الفصل السابع

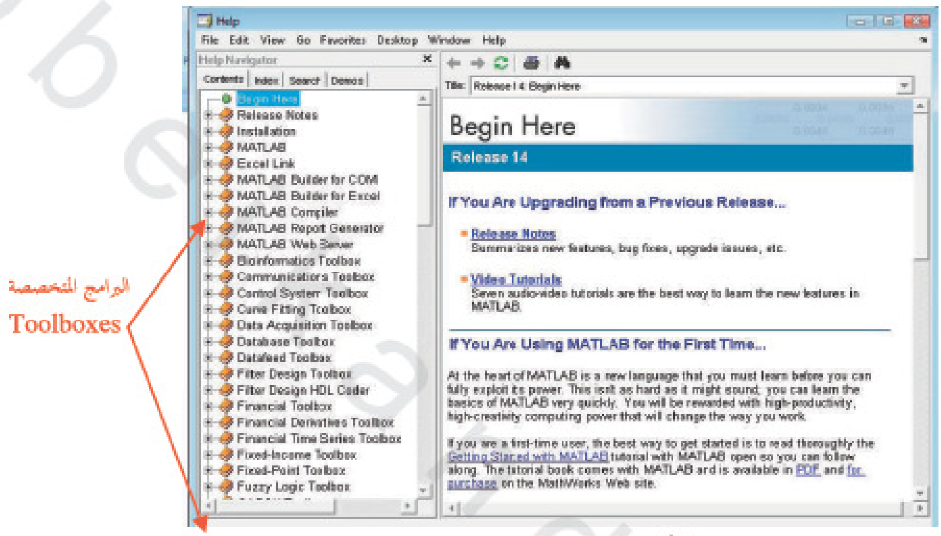
مواضيع رياضية متفرقة على MATLAB

يمكن استخدام MATLAB في مجالات رياضية عديدة، كما يُمكن تسخير قدرات MATLAB في الرسم و البرمجة في تسهيل تطبيقات مختلفة. بالدخول على الموقع الرسمي للبرنامج **http: // www.mathworks.com** نستطيع التعرف على أحدث التطبيقات والكتب المنشورة في المجالات الرياضية والهندسية. كما يحتوي MATLAB على برامج متخصصة تدعى toolboxes في مجالات عديدة مثل الاتصالات Communication toolbox، والمنطق المشوش Fuzzy logic toolbox، والشبكات العصبية الصناعية Neural Network toolbox، والاقتصاد Financial toolbox وغيرها. نستطيع الوصول لمعلومات عن هذه البرامج من نافذة help كما هو موضح في الشكل رقم (٧،١). نتطرق في هذا الباب لبعض المواضيع الرياضية المتفرقة بشكل مبسط، ولمزيد من التعمق ننصح بالمراجع الرياضية المتخصصة لكل موضوع .

(٧،١) حساب المتجهات Vector Calculus

موضوع حساب المتجهات يتطلب معرفة المفاهيم الرياضية للمتجهات، فالمقصود بمتجه الموضع لنقطة ما a هو الخط المستقيم المتجه من نقطة الأصل لمحاور الإحداثيات الكارتيزية والنقطة a فالمتجه $\vec{a}$ =(-5, 1,3) وهو متجه الموضع للنقطة

$a=(-5, 1,3)$. ويتم إدخال المتجه في MATLAB بالأمر $a=[-5, 1,3]$.



الشكل رقم (٧,١). برامج متخصصة Toolboxes .

(٧,١,١) المسافة بين نقطتين

باعتبار النقطتين $a=(x_1,y_1,z_1)$ و $b=(x_2,y_2,z_2)$ فإن المسافة بين النقطتين Distance between two points هي طول المتجه $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ ورياضياً هي :

$$|\vec{c}|=\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$$

باستخدام الأمر *norm(c)* في MATLAB الذي يعطي طول المتجه c يمكننا حساب المسافة بين المتجهين ، فمثلا طول المتجه الواصل بين النقطتين $a=(5,-1,3)$

و $b=(4,2,1)$ هو :

```
>> a=[5 -1 3];
>> b=[4 2 1];
>> c=b-a;
>> norm(c)
ans =
   3.7417
```

(٧,١,٢) الضرب القياسي لمتجهين

عملية الضرب القياسي للمتجهين $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ dot product هي $<\vec{a},\vec{b}>=\vec{a}.\vec{b}=x_2x_1+y_2y_1+z_2z_1$. أما تنفيذها على MATLAB فيتم باستخدام الأمر *dot(a,b)* . و في حال كانت نتيجة الضرب القياسي بين متجهين صفراً، فإن ذلك يعني أن المتجهين متعامدان .

