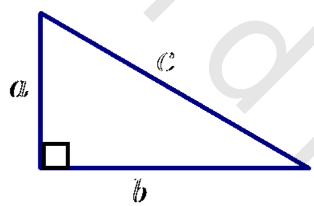
الفصل الثاني

الثلاثيات الفيثاغورية
Pythagorean Triples

نظرية فيثاغورس المعروفة جدا لطلبة المدارس الإعدادية والثانوية تنص على أن مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين، وبالرموز فإن $a^2 + b^2 = c^2$.



الشكل رقم (٢,١). مثلث فيثاغورس.

بما أن اهتمامنا منصب على نظرية الأعداد، بمعنى نظرية الأعداد الطبيعية، فإننا سنسأل أنفسنا، هل يوجد مثلثات فيثاغورية جميع أضلاعها أعداد طبيعية؟ في الحقيقة هناك العديد من هذه المثلثات، أكثرها شهرة له الأضلاع 3 و 4و 5. فيما يلي المزيد من الأمثلة:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 8^2 + 15^2 = 17^2, \quad 28^2 + 45^2 = 53^2$$

إن دراسة هذه الثلاثيات الفيثاغورية بدأت قبل عصر فيثاغورس بوقت طويل ، حيث وجدت جداول تعود للعصر البابلي تحتوي على عدد من هذه الثلاثيات وفيها بعض الأعداد الكبيرة ، والتي تشير إلى أن البابليين ربما امتلكوا طريقة محددة الخطوات لتوليد هذه الأرقام. المثير للدهشة أكثر أن البابليين استخدموا قوائمهم من الثلاثيات الفيثاغورية كجداول مثلثيه أولية Primitive trigonometric tables.

لقد استخدمت الثلاثيات الفيثاغورية أيضاً في مصر القديمة. فلقد استخدموا طريقة لإنتاج مثلث قائم ، و ذلك بأخذ خيط ووضع 12 علامة عليه لينتج 12 قطعة متساوية في الطول ، بعد أن يكون هذا الخيط على شكل منحنى مغلق يقومون بشَدّه ليعطي شكل مثلث 5-4-3 ، كما هو مبين في الشكل رقم (٢,٢).

الشكل رقم (٢,٢). استخدام خيط فيه عقد لإنشاء مثلث قائم.

لقد امتلك البابليون و المصريون أسبابا عملية لدراسة الثلاثيات الفيثاغورية. هل ما زالت هذه الأسباب العملية موجودة؟ بالنسبة لهذا السؤال بالتحديد " قد تكون الإجابة لا . على كل حال ، هناك على الأقل سبب واحد مقنع لدراسة الثلاثيات الفيثاغورية ، و هو نفس السبب الذي يجعل دراسة فن Rembrandt و موسيقى Beethoven شيئاً يستحق العناء. إن هناك جمالاً في دراسة الأساليب التي تجعل أعداداً تتفاعل مع أعداد أخرى ، تماما مثل ما أن هناك جمالاً في رسم لوحة أو تأليف

سيمفونية. و لتقدير هذا الجمال ؛ فإن الدارس يجب أن يكون راغبا في إنفاق شيء من طاقته الذهنية.

السؤال البسيط الأول الذي سنطرحه هنا هو ، هل هناك عدد لانهائي من هذه الثلاثيات الفيثاغورية؟ بمعنى ثلاثيات مكونة من أعداد طبيعية (a, b, c) تحقق المعادلة $a^2 + b^2 = c^2$. الجواب هو "نعم" لسبب بسيط جدا ، فإذا أخذنا أي ثلاثية فيثاغورية (a, b, c) وضربناها بعدد طبيعي آخر مثل d فإننا نحصل على الثلاثية الفيثاغورية (da, db, dc) وهذا صحيح لأن :

$$(da)^2 + (db)^2 = d^2(a^2 + b^2) = d^2c^2 = (dc)^2$$

من الواضح أن الثلاثية الناتجة ليست مثيرة للاهتمام ؛ لذا سنركز اهتمامنا على الثلاثيات التي لا تحتوي على عوامل مشتركة وسنعطيها اسما كما يلي :

