الفصل الأول

ما هي نظرية الأعداد؟
What is Number Theory?

نظرية الأعداد هي دراسة مجموعة الأعداد الكلية الموجبة :

$$1,2,3,4,5,6,7,\ldots$$

والتي ما تسمى غالباً مجموعة الأعداد الطبيعية. ونحن نريد على وجه الخصوص دراسة العلاقات بين أنواع مختلفة من الأعداد. في العصور القديمة قسّم الناس الأعداد الطبيعية إلى عدة أنواع مختلفة. هنا بعض الأنواع المشهورة وأخرى غير مشهورة :

فردية Odd	$1,3,5,7,9,11,\ldots$
زوجية Even	$2,4,6,8,10,\ldots$
مربعة Square	$1,4,9,16,25,36,\ldots$
مكعبة Cube	$1,8,27,64,125,\ldots$
أولية Prime	$2,3,5,7,9,11,13,17,19,23,29,31,\ldots$
مؤلَفة Composite	$4,6,8,9,10,12,14,15,16,\ldots$
1 (قياس 4) 1(modulo4)	$1,5,9,13,17,21,25,\ldots$
3 (قياس 4) 3(modulo4)	$3,7,11,15,19,23,27,\ldots$

مثلثية Triangular $1,3,6,10,15,21,...$

كاملة Perfect $6,28,496,...$

فيبوناتشي Fibonacci $1,1,2,3,5,8,13,21,...$

من المؤكد أن العديد من هذه الأنواع من الأعداد معروفة مسبقاً لديك. الأنواع الأخرى، مثل الأعداد "قياس 4"، قد لا تكون مألوفة بالنسبة لك.

يقال إن عدداً ما يطابق 1(قياس 4) إذا كان باقي قسمته على 4 يساوي 1، نفس الشيء بالنسبة للأعداد 3(قياس 4). يقال إن عدداً ما عدد مثلثي إذا أمكن ترتيب قطع عددها هذا العدد على شكل مثلث، بحيث تكون قطعة واحدة في القمة، قطعتين في الصف الثاني، وهكذا.

أما أعداد فيبوناتشي فقد أُنشِئت بحيث تبدأ بالعددين 1,1. وللحصول على العدد اللاحق في القائمة نقوم بجمع العددين السابقين. أخيراً، يسمى العدد كامل إذا كان مجموع جميع قواسمه، ما عدا العدد نفسه، يعطي نفس العدد الأصلي. وعليه، الأعداد التي تقسم العدد 6 هي 3 , 2 , 1، و $6=3+2+1$. نفس الشيء، قواسم العدد 28 هي $1,2,4,7,14$ و $28=14+7+4+2+1$.

وسوف نتطرق لجميع هذه الأنواع من الأعداد، وأنواع أخرى كثيرة خلال دراستنا لنظرية الأعداد.

أسئلة رئيسية في نظرية الأعداد

الهدف الرئيسي من دراسة نظرية الأعداد هو اكتشاف علاقات مهمة وغير متوقعة بين أنواع الأعداد المختلفة، وإثبات أن هذه العلاقات صحيحة. في هذا الفصل سنطرح بعض المسائل الرئيسية في نظرية الأعداد، بعضها سوف نقوم بحله في النهاية،

بعضها له حلول معروفة ولكنها في غاية الصعوبة لنقوم بعرضها في هذا الكتاب، وبعضها بقي حتى هذا اليوم بدون حل.

مجموع مربعين I :

هل يمكن أن يكون ناتج مجموع عددين مربعين عدداً مربعاً؟ واضح أن الجواب "نعم". فمثلاً $3^2 + 4^2 = 5^2$ و $5^2 + 12^2 = 13^2$. هذه أمثلة على ثلاثيات فيثاغورس. سوف نقوم بعرض جميع ثلاثيات فيثاغورس في الفصل الثاني.