مثال رقم (٧,١)

عملية الضرب القياسي للمتجهين $\vec{a}=(2,1,3)$ و $\vec{b}=(1,-5,6)$ تحسب :

$$<\vec{a},\vec{b}>=\vec{a}.\vec{b}=(2)(1)+(-5)(1)+(6)(3)=15 \;,$$

أما باستخدام البرنامج ندخل المتجهين أولاً، ثم أمر تنفيذ عملية الضرب القياسي، كما يلي :

```
>> a=[2 1 3];
>> b=[1 -5 6];
>> dot(a,b)
   15
```

مثال رقم (٧,٢)

أوجد الزاوية θ بين المتجهين $\vec{a}=(2,1,3)$ و $\vec{b}=(1,-5,6)$.

قانون الزاوية هو $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|a||b|}\right)$

باستخدام MATLAB ندخل المتجهين أولاً، ثم أمر تنفيذ العملية الحسابية، كما يلي :

```
>> a=[2 1 3];
>> b=[1 -5 6];


>> acos(dot(a,b)/(norm(a)*norm(b)))
1.0366
```

(٧,١,٣) الضرب الاتجاهي لمتجهين

عملية الضرب القياسي للمتجهين cross product هي :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

وطول هذا المتجه يمثل مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، أما تنفيذها فبالأمر *cross(a,b)*، فمثلا لإيجاد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\vec{b}$ =(2,-1,3) و $\vec{a}$ =(1,5,6) نُدخل :

```
>> a=[2 -1 3];
>> b=[1 5 6];


>> c=cross(a,b)
c =
  -21    -9    11
```

(٧,١,٤) الاستقلال الخطي والارتباط الخطي

الفضاء الاتجاهي V هو مجموعة من المتجهات مزودة بعمليتين معرّفتين عليه وتحقق خواص معينة خاصة بالفضاءات (إغلاق، تجميعية، محايدة، ...) ويمكن الرجوع لأي كتاب جبر خطي لمزيد من المعلومات.

الاستقلال الخطي linear independence هو أحد المفاهيم الأساسية في جبر المتجهات، ويعرف إذا تحققت المعادلة التالية للمتجهات $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ التي تنتمي لفضاء اتجاهي V :

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots+a_nv_n=0$$

وإذا كان الحل الوحيد هو الحل الصفري $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n=0$ فإن المتجهات تسمى مستقلة خطياً. أما في حال وجود قيمة غير صفرية بين a_i حيث $i=1,2,3,\ldots,n$ فإن المتجهات تسمى مرتبطة خطياً. فلمعرفة ما إذا كانت المتجهات ,a=(2,-1,3), b=(4,5,6) c=(2,0,4) مستقلة خطيا أم مرتبطة ، ندخل المتجهات كما يلي :

```
>>a=[2 -1 3];b=[4 5 6];c=[2 0 4];
```

ثم نُعرف في بيئة syms المجاهيل x,y,z ونختبر الاستقلال الخطي بالمعادلة xa+yb+zc :

```
>> syms x y z;
>> x*a+y*b+z*c
[ 2*x+4*y+2*z,     -x+5*y, 3*x+6*y+4*z]
```

ثم نطلب من البرنامج الحل باستخدام الأمر *solve* :

```
>> [x,y,z]=solve(2*x+4*y+2*z,  -x+5*y, 3*x+6*y+4*z,x,y,z)
```

ونحصل على قيم المجاهيل x,y,z :

```
x =0
y =0
z =0
```

ومن ثم المتجهات المعطاة مستقلة خطياً .

كما يمكننا استخدام رتبة المصفوفه *rank(A)* لتحديد الاستقلال الخطي والارتباط الخطي ، فمثلاً لنتحقق من كون المجموعة $\{s,s+s^2,1+s^2\}$ مستقلة خطياً في الفضاء P_2 (فضاء كثيرات الحدود من الدرجة 2) ذي البعد ٣ ، نضع معاملات كل متغير (s^0 , s, s^2) كأعمدة لمصفوفة A ونحسب رتبة المصفوفة *rank(A)* :

```
>> A=[0 1 0;0 1 1;1 0 1];rank(A)
ans = 3
```

ولأن قيمة رتبة المصفوفة 3 بنفس عدد أعمدة وصفوف المصفوفة فهذا يدل على أن المصفوفة غير شاذة و أن أعمدتها تكوّن مجموعة متجهات مستقلة خطياً.

