الفصل الرابع

حساب التفاضل والتكامل في MATLAB

نقدم في هذا الفصل طرقاً عددية لتقريب أهم مبادئ حساب التفاضل والتكامل Calculus ونعرض إمكانات MATLAB في تبسيط هذه الطرق العددية التي تعتمد على تعريف الدوال في هيئة جداول بيانية متقطعة، وذلك ربما لعدم وجود صيغة محددة للدالة أو لصعوبة الاشتقاق أو التكامل بالطرق المعتادة. من مزايا برنامج MATLAB أنه يستطيع التعامل مع البيانات مهما كان حجمها كبيراً وبطرق دقيقة جداً. بالاستعانة بالإمكانات القوية للرسم على MATLAB نستطيع إعطاء هذه البيانات تمثيلاً بيانياً لتسهيل تحليلها واستخراج خواصها مثل الاتصال، والقيمة العظمى والصغرى، وتحديد قابليتها للاشتقاق والتكامل، وغيرها من الخواص. كما سنعرض مواضيع في حساب التفاضل والتكامل في عدة متغيرات في الجزء الأخير من الفصل.

يعّد مفهوم النهاية من المفاهيم الأساسية في الرياضيات وعلى وجه الخصوص في حساب التفاضل والتكامل. فالمسائل الأساسية في علم التفاضل والتكامل مثل إيجاد المشتقة عند نقطة أو إيجاد المساحة تحت منحنى دالة ما، تتركز حول مفهوم النهاية. وسوف نقدم قدرات MATLAB على رسم وحساب النهايات.

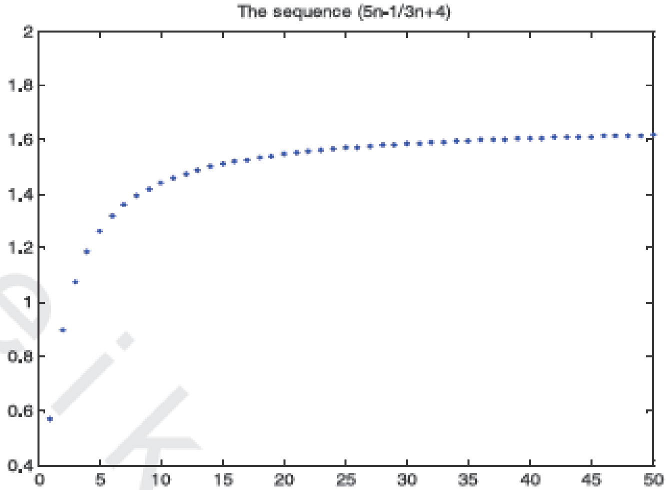
(٤,١) المتتاليات والمتسلسلات Sequences and Series

(٤,١,١) المتتاليات

المتتالية غير المنتهية Infinite sequence هي دالة مجالها الأعداد الكلية ومداها الأعداد الحقيقية أو الأعداد المركبة وتكتب $(a_n)_1^{\infty}$. مع أن MATLAB لا يتعامل مع المتجهات غير المنتهية لكن يمكننا أن نختار عدداً كبيراً جداً من الحدود يصل إلى 10^{300} وهذا يكفي لنلاحظ الصورة العامة للمتتالية في الرسم. أما في البيئة الرمزية Symbolic Algebra فيمكن التعامل مع المتتاليات غير المنتهية و يمكننا حساب النهايات إن وجدت.

التمثيل بالرسم يعطي الشكل العام للمتتالية وطريقة تقاربها إن وجد (الشكل رقم ٤,١). ونقوم برسم المتتاليات على شكل نقاط بعد تحديد عدد الحدود n *plot(a_n,'.')*. فعند رسم المتتالية وتحديد n بالقيمة 50 $\left(\dfrac{5n-1}{3n+4}\right)_1^{\infty}$ نلاحظ من الرسم أن المتتالية تتقارب من 1.6 ويمكن حساب النهاية بالأمر *limit* في *syms* :

```
>> n=1:50
>> a=(5*n-1)./(3*n+4);
>> plot(a,'.')
>> syms n
>> limit((5*n-1)/(3*n+4),n,inf)
 ans =
5/3
```



الشكل رقم (٤،١). رسم المتتالية $\left(\dfrac{5n-1}{3n+4}\right)_1^{50}$.

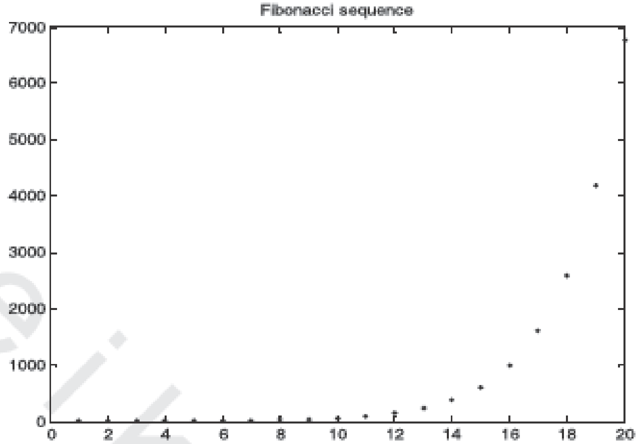
مثال رقم (٤،١)

إحدى أكثر المتتاليات رواجاً في التطبيقات الرياضية هي متتالية فيبوناشي Fibonacci sequence وتعرّف كالتالي :

$$f_1 = f_2 = 1,$$
$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \mathrm{n} = 3,4,...$$

ويمكن رسمها (الشكل رقم ٤،٢) بالأوامر التالية ، مع تحديد n=20 :

```
>> f=[1 1];
>> for n=3:20
f=[f  f(n-2)+f(n-1)];
end
>> plot(f,'.')
```



الشكل رقم (٤,٢). متتالية فيبوناشي.

(٤,١,٢) المتسلسلات

مفهوم مرتبط بالمتسلسلة غير المنتهية infinite series $\sum_1^\infty a_n$ هو متتالية للمجاميع الجزئية $(s_n)_1^\infty$ sequence of partial sums ، بحيث $s_n=\sum_{k=1}^n a_k$ ويوجد في MATLAB الأمر *cumsum* الذي يقوم بحساب هذه المجاميع. فمثلا للمتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$ يمكننا تعريف متتالية المجاميع الجزئية $s_n=\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k}$ كما يمكن حساب أول ١٠٠ مجموع ورسم متتالية المجاميع بالأوامر التالية:

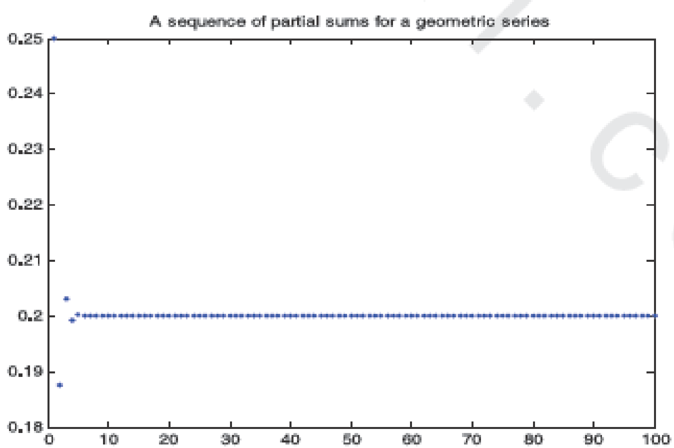
```
>> n=1:100;
>> a=(-1).^(n-1)./4.^n;
>> s=cumsum(a);
>> plot(s,'.')
```

من الشكل رقم (٤،٣). نستنتج أن المتسلسلة هي متسلسلة هندسية geometric series وتتقارب إلى 0.2 . في بيئة الحساب الرمزي يمكننا حساب مجموع المتسلسلة الهندسية العامة الذي $\sum_{0}^{\infty} r^n$ يساوي $\frac{1}{1-r}$ إذا $|r| \prec 1$ باستخدام الأمر *symsum* :

```
>> syms r n
>> s=symsum(r^n,n,0,inf)
 s =
-1/(r-1)
```

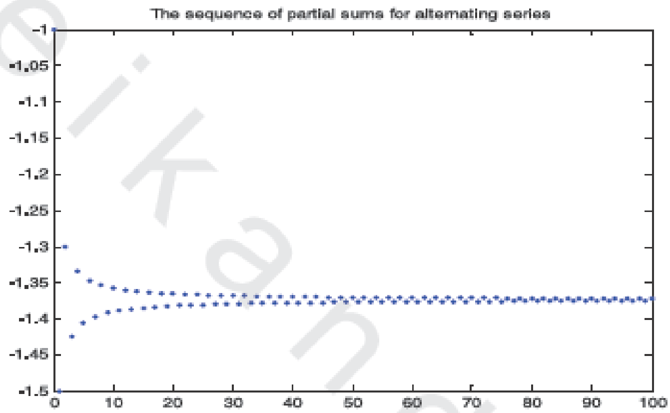
وفي المثال السابق الحد الابتدائي $a = 1/4$ و $r = -1/4$ ، ليصبح المجموع :

```
>> s=symsum((-1)^(n-1)/4^n,n,1,inf);
>> double(s)
ans =
   0.2000
```



الشكل رقم (٤،٣). متتالية المجاميع $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k}\right)_1^{100} = (s_n)_1^{100}$.

هناك نوع آخر من المتسلسلات هو المتسلسلة المتذبذبة alternating series مثل $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$ ، ويمكن رسم المجاميع الجزئية المئة الأولى ونلاحظ من الشكل رقم (٤،٤). أنها متقاربة.



الشكل رقم (٤،٤). متتالية المجاميع لمتسلسلة متذبذبة .

(٤،٢) التفاضل العددي Numerical Differentiation

بصورة عامة المشتقة للدالة *f(x)* عند النقطة *x* تُعرف :

$$f'(x) \equiv \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

إن وجدت النهاية. والمشتقة العددية تعتمد على إيجاد قيمة تقريبية للكسر عند *h* ذات القيمة الصغيرة و المناسبة. التفاضل العددي يُعد من الطرق غير المستقرة لتراكم اخطاء التدوير عند تصغير المقدار *h* وبذلك لن يعطي تقريباً أفضل بمجرد اختيار *h* صغيرة ،

ولكن يجب البحث عن المقدار h الصغير والذي يحافظ على استقرار الطريقة. علماً أننا نعدّ الطرق العددية مستقرة stable إذا أجرينا تغيرات بسيطة في الشروط الابتدائية، مما يؤدي إلى تغيرات بسيطة في النتائج النهائية.

