# الفصل العشرون

## دالة فاي لأويلر ومجموع القواسم
## Euler's Phi Function and Sums of Divisors

عندما قمنا بدراسة الأعداد الكاملة في الفصل الخامس عشر، استخدمنا دالة سيجما $\sigma(n)$ ، حيث $\sigma(n)$ عُرِّفَت على أنها مجموع كل قواسم العدد $n$. نعتزم الآن تقديم ما قد يبدو تجربة غريبة. نأخذ كل قواسم $n$ ، نطبق دالة فاي لأويلر على كل قاسم، نجمع جميع قيم دالة فاي لأويلر ونرى على ماذا حصلنا.

سنبدأ بمثال، ليكن $n = 15$ . قواسم العدد 15 هي $1, 3, 5, 15$ . أولاً، سنحسب قيمة دالة فاي لأويلر للأعداد $1, 3, 5, 15$

$$\phi(1) = 1 \quad , \quad \phi(3) = 2 \quad , \quad \phi(5) = 4 \quad , \quad \phi(15) = 8$$

بعد ذلك نجمع النواتج لنحصل على:

$$\phi(1) + \phi(3) + \phi(5) + \phi(15) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

الناتج يساوي 15 ، وهو الرقم الذي بدأنا به، ولكن من المؤكد أنها مجرد صدفه.

دعنا نحاول مع عدد كبير له الكثير من العوامل، وليكن $n = 315$ . قواسم العدد 315 هي:

$$1,3,5,7,9,15,21,35,45,63,105,315$$

وإذا حسبنا قيم دالة فاي لأويلر وجمعنا النواتج سنحصل على :

$$\begin{aligned}&\phi(1)+\phi(3)+\phi(5)+\phi(7)+\phi(9)+\phi(15)+\phi(21)\\&\quad+\phi(35)+\phi(45)+\phi(63)+\phi(105)+\phi(315)\\&\quad=1+2+4+6+6+8+12+24+24+36+48+144\\&\quad=315\end{aligned}$$

مرة أخرى ننتهي بالعدد الذي بدأنا به. إن هذا يبدو أكثر من كونه صدفة. هذا يدفعنا لعمل التخمين التالي :

تخمين :

ليكن $d_1,d_2,\ldots,d_r$ أعداد تقسم $n$ ، بما فيها 1 و $n$. فإن :

$$\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots+\phi(d_r)=n$$

ما هو الطريق الذي سنسلكه لإثبات أن تخميننا صحيح؟ أبسط حالة لاختبار صحة هذا التخمين تكون عندما يكون للعدد $n$ قواسم قليلة جداً، فعلى سبيل المثال، افرض أننا أخذنا $n=p$ ، حيث $p$ عدد أولي. قواسم $p$ هي 1 و $p$ ، ونعلم أن $\phi(1)=1$ , $\phi(p)=p-1$ . جمع هاتين القيمتين يعطي :

$$\phi(1)+\phi(p)=1+(p-1)=p$$

وبهذا نكون قد أثبتنا صحة تخميننا عندما $n$ أولي.

بعد ذلك نأخذ $n=p^2$ . قواسم $p^2$ هي $1$ , $p$ , $p^2$ ونعلم من الفصل 11 أن $\phi(p^2)=p^2-p$ ، لذلك نجد أن :

$$\phi(1)+\phi(p)+\phi(p^2)=1+(p-1)+(p^2-p)=p^2$$

لاحظ كيف أن الحدود شُطِبت ما عدا $p^2$ .

بتشجيع من هذه النجاحات، دعنا نحاول التحقق من صحة تخميننا عندما $n = p^k$ أي قوة لعدد أولي. قواسم $p^k$ هي $1, p, p^2, \ldots, p^k$. في الفصل الحادي عشر أوجدنا صيغة لدالة فاي لأويلر عند قوى العدد الأولي: $\phi\left(p^i\right) = p^i - p^{i-1}$ . يمكننا هذا القانون من حساب:

$$
\begin{aligned}
&\phi(1) + \phi(p) + \phi\left(p^2\right) + \cdots + \phi\left(p^{k-1}\right) + \phi\left(p^k\right) \\
&\quad = 1 + (p-1) + \left(p^2 - p\right) + \cdots + \left(p^{k-1} - p^{k-2}\right) + \left(p^k - p^{k-1}\right) \\
&\quad = p^k
\end{aligned}
$$

مرة أخرى، تلغى الحدود ما عدا $p^k$ . يمكننا القول إننا برهنا أن تخميننا صحيح لأي $n$ تمثل قوى عدد أولي.