> الثلاثية الفيثاغورية الأولية هي ثلاثية من الأعداد (a, b, c) بحيث إن a و b و c ليس لها عوامل مشتركة[١] وتحقق :
>
> $$a^2 + b^2 = c^2$$

ارجع إلى قائمتنا في الفصل الأول. الخطوة الأولى هي جمع بعض البيانات. استخدمت الكمبيوتر لتعويض بعض القيم في a و b والتأكد مما إذا كان $a^2 + b^2$

---

(١) إذا كان d عاملاً مشتركاً للأعداد a ، b ،و c فإن كلاً من a ، b ،و c هو من مضاعفات d. مثال، 3 عامل مشترك للأعداد 30 ، 40 ، و 105 ، حيث $30=3\times10, 42=3\times14, 105=3\times35$ ، وفي الحقيقة ، فإنه عاملها المشترك الأكبر. من جهة أخرى ، الأعداد 10 ، 12 ، و 15 ليس لها عامل مشترك(غير العدد رقم ١). لذلك سيكون هدفنا في هذا الفصل هو اكتشاف نظرية عددية مهمة و جميلة بهذا الخصوص ، وسوف نستخدم العوامل المشتركة و قابلية القسمة بشكل غير رسمي وسوف نثق بحدسنا. في الفصل الخامس سوف نعود لهذه الأسئلة و نطور نظرية عن قابلية القسمة بشكل أكثر دقة.

عدداً مربعاً. القائمة التالية تضم بعض الثلاثيات الفيثاغورية التي قمت بإيجادها :

$$(3,4,5),\quad (5,12,13),\quad (8,15,17),\quad (7,24,25),$$
$$(20,21,29),\quad (9,40,41),\quad (12,35,37),\quad (11,60,61),$$
$$(28,45,53),\quad (33,56,65),\quad (16,63,65).$$

رغم صغر القائمة السابقة إلا أنها تمكننا من التوصل إلى بعض الافتراضات السهلة. على سبيل المثال يبدو أن أحد العددين a و b يكون فردياً بينما يكون الآخر زوجيا، ويبدو أيضا أن c دائماً عدد فردي.

ليس من الصعب إثبات أن هذه الافتراضات صحيحة. أولاً إذا كان كلٌّ من a و b عدداً زوجياً فإن c سيكون أيضا عدد زوجي وهذا يعني أن لـ a و b و c عاملاً مشتركاً هو 2 ؛ وعليه فان الثلاثية لن تكون أولية. ثانيا إذا كان كلٌّ من a و b عددين فرديين فان هذا يعني أن c عدد زوجي ؛ وعليه نستطيع إيجاد أعداد مثل x و y و z بحيث أن :

$$a = 2x+1,\quad b = 2y+1,\quad c = 2z$$

عوض القيم السابقة في المعادلة :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

لتحصل على :

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2 = (2z)^2,$$
$$4x^2+4x+4y^2+4y+2 = 4z^2.$$

والآن اقسم الطرفين على 2 لنحصل على :

$$2x^2+2x+2y^2+2y+1 = 2z^2.$$

نستنتج من المعادلة الأخيرة أن هناك عدداً فرديًّا يساوي عدداً زوجيًّا وهذا مستحيل، وعليه لا يمكن أن يكون كلٌّ من a و b عددا فرديا. وبما أننا أثبتنا سابقاً أن

العددين لا يمكن أن يكون كلاهما زوجيًّا ولا يمكن أن يكون كلاهما فرديًّا، فإن أحد العددين سيكون فرديا والآخر زوجيا. ومن المعادلة $a^2 + b^2 = c^2$ سيكون من البديهي أن c هي أيضا عدد فردي.

نستطيع دائماً التبديل بين a و b ، لذلك فإن مسألتنا هي إيجاد جميع الحلول (مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الطبيعية) للمعادلة $a^2 + b^2 = c^2$ ، حيث a عدد فردي، b عدد زوجي و a و b و c ليس لها عوامل مشتركة.

