الفصل الثالث عشر

عد الأعداد الأولية
Counting Primes

كم عدد الأعداد الأولية؟ لقد أجبنا سابقاً على هذا السؤال بأن عددها لا نهائي. بالطبع هناك أيضا عدد لانهائي من الأعداد المؤَلفة. أي الأعداد أكثر، الأعداد الأولية أم الأعداد المؤَلفة؟ بالرغم من حقيقة أن هناك عدداً لانهائيًّا من كل نوع فإننا نستطيع المقارنة بينهم باستخدام اقتران العد.

بداية، دعنا نبدأ بسؤال أسهل لتوضيح هذه القضية. إن حدسنا يخبرنا أن نصف الأعداد تقريبا أعداداً زوجية. يمكننا تحويل هذا الحدس إلى جزم بالنظر إلى اقتران عد الأعداد الزوجية:

$$E(x)=\#\{\text{even numbers } n \text{ with } 1\le n\le x\}$$

$E(x)=\#\{1\le n\le x$ حيث n ألأعداد الزوجية $\}$

$E(x)=\#\{1\le n\le x$ حيث n ألأعداد الزوجية $\}$

هذا الاقتران يعطينا عدد الأعداد الزوجية الأقل من أو تساوي x. مثلاً:

$$E(3)=1,\quad E(4)=2,\quad E(5)=2,\quad E(100)=50,\quad E(101)=50$$

لدراسة عدد الأعداد الزوجية في جميع الأعداد ، يجب علينا النظر إلى النسبة $E(x)/x$. لذا ؛

$$\frac{E(3)}{3}=\frac{1}{3},\quad \frac{E(4)}{4}=\frac{1}{2},\quad \frac{E(5)}{5}=\frac{2}{5},\quad \frac{E(100)}{100}=\frac{1}{2},\quad \frac{E(101)}{101}=\frac{50}{101},.......$$

ليس صحيحا بالطبع أن $E(x)/x$ تساوي دائما $\frac{1}{2}$ ، ولكن الصحيح أنه عندما تكون x كبيرة فإن $E(x)/x$ ستقترب من $\frac{1}{2}$. وإذا كنت على معرفة بسيطة بالتفاضل فستعرف أننا نحاول القول إن :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x}=\frac{1}{2}.$$

هذه العبارة[1] تعني أنه كلما أصبحت x أكبر فأكبر فإن المسافة بين $E(x)/x$ و $\frac{1}{2}$ تقترب أكثر فأكثر من الصفر.

الآن لنعمل نفس الشيء مع الأعداد الأولية. اقتران العدد الخاص بالأعداد الأولية يسمى $\pi(x)$ ، أي أن :

$$\pi(x)=\#\{\text{primes } p \text{ with } p\le x\}$$

مثلا ، $\pi(10)=4$ لأن الأعداد الأولية الأقل من عشرة هي :

$$2,3,5,7$$

بنفس الطريقة ، الأعداد الأولية الأقل من 60 هي :

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59$$

---

(١) تقرأ هذه العبارة الرياضية " النهاية عندما تؤول x إلى المالانهاية لـ $E(x)/x$ تساوي $1/2$.

وعليه ؛ فان $\pi(60)=17$.

الجدول القصير التالي يعطي بعض قيم $\pi(x)$ والنسبة $\pi(x)/x$.

x	10	25	50	100	200	500	1000	5000
$\pi(x)$	4	9	15	25	46	95	168	669
$\pi(x)/x$	0.400	0.360	0.300	0.250	0.230	0.190	0.168	0.134

يبدو بالتأكيد أن النسبة $\pi(x)/x$ تصغر وتصغر كلما كبرت x . افرض أن هذا النمط سيستمر، سيكون معنا حق في القول إن ""معظم الأعداد ليست أولية"". إن هذا يطرح سؤالا جديدا، وهو كم سرعة تناقص $\pi(x)/x$ ؟ سنقدم الجواب من خلال النظرية الشهيرة التالية، والتي تعتبر واحدة من أفضل ما قدمت نظرية الأعداد في القرن التاسع عشر.

