الفصل السادس

متسلسلة تايلور
Taylor Series

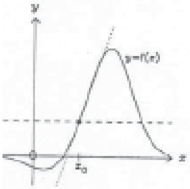
(١ , ٦) تقريب الدوال
Approximating Functions

عند دراستنا لدوال معقدة يكون من المناسب تقريبها إلى دوال أبسط. ومع أن الدوال البسيطة لا تقدم لنا وصفاً دقيقاً ، إلاّ أنها في الغالب تحتوي على معلومات كافية لتحليل سلوك الدالة الأصلية. من المؤكد وجود العديد من التقريبات التي يمكن استخدامها لتقريب دالة معطاة وأفضلها هو التقريب الذي يحتوي على معلومات دقيقة لسلوك الدالة. في هذا الفصل نركز على التقريب بواسطة متسلسلة تايلور وهو تقريب مناسب خاصة إذا كان اهتمامنا مُنصَباً على سلوك الدالة في جوار نقطة معطاة.

لنفرض أن لدينا منحنى دالة $y = f(x)$. إن أبسط تقريب لهذه الدالة هو المستقيم الأفقي $y = a_0$ حيث a_0 ثابت. أي إن $f(x_0) = a_0$ (في الحقيقة $f(x) = a_0$ لأي x)[١]. وتقريب أفضل هو المستقيم المائل $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ حيث $a_1 \neq 0$.

---

(١)



وبالاستمرار على هذه المنوال، من الممكن إضافة حد تربيعي $a_2(x-x_0)^2$[٢]، ثم حد تكعيبي $a_3(x-x_0)^3$ وهكذا. إذن، نخلص إلى القول إنه بالإمكان تقريب الدالة $f(x)$ حول النقطة x_0 باستخدام كثيرة الحدود

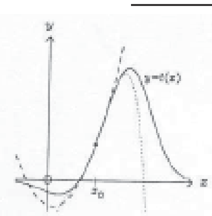
$$f(x) \approx a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \quad (٦,١)$$

وهذه هي الفكرة وراء التقريب بمتسلسلة تايلور. قبل الشروع في حساب المعاملات نلفت النظر أنه عند استخدامنا للتقريب (٦,١) فإن إجراء الحسابات وإيجاد المُشتقات والتكاملات للطرف الأيمن أسهل منه للطرف الأيسر.

(٦,٢) إيجاد متسلسلة تايلور
Derivation of the Taylor Series

سنرى بعد قليل أن التقريب (٦,١) يصبح مساواة وذلك بعد إضافة عدد كاف من الحدود وجعل القيمة المطلقة للمقدار $x-x_0$ صغيرة. لاحظ أنه عندما يكون $x=x_0$ فإن $f(x_0)=a_0$ لأن باقي حدود الطرف الأيمن تساوي صفراً. الآن، بإيجاد المُشتقة الأولى لطرفي الصيغة (٦,١) ووضع $x=x_0$ نجد أن $f'(x_0)=a_1$. وبالاستمرار نجد أن $f''(x_0)=2a_2$، $f'''(x_0)=6a_3$، وبصورة عامة، مُشتقة $f(x)$ النونية عند $x=x_0$ هي $f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n$. إذن، متسلسلة تايلور هي

(٢)



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (٦,٢)$$

وإذا وضعنا $\Delta = x - x_0$ فتأخذ المتسلسلة الصورة التالية

$$f(x + \Delta) = f(x_0) + \Delta f'(x_0) + \frac{\Delta^2}{2!} f''(x_0) + \frac{\Delta^3}{3!} f'''(x_0) + \cdots \qquad (٦,٣)$$

تُسمى الحالة الخاصة من المساواة (٦,٣) عندما $x_0 = 0$ متسلسلة ماكلورين.