إذا لم تكن $n$ قوة عدد أولي، فإن الوضع يزداد تعقيداً. وكالعادة، سنبدأ مع أبسط حالة. افرض أن $n = pq$ هو حاصل ضرب عددين أوليين مختلفين. إذاً قواسم $n$ هي $pq, q, p, 1$ لذلك نحن بحاجة المجموع:

$$\phi(1) + \phi(p) + \phi(q) + \phi(pq)$$

لقد بينا في الفصل الحادي عشر أن دالة فاي لأويلر تحقق صيغة الضرب $\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$ بشرط أن يكون $n$ , $m$ أوليين نسبياً. وكحالة خاصة، $p$ و $q$ أوليان نسبياً، لذلك $\phi(pq) = \phi(p) \cdot \phi(q)$. وهذا يعني أن:

$$\begin{aligned}\phi(1)+\phi(p)+\phi(q)+\phi(pq)\\ &=1+\phi(p)+\phi(q)+\phi(p)\phi(q)\\ &=\left(1+\phi(p)\right)\left(1+\phi(q)\right)\\ &=pq\end{aligned}$$

وهذا بالضبط ما نريده.

باستخدام هذا المثال كمفتاح، فنحن الآن مستعدون للتعامل مع الحالة العامة.

لأي عدد $n$ ، سنعرف الدالة $F(n)$ بالصيغة التالية:

$$F(n)=\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots+\phi(d_r)$$

حيث $d_1,d_2,\ldots,d_r$ قواسم $n$.

هدفنا الآن هو إثبات أن $F(n)=n$ لأي عدد $n$. الخطوة الأولى هي فحص فيما إذا كانت الدالة $F$ تحقق صيغة الضرب.

***الادعاء (١, ٢٠)***

*إذا كان* $\gcd(m,n)=1$ ، *فإن* $F(mn)=F(m)\cdot F(n)$.

**التحقق** : ليكن

$d_1,d_2,\ldots,d_r$ قواسم $n$.

$e_1,e_2,\ldots,e_s$ قواسم $m$.

بما أن $m$ , $n$ أوليان نسبياً. فإن قواسم $mn$. هي:

$$d_1e_1,d_1e_2,\ldots,d_1e_s,d_2e_1,d_2e_2,\ldots,d_2e_s,\ldots,d_re_1,d_re_2,\ldots,d_re_s$$

الآن، كل $d_i$ هو أولي نسبياً مع كل $e_j$ ، لذلك $\phi(d_ie_j)=\phi(d_i)\phi(e_j)$.

بالاعتماد على هذه الحقائق نستطيع حساب:

$$\begin{aligned}F(mn) &= \phi(d_1e_1)+\cdots+\phi(d_1e_s)+\phi(d_2e_1)+\cdots+\phi(d_2e_s)\\ &\quad +\cdots+\phi(d_re_1)+\cdots+\phi(d_re_s)\\ &= \phi(d_1)\phi(e_1)+\cdots+\phi(d_1)\phi(e_s)+\phi(d_2)\phi(e_1)+\cdots+\phi(d_2)\phi(e_s)\\ &\quad +\cdots+\phi(d_r)\phi(e_1)+\cdots+\phi(d_r)\phi(e_s)\\ &= \left(\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots+\phi(d_r)\right)\cdot\left(\phi(e_1)+\phi(e_2)+\cdots+\phi(e_s)\right)\\ &= F(m)F(n)\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أكملنا التحقق من ادعائنا.

باستخدام الادعاء السابق، تصبح الآن المهمة سهلة لإثبات صيغة المجموع التالية لدالة فاي لأويلر.

***نظرية (٢٠,٢) (صيغة مجموع دالة فاي لأويلر)***

*ليكن $d_1, d_2, \ldots, d_r$ قواسم $n$ ، فإن:*

$$\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots+\phi(d_r)=n$$

**البرهان**

لنفرض أن $F(n)=\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots+\phi(d_r)$ ونريد أن نبين أن $F(n)$ دائماً تساوي $n$. برهنا سابقاً أن $F\left(p^k\right)=p^k$ لقوى عدد أولي. حلل $n$ الآن إلى قوى أولية ، وليكن $n=p_1^{k_1}.p_2^{k_2}\ldots\ldots.p_r^{k_r}$ .القوى الأولية المختلفة كلٌّ منها يكون أوليًّا نسبياً للآخر ؛ لذلك نستطيع استخدام صيغة الضرب على $F$ لحساب:

$$F(n)=F\left(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}\right)$$

$$= F\left(p_1^{k_1}\right) F\left(p_2^{k_2}\right) \ldots F\left(p_r^{k_r}\right)$$ ( من صيغة الضرب )

