الفصل الخامس عشر

أعداد ميرسن الأولية والأعداد الكاملة
Mersenne Primes and Perfect Numbers

لقد لاحظ قدماء الإغريق أن العدد 6 له خاصية مدهشة. فإذا أخذنا قواسم العدد 6 الفعلية، أي جميع قواسمه ما عدا العدد 6 نفسه، ومن ثم جمعنا هذه القواسم فإننا سنحصل مرة أخرى على العدد 6. فالقواسم الفعلية للعدد 6 هي 1 , 2 و 3 وإذا قمنا بجمعها سنحصل على:

$$1+2+3=6$$

حدوث هذه الخاصية نادر جداً، كما ستلاحظ ذلك من خلال بعض الأمثلة:

مجموع القواسم الفعلية لعدد *n*

n		
6	$1+2+3=6$	المجموع مساوي (كامل!)
10	$1+2+5=8$	المجموع أقل
12	$1+2+3+4+6=16$	المجموع أكبر
15	$1+3+5=9$	المجموع أقل
20	$1+2+4+5+10=22$	المجموع أكبر
28	$1+2+4+7+14=28$	المجموع مساوي(كامل!)
45	$1+3+5+9+15=33$	المجموع أقل

لقد أطلق الإغريق على هذه الأعداد الخاصة اسم الأعداد الكاملة. وعليه ؛ فإن "العدد الكامل" (*perfect number*) هو العدد الذي يساوي مجموع قواسمه الفعلية. لقد رأينا حتى الآن عددين كاملين 6 , 28. هل هناك أعداد أخرى؟

لقد عرف الإغريق طريقة لإيجاد بعض الأعداد الكاملة، وهي مثيرة للاهتمام بما يكفي – وطريقتهم هذه لها علاقة قوية بأعداد ميرسن الأولية التي درسناها في الفصل السابق.

سنعرض الآن لعبارة وردت كنظرية في كتاب الأصول لإقليدس (Euclid's *Elements*).

نظرية (١٥,١) (صيغة العدد الكامل لإقليدس)

إذا كان $\left(2^p - 1\right)$ عدداً أوليًا ؛ فإن $2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$ عدد كامل.

أول عَدَدَي ميرسن الأوليين هما

$$3 = 2^2 - 1 \qquad , \qquad 7 = 2^3 - 1$$

بتطبيق صيغة العدد الكامل لإقليدس على هذين العددين يعطينا العددين الكاملين المعروفين لدينا حتى الآن :

$$2^{2-1}\left(2^2 - 1\right) = 6 \qquad , \qquad 2^{3-1}\left(2^3 - 1\right) = 28$$

عدد ميرسن الأولي الثالث هو $2^5 - 1 = 31$ ، وصيغة إقليدس تعطينا العدد الكامل الجديد، ألا وهو :

$$2^{5-1}\left(2^4 - 1\right) = 496$$

وللتأكد من أن 496 عدد كامل، فإننا نحتاج لجمع قواسمه الفعلية. بتحليل 496 نجد أن $\left(31\right)\left(2^4\right) = 496$ ؛ وعليه فإن قواسم 496 الفعلية هي :

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$$

و

$$31, (2)(31), \left(2^2\right)(31), \left(2^3\right)(31)$$

بقي أن نجمع هذه الأعداد لنتأكد ، ولكن لتوضيح الطريقة العامة سنقوم بجمعها على مرحلتين. الأولى :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$$

والثانية :

$$\begin{aligned} 31 + (2)(31) + \left(2^2\right)(31) + \left(2^3\right)(31) &= 31\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4\right) \\ &= (31)(15) \end{aligned}$$

وبجمع نواتج المرحلتين سنجد :

$$31 + (31)(15) = (31)(16) = 496$$

إذاً 496 هو في الحقيقة عدد كامل.

باستخدام نفس فكرة هذا الأسلوب ، فإننا نستطيع بسهولة التحقق من أن صيغة العدد الكامل لإقليدس هي صيغة صحيحة بشكل عام.

ليكن $q = 2^p - 1$ ، والمطلوب هو إثبات أن $2^{p-1}q$ عدد كامل. قواسم العدد $2^{p-1}q$ الفعلية هي :

$$q, 2q, 4q, \ldots, 2^{p-2}q \qquad , \qquad 1, 2, 4, \ldots, 2^{p-1}$$

سنقوم بجمع هذه الأعداد بالاعتماد على صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية الواردة في الفصل السابق.