(٦,٣) بعض الأمثلة الشائعة

Some Common Examples

كمثال على حساب متسلسلة تايلور ، دعنا نقوم بحساب متسلسلة ماكلورين للدالة $\sin x$. أفضل طريقة للقيام بذلك هو كتابة عمودين ، العمود الأول يحوي الدالة ومُشتقاتها والعمود الثاني يحوي القيم المقابلة عندما $x = x_0$ ($x = 0$ في هذا المثال)

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \end{array}$$

ومن السهولة إكمال هذا الجدول بملاحظة أن المشتقة الرابعة هي $\sin x$ وعليه فالدورة تكرر نفسها. بالتعويض عن قيم $f^{(n)}(0)$ في المساواة (٦,٢) نحصل على

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (٦,٤)$$

من الممكن الآن استخدام هذه المتسلسلة لحساب قيمة $sin\ x$ لأي زاوية دون اللجوء إلى المثلثات ، وللحصول على جواب أقرب إلى الحقيقة فما علينا إلاّ أن نزيد عدد حدود الطرف الأيمن. لاحظ أن التقريب في المساواة (٣ , ٧) يتبع مباشرة عندما يكون $|x| < 1$ حيث x مقاسة بالراديان لأن قُوى x تقترب سريعاً من الصفر[٣].

بصورة مماثلة لما سبق نستطيع إيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = \cos x$ لنجد

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (٦ , ٥)$$

لاحظ أن بإمكاننا الحصول على (٦ , ٥) بأخذ مُشتقة (٦ , ٤) حداً حداً أو تكاملها حداً حداً.

أخيراً ، إنه لمن اليسير رؤية أن متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = e^x$ تأخذ الصورة[٤]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (٦ , ٦)$$

ومرة أُخرى ، باشتقاق (٦ , ٦) حداً حداً ، نجد أن مُشتقة الدالة الأسية هي الدالة نفسها.

---

(٣)
$$sin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} + \frac{1}{3840} - \cdots$$

(٤)
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots$$

(٦ , ٤) نصف قطر التقارب
The Radius of Convergence

تعود أهمية متسلسلة تايلور إلى إمكانية استخدامها لتقريب أي دالة باستخدام كثيرة حدود درجتها صغيرة حول نقطة معينة. لجعل هذا التقريب أكثر دقة ، ماعلينا إلاَّ إضافة المزيد من الحدود؛ لأن الحدود المحذوفة من المجموع تصبح صغيرة مع ازدياد درجة كثيرة الحدود مما يجعلها تؤول إلى الصفر. إن ذلك صحيحاً طالما $|x - x_0| < R$ حيث R عدد يُسمى نصف قُطر التقارب. ولذا فإن متسلسلة تايلور لا تُستخدم خارج هذا المجال. يمكن التعبير عن هذا التقارب رياضياً بالقول إن خارج قسمة الحدود المتجاورة في المتسلسلة (حد ذو درجة أعلى على حد ذو درجة أدنى) يكون أقل من ١ عند الحدود العليا للمتسلسلة. لاحظ أن $R \to \infty$ لجميع المتسلسلات (٦ , ٤) و (٦ , ٥) و (٦ , ٦)، ولذا فهذه المتسلسلات صحيحة لكل قيم x ، ولكن نصف قطر متسلسلة تايلور للدالة $f(x) = (1 + x)^n$ صغير نسبياً لأن

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (٦ , ٧)$$

حيث $|x| < 1$. لاحظ أن هذا ماهو إلاَّ تعميم لمفكوك ذات الحدين الذي رأيناه في البند (٥ , ١) ، حيث لا يُشترط أن يكون n عدداً صحيحاً موجباً. فإذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن الطرف الأيمن من المساواة (٦ , ٧) يصبح صفراً بعد عدد منته من الحدود ومن ثم نحصل على المساواة (١١ , ١) وهذا صحيحاً لكل قيم x. من متسلسلات تايلور التي تُستخدم كثيراً المتسلسلة

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (٦ , ٨)$$

والتي تتقارب في الفترة $|x| < 1$.

