الفصل الثامن والعشرون

المعادلة $X^4 + Y^4 = Z^4$
The Equation $X^4 + Y^4 = Z^4$

إن نظرية فيرما الأخيرة كتبها فيرما كملاحظة هامشية في منتصف القرن السابع عشر وبرهنت أخيراً على يد أندرو ويلز Andrew Wiles في نهاية القرن العشرين، وتنص على أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة

$$a^n + b^n = c^n$$

ليس لها حل، حيث a , b , c أعداد صحيحة موجبة.

سنقوم في هذا الفصل بإعطاء برهان فيرما لهذه النظرية في الحالة الخاصة عندما $n = 4$. في الحقيقة، سنبرهن العبارة الأقوى التالية.

نظرية (٢٨,١) (نظرية فيرما الأخيرة للأس 4).
المعادلة $x^4 + y^4 = z^2$ ليس لها حل، حيث x , y , z أعداد صحيحة موجبة.

البرهان

سوف نستخدم طريقة الانحدار لفيرما لإثبات هذه النظرية. تذكر أن الفكرة من

"الانحدار"، كما استخدمت في الفصل السادس والعشرون لكتابة عدد أولي كمجموع مربعين، هي الانحدار من حل كبير إلى حل صغير. كيف يساعدنا ذلك في هذه اللحظة، حيث إننا نحاول إثبات أنه لا يوجد أي حل دائماً؟

ما سنفعله هو أن نفرض وجود حل (x,y,z) بأعداد صحيحة موجبة، وسنستخدم هذا الحل المفترض لتوليد حل جديد (X,Y,Z) بأعداد صحيحة، حيث $Z > z$. بتكرار هذا الإجراء، سنصل في النهاية إلى قائمة غير منتهية من الحلول.

$$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3),\ldots$$

حيث:

$$z_1 > z_2 > z_3 > \cdots$$

هذا بالطبع غير معقول تماماً؛ لأن قائمة متزايدة من الأعداد الصحيحة الموجبة لا يمكن أن تستمر بدون حدود. السبب الوحيد في ذلك يكمن في فرضنا الأصلي بوجود حل. بمعنى آخر، هذا التناقض يبرهن عدم وجود حل.

سنبدأ الآن بالتفاصيل المهمة. سنفرض الآن أن (x,y,z) حل للمعادلة:

$$x^4 + y^4 = z^2$$

ونريد الآن حلاً جديداً أصغر منه. إذا كان x , y , z لها عامل مشترك، فإننا نستطيع تحليله وإلغاءه؛ لذلك من الأفضل أن نفرض أنها أولية نسبيًّا. نلاحظ الآن أنه إذا جعلنا $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z$؛ فإن (a,b,c) هو ثلاثي فيثاغوري أولي:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

نعلم من الفصل الثاني ماذا تشبه ثلاثيات فيثاغورس الأولية. من المحتمل، بعد

تبديل x , y وجود عددين صحيحين موجبين s , t بحيث :

$$x^2=a=st,\qquad y^2=b=\frac{s^2-t^2}{2},\qquad z=c=\frac{s^2+t^2}{2}$$

لاحظ أن حاصل الضرب st فردي، ويساوي عدد مربع والمربعات (الأعداد المربعة) قياس 4 هما فقط 0 , 1 ، إذاً :

$$st\equiv 1 \pmod 4$$

هذا يعني أن s , t إما كلاهما 1 قياس 4 وإما كلاهما 3 قياس 4. في أي حالة نرى أن :

$$s\equiv t \pmod 4$$

بعد ذلك ننظر إلى المعادلة :

$$2y^2=s^2-t^2=(s-t)(s+t)$$

حقيقة أن s , t فرديان وأوليان نسبيًّا تعني أن العامل المشترك الوحيد للعددين $s-t$ و $s+t$ هو 2. نحن نعلم أيضاً أن $s-t$ يقبل القسمة على 4 ، إذاً $s+t$ يجب أن يكون ضعف عدد فردي. بالإضافة إلى ذلك فنحن نعلم أن $(s-t)(s+t)$ هو ضعف عدد مربع. الطريقة الوحيدة لإمكانية حدوث ذلك تكون إذا كان :

$$s-t=4v^2\quad,\quad s+t=2u^2$$

لبعض الأعداد الصحيحة بحيث يكون u , $2v$ أوليين نسبيًّا.

بإيجاد s , t بدلالة u , v :

$$t = u^2 - 2v^2 \quad , \quad s = u^2 + 2v^2$$

وبالتعويض في المعادلة $x^2 = st$ نحصل على :

$$x^2 = u^4 - 4v^2$$

أي أن :

$$x^2 + 4v^2 = u^4$$

لسوء الحظ ، هذه المعادلة ليست هي بالضبط المعادلة التي نبحث عنها ؛ لذلك سوف نكرر الخطوات. إذا فرضنا $A = x \quad , \quad B = 2v^2 \quad , \quad C = u^2$ فإن :

$$A^2 + B^2 = C^2$$

إذاً (A,B,C) هو ثلاثي فيثاغوري أولي. بالرجوع مرة أخرى للفصل الثاني ، يمكننا إيجاد عددين صحيحين فرديين أوليين نسبيًّا s , t حيث :

$$x = A = ST, \qquad 2v^2 = B = \frac{S^2 - T^2}{2}, \qquad u^2 = C = \frac{S^2 + T^2}{2}$$

المعادلة الوسطى تقول إن :

$$4v^2 = S^2 - T^2 = (S - T)(S + T)$$

الآن ، S , T فرديان وأوليان نسبيًّا ، إذاً يكون القاسم المشترك الأكبر للمقدارين $S - T$, $S + T$ هو 2 . بالإضافة إلى ذلك ، فإن حاصل ضربهم مربع ، إذاً :

$$S + T = 2X^2 \quad , \quad S - T = 2T^2$$

لبعض القيم $X\ ,\ Y$. بإيجاد $S\ ,\ T$ بدلالة $X\ ,\ Y$:

$$S=X^2+Y^2 \quad , \quad T=X^2-Y^2$$

وبالتعويض في صيغة u^2 نحصل على :

$$u^2=\frac{S^2+T^2}{2}=\frac{\left(X^2+Y^2\right)+\left(X^2-Y^2\right)}{2}=X^4+Y^4$$

آه ! لدينا حل جديد (X,Y,u) لمعادلتنا الأصلية

$$x^4+y^4=z^2$$

بقي أن نبين أن الحل الجديد أصغر من الحل الأصلي. باستخدام بعض المعادلات السابقة نجد أن :

$$z=\frac{s^2+t^2}{2}=\frac{\left(u^2+2v^2\right)^2+\left(u^2-2v^2\right)^2}{2}=u^4+4v^4$$

وهذا يبين بوضوح أن u أصغر من z .

تمارين

(٢٨,١) بيِّن أن المعادلة $y^2=x^3+xz^4$ ليس لها حل حيث x,y,z أعداد صحيحة لا تساوي الصفر.