الفصل الخامس

التكامل

Integration

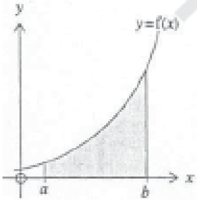
(١ , ٥) المساحات والتكامل

Areas & Integrals

انصَب اهتمامنا في الفصل الرابع على دراسة ميل المنحنى $y = f(x)$ ، أي دراسة معدل التغير بين كميتين. في هذا الفصل ، سنُبين كيفية إيجاد مساحة منطقة تحت بيان منحنى ومتوسط دالة على فترة معينة كتطبيقات على مفهوم التكامل.

لغرض تعريف التكامل ، نفرض أن لدينا منطقة محدودة بالمستقيمات $x = a$ ، $x = b$ ، $y = 0$ والمنحنى $y = f(x)$[(١)]. لإيجاد مساحة هذه المنطقة نقوم بتقسيمها إلى شرائح رأسية صغيرة ثم نقوم بحساب مجموع مساحاتها كمستطيلات لنحصل على مساحة تقريبية للمنطقة. فإذا قسّمنا الفترة من a إلى b إلى N من الفترات الجزئية المتساوية فإن عرض كل من المستطيلات يكون $\delta x = \frac{b-a}{N}$. كما أن طول كل من هذه المستطيلات يساوي قيمة الدالة $f(x_j)$ حيث x_j منتصف الفترة الجزئية j. ولذا فإن مساحة كل من المستطيلات تساوي $f(x_j)\delta x$ حيث $1 \le j \le N$ ، $x_1 = a + \frac{\delta x}{2}$ ، $x_N = b - \frac{\delta x}{2}$. وعندما $N \longrightarrow \infty$

(١)



فإن $\delta x \to 0$ ومن ثم فإن تقريب المساحة للمنطقة المحصورة يكون أكثر دقة. إن هذه النهاية هي تعريف التكامل(٢)

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j) \delta x \qquad (٥,١)$$

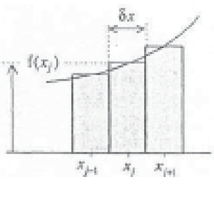
حيث $\int_a^b dx$ يعني التكامل من a إلى b بالنسبة إلى x. لاحظ أن استخدامنا لمفهوم المساحة في تعريفنا للتكامل ليس دقيقاً حيث من الممكن أن يكون التكامل سالباً؛ لأن $f(x_j)$ تكون سالبة في الحالة التي يكون فيها منحنى الدالة $y = f(x)$ تحت محور x (من الممكن أن يكون $\delta x < 0$ أيضاً إذا كان $b < a$). قبل أن نبين كيفية حساب التكاملات دعنا نقدم المثال التالي:

لنفرض أن سيارة تسير على خط مستقيم بسرعة ثابتة v_o لفترة زمنية t_o. عندئذ، تكون المسافة المقطوعة تساوي $v_o t_o$. إذا كانت سرعة السيارة متغيرة ولتكن $v(t)$ فما هي المسافة المقطوعة ؟ ولإيجاد المسافة المقطوعة نقوم بتقسيم المسافة إلى فترات جزئية صغيرة δt حيث يمكن اعتبار السرعة على هذه الفترات الجزئية ثابتة. عندئذ ، المسافة المقطوعة هي مجموع المسافات $v(t)\delta t$. أي تكامل $v(t)$ بالنسبة إلى t من $t = 0$ إلى $t = t_o$

$$\text{المسافة المقطوعة} \qquad \int_0^{t_0} v(t)\, dt = \qquad (٥,٢)$$

---

(٢)



القيم السالبة للسرعة $v(t)$ هي قيم السرعة عندما تسير السيارة بعكس الاتجاه، ومن ثم فإننا نتحدث هنا عن سرعة اتجاهية بدلاً من سرعة ثابتة مما يؤدي إلى تقليل المسافة المقطوعة.

يلعب التكامل أيضاً دوراً مهماً في حساب متوسط السرعة وهو خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الكلي اللازم لقطع هذه المسافة[٣]. أي أن السرعة الثابتة $\langle v \rangle$ أو $\bar{v}$ اللازمة لإنجاز رحلة مكافئة تساوي خارج قسمة طرفي المساواة (٥ , ٢) على t_o.