مجموع قوى عليا

هل يمكن أن يكون ناتج مجموع عددين مكعبين عدداً مكعباً؟ هل يمكن أن يكون ناتج مجموع عددين كل منهما مرفوع للقوة الرابعة عدداً مرفوعاً للقوة الرابعة؟

بشكل عام، هل يمكن أن يكون ناتج مجموع عددين كل منهما مرفوع للقوة n عدداً مرفوعاً للقوة n ؟ الجواب هو "لا". إن هذه مسألة مشهورة ، وتسمى "نظرية فيرما الأخيرة"، وكان أول من وضعها هو "Pierre Fermat" في القرن السابع عشر، ولكنها لم تحل بشكل كامل حتى العام 1994 على يد (أندرو ويلز) "Andrew Wiles". لقد تضمن برهان Wiles طرقاً رياضية معقدة لن نكون قادرين على عرض تفاصيلها، ولكن في الفصل الثامن والعشرين سوف نثبت أنه لا يمكن أن يكون ناتج مجموع عددين كل منهما مرفوعاً للقوة الرابعة عدداً مرفوع للقوة الرابعة، وفي الفصل الثامن والأربعون سوف نعطي بعض الأفكار المتضمنة في برهان Wiles.

لا نهائية الأعداد الأولية

العدد الأولي هو عدد p عوامله هي 1 , p فقط.

- هل هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية؟
- هل هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية تطابق 1 قياس 4 ؟

• هل هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية تطابق 3 قياس 4 ؟

الجواب عن كل هذه الأسئلة هو "نعم". سوف نثبت هذه الحقائق في الفصول 12 و 14 وسوف نناقش أيضاً الكثير من النتائج العامة المثبتة في عام 1837 على يد (ديرشله) "Lejeune Dirichlet".

مجموع مربعين II

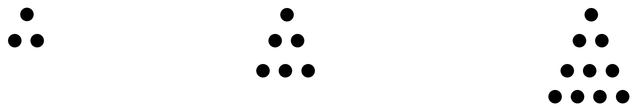
ما هي الأعداد الناتجة من جمع مربعين؟ غالباً ما تكون هذه النوعية من الأسئلة أسهل على الإجابة إذا بدأنا أولاً بالأعداد الأولية ؛ لذلك فنحن نسأل عن أي الأعداد الأولية (الفردية) تنتج من مجموع مربعين؟ على سبيل المثال :

$$\begin{array}{llll} 3 = NO, & 5 = 1^2 + 2^2, & 7 = NO, & 11 = NO, \\ 13 = 2^2 + 3^2, & 17 = 1^2 + 4^2, & 19 = NO, & 23 = NO, \\ 29 = 2^2 + 5^2, & 31 = NO, & 37 = 1^2 + 6^2, & \ldots \end{array}$$

هل تلاحظ نمطاً؟ ربما لم تلاحظ ؛ لأن هذه القائمة قائمة قصيرة، ولكن إذا نظرنا إلى قائمة أطول فإننا سنخمن أن عدداً أوليًّا p يكون مجموع مربعين إذا كان يطابق 1 (قياس 4) . بكلمات أخرى، p عبارة عن مجموع مربعين إذا كان باقي قسمته على 4 يساوي 1 ، ولا يكون مجموع مربعين إذا كان باقي قسمته على 4 يساوي 3. وسوف نثبت أن هذا صحيح في الفصل 26.

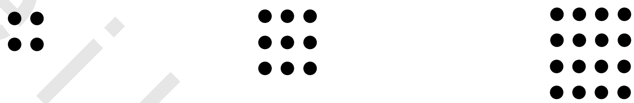
أشكال العدد

الأعداد المربعة هي الأعداد $1,4,9,16,\ldots$ وهي أعداد يمكن تمثيلها على شكل مربع. الأعداد المثلثية هي الأعداد $1,3,6,10,\ldots$ وهي أعداد يمكن ترتيبها على شكل مثلث. أولى الأعداد المربعة والأعداد المثلثية موضحة بالشكل رقم (١،١).



$1+2=3$ $\quad$ $1+2+3=6$ $\quad$ $1+2+3+4=10$

أعداد مثلثية



$2^2=4$ $\quad$ $3^2=9$ $\quad$ $4^2=16$

أعداد مربعة

الشكل رقم (١,١). أعداد تُشكل أشكالاً مهمة.