صيغة مجموع متسلسلة هندسية هي :

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}$$

بوضع $x=2$, $n=p$ سنحصل على:

$$1+2+4+\cdots+2^{p-1}=\frac{2^p-1}{2-1}=2^p-1=q$$

كذلك بوضع $x=2$ و $n=p-1$ في صيغة المتسلسلة الهندسية يمكننا حساب المجموع:

$$\begin{aligned}q+2q+4q+\ldots+2^{p-1}q&=q\left(1+2+4+\ldots+2^{p-2}\right)\\&=q\left(\frac{2^{p-1}-1}{2-1}\right)\\&=q\left(2^{p-1}-1\right)\end{aligned}$$

وعليه إذا قمنا بجمع جميع قواسم $2^{p-1}q$ الفعلية ؛ فإننا سنحصل على:

$$\begin{aligned}&1+2+4+\cdots+2^{p-1}+q+2q+4q+\cdots+2^{p-2}q\\&=q+q\left(2^{p-1}-1\right)\\&=2^{p-1}q\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أن $2^{p-1}q$ عدد كامل.

يمكننا الآن استخدام صيغة العدد الكامل لإقليدس لإيجاد كثير من الأعداد الكاملة. في الواقع ، يمكننا الحصول على عدد كامل عند كل عدد ميرسن أولي يمكننا إيجاده. أولى الأعداد الكاملة المستخلصة بهذه الطريقة مبينة في الجدول أدناه. وكما نلاحظ ، فإن الأعداد تصبح كبيرة بشكل سريع جداً.

p	2	3	5	7	13	17
$2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$	6	28	496	8128	33550336	8589869056

كما يمكننا أن نورد أعداداً كاملة ضخمة بشكل لا يصدق. فعلى سبيل المثال :

$$2^{859432}\left(2^{859433}-1\right) \quad , \quad 2^{756838}\left(2^{756839}-1\right)$$

عددان كاملان. العدد الكامل الأخير يحوي أكثر من نصف مليون خانة !

السؤال الطبيعي الذي يطرح نفسه الآن هو هل صيغة العدد الكامل لإقليدس تصف جميع الأعداد الكاملة؟ بكلمات أخرى، هل كل عدد كامل يمكن كتابته على الشكل $2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$ ؛ حيث $\left(2^{p}-1\right)$ عدد أولي، أم هل هناك أعداد كاملة أخرى؟ بعد وفاة إقليدس بألفي سنة تقريباً، برهن "ليونارد أويلر Leonhard Euler" أن صيغة إقليدس تعطي جميع الأعداد الكاملة الزوجية على الأقل.

نظرية (١٥,٢) (نظرية العدد الكامل لأويلر).

إذا كان n عدداً كاملاً زوجيًا فإنه يمكن كتابة n على الشكل:

$$n=2^{p-1}\left(2^{p}-1\right)$$

حيث $\left(2^{p}-1\right)$ *عدد ميرسن الأولي.*

سنبرهن نظرية أويلر في نهاية هذا الفصل، ولكن نحتاج أولاً لعرض دالة نحتاجها في البرهان. هذه الدالة والتي يرمز لها بالحرف الإغريقي σ (سيجما)، تساوي :

$\sigma(n)=$ مجموع جميع قواسم العدد n بما فيها 1 و n

وهنا بعض الأمثلة :

$$\sigma(6)=1+2+3+6 \qquad =12$$

$$\sigma(8)=1+2+4+8 \qquad =15$$

$$\sigma(18)=1+2+3+6+9+18=39$$

كذلك يمكننا إعطاء بعض الصيغ العامة. فعلى سبيل المثال، إذا كان p عدداً أوليًّا، فإن قواسمه هي 1 و p فقط، ولذلك $\sigma(p)=p+1$. وبشكل عام، قواسم قوى عدد أولي p^k هي الأعداد $1, p, p^2, \ldots, p^k$ لذلك:

$$\sigma\left(p^k\right)=1+p+p^2+\cdots+p^k=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$

ولنتعرف أكثر على دالة سيجما، سنعرض الجدول المقتضب التالي الذي يبين قيمة دالة سيجما عند بعض القيم.