الأدوات التي سنستخدمها لحل هذه المشكلة هي قابلية القسمة والتحليل.

الملاحظة الأولى أنه إذا كان (a,b,c) ثلاثية فيثاغورية أولية فإن:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b).$$

فيما يلي مجموعة من الأمثلة من القائمة التي قدمناها سابقاً، حيث نلاحظ أننا دائما نختار a لتكون عددا فرديا و b لتكون عددا زوجيا.

$$3^2 = 5^2 - 4^2 = (5-4)(5+4) = 1 \cdot 9$$

$$15^2 = 17^2 - 8^2 = (17-8)(17+8) = 9 \cdot 25$$

$$35^2 = 37^2 - 12^2 = (37-12)(37+12) = 25 \cdot 49$$

$$33^2 = 65^2 - 56^2 = (65-56)(65+56) = 9 \cdot 121$$

يبدو من الأمثلة السابقة أن $(c-b)$ و $(c+b)$ هي نفسها أعداد مربعة، وللتأكد من هذه الملاحظة سنقدم المثالين الإضافيين التاليين:

$$21^2 = 29^2 - 20^2 = (29-20)(29+21) = 9 \cdot 49,$$

$$63^2 = 65^2 - 16^2 = (65-16)(65+16) = 94 \cdot 81.$$

كيف يمكننا أن نثبت أن $(c-b)$ و $(c+b)$ عددان مربعان؟ ملاحظة أخرى نستنتجها بالتدقيق في قائمتنا من الأمثلة السابقة، وهي أن $(c-b)$ و $(c+b)$ ليس لهما عوامل مشتركة. بإمكاننا إثبات الملاحظة السابقة كما يلي. افرض أن d عامل

مشـــترك لكـــل مـــن $(c-b)$ و $(c+b)$ ، بمعنـــى أن d يقســـم كـــلا مـــن $(c-b)$ و $(c+b)$ ، وعليه فان d يقسم أيضاً

$$(c+b)+(c-b)=2c$$

و

$$(c+b)-(c-b)=2b.$$

لـذا ؛ فإن d يقسـم $2b$ و $2c$ ، ولكـن b و c لـيس بينهمـا عوامـل مشـتركة ؛ لأنه وحسب الفرض فإن (a,b,c) ثلاثية فيثاغورية أولية. وهـذا يعـني أن d يجب أن يساوي 1 أو 2. لكن d يقسم أيضاً

$$(c-b)(c+b)=a^2.$$

وبما أن a عدد فردي ؛ فإن d يجب أن يكـون 1. بمعنـى آخـر أن العـدد الوحيـد الـذي يقسـم كـلا مـن $(c-b)$ و $(c+b)$ هـو 1 ، وعليـه فانـه لـيس بـين $(c-b)$ و $(c+b)$ عوامل مشتركة.

عرفنـا الآن أن $(c-b)$ و $(c+b)$ لـيس لهمـا عوامـل مشـتركة ، وأن حاصـل ضربهم عدد مربع ؛ لأن :

$$(c-b)(c+b)=a^2.$$

وهذا يحصل فقط إذا كان $(c-b)$ و $(c+b)$ عددين مربعين[١]. لذلك نستطيع أن نكتب كلا منهما على الشكل :

$$(c+b)=s^2$$

---

(١) هـذا واضـح جداً ، لأنـك إذا حللـت كـل مـن $(c-b)$ و $(c+b)$ إلى عوامله الأولية ستجد أن الأعـداد الأولية في تحليـل $(c-b)$ تختلـف تمامـا عـن الأعـداد الأوليـة في تحليـل $(c+b)$. على كـل حال ، إن وجود و وحدانية التحليل إلى العوامل الأولية ليست بالوضوح الذي تبدو عليه.

و :

$$(c-b) = t^2.$$

حيث $s > t \geq 1$ وكلٌّ من s و t عدد صحيح فردي، وليس بينهما عوامل مشتركة.