نظرية (١٣,١) (نظرية العدد الأولي). *عندما تكون x كبيرة؛ فإن عدد الأعداد الأولية الأقل من x يساوي تقريبا $x/\ln(x)$ ، بمعنى أن:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}=1$$

إن الكمية $\ln(x)$ والتي تسمى اللوغاريتم الطبيعي لـ x ، هي لوغاريتم العدد x بالنسبة إلى الأساس $e=2.7182818.....$ [١] نقدم فيما يلي جدولاً نقارن من خلاله

---

(١) إذا لم يكن اللوغاريتم الطبيعي مألوفاً لديك، فإنك تستطيع القول إن $\ln(x)$ يساوي تقريبا $2.30259\log(x)$ ، حيث $\log(x)$ هو اللوغاريتم العادي للأساس 10 . اللوغاريتم الطبيعي مهم جدا في الرياضيات والعلوم، حتى أن معظم الآلات الحاسبة العلمية تحوي مفتاحاً خاصاً لحسابه. اللوغاريتم=

بين قيم $\pi(x)$ و $x / \ln(x)$.

x	10	100	1000	10^4	10^6	10^9
$\pi(x)$	4	25	168	1229	78498	50847534
$x/\ln(x)$	4.34	21.71	144.76	1085.74	72382.41	48254942.43
$\pi(x)/(x/\ln(x))$	0.921	1.151	1.161	1.132	1.084	1.054

حوالي عام 1800 ، ومن خلال اختبار مشابه ، لكن مع جداول أقصر ، تنبأ كل من "كارل فريدريك جاوس"(Friedrich Gauss)و"أدريان- ماري ليجندر"(Adrien-Marie Legendre) كل منهما بشكل مستقل عن الآخر ، بصحة نظرية العدد الأولي. مر تقريبا قرن إضافي قبل أن يجد العلماء برهاناً لهذه النظرية. في عام 1896 نجح كل من "جاكس هادمارد" (Jacques Hadamard) و "شي دي لا فاللي بوشن" (Ch. De la Vallee Poussin) في إثبات نظرية العدد الأولي. كما هو الحال مع نظرية "ديرشليت" (Dirichlet) ، فقد استخدم في برهان هذه النظرية طرق التحليل المركب (أي التفاضل والتكامل بوجود الأعداد المركبة) . بعد ذلك بفترة طويلة وفي عام 1948 وجد كل من "باول إيردوس" (Paul Erdos) و "أتلي سيلبرغ" (Atle Selberg) برهان بسيط لنظرية العدد الأولي. والسهولة في البرهان تكمن في عدم استخدامهم طرقاً من التحليل المركب ، ولكنه ليس سهلاً بكل المقاييس وعليه لن نقدمه هنا.

= الطبيعي يظهر بشكل "طبيعي" في مسائل النمو المركب ، مثل النمو السكاني ، دفع الفوائد ، اضمحلال العناصر المشعة. إنه من المدهش حقيقة أن هذه الدالة التي تطبق بشكل واسع ، تظهر أيضا في المسألة الرياضية المجردة عن عد الأعداد الأولية.

من المثير للدهشة أنه عند إثبات نظريات تتعلق بالأعداد الصحيحة الموجبة مثل نظرية "ديرشليت" ونظرية العدد الأولي وجب على الرياضيين استخدام أدوات من التفاضل والتكامل. بناء على ذلك تفرع عن نظرية الأعداد علم جديد يسمى نظرية الأعداد التحليلية، مخصص لإثبات النظريات التي يستخدم في إثباتها طرقاً من التفاضل والتكامل.

إن هناك العديد من المسائل المشهورة المتعلقة بالأعداد الأولية والتي ما زالت بدون حل. نختم هذا الفصل بتضمينه ثلاثاً من هذه المسائل مع السياق التاريخي لها.

تخمين (١٣,٢) (تخمين جولدباخ). *كل عدد زوجي $n \geq 4$ هو حاصل جمع عددين أوليين.*

أرسل جولدباخ بهذا التخمين إلى أويلر(Euler) برسالة معنونة بتاريخ 7/6/1742 ليس من الصعب التحقق من أن تخمين جولدباخ صحيح لبعض القيم القليلة الأولى من الأعداد الزوجية مثل:

$$4=2+2 \quad , \quad 6=3+3 \quad , \quad 8=3+5 \quad , \quad 10=3+7 \quad , \quad 12=5+7$$
$$14=3+11 \quad , \quad 16=3+13 \quad , \quad 18=5+13 \quad , \quad 20=7+13$$

ما سبق يثبت صحة تخمين جولدباخ لجميع الأعداد الزوجية حتى 20. وباستخدام الكمبيوتر تم التحقق من أن تخمين جولدباخ صحيح لجميع الأعداد الزوجية حتى 2.10^{10}. والأفضل من ذلك أن الرياضيين تمكنوا من إثبات نتائج شبيهة بتخمين جولدباخ. ما سبق يوحي لنا بأن تخمين جولدباخ صحيح. واحدة من النتائج التي أثبتها الرياضيون والشبيهة بتخمين جولدباخ قام بإثباتها "فينوغرادوف" (I.M.Vinogradov) عام 1937. فقد أثبت أن كل عدد فردي (كبير كفاية) n هو حاصل مجموع ثلاثة أعداد أولية. النظرية الثانية قام بإثباتها "شين جنغ رن" (Chen Jing-run)

عام 1966 ، وتنص على أن أي عدد زوجي (كبير كفاية) هو مجموع عددين $p+a$ ، حيث p عدد أولي و a إما أولي وإما يساوي حاصل ضرب عددين أوليين.