$\sigma(1)=1$	$\sigma(2)=3$	$\sigma(3)=4$	$\sigma(4)=7$	$\sigma(5)=6$
$\sigma(6)=12$	$\sigma(7)=8$	$\sigma(8)=15$	$\sigma(9)=13$	$\sigma(10)=18$
$\sigma(11)=12$	$\sigma(12)=28$	$\sigma(13)=14$	$\sigma(14)=24$	$\sigma(15)=24$
$\sigma(16)=31$	$\sigma(17)=18$	$\sigma(18)=39$	$\sigma(19)=20$	$\sigma(20)=42$
$\sigma(21)=32$	$\sigma(22)=36$	$\sigma(23)=24$	$\sigma(24)=60$	$\sigma(25)=31$
$\sigma(26)=42$	$\sigma(27)=40$	$\sigma(28)=56$	$\sigma(29)=30$	$\sigma(30)=72$
$\sigma(31)=32$	$\sigma(32)=63$	$\sigma(33)=48$	$\sigma(34)=54$	$\sigma(35)=48$
$\sigma(36)=91$	$\sigma(37)=38$	$\sigma(38)=60$	$\sigma(39)=56$	$\sigma(40)=90$

$\sigma(41)=42$	$\sigma(42)=96$	$\sigma(43)=44$	$\sigma(44)=84$	$\sigma(45)=78$
$\sigma(46)=72$	$\sigma(47)=48$	$\sigma(48)=124$	$\sigma(49)=57$	$\sigma(50)=93$
$\sigma(51)=72$	$\sigma(52)=98$	$\sigma(53)=54$	$\sigma(54)=120$	$\sigma(55)=72$
$\sigma(56)=120$	$\sigma(57)=80$	$\sigma(58)=90$	$\sigma(59)=60$	$\sigma(60)=168$
$\sigma(61)=62$	$\sigma(62)=96$	$\sigma(63)=104$	$\sigma(64)=127$	$\sigma(65)=84$

إن معاينة هذا الجدول توحي بأن $\sigma(mn)$ تساوي حاصل الضرب $\sigma(m).\sigma(n)$ ، وبعد القليل من التحليل ، نلاحظ أن هذا يبدو صحيحاً عندما تكون m , n عددين أوليين نسبياً. لذلك يبدو أن دالة σ لها نفس نوع صيغة الضرب الخاصة بدالة "فاي" phi التي درسناها في الفصل الحادي عشر.

سوف نورد هذه القاعدة مع صيغة المقدار $\sigma\left(p^k\right)$.

نظرية (١٥,٣). (صيغ دالة سيجما)

(a) إذا كان p عدداً أولياً و $k \geq 1$ ؛ فإن:

$$\sigma\left(p^k\right)=1+p+p^2+\cdots+p^k=\frac{p^{k+1}-1}{p-1}$$

(b) إذا كان $\gcd(m,n)=1$ ؛ فإن:

$$\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$$

تماماً كما حصل مع دالة phi ، فإنه يمكننا أن نستخدم صيغة دالة سيجما لتبسيط حساب $\sigma(n)$ عندما يكون العدد n كبيراً. فمثلاً :

$$\begin{aligned}\sigma(16072) &= \sigma\left(2^3 \cdot 7^2 \cdot 41\right)\\ &= \sigma\left(2^3\right).\sigma\left(7^2\right).\sigma(41)\\ &= \left(1+2+2^2+2^3\right)\left(1+7+7^2\right)(1+41)\\ &= (15)(57)(42)\\ &= 35910\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sigma(800000) &= \sigma\left(2^8.5^5\right)\\ &= \left(\frac{2^9-1}{2-1}\right)\left(\frac{5^6-1}{5-1}\right)\\ &= 511\cdot\frac{15624}{4}\\ &= 1995966\end{aligned}$$

حتى هذه اللحظة فمن المحتمل عزيزي القارئ أنك تتوقع أنني سأبين لك كيف تبرهن صيغة الضرب لدالة سيجما. ولكنني لن أفعل!