(٤,٢,١) الفروق الجزئية Divided differences

الفروق الجزئية divided differences هي إحدى الطرائق العددية المستخدمة في تقريب الدوال بكثيرات الحدود، ولها عدة درجات فالفرق الجزئي الصفري للدالة f بالنسبة لـ x_i هو $f[x_i] = f(x_i)$، أي قيمة f عند x_i، والفرق الجزئي الأول بالنسبة لـ x_i و x_{i+1} (حيث إن $x_{i+1} = x_i+h$) هو:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

أي قيمة تقريبية للنهاية المستخدمة في تعريف مشتقة الدالة f عند النقطة x، وبذلك تساعد الفروق الجزئية في تقريب المشتقة. الأمر *diff* في MATLAB يعطي الفروق الجزئية للمتجه، فمثلاً:

```
x = [1 2 7 9 10];
>> y = diff(x)
y =
   1    5    2    1
```

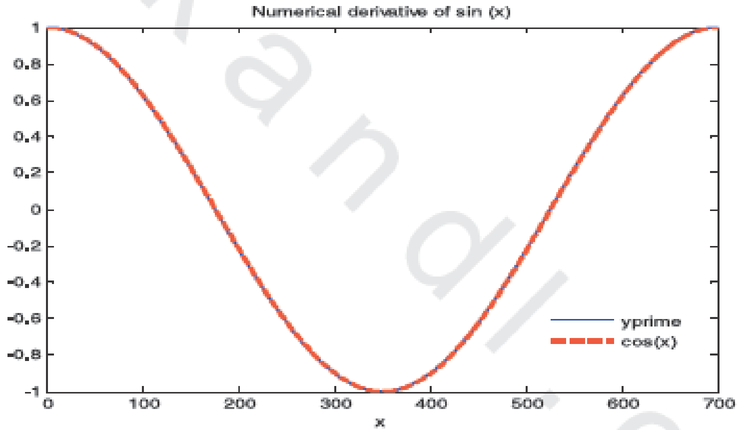
يعطينا الفروق الجزئية للمتجه (10 9 7 2 1) مع ملاحظة أن المتجه الناتج أقصر من المتجه الأصلي.

مثال رقم (٤,٢)

لحساب المشتقة الأولى للدالة *sin(x)* نفرض أن لدينا متجهاً من 700 حد، ونحسب بالفروق الجزئية قيمة تقريبية للمشتقة باستخدام *yprime= diff(y)./diff(x)*

ونقارن النتائج بالمشتقة الأصلية $cos\ (x)$. في الرسم الموضح في الشكل رقم (٤،٥) يظهر تطابق المتجهين $cos\ (x)$ من المشتقة الأصلية والمتجه *yprime* من الفروق التجزيئية.

```
>> x=linspace(0,2*pi,700);
>> yprime=diff(y)./diff(x);
>> plot(cos(x),':r')
>> hold
Current plot held
>> plot(yprime)
>> hold off
```



الشكل رقم (٤،٥). التفاضل العددي للدالة sin(x) .

الطريقة السابقة لتقريب المشتقة هي من أبسط الطرق وتستعمل فقط نقطتين(x_0 , x_0+h)، ولكن هناك طرقاً أخرى تستعمل ثلاث نقاط أو أكثر لتعطي حلولاً أدق. وهذه الطرق تُشتق من متسلسلة تايلور أو من كثيرة الحدود لاجرانج Lagrange polynomials التي سيتم عرضها بالتفصيل في فصل الاستكمال.

وتُعد كثيرات الحدود من أشهر الدوال وأكثرها استخداماً، خصوصاً في

التقريب والاستكمال، لأنها دوال متصلة، ولسهولة حساب كل من مشتقاتها وتكاملاتها. الموضوع الذي سنتوسع بعرض تطبيقاته في الفصل السادس. من كثيرات الحدود التي تستخدم في التقريب متسلسلة تايلور، وهي طريقة أساسية في التحليل العددي لتقريب الدوال، وتُعرف كثيرة الحدود تايلور $p_n(x)$ من الدرجة n للدالة f حول x_0 بالتالي :

بفرض f دالة متصلة و جميع المشتقات $f^{(n+1)}$ متصلة على الفترة [a,b] ($f \in C^n [a,b]$) و $x_0 \in$ [a,b] فلكل $x \in$[a,b] يوجد $\zeta(x)$ بين x_0 و x يحقق $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ حيث إن :

$$p_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{n+1!}(x-x_0)^{n+1}$$

ويسمى $R_n(x)$ الحد الباقي (او خطأ القطع) truncation error المرافق لـ $p_n(x)$. ويطلق على المتسلسلة اللانهائية التي نحصل عليها بأخذ نهاية $p_n(x)$ عندما n تؤول إلى مالانهاية بمتسلسلة تايلور للدالة f حول x_0 .

والمفهوم العام لخطأ القطع هو الخطأ الناتج عن استخدام مجموع مقطوع أو مجموع منته كمجموع لمتسلسلة لانهائية. و يوفر MATLAB في البيئة الرمزية syms إمكانية كتابة متسلسلة تايلور Taylor series لدالة ما وحول نقطة محددة. فمثلاً لإيجاد متسلسلة تايلور من الدرجة الخامسة للدالة $f(x) = \sin x$ وحول $a = \pi$.

```
>> syms x
>> t5=taylor(sin(x),pi,6)
t5 =
-x+pi+1/6*(x-pi)^3-1/120*(x-pi)^5
```

للحصول على طرق عددية لتقريب المشتقة نحتاج ثلاث نقاط أو أكثر لنشر الدالة f بواسطة كثيرة الحدود تايلور من الدرجة n عند x_0 ومن ثم حساب كثيرة الحدود عند نقاط مختلفة (x_0+h أو x_0-h , ...) . وبعمليات جبرية بسيطة مثل الجمع أو الطرح لهذه المعادلات الناتجة يمكن الوصول للصيغ المختلفة. كما أن طريقة اختيارالنقاط يعطي طرقاً مختلفة لتقريب المشتقة ، فمثلاً قانون الفروق الأمامية forward differences approximation نحصل عليه باختيار النقاط الثلاث الأمامية x_0 , x_0+h , x_0+2h ومقدار الخطوة $h > 0$:

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

و يدعى قانون الفــروق الخلفية backward differences approximation في حالة $h < 0$.

كما يوجد قانون الفروق الوسطية central differences approximation حين تتوسط نقطة الاشتقاق النقطتين x_0+h و x_0-h :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[f(x_0+h) - f(x_0-h)] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

كما توجد طرق عددية لتقريب المشتقة الثانية :

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}[f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

ونلاحظ في هذه الصيغ من الحد الأخير (حد الخطأ) أن الخطأ يتناسب طردياً مع h^2 ، أو يمكننا القول إن جميع هذه الصيغ هي بخطأ برتبة $O(h^2)$.

ويمكن الحصول على تقريب لمشتقات أعلى ، وذلك باستخدام متسلسلة تيلور بدرجات مختلفة وعند نقاط مختلفة. وقد تم اختيار صيغ مختلفة لإيجاد المشتقات الأربع الأولى وجمعها في برنامج واحد باسم *diffgen* [15] (ويمكن للقارئ حساب صيغ أخرى وبرمجتها في الخوارزمية حسب احتياجه) وهي:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{12h^2}[-f(x_0-2h)+16f(x_0-h)-30f(x_0)+16f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$

$$f'''(x_0) \approx \frac{1}{8h^3}[f(x_0-3h)-8f(x_0-2h)+13f(x_0-h)-13f(x_0+h)+8f(x_0+2h)-f(x_0+3h)]$$

$$f^{(iv)}(x_0) \approx \frac{1}{6h^4}[-f(x_0-3h)+12f(x_0-2h)-39f(x_0-h)+56f(x_0)-39f(x_0+h) \\ +12f(x_0+2h)-f(x_0+3h)]$$

عند استخدام الخوارزمية (٤،١) نحصل على قيم المشتقات الأربع الأولى لأي دالة عند النقطة المحددة من المستخدم ، علما أنها كلها صيغ ذات خطأ برتبة $O(h^4)$.

```
function v = diffgen(fun,n,x,h)
if ((n==1)|(n==2)|(n==3)|(n==4))
  c=zeros(4,7);
0];    c(1,:)=[ 0  1  -8  0   8  -1

0]; 1   −   c(2,:)=[  0  -1  16  -30  16

  c(3,:)=[1.5  -12  19.5  0  -19.5  12  -1.5];
  c(4,:)=[  -2  24  -78  112  -78 24  -2];
  p=feval(fun,x+[-3:3]*h);
  v=c(n,:)*p';
  v=v/(12*h^n);
end
```

خوارزمية (٤،١).

مثال رقم (٤,٣)

استخدم البرنامج *diffgen* المعطى في خوارزمية (٤,١) وذلك لإيجاد المشتقات الأربع الأولى للدالة $y = x^{11}$ عند:

$x = 1$ و لقيم h المتناقصة من 0.05 إلى $5x10^{-5}$.

الحل:

تم تخزين الدالة في الملف *f400*، و بتكرار الأمر *diffgen('f400',n,1,h)* تظهر النتيجة في الجدول رقم (٤,١):

الجدول رقم (٤,١). نتائج مثال (٤,٣) .

h	1st derivative	2nd derivative	3rd derivative	4th derivative
0.05000	10.98835	109.97680	989.39027	7918.78457
0.00500	11.00000	110.00000	989.99994	7919.99989
0.00050	11.00000	110.00000	990.00001	7919.94855
0.00005	11.00000	110.00000	989.98409	6448.17533

ونلاحظ أن النتائج بدأت تتغير، والدقة بدأت تتناقص عند أصغر قيمة $h = 5x10^{-5}$ وذلك بسبب أخطاء التدوير الناتجة من بعض الصيغ .