(٧,١,٥) أساس الفضاء الاتجاهي

إذا كان V فضاء متجهات فإن مجموعة المتجهات $v_1,v_2,v_3,...,v_n \in V$ تسمى مجموعة مولدة للفضاء spanning إذا كان كل متجه $v \in V$ يكون تركيب خطي يكون تركيب خطي من تلك المتجهات. وتسمى المجموعة المولّدة M للفضاء المتجه V أساساً

Basis في V إذا كانت متجهاتها مستقلة خطياً. ويُعد V ذا بُعد نهائي (finite dimension) n إذا وجد أساسا مكوناً من عدد نهائي n من المتجهات، أما إذا كان مكوناً من عدد لا نهائي فيقال أنه ذو بعد لا نهائي infinite dimension . إذا كان V ذا بعد نهائي n فإن أكبرعدد من المتجهات المستقلة خطياً هو n وأي مجموعة من متجهات V مكونة من n متجه مستقلة خطياً، هي أساس في V. لذلك أي مجموعة من متجهات V يكون عددها أكثر من n تكون مرتبطة خطياً.

مثال رقم (٧,٣)

هل المتجهات $\{a=(2,-1,3), b=(4,5,6), c=(2,0,4)\}$ تكوّن أساساً للفضاء R^3 .

الحل :

عرفنا من المثال السابق أن المتجهات a, b ,c مستقلة خطياً وعليه فهي تكون أساسا لـ R^3 حيث إن بُعد الفراغ المذكورهو 3 .

(٧,١,٦) جرام- شميت Gramm-Schmitt

فضاء المتجهات المزود بعملية ضرب داخلي inner product معرّفة على عناصره وببعد نهائي يحتوي دائماً على أساسات عيارية متعامدة orthonormal ، و تقدم خوارزمية جرام- شميت Gramm-Schmitt طريقة لإيجاد هذه الأساسات. بفرض أن $S=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_n\}$ أساسٌ للفضاء الاتجاهي V ، الخطوات التالية تزودنا بأساس متعامد آخر $\{u_1,u_2,u_3,\dots,u_n\}$ للفضاء الاتجاهي V :

١- $u_1= v_1$

٢- $u_2 = v_2 - \frac{v_2 . u_1}{\|u_1\|^2} u_1$

٣- $u_n = v_n - \frac{v_n . u_1}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{v_n . u_2}{\|u_2\|^2} u_2 - \ldots - \frac{v_n . u_{n-1}}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1}$

برنامج MATLAB يطبق طريقة جرام – شميت للحصول على متجهات عيارية متعامدة لأي فضاء جزئي من الفضاء R^n بوضع متجهات الأساس المطلوب الحصول منه على أساس متعامد كأعمدة لمصفوفة A وبكتابة الأمر *orth(A)* .

مثال رقم (٧,٤)

إذا كانت المتجهات $\{ u_1=(3,3,3), u_2=(3,3,0), u_3=(3,0,0)\}$ هي أساس متعامد في R_3، فباستخدام طريقة جرام – شميت أوجد أساس متعامد آخر.

الحل :

نأخذ الأساس المعطى في R^3 :

```
>> u1=[3;3;3];u2=[3;3;0];u3=[3;0;0];
```

وبوضع المتجهات كأعمدة لمصفوفة A :

```
>> A=[u1 u2 u3]
A =
3    3    3
3    3    0
3    0    0
```

نستخدم أمر *orth(A)* :

```
>> m=orth(A)
```

وبذلك تكون الأعمدة هي الأساس العياري المتعامد المطلوب.

```
m =
-0.7370   0.5910   0.3280
-0.5910  -0.3280  -0.7370
-0.3280  -0.7370   0.5910
```

ويمكن التأكد من ذلك بضرب المصفوفة m بـ m' لتنتج مصفوفة الوحدة :

```
>> m'*m
ans =
1.0000   0.0000   0.0000
0.0000   1.0000   0.0000
0.0000   0.0000   1.0000
```

(٧,٢) الطرق المثلى Optimization

تتكون طرق الحلول المثلى Optimization Methods من عدة أنواع، ولكن جميعها تبحث عن الحل الأمثل سواء الأصغر أو الأعظم لدالة الهدف، مع الالتزام بشروط محددة. ومن هذه الطرق البرمجة الخطية Linear Programming التي سنعرضها في الجزء الأول، كما توجد دوال جاهزة على MATLAB لحل بعض المسائل المثلى ستعرض في الجزء الثاني.

(٧,٢,١) البرمجة الخطية Linear Programming with MATLAB

يُعد علم البرمجة الخطية من الطرق المهمة لحل المسائل المثلى، حيث يعالج مشكلة بحث أفضل ربح أو أقل تكلفة في المسائل التي تحتوي على كميات محدودة من المصادر. يمكن تلخيص البرمجة الخطية بأنها طريقة تحديد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة معينة تسمى دالة الهدف objective function ضمن مجال معين يتم تحديده من خلال قيود على عدد منتهٍ من المتغيرات، بحيث تحقق دالة الهدف وكذلك القيود خواص معينة. ويكثر استخدام البرمجة الخطية بشكل واسع في حل المسائل العسكرية والاقتصادية والصناعية.