(٥ , ٢) التكامل والإشتقاق

Integrals & Derivatives

على الرغم من تعريف التكامل على أنه نهاية مجموع ، إلا أنه نادراً ما تُستخدم المساواة (٥ , ١) لحساب التكامل، وعوضاً عن ذلك فإن حسابه يتم على أساس أنه العملية العكسية للإشتقاق وهذا يوضحه مثال الحركة المُقدم أعلاه حيث المسافة المقطوعة هي تكامل السرعة وأن السرعة هي معدل التغيُر في المسافة (المُشتقة). وبصورة عامة إذا كان $G(x)$ هي تكامل الدالة $y = f(x)$ من نقطة الأصل إلى نقطة ما على محور السينات. أي أن

$$\int_0^x y\,dx = G(x) \qquad (٥ , ٣)$$

فإن مشتقة $G(x)$ تساوي $y = f(x)$. ولرؤية ذلك ، لاحظ أن التكامل (٥ , ٣) والذي يمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى من 0 إلى x يعتمد على x ومن ثم فهو يتغير

(٣) $$\bar{y} = \langle y \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx$$

بتغيُر x فإذا كان التغيُر في x يساوي δx فينتُج عن ذلك تغيُر في قيمته التقريبية هو $f(x)\delta x$(٤).

أي أن $G(x+\delta x) \approx G(x) + f(x)\delta x$. وعند حساب النهاية عندما $\delta x \longrightarrow 0$ نحصل استناداً إلى المساواة (١ , ٤) على

$$f(x) = \lim_{\delta x \longrightarrow 0} \left[\frac{G(x+\delta x) - G(x)}{\delta x}\right] = \frac{dG}{dx} \qquad (٥ , ٤)$$

على سبيل المثال، تكامل $\cos x$ هو $\sin x$ لأن مُشتقة $\sin x$ هي $\cos x$.

نستطيع الآن، بتعريف $G(x)$ بهذا الأسلوب كتابة التكامل (١ , ٥) على النحو التالي

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b \qquad (٥ , ٥)$$

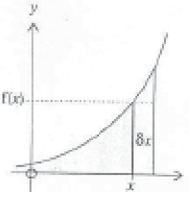
يعتمد حساب معظم التكاملات على المساوتين (٤ , ٥) و (٥ , ٥). أي

(١) نحصل على $G(x)$ بإجراء عملية عكسية للاشتقاق.

(٢) التعويض بالحدود a و b.

الخطوة (٢) أمرها يسير، أما الخطوة (١) فتحتاج إلى بعض الحنكة وسنتعامل معها لاحقاً. عند استخدامنا للمساواة (٤ , ٥) فإننا لن نحصل على G ولكننا نحصل على $G + C$

(٤)



حيث C ثابت ويرجع ذلك إلى أن $\frac{dC}{dx} = 0$. هذا الثابت ليس له تأثير عند استخدام المساواة (٥ , ٥)؛ لأن الثابت يحذف نفسه بعد تعويض حدود التكامل، ولكنه ذو أهمية إذا كانت حدود التكامل غير مُعينة. يُسمى التكامل المبين في المساواتين (٥ , ١) و (٥ , ٥) التكامل المحدود أما التكامل المبين في المساواة (٥ , ٤) فيُدعى التكامل غير المحدود، ولإيجاد قيمة الثابت في التكامل غير المحدود فإننا نحتاج إلى شروط إضافية كالقيمة $G(0)$ على سبيل المثال[٥].

(٥ , ٣) بعض الخواص الأساسية للتكامل

Some Basic Properties of Integrals

كما هو الحال في المُشتقات المبينة في البند (٤ , ٢) فإن أهم الخواص الأساسية للتكامل هي الخاصية الخطية.

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$
$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (٥ , ٦)$$

حيث A ثابت و $f(x)$ و $g(x)$ دالتان في المُتغير x.

وبهذا فإننا نستطيع حساب تكاملات مجموع وفرق حدود (كثيرات حدود) باستخدام تكاملات الحدود المكونة لها.

---

(٥)
$$G(x) = \int \sin x dx = C - \cos x$$

إذا كان $G(0) = 0$ فإن $C = 1$

تتمتع التكاملات المحدودة إضافة إلى الخاصية الخطية بالعديد من الخصائص الأخرى. أولى هذه الخصائص هي أن تبديل حدود التكامل يتبعه تغيير في الإشارة. أي أن

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \qquad (٥, ٧)$$

وخاصية أُخرى نحصل عليها من المساواة (٥ , ٥) تتعلق بكتابة التكامل كمجموع تكاملات تشترك في حدود مناسبة

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \qquad (٥, ٨)$$

وهذا واضح، على الأقل إذا كان $a \le b \le c$ وذلك من تعريف المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$. أخيراً ، بإستثمار العلاقة العكسية بين التكامل والتفاضل نحصل على[٦]

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)dx = f(b)\frac{db}{dt} - f(a)\frac{da}{dt} \qquad (٥, ٩)$$

حيث استخدمنا ضمنياً المساويتين (٤ , ٥) و (٥ , ٥) وقاعدة السلسلة (١٢ , ٤). في العادة يكون كل من a و b ثابتاً وعليه فإن التكامل المحدود عدد ثابت (وليس دالة في المتغير الشكلي x) ومن ثم فإن مُشتقته تساوي صفراً. إذا اعتمدت النهاية على

(٦) إذا كان $G(x) = \int_t^{t^2} \sin x dx = \cos t^2 - \cos t$ فإن $\frac{dG}{dt} = 2t \sin t^2 - \sin t$

متغير وسيطي t فالمساحة تحت المنحنى تعتمد على هذا الوسيط. وعلى الرغم من إمكانية حساب معدل التغير بحساب التكامل أولاً ومن ثم الاشتقاق بالنسبة إلى t إلاّ أن استخدام المساواة (٩ , ٥) يوفر علينا تفاصيل حساب الخطوة الأولى وتبسيط الخطوة الثانية.