(٤,٢,٢) دالة diff الرمزية

في بيئة الحسابات الرمزية Symbolic Algebra يوفر MATLAB أوامر لحساب

المشتقات بدرجات مختلفة، ونستطيع استخدام الأمر *diff (f)* في *syms* لإيجاد المشتقة الأولى للدالة *f* وللحصول على المشتقة *n* ندخل *diff(f,n)* .

مثال رقم (٤,٤)

إذا كان لدينا الدالة $f = x/(1+x^2)$ فيتم حساب المشتقة الأولى بالأوامر التالية :

```
>> syms x
>> f=x/(1+x^2);
>> fderiv=diff(f)
fderiv =
1/(1+x^2)-2*x^2/(1+x^2)^2
```

ونحسب المشتقة الثانية باستخدام *diff(f,2)* :

```
>> fderiv2=diff(f,2)
fderiv2 =
-6/(1+x^2)^2*x+8*x^3/(1+x^2)^3
```

أما إذا كانت الدالة في أكثر من متغير، فيجب تحديد المتغير المستقل المراد حساب المشتقة بالنسبة إليه.

مثال رقم (٤,٥)

احسب المشتقة الثالثة بالنسبة للمتغير x للدالة $f = x\,y/(1+x^2)$.

الحل :

بالأمر *diff(f,'x',3)* نحصل على المطلوب :

```
>> syms x y
>> f=x*y/(1+x^2);
>> fderiv3x=diff(f,'x',3)
fderiv3x =
 48*y/(1+x^2)^3*x^2-6*y/(1+x^2)^2-48*x^4*y/(1+x^2)^4
```

هناك تطبيقات عديدة على الاشتقاق في علم التفاضل، ونقدم فيما يلي بعض الأمثلة على ذلك.

مثال رقم (٤,٦)

أوجد نقاط الانقلاب للدالة $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^3}$.

الحل :

نستخدم الأوامر diff(f,'x',1) و diff(f,'x',2) لحساب المشتقتين الأولى والثانية للدالة :

```
>> f=(3*x^2-2)/x^3;
>> fderiv1=diff(f,'x',1)
fderiv1 =
6/x^2-3*(3*x^2-2)/x^4
 >> fderiv2=diff(f,'x',2)
fderiv2 =
-30/x^3+12*(3*x^2-2)/x^5
```

ولإيجاد جذور المشتقة الثانية نستخدم الأمر solve(fderiv2) :

```
 >> solve(fderiv2)
ans =
  2
 -2
```

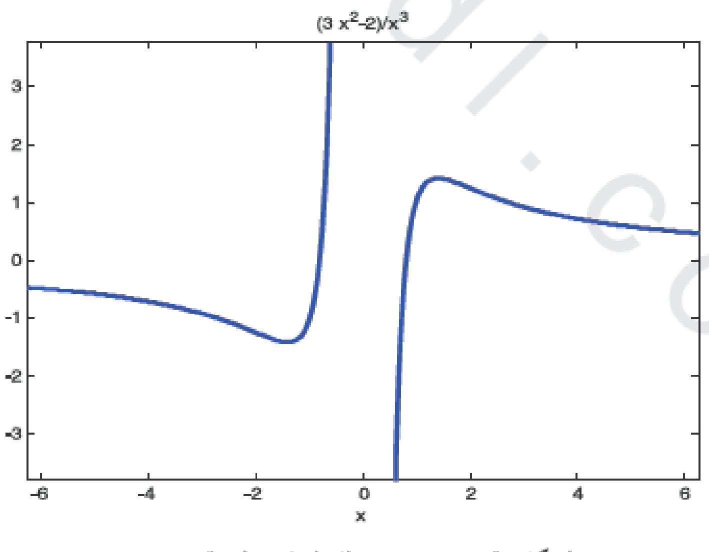
فنحصل على الجذرين 2 و 2- ونحسب f(2) ,f(-2) باستخدام feval(f, 2) و feval(f, -2) :

```
>> f=inline(f)
f =
    Inline function:
    f(x) = (3.*x.^2-2)./x.^3


>> feval(f,2)
ans =
   1.2500

>> feval(f,-2)
ans =
  -1.2500
```

نستنتج أن الدالة مقعرة لأعلى في كل من (2,∞) و (-2,0) ، ومقعرة لأسفل في كل من (-∞,-2) و (0,2) . ومن ثم فإن النقطتين (2,1.25) و (-2,-1.25) ، تشكلان نقطتي انقلاب للدالة ، كما هو موضح في الشكل رقم (٤,٦).



الشكل رقم (٤,٦). رسم للدالة في مثال رقم (٤,٦).

مثال رقم (٤,٧)

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$.

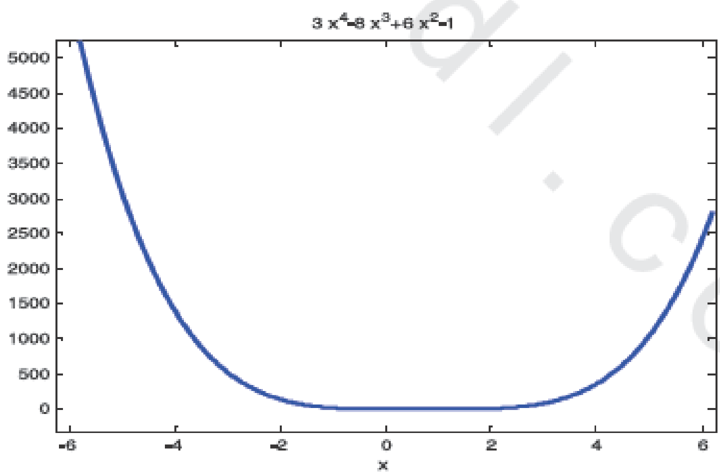
الحل :

نبدأ الحل بالرسم (الشكل رقم ٤,٧) بدالة *ezplot* :

```
>> syms x
>> f=3*x^4-8*x^3+6*x^2   -1;
>> ezplot(f)
```

ونحسب المشتقة الأولى للدالة f :

```
>> fderiv1=diff(f,'x',1)
 fderiv1 =
12*x^3-24*x^2+12*x
```



الشكل رقم (٤,٧). رسم للدالة في مثال رقم (٤,٧).

نحصل على أصفار المشتقة الأولى بالأمر :

```
>> solve(fderiv1)
ans =
 0
 1
 1
```

وبذلك تصبح 0 و 1 هما النقطتان الحرجتان، ونستخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية :

```
>> fderiv2=diff(f,'x',2)
 fderiv2 =
 36*x^2-48*x+12

>> df2=inline(fderiv2)
df2=
    Inline function:
    df2(x) = 36.*x.^2-48.*x+12
```

ونحسب $f''(0)$:

```
>> feval(df2,0)
ans =
   12
```

ومن ثم فإن $f(0) = 1$ هي قيمة صغرى محلية. ولكن $f''(1) = 0$ و بذلك فإن اختبار المشتقة الثانية يفشل في تصنيف النقطة 1 ولكن اختبار المشتقة الأولى والرسم البياني يبينان أن $f(1)$ ليست قيمة قصوى محلية.

مثال رقم (٤,٨)

أوجد المستقيمات المقاربة الأفقية و الرأسية للدالة :

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + x}}$$

الحل :

نحسب النهايات للدالة عند ∞ و ∞− :

```
>> limit((3*x)/sqrt(x^2+x),x,inf)
ans =
3
>> limit((3*x)/sqrt(x^2+x),x,-inf)
ans =
-3
```

وهذا يعني أن $y = 3$ مستقيم مقارب أفقي عند ∞ و $y = -3$ مستقيم مقارب أفقي عند ∞ - .

بما أن أصفار المقام تساعد في إيجاد المستقيمات المقاربة الرأسية ، و مجال الدالة هو$(-\infty, -1) \cup (0,\infty)$ فنكتفي بحساب النهايات التالية :

```
>> limit((3*x)/sqrt(x^2+x),x,0)
ans =
0
>> limit((3*x)/sqrt(x^2+x),x,-1,'left')
ans =
-Inf
```

وبذلك يصبح $x = -1$ هو المستقيم المقارب الرأسي الوحيد.

(٤,٣) التكامل Integration

(٤,٣,١) مجموع ريمان Riemann Summation

يتم تقريب المساحة تحت منحنى الدالة $y = f(x)$ وعلى الفترة [a,b] بالمجموع :

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

حيث إن عدد الفترات n هو عدد موجب، وطول كل شريحة هو $\Delta x = (b-a)/n$ ، والنقاط $x_i = a + i\Delta x$ لكل i=0,1,...,n ، باستخدام تجزيء منتظم للفترة [a,b] و x_k هي نقطة اختيارية في الفترة الجزئية i . يسمى R_n بمجموع ريمان Riemann Sum والمساحة تحت المنحنى للدالة *f(x)* تعرّف بنهاية هذا المجموع (إن وجدت) في حال أن n تؤول إلى ما لانهاية $n \to \infty$. عندما توجد النهاية فإن المساحة تحت منحنى الدالة *f(x)* ما بين a و b تعرف بالتكامل المحدود Definite Integral ويرمز له:

$$\int_a^b f(x)dx$$

مثال رقم (٤,٩)

لحساب مجموع ريمان للدالة *cos(x)* على الفترة [0, π] وعند النقطة الاختيارية المحددة بمنتصف الفترة، فإن المجموع يصبح بتحديد n =100 ، a = 0 و b = π :

```
>> deltax=(pi-0)/100
deltax =
   0.0314
```

```
>> x=deltax/2:deltax:pi-deltax/2;
>> rn=sum(cos(x))*deltax
rn =
  2.4415e-017
```

(٤,٣,٢) التكامل العددي Numerical Integration

يوجد تكامل فعلي للعديد من الدوال، ولكن لبعض الدوال من الصعب حسابه، إما لعدم وجود دالة أصلية واضحة أو أنه ليس من السهل الحصول على الدالة

الأصلية ، وفي هذه الحالات نستخدم طريقة عددية لتقدير التكامل. برنامج MATLAB يُعد من أقوى الأدوات التي تقرب عددياً التكامل المحدود لوجود دوال جاهزة أنشئت لذلك مع امكانية برمجة الطرق العددية المعروفة للتكامل العددي بسهولة.