(٧,٢,١,١) تعريف مسائل البرمجة الخطية

في البرمجة الخطية نحاول إيجاد القيمة العظمى أو (الصغرى) لدالة خطية بحيث تكون جميع القيود معادلات خطية أو متراجحات خطية ، بالإضافة لذلك فإن أي متغير لابد أن يكون غير سالب أو غير محدد الإشارة. الصيغة العامة لمسألة البرمجة الخطية التي تتكون من n من المتغيرات و m من القيود تكون بالشكل التالي :

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \\
\text{s.t} & a_{11}x_1+a_{12}x_2\ldots\ldots+a_{1n}x_n \le b_1 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\ldots\ldots+a_{mn}x_n \le b_m \\
 & \\
 & \text{for } x_1, x_2\ldots\ldots, x_n \ge 0
\end{array}
$$

حيث إن $a_{ij}, b_i, c_j \in R$ لكل $j=1,\ldots n$ و $i=1,\ldots m$.

(٧,٢,١,٢) طريقة السمبلكس

أهم طرق البرمجة الخطية لحل هذا النوع من المسائل تدعى طريقة السمبلكس Simplex Method ، وهي طريقة تعتمد على إيجاد حل أساسي مقبول يسمى الحل الأساسي المبدئي ، و بعد ذلك يتم تحديد ما إذا كان هذا الحل الأمثل أم لا. إذا كان هذا الحل الأمثل فإن طريقة السمبلكس تتوقف ، إما إذا لم يكن الأمثل فإن طريقة السمبلكس تنتقل إلى حل أساسي مقبول آخر بحيث يكون مجاوراً للحل الأساسي المبدئي ، وقيمة دالة الهدف عند هذا الحل أفضل من أو تساوي قيمة دالة الهدف عند الحل الأساسي المبدئي. يتم تكرار خطوات البحث للوصول للحل الأمثل ويمكن برمجة خوارزمية السمبلكس على MATLAB ، ببرنامج barnes [15] خوارزمية (٧,١).

```
function [xsol,bas]=barnes(A,b,c,tol)
x2=[ ]; x=[ ]; [m n]=size(A);
aplus1=b-sum(A(1:m,:)')'; cplus1=1000000;
A=[A aplus1]; c=[c cplus1];
x0=ones(1,n)'; x=x0;
alpha = .0001; lambda=zeros(1,m)'; iter=0;
B=[ ]; n=n+1;
while abs(c*x-lambda'*b)>tol
  x2=x.*x; D=diag(x); D2=diag(x2);
  AD2=A*D2;
  lambda=(AD2*A')\(AD2*c');
  dualres=c'-A'*lambda;
  normres=norm(D*dualres);
  for i=1:n
    if dualres(i)>0
      ratio(i)=normres/(x(i)*(c(i)-A(:,i)'*lambda));
    else
      ratio(i)=inf;
    end
  end
  R=min(ratio)-alpha;
  x1=x-R*D2*dualres/normres;
  x=x1; basiscount=0; B=[ ]; basic=[ ]; cb=[ ];
  for k=1:n
    if x(k)>tol
      basiscount=basiscount+1;
      bas=[bas k];
    end
  end
    if basiscount==m
    for k=bas
      B=[B A(:,k)]; cb=[cb c(k)];
    end
    primalsol=b'/B'; xsol=primalsol;
    break
  end
  iter=iter+1;
end;
objective=c*x
```

خوارزمية (٧,١).

خطوات حل مسألة البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس :

١- تحويل مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية.

٢- إيجاد أحد الحلول الأساسية المقبولة باعتباره حلاً مبدئياً.

٣- تحديد ما إذا كان هذا الحل الأمثل، وإذا لم يكن كذلك فإننا نوجد حلاً أساسياً مقبولاً مجاوراً بحيث تكون فيه دالة الهدف z عند هذا الحل أفضل منها عند الحل السابق.

٤- نعيد الخطوة (٣) باستخدام الحل الجديد.

منطقة الحل (Ω) في البرمجة الخطية هي مجموعة النقاط التي تحقق جميع القيود. ومنطقة الحل قد لا تحتوي على أي نقطة، أي أنه من الممكن أن تكون $\Omega = \emptyset$. وفي هذه الحال لا يوجد أي نقطة تحقق جميع القيود. فمثلاً :

$$
\begin{aligned}
&\max z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.t} \quad x_1 + x_2 \le 5 \\
&\qquad 2x_1 - x_2 \le 4 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