إن السؤال الذي يطرح نفسه هو هل توجد أعداد مثلثية بحيث تكون أعداداً مربعة (غير العدد 1)؟ الجواب هو "نعم"، أصغر مثال هو :

$$36=6^2=1+2+3+4+5+6+7+8$$

إذاً، ربما نسأل فيما إذا كان هناك أكثر من مثال، وإذا وجد ، فهل هي لا نهائية؟

للبحث عن هذه الأمثلة، فإن الصيغة التالية مفيدة لذلك:

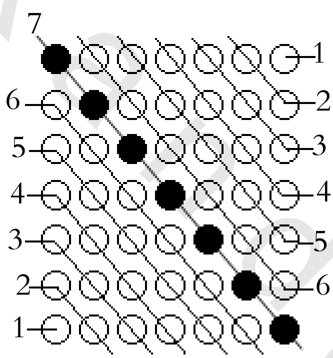
$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

إن هذه الصيغة لها قصة طريفة. في أحد الأيام عندما كان "كارل فريدريك جاوس"(1855 – 1777) صغيراً في أحد صفوف المدرسة ، قام أستاذه بإعطاء الطلاب

سؤالاً صعباً عقاباً لهم، فطلب منهم أن يقوموا بجمع جميع الأعداد من 1 إلى 100. بدأ جميع زملاء جاوس بالجمع، بينما ذهب جاوس إلى أستاذه ليعطيه الإجابة 5050. تقول القصة أن الأستاذ لم يكن معجباً ولم يكن مستمتعاً بذلك، ولكن لم يسجل التاريخ ما هو الواجب التالي الذي كلف به الأستاذ طلابه ليقوموا بحله!

إن هناك طريقة هندسية سهلة تثبت صيغة جاوس، وقد يكون جاوس نفسه هو الذي اكتشفها. الفكرة هي أخذ مثلثين كل منهما يتألف من $1+2+\cdots+n$ قطعة ومن ثم نلصقها بقطر إضافي مكون من $n+1$ قطعة.

الشكل 1.2 يوضح هذه الفكرة عند $n=6$.



$$\left(1+2+3+4+5+6\right)+7+\left(6+5+4+3+2+1\right)=7^2$$

الشكل رقم (١،٢). مجموع أول n عدد صحيح

في الشكل رقم (١،٢). قمنا بجعل لون القطع الإضافية $n+1=7$ على القطر باللون الأسود. كل ضلع من أضلاع المربع الناتج يتألف من $n+1$ قطعة، إذاً، بلغة الرياضيات نستنتج الصيغة التالية:

$$2\left(1+2+3+\cdots+n\right)+\left(n+1\right)=\left(n+1\right)^2$$

مربع = قطر + مثلثين

يمكننا الآن طرح $n+1$ من الطرفين ومن ثم نقسم على 2 لنحصل على صيغة جاوس.

الأوليات التوأمية

Twin Primes

نجد أحياناً في قائمة الأعداد الأولية عددين فرديين متتابعين كلاهما أولي. وضعنا إطارات على هذه الأوليات التوأمية في القائمة التالية للأعداد الأولية الأقل من 100.

$$\boxed{03}, \boxed{05}, \boxed{07}, \quad \boxed{11}, \boxed{13}, \quad \boxed{17}, \boxed{19}, \quad 23, \quad \boxed{29}, \boxed{31}, \quad 37$$

$$\boxed{41}, \boxed{43}, \quad 47, 53, \quad \boxed{59}, \boxed{61}, \quad 67, \quad \boxed{71}, \boxed{73}, \quad 79, 83, 89, 97.$$

هل يوجد عدد لا نهائي من الأوليات التوأمية؟ بمعنى، هل يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية p بحيث يكون $p+2$ أيضاً أوليًّا؟ حتى الآن، لا أحد يعلم إجابة هذا السؤال.

أعداد أولية على الشكل N^2+1

إذا كتبنا الأعداد التي على الشكل N^2+1 آخذين $N=1,2,3,\ldots$، فسنجد أن بعضها أولي. طبعاً، إذا كان N فرديًّا، فإن N^2+1 زوجي، إذن لن يكون N^2+1 أولياً إلا إذا كان $N=1$.

إذنٍ من الطبيعي أن يكون اهتمامنا منصباً فقط على القيم الزوجية للمقدار N . انظر الآن إلى القائمة التالية :

$$2^2+1=5 \quad 4^2+1=17 \quad 6^2+1=37 \quad 8^2+1=65=5\cdot 13$$
$$10^2+1=101 \quad 12^2+1=145=5\cdot 29 \quad 14^2+1=197$$
$$16^2+1=257 \quad 18^2+1=325=5^2\cdot 13 \quad 20^2+1=401$$

يبدو من هذه القائمة أن هذه الأعداد الأولية موجودة بوفرة ، لكن إذا أخذنا قيماً أكثر للمقدار N فسنجد أنها ستصبح نادرة ؛ لذلك فنحن نتساءل فيما إذا كان هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية على الشكل N^2+1 . مرة أخرى ، لا أحد حتى الآن يعرف الإجابة عن هذا السؤال.