تخمين (١٣,٣) (تخمين الأوليات التوأمية). *يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية p بحيث $p+2$ أيضا أولي.*

إن قائمة الأعداد الأولية غير منتظمة إلى حد بعيد، وغالبا ما يكون الفرق كبير جدا بين عددين أوليين متتاليين. مثلا، هناك 111 عدد مؤلَف بعد العدد الأولي 370261 . من جهة أخرى، يبدو أن هناك القليل جدا من الحالات التي يكون فيها عدد أولي p يتبعه عدد أولي آخر $p+2$. (طبعا، لا يمكن أن يكون $p+1$ عدد أولي ؛ لأنه عدد زوجي). هذه الأزواج تسمى "أوليات توأمية "، وتخمين الأوليات الثنائية ينص على أن قائمة الأوليات التوأمية غير منتهية. التوأميات الأولية القليلة الأولى هي :

$(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31)$, $(41,43)$, $(59,61)$, $(71,73)$
$(101,103)$, $(107,109)$, $(137,139)$, $(149,151)$, $(179,181)$, $(191,193)$
$(197,199)$, $(227,229)$, $(239,241)$, $(269,271)$, $(281,283)$, $(311,313)$

تماما مثل ما حصل مع تخمين جولدباخ، استخدم الناس أجهزة الكمبيوتر لإنشاء قائمة طويلة من التوأميات الأولية، تضم على سبيل المثال، التوأم الأولي الهائل :

$$\left(242206083.2^{38880}-1 \quad , \quad 242206083.2^{38880}+1\right)$$

وكدليل آخر على صلاحية هذا التخمين، فقد برهن "شين جنغ رن" (Chen Jing-run) عام 1966 على أن هناك عدداً لا نهائيًا من الأعداد الأولية p بحيث يكون $p+2$ إما أوليًا وإما يساوي حاصل ضرب عددين أوليين.

تخمين (١٣,٤) (تخمين N^2+1***). يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية التي على الشكل*** N^2+1.

إذا كان N فرديًّا، فإن N^2+1 زوجي؛ لذلك لا يمكن أن يكون أوليًّا (ما عدا عندما $N=1$). على كل حال، إذا كان N زوجي، فإن N^2+1 غالبا ما تكون عدداً أوليًّا. إن تخمين N^2+1 ينص على أن هذا يحدث بشكل لا نهائي. الأعداد الأولية القليلة الأولى التي على هذا الشكل هي:

$$2^2+1=5 \quad , \quad 4^2+1=17 \quad , \quad 6^2+1=37 \quad , \quad 10^2+1=101$$
$$14^2+1=197 \quad , \quad 16^2+1=257 \quad , \quad 20^2+1=401 \quad , \quad 24^2+1=577$$
$$26^2+1=677 \quad , \quad 36^2+1=1297 \quad , \quad 40^2+1=1601$$

أفضل نتيجة معروفة حالياً برهنت على يد "هينريك إيوانيك" (Henryk Iwaniec) في عام 1978. لقد بين أنه يوجد عدد لا نهائي من القيم N يكون عندها N^2+1 إما أوليًّا وإما يساوي حاصل ضرب عددين أوليين.

على الرغم من أن أحدا لا يعرف فيما إذا كان هناك عدد لا نهائي من الأوليات التوأمية أو عدد لا نهائي من الأعداد الأولية التي على الشكل N^2+1، فإن الرياضيين توقعوا ما هو شكل دالتي العد لهاتين المجموعتين. ليكن

$$T(x)=\#\{\text{primes } p\le x \text{ such that } p+2 \text{ is also prime}\}$$
$$S(x)=\#\{\text{primes } p\le x \text{ such that } p \text{ has the form } N^2+1\}.$$

فإن التخمين هو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{T(x)}{x/(\ln x)^2}=C \qquad , \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{\sqrt{x}/\ln x}=C'$$

العددان C و C' يصعب وصفهما بدقة. على سبيل المثال، C تساوي تقريبا 0.66016.

تمارين

(١٣،١) (a) اشرح لماذا يكون للعبارة " خُمس كل الأعداد تطابق 2 قياس 5 " معنى إذا استخدمنا دالة العد:

$$F\left(x\right)=\#\left\{\underbrace{positive\ numbers}_{\text{الأعداد الموجبة}}\ \ n\le x\ \ \underbrace{Satisfying}_{\text{تحقق}}\ \ n\equiv 2\left(\bmod 5\right)\right\}$$

(b) اشرح لماذا يكون للعبارة " معظم الأعداد ليست مربعة " معنى إذا استخدمنا دالة العد

$$S\left(x\right)=\#\left\{square\ numbers\ less\ than\ x\right\}$$

الأعداد المربعة الأقل من x

أوجد دالة بسيطة في x تساوي تقريبا $S\left(x\right)$ عندما تكون قيمة x كبيرة.