تمثل مسألة يمكن حلها بالبرمجة الخطية، ونلاحظ أن النقطة (1,1)، تحقق جميع القيود لذا فهي تقع داخل Ω. بينما لا تحقق النقطة (3,4) القيد الأول، فهي تقع خارج Ω. عند قيامنا بحل مسألة بالبرمجة الخطية، نهتم بإيجاد أفضل حل للمسألة بحيث يكون هذا الحل موجوداً داخل منطقة الحل. نطلق على هذا الحل اسم الحل الأمثل وهو في حال مسألة القيمة العظمى "max" إحدى نقاط منطقة الحل، بحيث تكون دالة الهدف عند هذه النقطة أكبر ما يمكن. أما في حال مسألة القيمة الصغرى "min"، فيعرف الحل الأمثل بأنه إحدى نقاط منطقة الحل، بحيث تكون دالة الهدف عند هذه النقطة أصغر ما يمكن. كما

تعتبر مسألة البرمجة الخطية في الصيغة القياسية، إذا كانت جميع القيود عبارة عن معادلات طرفها اليمين غير سالب، وكانت جميع المتغيرات غير سالبة.

مثال رقم (٧,٥)

أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس.

$$\begin{aligned}
&\min \quad -4x_3\\
&z = -2x_1 - x_2\\
&\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 7\\
&\qquad\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12\\
&\qquad\; x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

و نكتب الأوامر التالية بتحديد نسبة الخطأ 0.00005 في الخوارزمية (٧,١) :

```
>> c=[-2 -1 -4 0 0];
>> a=[1 1 1 1 0;1 2 3 0 1 ]; b=[7 12]';
>> [xsol,ind]=barnes(a,b,c,.00005);
objective =
  -19.0000
```

(٧,٢,٢) دوال جاهزة للحلول المثلى على MATLAB

توجد عدة طرق مثلى جاهزة في MATLAB سوف نعرّف بعضها في الجدول رقم (٧,١).

الجدول رقم (٧,١). دوال جاهزة على MATLAB للحلول المثلى.

الدالة	الوصف
fminbnd	إيجاد القيم الصغرى لدالة غير خطية بمتغير واحد على فترة محددة
fminsearch	إيجاد القيم الصغرى لدالة غير خطية بعدة متغيرات على فترة محددة
fzero	إيجاد أصفار الدالة بمتغير واحد على فترة محددة
lsqnonneg	إيجاد الحل بطريقة أصغر مربعات خطي بشروط غير سالبة Linear least squares with non negative constraints

إذا كان لدينا دالة بمتغير واحد وأردنا إيجاد القيمة الصغرى لها نقوم بتعريفها في m-file ، و نستخدم *fminbnd*، فمثلاً لإيجاد القيم الصغرى في الفترة (0,2) للدالـــة $y= x^3-2x-5$ نكتب الأمر :

```
[x f]= fminbnd(f,0,2)
x =
   0.8165
f =
  -6.0887
```

ونحصل على القيمة الصغرى عند x= 0.8165 بقيمة f(x)= -6.0887.

في حال كانت الدالة غير خطية في متغيرين فنستخدم الأمر *fminsearch* الذي يستخدم Nelder-Mead simplex (direct search) method بعد تعريفها في m-file :

```
function f = fun(x,a)
    f = x(1)^2 + a*x(2)^2;

a = 1.5;
    x = fminsearch(@(x) fun(x,a),[0.3;1])

x =
  1.0e-004 *
  -0.2447
   0.3159
```

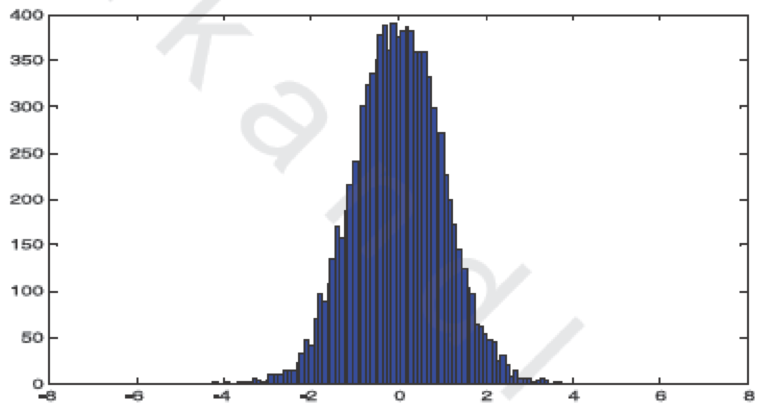
(٧,٣) دوال الإحصاء في Statistics Functions on MATLAB

سنقدم في هذا الجزء أهم المبادئ الإحصائية الضرورية لدراسة مجموعة من البيانات مثل: الوسط الحسابي والوسيط والانحراف المعياري والتباين وغيرهم .

(٧،٣،١) رسم البيانات في شكل هستوجرام

لرسم البيانات في شكل هستوجرام، نستخدم الأمر **hist(y,x)** ، فمثلاً البيانات العشوائية الممثلة بالفترة [6.7,6.7-] والمقسمة بمقياس 0.1 ترسم بالاوامر التالية الشكل رقم (٧،٢):

```
>> x=-6.7:0.1:6.7;
>> y=randn(10000,1);
>> hist(y,x)
```



الشكل رقم (٧،٢). هستوجرام البيانات العشوائية بين [6.7,6.7-].