إنك تمتلك الآن المعلومات الكافية في نظرية الأعداد، والتي تجعل هذا الوقت هو الوقت المناسب لتبدأ العمل كرياضي متمكن[١] . لذلك سأسمح لنفسي أن أطلب منك تقديم برهان للصيغة $\sigma(mn)=\sigma(m)\sigma(n)$ عندما يكون m و n عددين صحيحين أوليين نسبياً. ولا تيأس وتستسلم إن لم تنجح في البداية. والنصيحة

---

(١) هدفك هو أن تقرر أن تبرهن صيغة الضرب لدالة سيجما. وإما أن تصل أو تقتل دون هذا الهدف. حظ سعيد.

التي أستطيع أن أقدمها لك هي أن تحاول أن تكتشف لماذا هذه الصيغة صحيحة قبل أن تحاول إعطاء برهان عام لها. لذلك، وعلى سبيل المثال، لاحظ أعداد مثل $(7)(3)=21$ و $(13)(5)=65$ والتي تنتج من حاصل ضرب عددين أوليين وسجل قواسمها. إن هذا يمكنك من إثبات أن $\sigma(pq)=\sigma(p)\sigma(q)$ عندما يكون p و q عددين أوليين مختلفين. بعد ذلك قم بفحص عدة أمثلة على عددين m و n لكل منهما قاسمان أو ثلاثة، وحاول أن تلاحظ كيف أن قواسم العددين m و n تتوافق مع بعضها لتعطي قواسم العدد mn. إذا كنت قادراً على أن تطبق هذه الأفكار بدقة، فإنك حتماً ستكون قادراً على برهنة أن $\sigma(mn)=\sigma(m).\sigma(n)$ وتذكر، رغم كل شيء أنك سوف تحتاج إلى استخدام حقيقة أن m و n أوليان نسبياً.

ما العلاقة بين دالة سيجما والأعداد الكاملة؟

نقول أن العدد n عدد كامل إذا كان مجموع قواسمه، ما عدا العدد n نفسه، يساوي n.

بينما دالة سيجما $\sigma(n)$ هي مجموع قواسم العدد n بالإضافة إلى n، وعليه فإن لها n "إضافية". لذلك:

n عدد كامل إذا كان $\sigma(n)=2n$

نحن الآن مستعدون لإثبات صيغة أويلر للأعداد الكاملة الزوجية، والتي سنعيد كتابتها هنا للتسهيل على القارئ.

نظرية (٤,١٥). (نظرية العدد الكامل لأويلر).

إذا كان n عدداً كاملاً زوجيًّا؛ فإنه يمكن كتابة n على الشكل:

$$n = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$$

حيث $\left(2^p - 1\right)$ *عدد ميرسن أولي.*

البرهان

لنفرض أن n عدد كامل زوجي. بما أن n عدد زوجي، إذاً يمكن تحليله إلى عوامل كما يلي:

$$n = 2^k m$$

حيث $k \geq 1$ و m عدد فردي.

الآن سوف نستخدم صيغة دالة سيجما لحساب $\sigma(n)$:

$$\sigma(n) = \sigma\left(2^k m\right) \qquad \left(\text{حيث } n = 2^k m\right)$$

$$= \sigma\left(2^k\right)\sigma(m)$$

[بإستخدام صيغة الضرب للدالة σ وحقيقة أن $\gcd\left(2^k, m\right) = 1$]

$$= \left(2^{k+1} - 1\right)\sigma(m) \qquad \left(\text{استخدام صيغة } \sigma\left(p^k\right)\right)$$

ولكن n عدد كامل، أي أن $\sigma(n) = 2n = 2^{k+1} m$. وعليه ؛ فإننا نحصل على تعبيرين مختلفين للدالة $\sigma(n)$ ، وكل منهما يساوي الآخر بالطبع:

$$2^{k+1} m = \left(2^{k+1} - 1\right)\sigma(m)$$

واضح أن العدد $\left(2^{k+1} - 1\right)$ عدد فردي، والعدد $\left(2^{k+1} - 1\right)\sigma(m)$ من مضاعفات العدد 2^{k+1} ؛ وعليه فإن 2^{k+1} من قواسم $\sigma(m)$. بكلمات أخرى، يوجد عدد c بحيث $\sigma(m) = 2^{k+1} c$. وبتعويض المعادلة الأخيرة في المعادلة أعلاه

نحصل على :

$$2^{k+1}m=\left(2^{k+1}-1\right)\sigma(m)=\left(2^{k+1}-1\right)2^{k+1}c \quad ,$$