(١٣،٢) (a) اختبر فيما إذا كان كل عدد زوجي بين 70 و 100 يساوي مجموع عددين أوليين.

(b) بكم طريقة مختلفة يمكن كتابة العدد 70 كمجموع عددين أوليين $70=p+q$ ، بحيث $p\le q$ ؟ نفس السؤال بالنسبة للعدد 90 ؟ نفس السؤال بالنسبة للعدد 98 ؟.

(١٣،٣) العدد $n!$ (مضروب n) هو حاصل ضرب جميع الأعداد من 1 إلى n. مثلاً، $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ و $7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$.

إذا كان $n\ge 2$ ، بين أن جميع الأعداد

$$n!+2,\ n!+3,\ n!+4,\ \dots,\ n!+\left(n-1\right),\ n!+n$$

هي أعداد غير أولية.

(١٣,٤) (a) هل تظن أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية على الشكل N^2+2 ؟

(b) هل تظن أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية على الشكل N^2-2 ؟

(c) هل تظن أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية على الشكل N^2+3N+2 ؟

(d) هل تظن أن هناك عدداً لا نهائيًّا من الأعداد الأولية على الشكل N^2+2N+2 ؟

(١٣,٥) تنص نظرية العدد الأولي على أن عدد الأعداد الأولية الأقل من x تساوي تقريباً $x/\ln(x)$. يطلب منك هذا التمرين أن تشرح لماذا تبدو بعض العبارات صحيحة. لذلك لا تحاول أن تكتب براهين رياضية لها. بدلاً من ذلك، اشرح بالكلمات بشكل ملائم بقدر ما تستطيع لماذا نظرية العدد الأولي تجعل من كل عبارة من العبارات التالية عبارة منطقية:

(a) إذا اخترت بشكل عشوائي عدداً صحيحاً بين 1 و x ، فإن احتمال أن تكون قد اخترت عدداً أوليًّا يساوي $1/\ln(x)$.

(b) إذا اخترت بشكل عشوائي عددين صحيحين بين 1 و x ، فإن احتمال أن يكون كلاهما أوليًّا يساوي $1/\left(\ln x\right)^2$.

(c) عدد الأوليات التوأمية بين 1 و x يجب أن تساوي تقريباً $x/\left(\ln x\right)^2$.

[لاحظ أن هذا يشرح تخمين صيغة النهاية لدالة عد العدد الأولي التوأمي $\mathrm{T}(x)$].

(١٣،٦) (هذا التمرين للطالب الذي قام بدارسة التفاضل والتكامل).

تنص نظرية العدد الأولي على أن دالة العد للأعداد الأولية ، $\pi\left(x\right)$ ، تساوي تقريباً $x/\ln(x)$ عندما تكون x كبيرة.

يتضح من ذلك أن $\pi\left(x\right)$ قريبة أيضاً من قيمة التكامل المحدود $\int_2^x dt/\ln(t)$.

(a) بين أن :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}\right)\Bigg/\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=1$$

هذا يعني أن $\int_2^x dt/\ln(t)$ و $x/\ln(x)$ متساويان تقريباً عندما تكون x كبيرة.

(مساعدة : استخدم قاعدة لوبيتال والنظرية الأساسية الثانية في التفاضل والتكامل).

(b) يمكن إثبات أن

$$\int\frac{dt}{\ln(t)}=\ln\left(\ln t\right)+\ln\left(t\right)+\frac{\left(\ln(t)\right)^2}{2\cdot 2!}+\frac{\left(\ln(t)\right)^3}{3\cdot 3!}+\frac{\left(\ln(t)\right)^4}{4\cdot 4!}+\cdots$$

استخدم هذه المتسلسلة لتحسب عددياً قيمة $\int_2^x dt/\ln(t)$ عند $x=10,100,1000,10^4,10^6,10^9$. قارن القيم التي حصلت عليها مع القيمتين $\pi(x)$ و $x/\ln(x)$ المعطاة في الجدول الوارد في الفصل الثالث عشر.

أي القيمتين أقرب للقيمة $\pi\left(x\right)$ ، التكامل $\int_2^x dt/\ln(t)$ أم الدالة $x/\ln(x)$ ؟

(يمكن حل هذه المسألة باستخدام آلة حاسبة بسيطة ، لكن ربما تفضل استخدام كمبيوتر أو آلة حاسبة مبرمجة).

(c) اشتق المتسلسلة في (b) وبين أن المشتقة تساوي $1/\ln(t)$. (مساعدة : استخدم متسلسلة الدالة e^x).