(٤,٣,٢,١) قاعدة سمبسون المركبة Composite Simpson Rule

من أكثر الطرق العددية انتشاراً لحساب التكامل وتقديره هي طريقة سمبسون المركبة Composite Simpson's Rule . فإذا كان لدينا الدالة $y = f(x)$ معرّفة على الفترة [a,b] وعرفنا تجزيئاً منتظماً على n فترات جزئية بحيث إن $n = 2m$ عدد زوجي ، و $h=(b-a)/n$ هو طول كل فترة ، فإن طريقة سمبسون المركبة تقدم تقريباً للتكامل $\int_a^b f(x)dx$ بالمجموع :

$$S_n = \frac{h}{3}(f(a) + 4\sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + f(b))$$

حيث إن $x_k = a+kh$ و $k = 0,1,...,n$.

ويقوم برنامج *simpsons* بحساب التكامل بطريقة سمبسون المركبة [15] في الخوارزمية (٤,٢):

```
function s=simpsons(fun,a,b,n)
h=(b-a)/n;
x=[a:h:b]; y=feval(fun,x);
v=2*ones(n+1,1);
v2=2*ones(n/2,1);
v(2:2:n)=v(2:2:n)+v2;
v(1)=1; v(n+1)=1;
s=y*v;
s=s*h
```

خوارزمية (٤,٢)

مثال رقم (٤,١٠)

استخدم برنامج *simpsons* في حساب قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^\pi \cos(x)dx = 0$ بـ n=40 .

الحل :

نادي البرنامج لنحصل على النتيجة التقريبية للصفر :

```
>> sn=simpsons('cos',0,pi,40)
sn =
 1.3545e-016
```

(٤,٣,٢,٢) قاعدة شبه المنحرف المركبة Composite Trapezoidal Rule

طريقة عددية أخرى لحساب التكامل هي طريقة شبه المنحرف المركبة Composite Trapezoidal Rule التي تقسّم المنطقة تحت المنحنى إلى أجزاء تأخذ شكل شبه المنحرف، ولتقريب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ تستخدم القانون :

$$T_n = \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b))$$

حيث إن $h = \frac{b-a}{n}$ و $x_i = a+ih$ لكل $i = 0,1,...n$.

البرنامج *trapezoidal* المعطى في الخوارزمية (٤,٣) [7] يحتوي على طريقة شبه المنحرف، وهو يحتاج إلى تعريف الدالة المراد حساب تكاملها في m-file باسم fun والحدود a وb و عدد الفترات n .

```
function tp=trapezoidal(fun,a,b,n)
h=(b-a)/n;
t=(feval(fun,a)+feval(fun,b))/2;
for k=1:n-1
   x=a+h*k;
   t=t+feval(fun,x);
end
tp=t*h;
```

خوارزمية (٤,٣).

للمقارنة قمنا باستخدام برنامج *trapezoidal* لنفس المثال عند n=100 كالآتي :

```
>> tp=trapezoidal('fun',0,pi,100)
tp =
 -1.3951e-016
```

قمنا باستخدام عدد فترات أكثر في طريقة شبه المنحرف، وذلك بتحديد n = 100 لتحسين دقة الحل، ولكن كما نلاحظ فإن طريقة سمبسون المركبة تتفوق. ويرجع ذلك التحسن لكون طريقة سمبسون المركبة تستخدم كثيرات حدود لاغرانج من الدرجة الثانية في تقريب الدالة المراد إيجاد تكاملها وهذا يحسن الخطأ بصورة ملحوظة إذ إن الخطأ يكون برتبة $O(h^4)$ ، بينما قاعدة شبه المنحرف المركبة تستخدم كثيرة حدود لاغرانج الخطية، وهناك يكون الخطأ برتبة $O(h^2)$.

(٤,٣,٣) دوال MATLAB الجاهزة للتكامل العددي

يمكن برمجة كل الطرق العددية في m-file ومن ثم استخدامها مثل طريقة Gaussian Quadrature، ولكن MATLAB يوفر دوال جاهزة للتكامل تدعى *quadl* *quad* و *quad8* . الأمر *quad* يستخدم طريقة سمبسون المركبة لإيجاد التكامل . والأمر *quad8* يستخدم طريقة نيوتن كوتس الثامنة Adaptive Recursive Newton Cotes ، وفي *quadl* يستخدم تربيع جاوس- لوباتو adaptive Gauss/Lobatto qudrature rule. وفي كل تلك الأوامر الجاهزة للتكامل العددي يتوجب على المستخدم تسمية الدالة ، وحدود التكامل ، والدقة المطلوبة.

مثال رقم (٤،١١)

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ بخطأ أقل من 0.0001 .

الحل :

ندخل الخطوات التالية لتعريف الدالة $exp(-x^2)$ في الملف *fun* :

```
>> quad('fun',0,2,.0001)
ans =
   0.8821
>> quad8('fun',0,2,.0001)
ans =
   0.8821
```

يمكننا أيضاً حساب تكامل لدالة معرّفة بالأمر @ ومن ثم تطبيق تكامل تربيع جاوس بالحدود المطلوبة :

```
>> F = @(x) 1./(x.^3-2*x-5);
Q = quadl(F,0,2);
>> Q = quadl(F,0,2)
Q =
  -0.4605
```

(٤,٣,٤) دالة *int* الرمزية

توجد طريقة أخرى في MATLAB لحساب التكامل وهي باستخدام البيئة الرمزية *syms* و الأمر *int* كما في المثال (٤,١٢).

مثال رقم (٤,١٢)

نحسب التكامل $\int_{1/2}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx$ بالأمر *int* بعد تعريف المتغيرات x, y متغيرات رمزية حقيقية:

```
>> syms x y real
>> f=x/(1+x^2)
f =
 x/(1+x^2)
```

عند كتابة الأمر نحتاج إلى إدخال الدالة، وحدود التكامل:

```
>> b=int(f,0.5,1)
b =
3/2*log(2)-1/2*log(5)
```

نستخدم الأمر *pretty* لكتابة النتائج بطريقة منسقة وسهلة القراءة، أما الأمر *double* فلعرض النتائج على شكل عدد عشري:

```
>> pretty(b)
                    3/2 log(2) - 1/2 log(5)
>> double(b)
ans =
   0.2350
```

في حال احتواء التكامل على أكثر من متغير، فيمكن حساب التكامل بالنسبة للمتغير المطلوب بتحديد ذلك في الأمر *int* فلحساب $\int_1^5 \frac{y}{1+x^2} dx$ ندخل :

```
>> f=y/(1+x^2)
f =
 y/(1+x^2)
 >> b=int(f,'x',1,5)
b =
atan(5)*y-1/4*pi*y
```

أما إذا كانت حدود التكامل معطاة بدلالة a و b مثل $\int_a^b \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ فيمكن حساب التكامل بنفس الطريقة وتظهر النتيجة بدلالة a و b :

```
>> syms x  a b real
>> f=(x^.5)/(1+x)
f =
 x^(1/2)/(1+x)
>> b=int(f,'x',a,b)
 b =
 2*b^(1/2)-2*atan(b^(1/2))-2*a^(1/2)+2*atan(a^(1/2))
```

وفي حال التكامل غير المحدود $\int x^3 \cos(x) dx$ فيمكن حسابه بالأمر *int* دون إدخال قيم لحدود التكامل :

```
>> g=int(x^3*cos(x))
 g =
 x^3*sin(x)+3*x^2*cos(x)-6*cos(x)-6*x*sin(x)+C
```

أما التكامل على فترة غير منتهية فيمكن حسابه بتحديد ذلك في الحدود، فمثلاً التكامل $\int_0^\infty \exp(-x^2)dx$ يتم حسابه بالخطوات التالية :

```
>> syms x
>> int(exp(-x^2),0,inf)
ans =
1/2*pi^(1/2)
```

(٤,٤) تطبيقات على التكامل

حساب التكامل يحتوي على العديد من التطبيقات التي تظهر في مجالات مختلفة من العلوم والهندسة، نقدم بعض هذه التطبيقات الرئيسة في الأجزاء التالية .

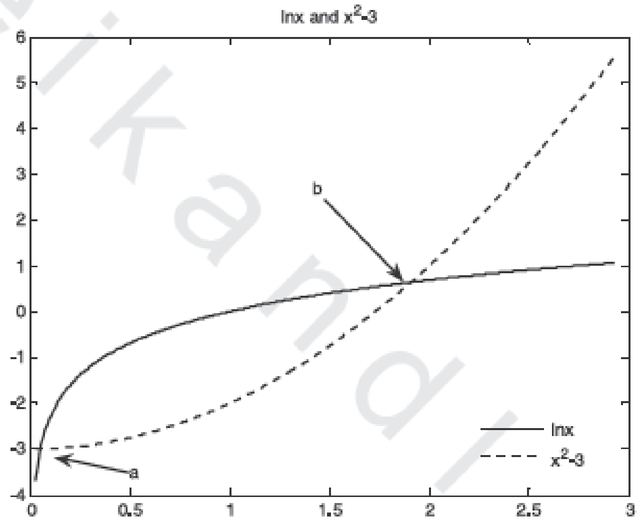
(٤,٤,١) مساحة مناطق محدودة بمنحنيات Area between curves

أحد التطبيقات الشائعة على التكامل هو حساب المساحة المحصورة ببياني دالتين متصلتين $f(x)$ و $g(x)$ ويتم استخراج صيغة التكامل $\int_a^b f(x)-g(x)dx$ من الرسم حيث يكون بيان الدالة $f(x)$ أعلى من بيان الدالة $g(x)$ وحدود التكامل يتم إيجادها من حدود المنطقة المطلوبة. ويتطلب أحياناً حساب نقاط التقاطع بين الدالتين.

المنطقة المحصورة بين بياني الدالتين $g(x) = x^2-3$ و $f(x) = \ln(x)$ يمكن حساب مساحتها بالتكامل $\int_a^b \ln x - x^2 + 3dx$. ويتم حساب حدود التكامل a و b من نقاط التقاطع عن طريق حل المعادلة $x^2-3 = \ln(x)$ وذلك باستخدام دالة *fzero* كما يمكن استخدام الرسم للتعرف على المنطقة المحصورة بين المنحنيين :

```
>> b=fzero('x.^2-3-log(x)',1.5)
b =1.9097
>> a=fzero('x.^2-3-log(x)',[.002 .5])
a =
   0.0499
>> x=a/2:.01:b+a/2;
>> plot(x,log(x),x,x.^2-3)
```

ليظهر لنا الشكل رقم (٤،٨) :



الشكل رقم (٤،٨). المساحة المحصورة بين منحنيين.