بحل المعادلتين السابقتين بدلالة b و c ينتج أن

$$c = \frac{s^2 + t^2}{2}$$

و :

$$b = \frac{s^2 - t^2}{2},$$

وعليه ؛ فإن :

$$a = \sqrt{(c-b)(c+b)} = st.$$

بالخطوة السابقة نكون قد أنهينا الإثبات! النظرية التالية تلخص ما تم شرحه سابقاً

نظرية (١, ٢) (نظرية الثلاثيات الفيثاغورية). *نحصل على أي ثلاثية فيثاغورية أولية (a, b, c) حيث a عدد فردي و b عدد زوجي باستخدام القواعد التالية*

$$a = st, b = \frac{s^2 - t^2}{2}, c = \frac{s^2 + t^2}{2},$$

حيث $s > t \geq 1$ أي عددين صحيحين فرديين ليس بينهما عوامل مشتركة.

على سبيل المثال، إذا أخذنا $t = 1$ ، سنحصل على الثلاثية $\left(s, \frac{s^2 - 1}{2}, \frac{s^2 + 1}{2}\right)$ وفيها الفرق بين المدخلين b و c هو 1. وهذا يفسر العديد من الأمثلة التي قدمناها سابقاً.

الجدول التالي يعطينا جميع الثلاثيات الممكنة عندما $s \leq 9$.

		$a = st$	$b = \dfrac{s^2 - t^2}{2}$	$c = \dfrac{s^2 + t^2}{2}$
		3	4	5
		5	12	13
		7	24	25
		9	40	41
		15	8	17
		21	20	29
		35	12	37
		45	28	53
		63	16	65

رموز عالمية: قام الرياضيون بوضع عدد من الرموز المتعارف عليها كاختصار لكثير من الكميات. فيم يلي عدد من الرموز المهمة التي سنحتاج إليها أثناء دراستنا :

مجموعة الأعداد الطبيعية : $\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

مجموعة الأعداد الصحيحة : $\mathbb{Z} = \ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$.

مجموعة الأعداد النسبية : $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

بالإضافة إلى ذلك يستخدم الرياضيون عادة الرمز $\mathbb{R}$ للدلالة على الأعداد الحقيقة والرمز $\mathbb{C}$ للدلالة على الأعداد المركبة. لماذا تم اختيار هذه الحروف؟ إن اختيار $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ ليس بحاجة إلى تفسير، أما الرمز $\mathbb{Z}$ المستخدم للدلالة على الأعداد الصحيحة فقد أتى من الكلمة الألمانية "Zahlen" والتي تعني الأعداد، كما أتى الرمز $\mathbb{Q}$ من الكلمة الألمانية "Quotient" ومعناها مشابه للمعنى باللغة الإنجليزية.

سنستخدم أيضا الرمز $\in$ ليعني انتماء عنصر إلى مجموعة، فعلى سبيل المثال، فإن $a \in \mathbb{N}$ تعني أن a عدد طبيعي و $x \in \mathbb{Q}$ تعني أن x عدد نسبي.

تمارين

(٢،١) (a) بيّنا أنه في أي ثلاثية فيثاغورية أولية (a,b,c) إما a وإما b عدد زوجي. استخدم نفس الأسلوب لتبين أنه إما a أو b يجب أن يكون من مضاعفات العدد 3.

(b) بفحص القائمة السابقة للثلاثيات الفيثاغورية الأولية، أعط تخميناً عن الحالة التي يكون فيها a ، b ، أو c من مضاعفات العدد 5. حاول أن تثبت أن تخمينك صحيح.

(٢،٢) نقول إن العدد الصحيح غير الصفري d قاسم divide لعدد صحيح m إذا كان $m = dk$ ، حيث k عدد صحيح. بين أنه إذا كان d يقسم لكل من m و n ، فإن d أيضاً يقسم $m-n$ و $m+n$.