(٦,٥) قاعدة لوبيتال

L'Hospital's Rule

من الاستخدامات المهمة لمتسلسلة تايلور أنها تساعدنا على حساب نهايات صعبة، على سبيل المثال ، نهاية $\frac{\sin x}{x}$ عندما $x = 0$؛ لأن حساب مثل هذه النهاية يتطلب حساب حاصل ضرب مالانهاية بالعدد 0 ، ولكننا نستطيع الحصول على هذه النهاية بدراسة سلوك البسط والمقام عندما x تؤول إلى الصفر. ويمكن إنجاز ذلك بسهولة باستخدام متسلسلة تايلور حول $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x)-(x^3/6)+\cdots}{x} = \lim_{x\to 0}(1-(x^2/6)+\cdots) = 1$$

وبصورة عامة ، بإيجاد متسلسلة تايلور لبسط ومقام الدالة الكسرية $\frac{h(x)}{g(x)}$ حول $x = a$ نستطيع وبسهولة التوصل إلى أن[٥]

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{g'(x)} \qquad (٦,٩)$$

إذا كان $h(a) = g(a) = 0$. وإذا كان $h'(a) = g'(a) = 0$ فإن

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{h''(x)}{g''(x)}$$

وهكذا إلى أن نحصل على نهاية مُعَرَّفة. تعرف هذه النتيجة بقاعدة لوبيتال.

---

(٥)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

(٦ , ٦) خوارزمية نيوتن ورافسون
Newton – Raphson Algorithm

من الممكن استخدام متسلسلة تايلور لإيجاد جذور تقريبية (عددياً) للمعادلات. أي إيجاد x التي يحقق $f(x) = 0$ ، وعلى الأخص للدوال التي يَصعُب إيجاد جذورها جبرياً. ولانجاز ذلك نبدأ بتقريب $x = x_0$ بحيث يكون $f(x_0) \approx 0$ ، ثم نستخدم هذا التقريب للحصول على تقريب أفضل ، يتم ذلك بإيجاد متسلسلة تايلور للدالة $f(x)$ حول $x = x_0$ وهي

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots = 0$$

وبفرض أن التقريب البدائي مناسب بحيث تكون الحدود التي درجتها أكبر من أو تساوي 2 صغيرة جداً مقارنة مع حدَّي الدرجة الأولى والثابت ، وبهذا نحصل على

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (٦ , ١٠)$$

أي أن قيمتا الدالة ومُشتقتها الأولى عند x_0 تجد لنا تقريباً أفضل لجذر الدالة.

نستطيع الاستمرار بأخذ هذه القيمة كتقريب جديد للجذر والتكرار إلى أن نصل إلى مرحلة يكون الفرق بين x و x_0 صغير جداً. تُسمى طريقة التكرار هذه لحل المعادلة $f(x) = 0$ بخوارزمية نيوتن ورافسون.

تمارين

(٦,١) جد متسلسلة تايلور لكل من $\cos x$ ، e^x ، $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ عند قيمة صغيرة للمتغير x.

(٦,٢) أثبت صيغة ذات الحدين (٦,٧) بوضع $\sqrt{c}=a(1+b)^{1/2}$ حيث a و b ثابتان مناسبان. احسب $\sqrt{8}$ و $\sqrt{17}$ لأربع مراتب عشرية.

(٦,٣) جد متسلسلة تايلور لكل من $ln(1+x)$ و $ln(1-x)$ ثم استنتج متسلسلة القوة للدالة $ln[(1+x)/(1-x)]$.

(٦,٤) احسب النهايات التالية

(١) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(ax)}{x}$

(٢) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\ x-1}{x}$

(٣) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ cos\ x+x\ sin\ x-2}{x^4}$

(٦,٥) إذا علمت أن للمعادلة $x^3+3x^2+6x-3=0$ جذراً حقيقياً واحداً فقط فجد قيمته مقرباً لثلاث مراتب عشرية مستخدماً خوارزمية نيوتن ورافسون.