(٧،٣،٢) الوسط الحسابي

الوسط الحسابي mean للبيانات $x_1,x_2,\ldots,x_n$ هو $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ و في MATLAB نحسب المتوسط بأمر الوسط الحسابي *mean(A)*. فإذا فرضنا البيانات 1.7,2,3.5,4,5,6,7.2 ، وطلبنا الوسط الحسابي لها، فإننا نُدخل :

```
>> A=[1.7 2 3.5 4 5 6 7.2];
>> mean(A)
ans =
 4.200
```

(٧،٣،٣) الوسيط

الوسيط هو العنصر الذي يتوسط البيانات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ و الأمر *median(B)* يحسب الوسيط للبيانات B. بفرض أن لدينا البيانات 1,2,3,4,5,6,7 ومطلوب وسيط لهذه البيانات، فإننا ندخل :

```
>> A=[1 2 3 4 5 6 7];
>> median(A)
ans =
4
```

ويمكن تحديد العنصر الأكبر في البيانات A بالأمر *max(A)* ، وكذلك العنصر الأصغر في البيانات A بالأمر *min(A)* .

(٧،٣،٤) الانحراف المعياري

يُستخدم أمر *std(A)* في MATLAB لايجاد الانحراف المعياري standard deviation بالصيغة :

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}((x_i-\bar{x})^2)^{1/2}$$

حيث إن $\bar{x}$ المتوسط الحسابي ، ويعرف الانحراف المعياري على أنه الجذر التربيعي لمعامل التغير variance فمثلاً لإيجاد الانحراف المعياري للبيانات التالية ندخل :

```
>> A=[5 8 7 10 11 4 ];
>> std(A)
ans = 2.7386
```

(٧,٣,٥) معامل التغير

معامل التغير coefficient of variation هو النسبة المئوية بين الانحراف المعياري والوسط الحسابي 100×(std/mean) . فالبيانات 5,8,7,10,11,4,9 لها معامل تغير:

```
>> A=[5 8 7 10 11 4];
>> (std(A)*100)/mean(A)
ans = 36.5148
```

(٧,٣,٦) التباين المصاحب

التباين المصاحب co-variance بين عنصرين x_1,x_2 يعرف بالصورة:

$$\operatorname{cov}(x_1, x_2) = E\left[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\right]$$

حيث إن E هي القيمة المتوقعة expectation value للعنصر x_i وتكون $\mu_i = E(x_i)$ و نستخدم الأمر $\operatorname{cov}(x_1,x_2)$ لإيجاد التباين المصاحب بين العنصرين x_1 , x_2 . والأمر *corrcoef(x)* يجد مصفوفة معاملات التباين للمتجه بحيث يكون كل صف هو ظاهرة، بينما كل عمود هو متغير. لو فرضنا بيانات عشوائية *randn(30,4)* فإن الأوامر التالية تجد البيانات العشوائية بتباين بين العمود الرابع والأعمدة الأخرى.

```
x = randn(30,4);
        x(:,4) = sum(x,2);
        [r,p] = corrcoef(x)
        [i,j] = find(p<0.05);
      r =
0.5343    0.4180  0.0054  1.0000
0.5243    0.0474  1.0000  0.0054
0.7137    1.0000  0.0474  0.4180
1.0000    0.7137  0.5243  0.5343
 P=
0.0024    0.0215  0.9772  1.0000
0.0029    0.8037  1.0000  0.9772
0.0000    1.0000  0.8037  0.0215
1.0000    0.0000  0.0029  0.0024
```

(٧,٣,٧) محاولات برنولي

من المواضيع الإحصائية الأخرى المستخدمة في مجالات عديدة دراسة الاحتمالات، وتُعد الآلية التي تمكننا من احتواء الضبابية (عدم الدقة) في البيانات والظواهر الناتجة في عالمنا الحقيقي، كما تُمكننا من التنبؤ بالتغيرات. ومحاولات برنولي هي كل تجربة تحقق الخواص التالية:

١- نتيجة كل محاولة إما " نجاحاً " وإما " فشلاً ".

٢- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى.

٣- احتمال النجاح في كل محاولة ثابت.

إذا أجريت تجربة بيرنولي n من المرات، وكان احتمال " النجاح " في المحاولة الواحدة p ، وكان x يمثل عدد "النجاح" في المحاولات ، كلها ، فإن:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad ; x=0,1,2,.....,n$$

ويدعى ذلك التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ونمثله بالرمز $b(x;n,p)$. ونحصل عليه ببرنامج MATLAB بالأمر $binocdf(X,N,P)$. ولحساب احتمالات المتغير العشوائي من القيمة r إلى القيمة t نستخدم الأمر $binocdf(r:t,N,P)$ كما يمكننا حساب مجموع تلك الاحتمالات بالأمر $sum(binocdf(r:t,N,P))$.