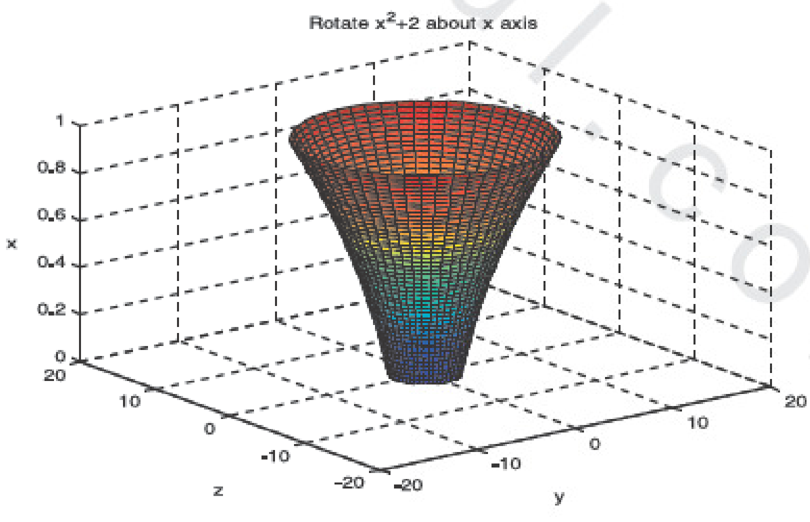
بإجراء التكامل على syms نحصل على المساحة المطلوبة :

```
>> syms x
>> A=int(log(x)-x^2+3,a,b);
>> double(A)
ans =
   2.7832
```

(٤,٤,٢) حجوم الأجسام الدورانية Solids of Revolution

حساب الحجم الناتج عن دوران منحنى دالة حول أحد المحورين x أو y يتطلب حساب التكامل. مثلاً لرسم الحجم الناتج عن دوران $y = x^2+2$ والمعرفة على الفترة [1,3] حول المحور x نستخدم الأمر *cylinder(y,50)* حيث 50 هي عدد النقاط على المنحنى، للحصول على مصفوفة النقاط ، نستخدم الأمر *cylinder(y,50)* حيث 50 هي عدد النقاط على المنحنى، للحصول على مصفوفة النقاط ، والأمر *surf* ينتج الرسم المطلوب (الشكل رقم ٤,٩)، ولكن دائماً أمر *cylinder* يعرّف محور الدوران بقياس من 0 إلى 1 . ثم نحسب حجم الجسم الدوراني بالأمر *int* :

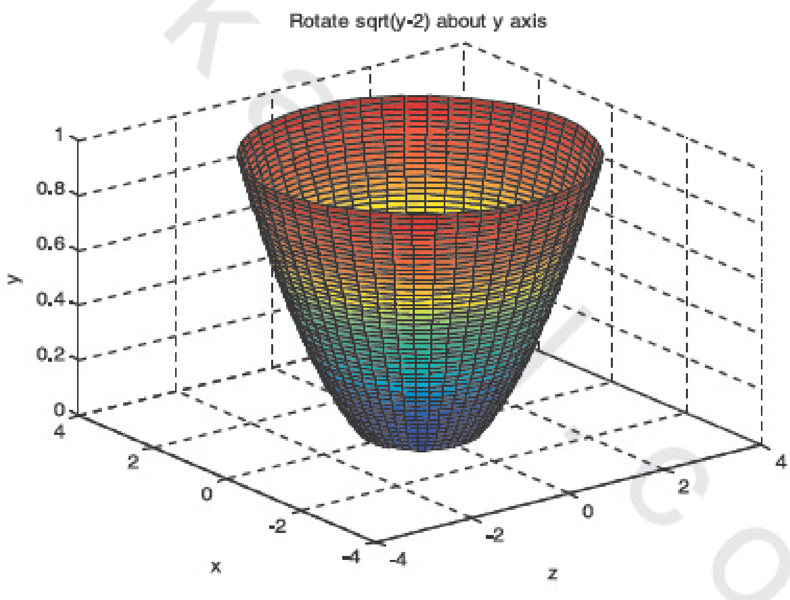
```
>> x=linspace(1,3,50);
>> y=x.^2+2;
>> [d,e,f]=cylinder(y,50);
>> surf(d,e,f);
>> syms x
>> int(x.^2+2,1,3)
ans =
38/3
```



الشكل رقم (٤,٩). الحجم الناتج عن دوران $y=x^2+2$ حول محور x .

وإذا كان الدوران حول المحور y فإننا نستخدم الأمر *cylinder(x,50)* ونكتب الدالة بدلالة المتغير y لتصبح $x=(y-2)^{1/2}$ معرفة على الفترة [3,11] ونحسب قيمة التكامل بالأمر *int* لنحصل على الحجم المطلوب (الشكل رقم ٤,١٠):

```
>> y=linspace(3,11,50);
>> xx=sqrt(y-2);
>> [a b c]=cylinder(xx,50);
>> surf(a,b,c);
>> int(sqrt(y-2),3,11)
ans = 52/3
```



الشكل رقم (٤,١٠). الحجم الناتج عن دوران (y-2)^.5 حول محور y .

(٤,٤,٣) طول القوس Arc length

طول منحنى الدالة Arc length $y = y(x)$ على الفترة $a \leq x \leq b$ يُعطى بالقاعدة:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

وفي معظم الحالات تستعمل طريقة تقريبية لحساب التكامل لصعوبة إيجاد التكامل الفعلي.

مثال رقم (٤,١٣)

لإيجاد طول قوس منحنى الدالة :

$y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ على الفترة $-1 \le x \le 2$

نستعمل تقريب للتفاضل بالأمر diff y/diffx ثم نستخدم الأمر *fcnchk* في الأمر *quad* وذلك لأن الدالة لم تكتب في m-file. وبذلك الأمر *quad* يعطي طول القوس المطلوب :

```
>> x=linspace(-1,2,400);
>>y=x.^3+3*x.^2-5*x+1;

>>dy=diff(y);
>>dx=diff(x);

>>ds=sqrt(dx.^2+dy.^2);
>> quad(fcnchk('sqrt(1+(3*x.^2+6*x-5).^2)'),-1,2,.0001)
ans =
  20.8314
```

(٤,٤,٤) مساحة سطح الدوران Surface of Revolution

يُنشأ سطح الدوران surface of revolution من دوران منحنى دالة متصلة حول مستقيم في المستوى. فإذا كان المنحنى $g(y)=x$ حيث إن g دالة ناعمة (الدالة ومشتقتها الأولى متصلة) على [c, d] ، فمساحة السطح الناتجة من دوران الجزء من المنحنى بين $y = c$ و $y = d$ حول محور x بافتراض أن $c \geq 0$ تحسب بالقاعدة :

$$S = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

مثال رقم (٤,١٤)

احسب مساحة السطح الناشئ عن دوران بيان الدالة $x= 2\ln y$ من $y=1$ إلـى $\sqrt{3}$ $y=\sqrt{3}$ حول محور x .

الحل :

نحسب التكامل :

$$S = 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} y\sqrt{1+\left(\frac{2}{y}\right)^2}\,dy$$

بالخطوات التالية لنحصل على السطح الناشئ عن دوران بيان الدالة :

```
>> syms y
>> s=int(y*(1+4/y^2)^(.5),1,sqrt(3))
s =
 1/2*7^(1/2)*3^(1/2)+4*log(2)-2*log(-3^(1/2)+7^(1/2))-1/2*5^(1/2)-
2*log(5^(1/2)+1)
```

```
>> S=2*pi*s
S =
 2*pi*(1/2*7^(1/2)*3^(1/2)+4*log(2)-2*log(-3^(1/2)+7^(1/2))-1/2*5^(1/2)-
2*log(5^(1/2)+1))


>> double(S)
ans =   11.1692
```

(٤,٤,٥) مساحة سطوح دوران المنحنيات الوسيطية

Area of Surfaces of Revolution of parametric curves

ليكن المنحنى $C: \ x = f(t), y = g(t) , a \le t \le b$ منحنى ناعماً ونفرض أن C لا يقاطع نفسه ، بأسلوب شبيه للسابق نجد أن مساحة سطح دوران المنحنى حول المحور x هي :

$$S = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

مثال رقم (٤,١٥)

احسب مساحة السطح الناشئ عن دوران المنحنى حول المحور x .

$C: \ 0 \le t \le \pi/3 \ , y=3\sin(t) \ , x= 3\cos(t)$

الحل :

نحسب التكامل $S = 2\pi \int_0^{pi/3} 3\sin(t)\sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t)}\ dt$ للحصول على مساحة السطح الناشئ عن دوران المنحنى :

```
>> syms t

>> s=int(3*sin(t)*(9*sin(t)^2+9*cos(t)^2)^(.5),0,pi/3)
 s =
 9/2

>> S=2*pi*s
S = 9*pi
```

(٤,٥) حساب التفاضل والتكامل متعدد المتغيرات Multivariable Calculus

لتعريف دالة معرفة في متغيرين مثل $f(x,y)=ye^{x^2+y^2}$ وعلى مجال مستطيل محدد في المستوى بالقيم $a\le x\le b, c\le y\le d$ فيمكن كتابة m-file :

```
function z=f(x,y)
z=y.*exp(x.^2+y.^2);
```

كما نستطيع تعريف دالة في متغيرين أيضاً عن طريق الأمر *inline* :

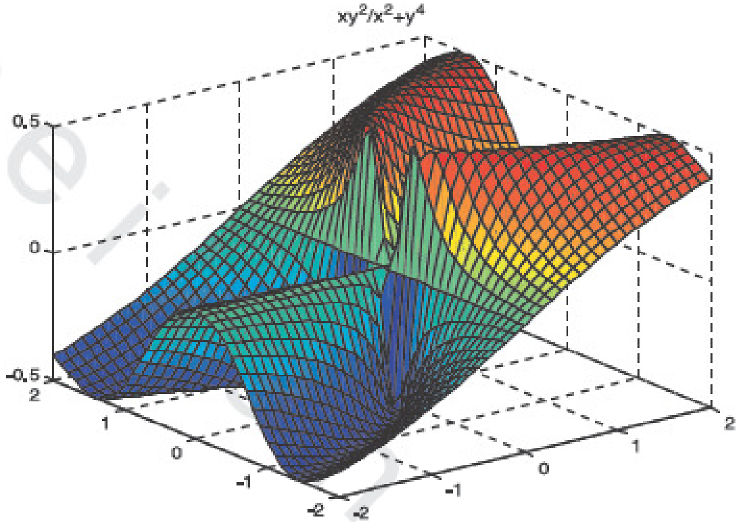
```
>> f=inline('y.*exp(x.^2+y.^2)','x','y')
f =
    Inline function:
    f(x,y) = y.*exp(x.^2+y.^2)
```

أما رسم دالة في متغيرين $z = f(x,y)$ فهو رسم لسطح في الفراغ، والخطوة الأولى لرسمه هي تحديد نقاط المجال بتكوين مصفوفة بالأمر *meshgrid* ثم استخدام الأمر *surf*.