وبحذف العامل 2^{k+1} من الطرفين نحصل على :

$$m=\left(2^{k+1}-1\right)c$$

وباختصار، فإننا برهنا على وجود عدد صحيح c ، بحيث :

$$m=\left(2^{k+1}-1\right)c \quad , \quad \sigma(m)=2^{k+1}c$$

سنبين الآن أن $c=1$ من خلال فرضنا أن $c>1$ ونصل إلى تناقض.
لنفرض أن $c>1$ إذاً $m=\left(2^{k+1}-1\right)c$ له القواسم المختلفة التالية :

$$m \ , \ c \ , \ 1$$

(حقيقة أن عددنا الأصلي n كان عدداً زوجيًّا يعني أن $k\geq 1$ ، لذلك فإن c , m عددان مختلفان). طبعاً من المحتمل أن يكون m يقبل القسمة على كثير من الأعداد الأخرى، ولكن في جميع الأحوال فإن :

$$\sigma(m)\geq 1+c+m=1+c+\left(2^{k+1}-1\right)c=1+2^{k+1}c$$

على كل حال فإننا نعلم أيضاً أن $\sigma(m)=2^{k+1}c$ لذلك :

$$2^{k+1}c\geq 1+2^{k+1}c$$

وعليه ؛ فإن $0\geq 1$ ، تناقض. وعليه ؛ فإن $c=1$. أي أن :

$$m=\left(2^{k+1}-1\right) \quad , \quad \sigma(m)=2^{k+1}=m+1$$

أي الأعداد m لها الخاصية $\sigma(m)=m+1$ ؟

من الواضح أن هذه الأرقام هي الأرقام التي قواسمها 1 , m فقط، أي أن مجموع قواسمها سيكون أكبر منها. وبعبارة أخرى $\sigma(m) = m+1$ ، فقط عندما m عدد أولي.

حتى الآن فإننا برهنا أنه إذا كان n عدداً كاملاً زوجيًّا فإن:

$$n = 2^k \left(2^{k+1} - 1\right)$$ **[حيث $2^{k+1} - 1$ عدد أولي]**

نعلم من الفصل 14 أنه إذا كان $2^{k+1} - 1$ عدد أولي فإن $(k+1)$ يجب أن يكون عدداً أوليًّا، وليكن $k+1 = p$. إذن أي عدد كامل زوجي يمكن كتابته على الشكل $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ ، حيث $2^p - 1$ عدد ميرسن أولي. وبهذا نكمل برهننا لنظرية العدد الكامل لأويلر.

إن نظرية العدد الكامل لأويلر تعطينا وصفاً ممتازاً لكل الأعداد الكاملة الزوجية، ولكنها لا تخبرنا شيئاً عن الأعداد الكاملة الفردية.

سؤال (١٥,٥). (مأزق الأعداد الكاملة الفردية)

هل يوجد أعداد كاملة فردية؟

حتى هذا اليوم ، لم يتمكن أحد من اكتشاف أي عدد كامل فردي، وعلى الرغم من هذا لم تتوقف المحاولات. لقد قام كثير من الرياضيين بنشر كثير من الأبحاث (أكثر من 50 بحثاً في الخمسين سنة الأخيرة) تبحث في الإجابة عن هذا السؤال، وأصبح من المعروف عدم وجود عدد كامل فردي أقل من 10^{300}. وعلى كل حال، لا يوجد أي شخص حتى هذه اللحظة قادر على إثبات ذلك.

إذا قمنا بفحص بعض الأعداد الصغيرة، فقد تتوقع أن $\sigma(n) < 2n$ لأي عدد فردي. ولكن إذا كان هذا صحيحاً، فإن هذا إثبات مباشر على عدم وجود أعداد

كاملة فردية ، ولكن لسوء الحظ فإن هذا غير صحيح. أول عدد فردي يجعل هذا التوقع خاطئ هو $n = 945 = 3^3.5.7$ ، والذي له $\sigma(945) = 1920$. يعلمنا هذا المثال أن لا نحكم على قاعدة أنها صحيحة لمجرد أنها تتحقق على كثير من الأعداد الصغيرة. إنه من عين الصواب أن نبني تخميننا على بيانات عددية ، لكن الرياضيين لا يأخذون إلا بالبراهين المُحْكَمة لأن مثل هذه البيانات قد تكون مضللة.