مثال رقم (٦, ٧)

رُميت قطعة معدنية (الوجه الأوّل صورة والآخر رقم) متزنة ستّ مرات. أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد ظهور جهة الصورة في هذه التجربة.

الحل :

تحقق التجربة شروط تجربة ذات الحدين حيث إن $p=1/2,n=6$ وبوضع x يمثل عدد ظهور الصورة في المحاولات. يمكن حساب $b(x;6,1/2)$ لقيم $X=0,1,2,3,4,5$ المختلفة ، باستخدام :

```
binocdf(0:5,6,1/2)
0.0156    0.1094    0.3438    0.6563    0.8906    0.9844
```

مثال رقم (٧, ٧)

تخضع تكاليف تصنيع جهاز لتوزيع طبيعي معدله $\mu=1250$ ريالاً ، وانحرافه المعياري $\sigma=50$ ريالاً ، والمطلوب إيجاد الاحتمال تكلفة الجهاز مابين 1200 و 1000 ريال.

الحل :

بفرض X هي تكاليف تصنيع الجهاز ، فيكون X متغيراً عشوائياً توزيعه توزيع طبيعي

ذو المعدل $\mu=1250$ وانحرافه المعياري $\sigma=50$ المطلوب حساب $P(1000< X< 1200)$.

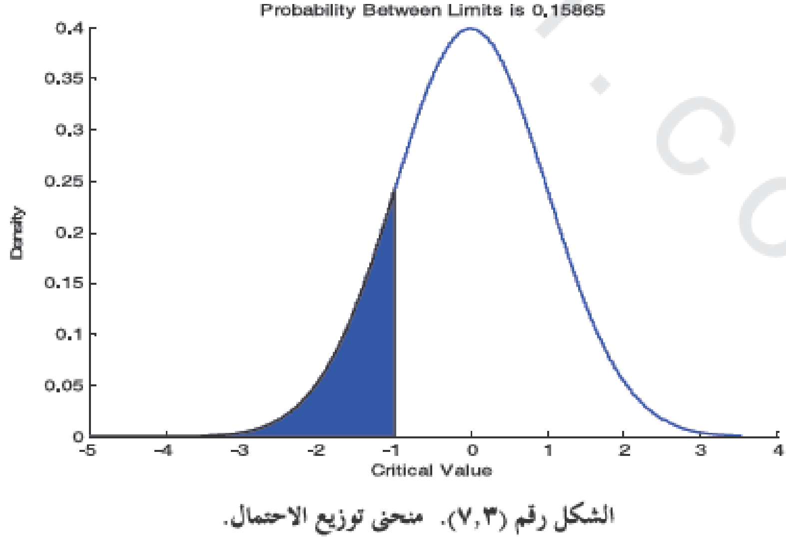
نحـول إلى القـيم المعيارية وفقـا للعلاقـة $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ، حيـث إن قـيم Z هـي القيم المعيارية المقابلة لقيم X فتكون :

$$\frac{1200-1250}{50}=-1, \qquad \frac{1000-1250}{50}=-5$$

$P(1000<X<1200)=P(-5<Z<-1)$

ونُدخل الأوامر التالية لحساب الاحتمال بقيمة المتغير المتصل ، واستخدام الأمر *normspec* ونرسم التوزيع الاحتمالي الشكل رقم (٧,٣). والقيمة الناتجة تظهر بمنحنى التوزيع الطبيعي المعياري مظللة قيمة الاحتمال المحسوب:

```
>> m=0;
>> sig=1;
>> sp=[-5,-1];
>> prob=normspec(sp,m,sig)
prob = 0. 1587
```



الشكل رقم (٧,٣). منحنى توزيع الاحتمال.

(٧,٤) التشفير Cryptography

منذ آلاف السنين اعتمد الإنسان على وسائل التشفير لحجب المعلومات السرية عن أعدائه ، وقد اقتصر استخدام علم التشفير في القرون الماضية على أمن المعلومات العسكرية والمراسلات الدبلوماسية وحماية الأمن الوطني للدول. وهي إحدى الطرق المستخدمة في الحفاظ على سرية الرسائل المرسلة عبر قنوات الاتصال المختلفة. ومع التقدم السريع للاتصالات ووسائل نقل المعلومات ، بدأ الاهتمام يتزايد في علم التشفير لاعتباره أهم الطرق المستخدمة وأكفأها لحماية المعلومات العسكرية والاقتصادية المنقولة عبر شبكات الاتصالات التي يسهل اختراقها مثل الإنترنت و الراديو والهاتف وغيرها .