(٢،٣) في كل من الأسئلة التالية، اجمع بعض البيانات؛ ثم قم بفحص البيانات وصغ تخميناً؛ وأخيراً، حاول برهنة أن تخمينك صحيح. (لا تقلق إذا لم تستطع حل جميع فقرات هذا السؤال لأن بعضها صعب بما فيه الكفاية).

(a) أي الأعداد الفردية a التي يمكن أن تظهر في الثلاثية الفيثاغورية الأولية (a,b,c)؟

(b) أي الأعداد الزوجية b التي يمكن أن تظهر في الثلاثية الفيثاغورية الأولية (a,b,c)؟

(c) أي الأعداد c التي يمكن أن تظهر في ثلاثية الثلاثية الفيثاغورية (a,b,c)؟

(٢،٤) في قائمة الأمثلة على الثلاثيات الفيثاغورية الأولية هناك ثلاثيتان كل منهما ثلاثية فيثاغورية أولية:

$$16^2 + 63^2 = 65^2 \quad \text{و} \quad 33^2 + 56^2 = 65^2$$

أوجد مثالاً واحداً آخر على الأقل لثلاثيتين كل منهما ثلاثية فيثاغورية أولية بحيث يكون لهما نفس قيمة c. هل يمكنك إيجاد ثلاث من الثلاثيات الفيثاغورية الأولية لها نفس قيمة c؟ هل يمكنك إيجاد أكثر من ثلاث؟

(٢,٥) في الفصل رقم (١) رأينا أن العدد المثلثي النوني(n^{th}) T_n يُعطى بالصيغة

$$T_n = 1+2+3+.....+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

أول الأعداد القليلة المثلثية هي $1,3,6,10$. في قائمة أول الثلاثيات الفيثاغورية (a,b,c) وجدنا $(3,4,5),(5,12,13),(7,24,25)$ و $(9,40,41)$. لاحظ أنه في كل حالة فإن قيمة b تساوي أربعة أضعاف عدد مثلثي.

(a) أوجد ثلاثي فيثاغوري أولي (a,b,c) ، حيث $b = 4T_5$. اعمل نفس الشيء بالنسبة لـ $b = 4T_6$ و $b = 4T_7$.

(b) هل تعتقد أنه لكل عدد مثلثي T_n ، يوجد ثلاثي فيثاغوري أولي (a,b,c). حيث $b = 4T_n$؟ إذا كنت تعتقد أن ذلك صحيح فأثبته. إذا كنت لا تعتقد ذلك فأوجد عدداً مثلثيًّا يوضح أن ذلك غير صحيح.

(٢,٦) إذا نظرت إلى جدول الثلاثيات الفيثاغورية الأولية في هذا الفصل، فسترى أن العديد منها فيه c يزيد بمقدار 2 عن a. على سبيل المثال، الثلاثيات $(3,4,5),(15,8,17),(35,12,37)$ ، و، $(63,16,65)$ جميعها لها هذه الخاصية.

(a) أوجد ثلاثيين فيثاغوريين أوليين آخرين (a,b,c) فيهما $c = a + 2$.

(b) أوجد ثلاثي فيثاغوري أولي (a,b,c) فيه $c = a + 2$ و $c > 1000$.

(c) حاول إيجاد صيغة تصف جميع الثلاثيات الفيثاغورية الأولية (a,b,c) التي فيها $c = a + 2$.

(٢,٧) لكل ثلاثي فيثاغوري أولي (a, b, c) في الجدول الوارد في هذا الفصل، احسب المقدار $2c - 2a$. هل يبدو أن هذه القيم لها شكل خاص؟حاول إثبات أن ملاحظتك صحيحة لجميع الثلاثيات الفيثاغورية الأولية.

(٢,٨) (a) اقرأ عن نظام الأعداد البابلية و اكتب وصفاً قصيراً عن رموز الأعداد من 1 إلى 10 و مضاعفات العدد 10 من 20 إلى 50.

(b) اقرأ عن اللوح البابلي المسمى Plimpton 322 و اكتب وصفاً مختصراً يتضمن تقريبه لتاريخ النشأة و بعض الثلاثيات الفيثاغورية الكبيرة التي يحتويها.