مثال رقم (٤,١٦)

الدالة $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ يمكن رسمها مع أن الدالة غير متصلة عند (0,0) ولكن بإضافة eps نحصل على الشكل رقم (٤,١١):

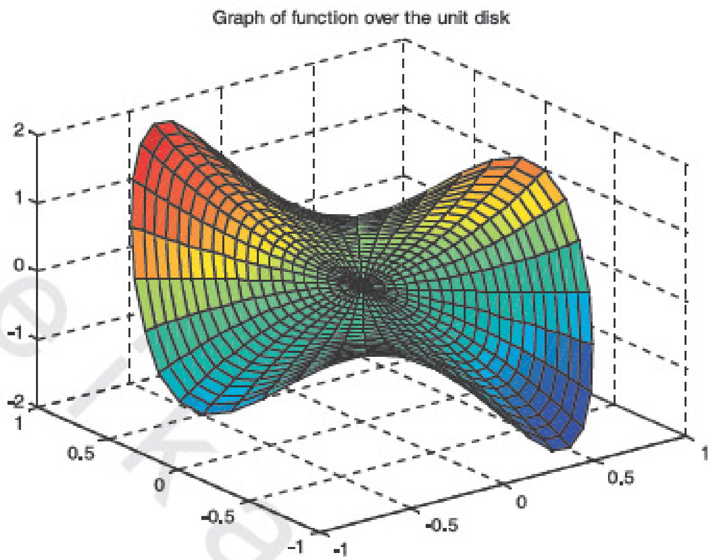
```
>> [x,y]=meshgrid(-2:.1:2);
>> surf(x,y,(x.*y.^2)./(x.^2+y.^4+eps))
```



الشكل رقم (٤،١١). دالة في متغيرين .

في بعض الحالات نريد أن نرسم دالة معرفة على مجال غير المستطيل مثلاً على قرص. ولإتمام ذلك يجب إنشاء مصفوفة المجال *meshgrid* بدلالة المحاور القطبية r , θ . فعلى سبيل المثال إدخال الخطوات التالية يتم بها رسم الدالة $g(r,\theta) = r \sin(\theta) + r^2\cos(3\theta)$ (الشكل رقم ٤،١٢)، والمعرفة على قرص الوحدة و بمركز في نقطة الأصل.

```
>> r=linspace(0,1,21);
>> theta=linspace(0,2*pi,41);
>> [rr,t]=meshgrid(r,theta);
>> x=rr.*cos(t);
>> y=rr.*sin(t);
>> z=rr.*sin(t)+rr.^2.*cos(3*t);
>> surf(x,y,z)
```

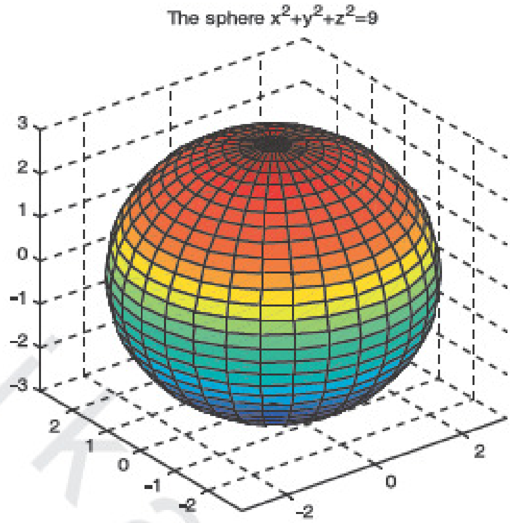


الشكل رقم (٤,١٢).دالة معرفة على قرص الوحدة.

(٤,٥,١) الأمر *sphere*

من ضمن الدوال الجاهزة في MATLAB دالة *sphere* التي تقوم بإنشاء مصفوفة النقاط للكرة مع تحديد عدد الخطوط الطولية والعرضية للسطح، فمثلاً لرسم الكرة الممثلة بالسطح $x^2+y^2+z^2 = 9$ وبتحديد عدد الخطوط 30 نقوم بالأوامر التالية (الشكل رقم ٤,١٣) :

```
>>[x,y,z]=sphere(30);
>> surf(3*x,3*y,3*z)
```



الشكل رقم (٤،١٣). رسم الكرة.

(٤،٥،٢) رسم المتجهة المماس لمنحنى في المستوى

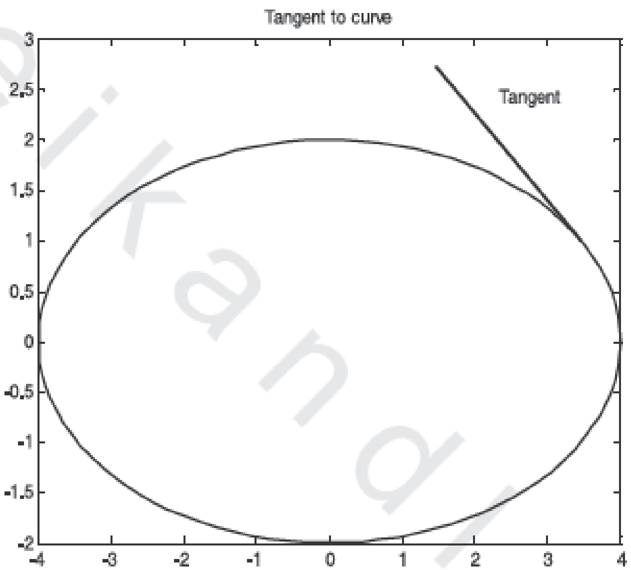
لرسم المتجهة المماس لمنحنى في المستوى Tangent to a plane curve نستخدم المحاور القطبية لرسم المنحنى *(4cost, 2sint)* ومتجه المماس *(-4sint+2cost)(π/6)* وندخل ما يلي:

```
>> t=linspace(0,2*pi);
>> x=4*cos(t);
>>y=2*sin(t);
>> xdriv=-4*sin(pi/6);
>>ydriv=2*cos(pi/6);
```

و معادلة المماس ترسم بالخطوات التالية لتنتج الشكل رقم (٤،١٤):

```
%line parameters
```

```
>> s=[0 1];
>> v1=4*cos(pi/6)+s.*xdriv;
>> v2=2*sin(pi/6)+s.*ydriv;
>> plot(x,y,v1,v2);
```



الشكل رقم (٤،١٤). المماس لمنحنى في المستوى.

(٤،٥،٣) رسم المستوى المماس لدالة

المستوى المماس Tangent plane للدالة $z=f(x,y)$ عند النقطة $(a,b,f(a,b))$ هو رسم للتقريب الخطي Linear approximation المعطى بالمعادلة :

$$L(x,y) = f(a,b)+(x-a)f_x(a,b)+(y-b)f_y(a,b)$$

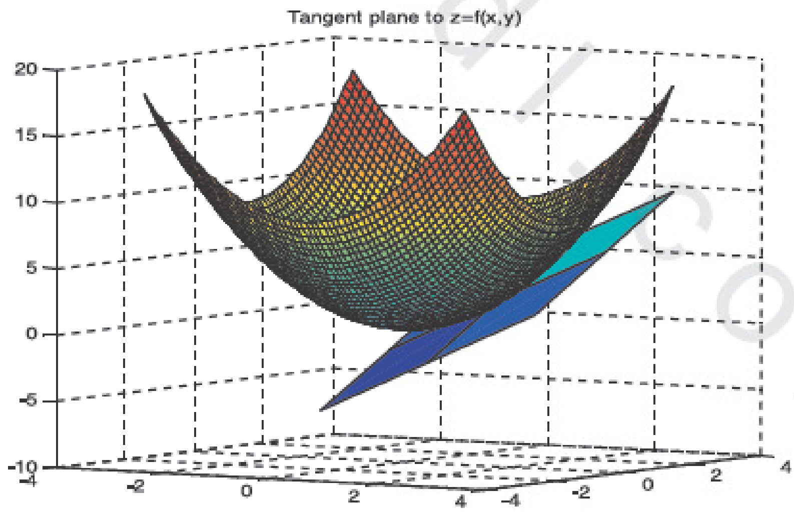
فمثلاً لرسم الدالة $z = x^2+y^2$ على الفترة $-3 \le x$ و $y \le 3$ وجزء من المستوى المماس عند النقطة (1,1,2) يصبح التقريب الخطي عند (1,1) ممثلاً بالمعادلة :

$$L(x,y)=f(1,1)+(x-1)f_x(1,1)+(y-1)f_y(1,1) = 2+2(x-1)+2(y-1)$$

ونستخدم أداة الدوران *rotate* في نافذة الرسم للحصول على أفضل زاوية لعرض الرسم (الشكل رقم ٤,١٥) ، والأمر *hold on* لعرض الدالة و المستوى المماس على نفس الرسم :

```
>>[x,y]=meshgrid(-3:.1:3);
>>surf(x,y,x.^2+y.^2);hold on
>>[u,v]=meshgrid(-2:2:2);

>>L=2+2*u+2*v;
>>surf(u+1,v+1,L);hold off
```

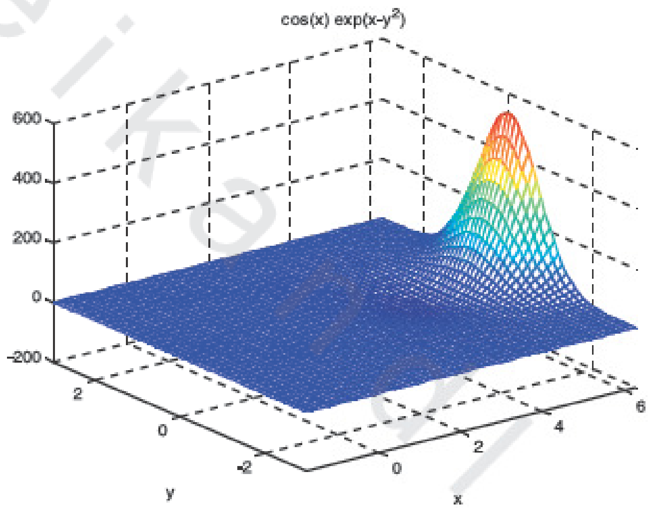


الشكل رقم (٤,١٥). المستوى المماس للدالة $z=x^2+y^2$.