تمارين

(١٥,١) إذا كان m , n عددين صحيحين بحيث $\gcd(m,n) = 1$ ، أثبت أن :

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

(١٥,٢) احسب القيم التالية لدالة سيجما :

$(a)\ \sigma(10)$ $(b)\ \sigma(20)$ $(c)\ \sigma(1728)$

(١٥,٣) (a) بين أن قوة العدد 3 لا يمكن أن يكون عدداً كاملاً.

(b) بشكل أعم ، إذا كان p عدداً فرديًّا ، بين أن القوة p^k لا يمكن أن يكون عدداً كاملاً.

(c) بين أن العدد الذي على الشكل 3^i5^j لا يمكن أن يكون عدداً كاملاً.

(d) بشكل عام ، إذا كان p عدداً فرديًّا أوليًّا أكبر من 3 ، بين أن $3^i p^j$ لا يمكن أن يكون عدد كامل.

(e) وبشكل أكثر عمومية ، بيّن أنه إذا كان p , q عددين فرديين أوليين مختلفين ، فإن العدد الذي على الشكل p^iq^j لا يمكن أن يكون عدداً كاملاً.

(١٥,٤) بين أن العدد الذي على الشكل $3^m5^n7^k$ لا يمكن أن يكون عدداً كاملاً.

(١٥,٥) العدد الكامل يساوي مجموع قواسمه (بدون العدد نفسه). إذا نظرنا إلى الضرب بدلاً من الجمع ، فإننا نستطيع القول إن العدد يسمى " عدداً كاملاً ضربياً" (*product perfect*) إذا كان حاصل ضرب جميع قواسمه (بدون العدد نفسه) يساوي العدد الأصلي.

على سبيل المثال :

	ضرب عوامله	m
كامل ضربياً	$(1)(2)(3)=6$	6
أقل	$(1)(3)=3$	9
أكبر	$(1)(2)(3)(4)(6)=144$	12
كامل ضربياً	$(1)(3)(5)=15$	15

لذلك ؛ فإن العددين 6 , 15 كاملان ضربياً ، بينما العددان 9 , 12 غير كاملين ضربياً.

(a) اذكر جميع الأعداد الكاملة ضربياً الواقعة بين العددين 2 , 50 .

(b) أعط وصفاً لجميع الأعداد الكاملة ضربياً. يجب أن يكون وصفاً دقيقاً بما فيه الكفاية لتستطيع الإجابة بسهولة عن سؤال مثل : ''هل العدد 35710 عدد كامل ضربياً؟'' و '' أوجد عدداً كاملاً ضربياً أكبر من 10000''.

(c) برهن أن وصفك في الفرع b صحيح.

(١٥,٦) (a) اكتب برنامجاً لحساب $\sigma(n)$ ، أي مجموع كل قواسم n (بما فيها 1 , n نفسها). يجب عليك حساب $\sigma(n)$ باستخدام عوامل n الأولية، وليس من خلال إيجاد كل قواسم n وجمعها مع بعضها.

(b) كما تعلم، فإن الإغريق تسمي n عدداً كاملاً (n perfect) إذا كان $\sigma(n)=2n$. أيضاً سموا n "بالعدد الزائد" (n abundant) إذا كان $\sigma(n)>2n$، وسموا n بالعدد الناقص (n deficient) إذا كان $\sigma(n)<2n$. أحص كم عدداً كاملاً، زائداً، وناقصاً بين العددين 2 , 100.

من الواضح أن الأعداد الكاملة نادرة جداً. ما هي الأعداد الأكثر انتشارا حسب توقعاتك، الأعداد الزائدة أم الأعداد الناقصة. وسع قائمتك لتشمل الأعداد من 100 إلى 200 هل توقعك ما زال متحققاً.

(١٥,٧) لقد أطلق الإغريق اسم "زوج متحاب" (amicable pair) على عددين n , m إذا كان مجموع قواسم m الفعلية يساوي n، وفي نفس الوقت، مجموع قواسم n الفعلية يساوي m. (القواسم الفعلية للعدد n هي كل قواسم n ما عدا n نفسها).