ينقسم علم التشفير cryptology إلى قسمين ، هما : التشفير cryptography وتحليل أو كسر الشفرة cryptanalysis. فمستخدم الشفرة يكون هدفه الأساسي هو ضمان سرية المعلومات المنقولة وعدم تعرضها للتحريف من قبل العدو ، أما محلل الشفرة فهو يسعى إلى الهدف المضاد وهو كسر الشفرة ومعرفة محتوى المعلومات المنقولة.

وبناءً على ذلك نعرّف التشفير على أنه تحويل نص واضح مقروء إلى نص غير واضح باستخدام إحدى طرق التشفير، التي قد تكون غير سرية ولكنها تستخدم مفتاحاً سرياً ، أما كسر الشفرة فهو العملية العكسية أي محاولة معرفة المفتاح السري من النص المشفر ، ومن ثم الحصول على النص الواضح.

هناك طرق كثيرة للتشفير باستخدام أنظمة تقليدية أو غير تقليدية ، وهي تحتاج إلى خوارزميات وطرق مطولة من الحساب ، وبعضها يعتمد على التجربة أكثر من مرة لإيجاد المفتاح المناسب للتشفير. البرنامج التالي يستخدم في MATLAB من أجل

تشفيرأي نص وكذلك كسر هذه الشفرة، وهذا البرنامج (خوارزمية ٧.٢) هو نظام تشفير تقليدي بشرط أن الدالة تساوي معكوسها [19].

```
function  y = crypt(x)
pp=97;c1=char(169);c2=char(174);
x(x==c1)=127;
x(x==c2)=128;
x=mod(real(x-32),pp);
n=2*floor(length(x)/2);
X=reshape(x(1:n),2,n/2);
AA=[71 2;2 26];
Y=mod(AA*X,pp);
y=reshape(Y,1,n);
if length(x)>n
   y(n+1)=mod((pp-1)*x(n+1),pp);
end
y=char(y+32);
y(y==127)=c1;
y(y==128)=c2;
```

خوارزمية (٧,٢).

مثال رقم (٧,٨)

قم بتشفير الجمل التالية، باستخدام خوارزمية (٧,٢) :

(1) Hello readers
(2) Mathematics with Matlab
(3) Matlab toolboxes

الحل :

إذا أدخلنا الجملة "Hello readers" في الخوارزمية فإن البرنامج يعطي الجملة المشفرة " d?3{p]K2©W3G" :

```
» y=crypt('Hello readers')
y =
d?3{p]K2©W3G
```

ونستطيع فك الشفرة وإعادة كتابة الجملة باستخدام نفس البرنامج على الجملة الناتجة y :

```
» crypt(y)
ans =
Hello readers
```

وبنفس الطريقة :

```
» y=crypt(' Mathematics with Matlab')
y =
;B~#)&>soMie2C~#z&>s~®?
» crypt(y)
ans =
Mathematics with Matlab

» y=crypt(' Matlab toolboxes')
y =
;B%*{#gRLn®9^55a
» crypt(y)
ans =
Matlab toolboxes
```

تمارين (٧,٥)

١– أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط :

. P=(1,-1,0) , Q=(2,1,-1), R=(-1,1,2)

٢– أوجد المتجه العمودي $\vec{n}$ على المستوى الذي تقع عليه النقاط :

. P=(1,-1,0), Q=(2,1,-1), R=(-1,1,2)

٣– أثبت أن المتجهات $e_1=(1,2,1)$, $e_2=(2,3,3)$, $e_3=(3,7,1)$ تكون أساسا للفراغ R^3.

٤– إذا كانت نسبة التلف من المصابيح الكهربائية في مصنع تساوي 0.001 ،

وأخذت عينة حجمها عشرة مصابيح بطريقة عشوائية ما احتمال أن يكون عدد التالف في هذه العينة يساوي صفراً ؟ وما احتمال أن يكون عدد التالف اثنين .

٥- إذا كان X متغيراً عشوائياً لذات الحدين ,n=5 ، p=1/2 قم بعرض القيم والاحتمالات المقابلة لها بوساطة المدرج الاحتمالي (هستوجرام) .

٦- تخضع أوزان أحد أنواع الجبن للتوزيع الطبيعي ذي المعدل $\mu=85$ جرام وانحرافه المعيار $2.5 = \sigma$ جرام والمطلوب هو احتمال أن وزن إحدى العبوات التي أخذتها عشوائياً تزيد على 90 جرام ، واحتمال أن وزن إحدى العبوات التي أخذتها عشوائيا تقل عن 82 جرام .

٧- أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس :

$$\min z = -2x_1 - x_2 - 4x_3$$
$$\text{s.t} \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 7$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

٨- شفر الجمل التالية :

Computers are Essentials
Using Matlab in mathematics
Good Luck