(٤,٥,٤) أوامر الرسم في البيئة الرمزية

توجد أوامر في *syms* لرسم دوال في متغيرين مثل *ezsurf, ezmesh ,ezcontour*. فعلى سبيل المثال الدالة $exp(x-y^2)cos(x)$ ترسم بالأمر ezmesh (الشكل رقم ٤,١٦) بإدخال الأوامر التالية :

```
>> syms x y
>> f=cos(x)*exp(x-y^2);
>> ezmesh(f)
```



الشكل رقم (٤,١٦). رسم دالة باستخدام ezmesh .

نعرض في الجزء التالي بعض التطبيقات الرياضية المختلفة في حساب التفاضل والتكامل في عدة متغيرات.

(٤,٥,٥) حل نظام معادلتين في متغيرين

لإيجاد حل نظام معادلتين في متغيرين :

$$f(x,y)=0$$
$$g(x,y)=0$$

نستخدم الأمر *solve* في *syms* .

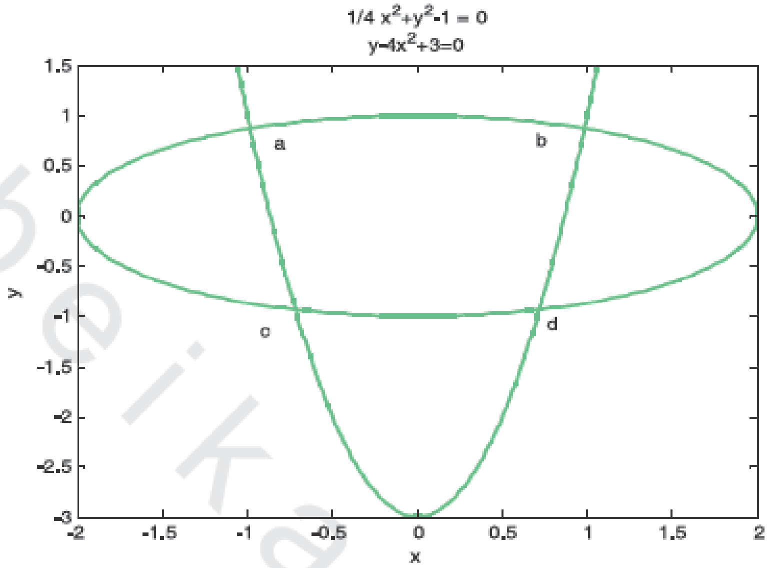
مثال رقم (٤,١٧)

نفرض أن لدينا نظاماً :

$$f(x,y) = y-4x^2+3$$
$$g(x,y) = x^2/4+y^2-1$$

عند رسم المنحنيات $f(x,y) = 0$ و $g(x,y) = 0$ نلاحظ وجود أربعة جذور عند تقاطع المنحنيين a,b,c,d [9] (الشكل رقم ٤,١٧). ولحساب الجذور الأربعة نُدخل الآتي :

```
>> syms x y
>> f=y-4*x^2+3;
>> g=.25*x^2+y^2-1;
>> [xx,yy]=solve(f,g)
 xx =
  -1/16*(190+14*17^(1/2))^(1/2)
   1/16*(190+14*17^(1/2))^(1/2)
 -1/16*(190-14*17^(1/2))^(1/2)
   1/16*(190-14*17^(1/2))^(1/2)
 yy =
  -1/32+7/32*17^(1/2)
 -1/32+7/32*17^(1/2)
 -1/32-7/32*17^(1/2)
 -1/32-7/32*17^(1/2)
>> double([xx yy])
ans =
  -0.9837    0.8707
   0.9837    0.8707
  -0.7188   -0.9332
   0.7188   -0.9332
```



الشكل رقم (٤,١٧). رسم نظام دالتين في متغيرين.

(٤,٥,٦) التفاضل في عدة متغيرات

حساب المشتقات الجزئية f_x, f_{xx}, f_{xy} للدالة $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ على syms يتم بالأمر *diff(f,'x')* مع تحديد المتغير ودرجة الاشتقاق.

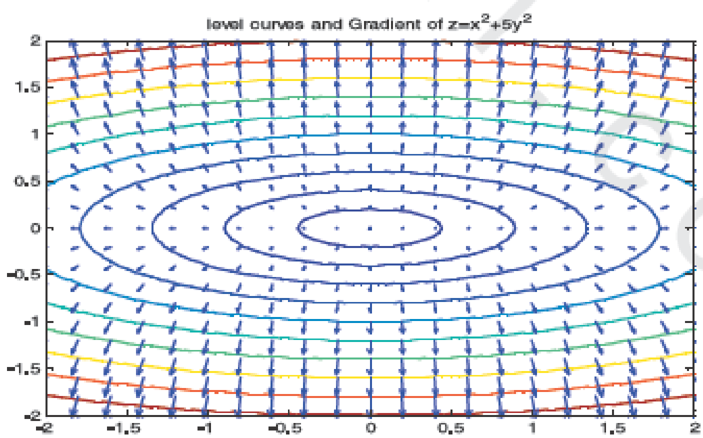
```
>> syms x y
>> f=sin(x^2+y^2);fx=diff(f,'x')
fx =
 2*cos(x^2+y^2)*x
 >> fxx=diff(f,'x',2)
fxx =
 -4*sin(x^2+y^2)*x^2+2*cos(x^2+y^2)
>> fxy=diff(fx,'y')
 fxy =
 -4*sin(x^2+y^2)*y*x
```

حقل المتجهات المعرّف على مجال الدالة f(x,y) يعرف بالتدرج Gradient $gradf(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$ أو $\nabla f(x,y)$ ، وهو عند كل نقطة يتعامد مع المنحنى السوي لـ f level curves عند تلك النقطة. MATLAB يساعد في رسم تدرج حقل المتجهات Gradient vector field و المنحنيات السوية للدالة.

مثال رقم (٤,١٨)

بالنسبة للدالة $f(x,y) = x^2+5y^2$ على $-2 \le x \ , y \le 2$ يمكن رسم المنحنيات السوية و رسم التدرج $\nabla f(x,y) = \langle 2x, 10y \rangle$ (الشكل رقم ٤,١٨) بالأوامر quiver و contour .

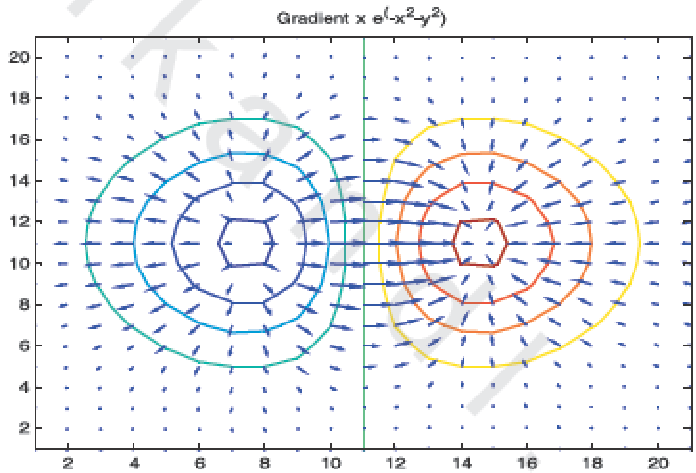
```
>> L=5*[0:.2:2].^2;
>> [x,y]=meshgrid(-2:.05:2);
>> [c,h]=contour(x,y,x.^2+5*y.^2,L);hold on
>> [x,y]=meshgrid(-2:.2:2);
>> dx=2*x;dy=10*y;
>> quiver(x,y,dx,dy)
```



الشكل رقم (٤,١٨). المنحنيات السوية و التدرج للدالة $z=x^2+5y^2$.

يمكن تقريب التدرج $\nabla f(x,y)$ بالأمر *gradient* . نقوم بتقدير التدرج للدالة $f(x,y)=xe^{-x^2-y^2}$ بعد تعريف مصفوفة المجال $-2\leq x\leq 2$ و $-2\leq y\leq 2$ باستعمال *meshgrid* ومن ثم نرسم (الشكل رقم ٤.١٩) باستخدام الأوامر quiver و contour :

```
>> [x,y] = meshgrid(-2:.2:2, -2:.2:2);
    z = x .* exp(-x.^2 - y.^2);
[px,py] = gradient(z,.2,.2);
 contour(z),hold on, quiver(px,py), hold off
```



الشكل رقم (٤,١٩). التدرج للدالة $xe^{-x^2-y^2}$.

(٤,٥,٧) القيمة العظمى والصغرى

رسم الدالة في متغيرين يساعد في تقدير القيمة العظمى والصغرى للدالة Maxima, Minima في مجال محدود ومغلق. الأمران max ، min يُستخدمان في حساب قيم ومكان هذه القيم بدقة على حسب حجم التقسيم المستخدم. فمثلاً الدالة

$f(x,y)=sin(x)+sin(y)+sin(x+y)$ على المنطقة $x \geq 0,\ y \leq \pi/4$ توجد لها قيمة عظمى عند $(\pi/4 , \pi/4)$ وقيمة صغرى عند $(-\pi/4 , -\pi/4)$.