رأينا حتى الآن بعض أنواع الأسئلة التي دُرِسَت في نظرية الأعداد. كيف نحاول الإجابة عن مثل هذه الأسئلة؟ الجواب هو أن جزءاً من نظرية الأعداد تجريبي والجزء الآخر نظري. الجزء التجريبي يسبق الجزء النظري بطبيعة الحال ، فهو يقود إلى أسئلة ويقترح طرقاً للإجابة عنها. بعد ذلك يأتي الجزء النظري ، وفي هذا الجزء نحاول الإجابة عن تلك الأسئلة. وهنا بعض الخطوات المتبعة لهذا الغرض :

١- اجمع بيانات ، غالباً ما تكون عددية.

٢- افحص البيانات وحاول إيجاد أنماط وعلاقات.

٣- صغ تخمينات (معتمداً على الحدس) لشرح تلك الأنماط والعلاقات . وغالباً ما تكون هذه التخمينات على شكل قوانين.

٤- اختبر صحة تخميناتك من خلال جمع بيانات إضافية.

٥- برهن تخميناتك لتثبت صحتها.

جميع هذه الخطوات الخمس ضرورية في نظرية الأعداد والرياضيات. بشكل عام ، الأسلوب العلمي دائماً ما يتضمن الخطوات الأربع الأولى على الأقل. إن

النظرية العلمية تصبح مقبولة فقط عندما تُختبر على بيانات جديدة. في الرياضيات يتطلب الأمر خطوة إضافية وهي خطوة البرهان، وهو عبارات منطقية متسلسلة، تبدأ بحقائق معروفة وتنتهي بالعبارة المطلوبة.

تمارين

(١,١) أول عددين كليهما مربع ومثلثي هما 1 , 36. أوجد العدد اللاحق، وإن أمكن، العددين اللاحقين.

هل يمكنك إعطاء طريقة فعَّالة لإيجاد الأعداد المربعة – المثلثة؟ هل تعتقد أنها أعداد لا نهائية؟

(١,٢) حاول جمع الأعداد الفردية الأولى. ثم انظر فيما إذا كانت الأعداد التي تحصل عليها تؤلف نمطاً معيناً. إذا أوجدت النمط، عبر عنه بصيغة. أعط برهاناً هندسيًّا على أن صيغتك صحيحة.

(١,٣) الأعداد الفردية المتعاقبة 3 , 5 , 7 جميعها أولية. هل هناك عدد لا نهائي من مثل هذه "الثلاثيات الأولية"؟ أي، هل هناك عدد لا نهائي من الأعداد الأولية p بحيث $p+2$, $p+4$ أيضاً عددان أوليان؟

(١,٤) يوجد اعتقاد عام بأن هناك عدداً لا نهائياً من الأعداد الأولية، تكون على الشكل N^2+1، على الرغم من أنه لا يوجد أحد يستطيع تأكيد ذلك حتى الآن.

(a) هل تعتقد أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية، تكون على الشكل N^2-1؟

(b) هل تعتقد أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية، تكون على الشكل N^2-2؟

(c) ماذا عن التي على الشكل N^2-3 ؟ أو على الشكل N^2-4 ؟

(d) ما قيم a التي تعتقد أنها تعطي عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية التي تكون على الشكل N^2-a ؟

(١,٥) السطران التاليان يوضحان طريقة أخرى لاشتقاق الصيغة التي تعطي ناتج مجموع أول n عدداً صحيحاً وذلك من خلال إعادة ترتيب حدود المجموع. أكمل التفاصيل.

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n &= (n+1)+\big(2+(n-1)\big)+\big(3+(n-2)\big)+\cdots \\ &= (1+n)+(1+n)+(1+n)+\cdots\end{aligned}$$

كم عدد الأقواس $(n+1)$ الموجودة في السطر الثاني ؟ (قد تحتاج إلى افتراض حالتين منفصلتين، عندما n فرديًّا وعندما n زوجيًّا. إذا لم يتضح الأمر لديك، فحاول أولاً عندما $n=6$ ثم عندما $n=7$).