$$= p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$ (لأن $F\left(p^k\right) = p^k$ للقوى الأولية)،

$$= n$$

## تمارين

(٢٠,١) دالة لامبدا ليوفيل Liouville's lambda function $\lambda(n)$ تُعرف بتحليل $n$ إلى مضروب عوامله الأولية، $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ ثم نضع $\lambda(n) = (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_r}$ [نعتبر أن $\lambda(1) = 1$]. فمثلاً لحساب $\lambda(1728)$ ، نحلل $1728 = 2^6 \cdot 3^3$ ، ومن ثم $\lambda(1728) = (-1)^{6+3} = (-1)^9 = -1$.

(a) احسب القيم التالية لدالة ليوفيل:

$$\lambda(30) \quad , \quad \lambda(504) \quad , \quad \lambda(60750)$$

(b) نستخدم دالة لامبدا ليوفيل لنعرف دالة جديدة $G(n)$ بالصيغة التالية:

$$G(n) = \lambda\left(d_1\right) + \lambda\left(d_2\right) + \cdots + \lambda\left(d_r\right)$$

حيث $d_1, d_2, \ldots, d_r$ هي قواسم $n$. احسب قيمة $G(n)$ لكل $1 \le n \le 18$.

(c) استخدم حساباتك في (b) والحسابات الإضافية إذا تطلب الأمر، لعمل تخمين لقيمة $G(n)$ . جرب تخمينك لقيم أكثر للعدد $n$ . استخدم تخمينك لإيجاد قيمة $G(62141689)$ , $G(60119483)$.

(d) برهن أن تخمينك في (c) صحيح.

(٢٠,٢) الدالة $f(n)$ التي تحقق صيغة الضرب $f(mn)=f(m)f(n)$ لكل الأعداد $m$ , $n$ عندما $\gcd(m,n)=1$ تسمى دالة مضاعفة multiplicative function. فمثلاً، رأينا أن دالة فاي لأويلر $\phi(n)$ هي دالة مضاعفة (الفصل الحادي عشر) ومجموع دالة القواسم $\sigma(n)$ هي دالة مضاعفة (الفصل 15).

(a) بيّن أن دالة لامبدا ليوفيل $\lambda(n)$ المعرفة في تمرين 20.1 هي دالة مضاعفة.

(b) افرض الآن أن $f(n)$ أي دالة مضاعفة، وعرف دالة جديدة:

$$g(n)=f\left(d_1\right)+f\left(d_2\right)+\cdots+f\left(d_r\right)$$

حيث $d_1,d_2,\ldots,d_r$ قواسم $n$. برهن أن $g(n)$ دالة مضاعفة.

(٢٠,٣) ليكن $d_1,d_2,\ldots,d_r$ هي أعداد تقسم $n$ تحوي 1 و $n$. دالة سيجما للقوة $t$

$\sigma_t(n)$ تساوي مجموع القوى $t^{th}$ لقواسم $n$.

$$\sigma_t(n)=d_1^t+d_2^t+\cdots+d_r^t$$

على سبيل المثال، $\sigma_2(10)=1^2+2^2+5^2+10^2=130$ طبعاً، $\sigma_1(n)$ هي دالتنا القديمة، دالة سيجما $\sigma(n)$.

(a) احسب القيم $\sigma_2(12)$ , $\sigma_3(10)$ , $\sigma_0(18)$.

(b) بيّن أنه إذا كان $\gcd(m,n)=1$ ؛ فإن $\sigma_t(mn)=\sigma_t(m)\cdot\sigma_t(n)$. بكلمات أخرى، بيّن أن $\sigma_t$ دالة مضاعفة. هل هذه الصيغة تبقى صحيحة إذا كان $m$ , $n$ ليسا أوليين نسبياً.

(c) بيّنا في الفصل الخامس عشر أن $\sigma\left(p^{k}\right)=\left(p^{k+1}-1\right)\big/\left(p-1\right)$ .
أوجد صيغة مشابهة للدالة $\sigma_{t}\left(p^{k}\right)$ ، واستخدمها لحساب $\sigma_{4}\left(2^{6}\right)$ .

(d) الدالة $\sigma_{0}(n)$ تُحصي قواسم $n$ المختلفة.
هل صيغتك في (c) تعمل مع الدالة $\sigma_{0}$ ؟ إذا كان الجواب لا ، أعط صيغة صحيحة للدالة $\sigma_{0}\left(p^{k}\right)$ . استخدم صيغتك و(b) لإيجاد قيمة $\sigma_{0}(42336000)$ .