نستخدم دالة *meshgrid* لتحديد مصفوفة المجال وتعريف الدالة :

```
>> [x,y]=meshgrid(-pi/4:pi/80:pi/4);
>> z=sin(x)+sin(y)+sin(x+y);
>> [m,ind]=max(z(1:prod(size(z))));
```

أما دالة *[m,ind] = max* فتساعد على تحديد القيمة العظمى وتخزنها في *m* وتخزن موقع القيمة العظمى في *ind* :

```
>> m
m =
   2.4142
>> num2str(x(ind))
```

ولتحويل الموقع *ind* إلى قيمة في مجال الدالـــة نســتخدم *num2str* والناتج $(\pi/4 , \pi/4)$ حيث إن $\pi/4 = 0.7854$:

```
ans =
0.7854
>> num2str(y(ind))
ans =
0.7854
```

نكرر الخطوات لإيجاد القيمة الصغرى وذلك باستخدام *min* :

```
>> [mi,ind]=min(z(1:prod(size(z))));
>> mi
mi =
  -2.4142
>> num2str(y(ind))
ans =
-0.7854
>> num2str(x(ind))
ans =
-0.7854
```

(٤,٥,٨) تكامل متعدد Multiple Integral

الأمر *dbquad (f ,a,b,c,d)* يعطي قيمة عددية للتكامل الثنائي $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$ حيث إن *f(x,y)* باستخدام الأمر *fcnchk* ودائما يبدأ *dbquad* بحساب التكامل بالنسبة لـ *x* من a إلى b ثم بالنسبة لـ *y* من c إلى d.

مثال رقم (٤,١٩)

احسب التكامل التالي :

$$\int_0^2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2y^2+1}}\,dxdy$$

```
>> in=dblquad(fcnchk('1./sqrt(x.^2+2*y.^2+1)'),0,1,0,2)
in =
   1.1597
```

(٤,٥,٨,١) دالة int الرمزية للتكامل المتعدد

طريقة أخرى لحساب التكامل الثنائي هي باستخدام دالة *int* في البيئة الرمزية *syms* على مرحلتين، الأولى بالنسبة لـ *x* والناتج يُجرى له تكاملاً بالنسبة للمتغير *y* لنحصل في النهاية على القيمة التقديرية للتكامل :

```
>> syms x y real
>> in=int(1./sqrt(x.^2+2*y.^2+1),x,0,1)
in =
asinh(1/(2*y^2+1)^(1/2))
>> inn=int(in,y,0,2)
inn =
 -2*log(3)+2*log(1+2^(1/2)*5^(1/2))-1/2*2^(1/2)*log(-2+5^(1/2))-
1/2*2^(1/2)*atan(2/5*5^(1/2))
>> double(inn)
ans =
   1.1597
```

مثال رقم (٤,٢٠)

لحساب التكامل الثلاثي للدالة $f(x,y,z)= z\,x^3y^2$ على الفترة
$R=\{0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy,\ 0 \le x \le 1\}$.

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz\,dy\,dx$$

نكرر الأمر *int* ثلاث مرات ، مع تحديد متغير التكامل و حدود التكامل في كل جزء، لنحصل على النتيجة المطلوبة.

```
>> syms x y z real
>> ff=(x^3)*(y^2)*z

ff =

x^3*y^2*z
>> int(int(int(ff,z,0,x*y),y,0,x),0,1)

ans =
 1/110
```

(٤,٥,٨,٢) تطبيقات على التكامل المتعدد

التطبيق (١)

لحساب المساحة لسطح ما S (Surface area) حيث S هو المنحنى لدالة $z = f(x,y)$، نحتاج الى التحويل $r(x,y)=\langle x,y,f(x,y)\rangle$ ، و المساحة للسطح S تأخذ الصيغة .

$$\iint \sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}\,dxdy$$

ولتقدير المساحة السطحية لمجسّم القطع المكافئ في البعد الثالث Paraboloid معطى بالمعادلة $z = x^2+y^2$ ومعّرف على المجال $D = [0,1]x[0,1]$ نستعمل الأمر

dblquad والتكامل الذي يمثل المساحة السطحية هو:

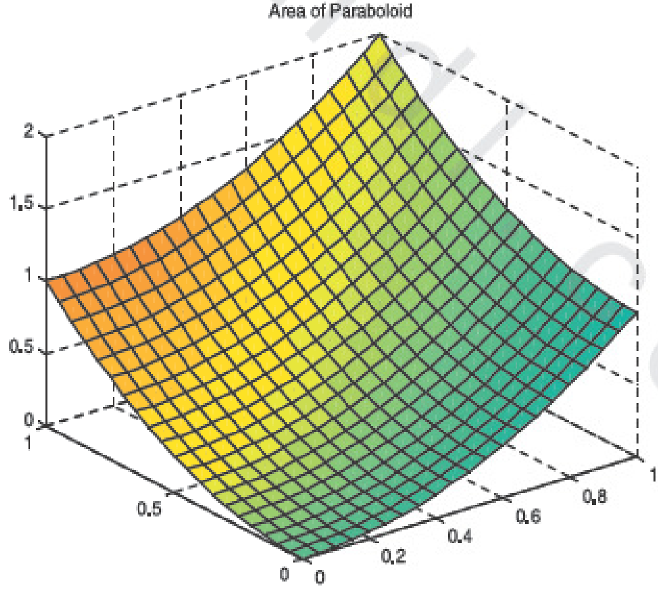
$$\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy \ .$$

ويمكننا MATLAB من حساب مساحته بالأوامر التالية:

```
>> area=dblquad(fcnchk('sqrt(1+4*x.^2+4*y.^2)'),0,1,0,1);
>> area
area =
   1.8616
```

ونرسم السطح بالأوامر التالية (الشكل رقم ٤،٢٠):

```
>> [x,y]=meshgrid(0:.05:1);
>> surfl(x,y,x.^2+y.^2);
```



الشكل رقم (٤،٢٠). المساحة السطحية لمجسّم القطع المكافئ.

التطبيق (٢)

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين القطبيين :

$$r = 6$$
$$r = 3\sec\theta \quad for \quad x \geq 3$$

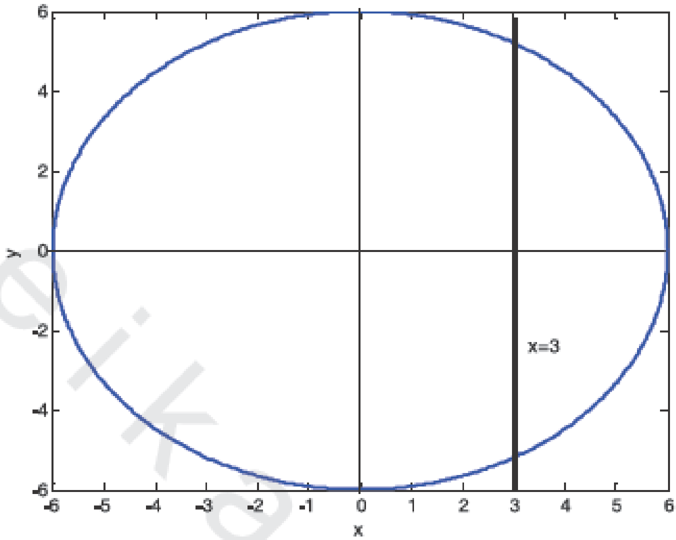
حيث إن $r = 6$ معادلة دائرة، وقيمة نصف القطر هي 6 ومركزها نقطة الأصل. أما $r = 3sec\ \theta$ فهي معادلة خط مستقيم $x=3$. نحتاج نقطة التقاطع ونجدها بدالة *solve* لحل المعادلة $3sec\ \theta - 6 = 0$.

```
>> syms t r real
>> solve(3*sec(t)-6)
ans =
1/3*pi
```

ثم المساحة المطلوبة تقدر بالتكامل $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta \int_{3\sec\theta}^{6} r dr$ و نستخدم الأمر *int* في *syms* للحصول على التكامل:

```
>> c=int(r,3*sec(t),6)
 c =
 18-9/2*sec(t)^2
>> int(c,-pi/3,pi/3)
ans =
12*pi-9*3^(1/2)
```

الشكل رقم (٤،٢١). يوضح المنطقة المطلوب إيجاد تكاملها وهي المساحة المحصورة بين المنحنيين.



الشكل رقم (٤,٢١). المساحة المحصورة بين المنحنيين.

(٤,٦) تمارين

١- قدر المجموع $\sum_{1}^{\infty} i^{-4}$.

٢- احسب أ) $\lim_{x \to 0+} x^{\sqrt{x}}$

ب) $\lim_{x \to \infty +} x \sin(\frac{1}{x})$

٣- استخدم برنامج *simpsons* لحساب التكاملين على ٣٢ فترة، مع العلم أن القيمة الحقيقية للتكامل هي C(1)=0.779834 و S(1)=0.4382591 .

$$S(1)=\int_0^1 \cos(\pi t^2/2)\,dt$$
$$C(1)=\int_0^1 \sin(\pi t^2/2)\,dt$$

٤- عدل برنامج سمبسون المركب ليقدر تكاملاً متعدداً ومن ثم احسب التكامل التالي باستخدام 64 تجزئة .

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{-\pi}^{\pi} x^4 y^4\,dx$$

٥- استخدم دالة *diffgen* لإيجاد المشتقة الأولى والثانية للدالة $x^2\cos x$ عندما $x = 1$ استخدم $h= 0.1$ ثم عند $h = 0.01$.

٦- أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالتين $y = \exp(x)$, $y = \ln(x)$ بين $x = 2$ و$x = 5$.

٧- احسب حجم الجسم الناتج عن دوران $y = x^2-6$ حول محور y عند $y = 0$ و $y = 10$.

٨- ارسم الدالة $z = \sin(x^2+y^2)$ والمستوى المماس عند النقطة (1, 1, sin2) .

٩- قرب التكامل:

أ) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ د) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$

ب) $\int_1^\infty x^{-3/2}\sin(1/x)\,dx$ هـ) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$

جـ) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ و) $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$