أول زوج من الأعداد المتحابة، والزوج الوحيد الذي عرفه قدماء الإغريق (على حد علمنا)، هو الزوج $(220,284)$. هذان العددان متحابان؛ لأن:

قواسم العدد 220:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$$

قواسم العدد 284:

$$1+2+4+71+142=220$$

(a) بيّن أن عددين m , n يكونان زوجاً متحابًّا إذاً، وإذا فقط كان $\sigma(m)$, $\sigma(n)$ كلاهما يساوي $m+n$.

(b) تحقق من أن كل زوج من الأزواج التالية يشكل زوجاً متحابًّا.

$$(220,284),(1184,1210),(2620,2924),(5020,5564)$$
$$(6232,6368),(10744,10856),(12285,14595)$$

(c) هناك قاعدة لتوليد أعداد متحابة، ولكنها لا تولدها كلها. أول من اكتشف هذه القاعدة هو "أبو الحسن ثابت بن قرة" في القرن التاسع الميلادي، ومن ثم أعيد اكتشافها من قبل آخرين، منهم فيرما وديكارت. تقوم هذه القاعدة على النظر إلى ثلاثة أعداد:

$$p = 3 \cdot 2^{e-1} - 1 \ ,$$
$$q = 2p + 1 = 3 \cdot 2^{e} - 1 \ ,$$
$$r = (p+1)(q+1) - 1 = 9 \cdot 2^{2e-1} - 1.$$

إذا كانت جميع الأعداد p , q و r أعداداً أولية فردية، فإن $m = 2^e pq$ و $n = 2^e r$ عددان متحابان. برهن أن طريقة ثابت بن قرة تُوَلِّد أزواجاً من الأعداد المتحابة.

(d) بأخذ $e = 2$ فإن طريقة ثابت بن قرة تعطي الزوج المتحاب $(220,284)$. استخدم هذه الطريقة لإيجاد زوج ثاني. إذا كنت قادراً على الاعتماد على كمبيوتر يعمل على تحليل الأعداد إلى عواملها، حاول استخدام طريقة ثابت بن قرة لإيجاد أزواج متحابة أخرى.

(١٥،٨) ليكن:

$S(n) = \sigma(n) - n =$ (مجموع القواسم الفعلية للعدد n) أي أن $S(n)$ يساوي مجموع جميع قواسم العدد n ما عدا n نفسه. لذلك؛ فإن n عدد كامل إذا كان $S(n) = n$، و (m,n) زوج متحاب إذا كان $S(m) = n$ و $S(n) = m$. وبشكل أكثر عمومية، مجموعة الأعداد $n_1, n_2, \ldots, n_t$

تسمى " أعداداً متآنسة (من الرتبة t) " (*sociable* (of order t) إذا كان :

$$S(n_1)=n_2, S(n_2)=n_3, \ldots, S(n_{t-1})=n_t, S(n_t)=n_1$$

(أقدم اسم لقائمة من هذا النوع هو *Aliquot cycle*). فعلى سبيل المثال ، الأعداد:

14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488
629072, 589786, 294896, 358336, 418904, 366556, 274924
275444, 243760, 376736, 381028, 285778, 152990, 122410
97946, 48976, 45946, 22976, 22744, 19916, 17716

هي مجموعة من الأعداد المتآنسة من الرتبة 28 .

(a) هناك مجموعة أخرى من الأعداد المتآنسة تحوي عدداً أقل من 16000 . وهي من الرتبة 5 . أوجد هذه الأعداد الخمسة.

(b) حتى عام 1970 ، المجموعتان الوحيدتان المعروفتان من الأعداد المتآنسة من رتبة أكبر من أو يساوي 3 هما الواردتان في المثالين السابقين، والتي إحداها من الرتبة 5 ، والأخرى من الرتبة 28 . المجموعة اللاحقة لهاتين المجموعتين هي من الرتبة 4 ، وأصغر رقم فيها أكبر من 1000,000 أوجدها.

(c) أوجد مجموعة متآنسة من الرتبة 9 أصغر رقم فيها أكبر من 800,000,000 . هذه المجموعة الوحيدة المعروفة من الرتبة 9 .

(d) أوجد مجموعة متآنسة من الرتبة 6 أصغر رقم فيها أكبر من 90,000,000,000 .

هناك مثالان معروفان على مجموعتين متآنستين كل منها من الرتبة 6 ;وهذه أصغرهما.