(٤ , ٥) المعاينة والتعويض
Inspection & Substitutions

يتم حساب معظم التكاملات باعتبار أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل وهذا ما لاحظناه سابقاً ، لذا فإن التطبيق العكسي لنتائج الفصل الرابع يزودنا بالعديد من التكاملات القياسية. على سبيل المثال ، باستخدام المساويتين (٧ , ٤) و (٨ , ٤) نحصل على

$$\int \frac{1}{x} dx = ln\, x + C \qquad \text{و} \qquad \int e^x\, dx = e^x + C \qquad (٥ , ١٠)$$

حيث C هو ثابت التكامل و x موجب في حالة الوغاريتم. إن المفتاح في حساب التكامل $\int f(x) dx$ هو اكتشاف دالة معروفة تكون مُشتقتها الدالة $f(x)$ وهذا يحتاج إلى بعض الحنكة والتدريب ، كما أنه يتطلب معرفة التفاضلات المختلفة المقدمة في الفصل الرابع. ولتجنب الوقوع في الخطأ عند حساب التكامل فإنه يُنصح باشتقاق التكامل للتأكد من الحصول على الدالة المُكامَلة.

في بعض الحالات التي يكون فيها التكامل $\int f(x) dx$ ليس قياسياً (أي لا توجد دالة واضحة مُشتقتها $f(x)$) فمن الممكن تحويله إلا تكامل قياسي وذلك بتعويض مناسب $u = g(x)$.

على سبيل المثال ، تكامل الدالة $x\sqrt{4-x}$ بالنسبة للمتغير x يصبح تكاملاً مباشراً بوضع $u = 4 - x$

$$\int x\sqrt{4-x}\,dx = -\int (4-u)\sqrt{u}du = \int \left(u^{3/2} - 4u^{1/2}\right)du$$

حيث استخدمنا المعادلتين (١,٣) و (١,٤) في الخطوة الأخيرة واستخدمنا التعويض للحصول على $x = 4 - u$. وأما التعويض عن dx فحصلنا عليه من كون $\frac{dx}{du} = -1$ ومن ثم فإن $dx = -du$. لاحظ أن الفصل بين dx و du يتبع من العلاقة $\delta x \approx \frac{dx}{du} \times \delta u \approx -\delta u$.
الآن، استناداً إلى الخاصية الخطية (٦ , ٥) ومعرفتنا لتكامل u^M(٧) نحصل على

$$\int x\sqrt{4-x}\,dx = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{8}{3}u^{3/2} + C$$

حيث يمكن إعادة الطرف الأيمن كدالة في المتغير x بوضع $u = 4 - x$ وهذا التعويض يكون ضرورياً في حالة التكامل المحدود ، فإذا كانت حدود التكامل هي $x = a$ و $x = b$ فتكون هذه الحدود $u = 4 - a$ و $u = 4 - b$ بدلالة u.

للأسف، لا توجد قاعدة عامة تمكننا من اختبار التعويض المناسب، كما أنه لايوجد ضمان أكيد بأن التعويض الذي تم اختياره هو التعويض الصحيح إلاّ بعد تجريبه. ولكن هناك بعض التعويضات المناسبة لمجموعة من التكاملات المستخدمة بكثرة ومن المناسب ذكرها هنا بشيء من التفصيل. التكامل الأول منها هو تكامل

---

(٧)
$$\int x^M dx = \frac{x^{M+1}}{M+1} + C \quad (M \neq -1)$$

الدالة $sin^M x cos^N x$ [٨] حيث M و N عددان صحيحان. إذا كان M عدداً فردياً فإن التعويض $u = cosx$ يؤدي إلى تكامل كثيرة حدود في المتغير u وذلك لأن $du = -sinxdx$ وأنه من الممكن تحويل القوة الزوجية للدالة $sinx$ بدلالة $1 - u^2$ باستخدام المساواة (٣,٧). وبالمثل التعويض $u = sinx$ يكون مناسباً إذا كان N فردياً. أما إذا كان كل من M و N زوجياً فنحتاج إلى استخدام متكرر لمتطابقات ضعف الزاوية المقدمة في البند (٣,٤) وعلى الأخص المتطابقة (٣,١٥)، لتحويل الدالة المكاملة إلى دالة معروفة، كمثال على ذلك حاول حساب تكامل $sin^4 x$ بمساعدة التمرين (٣,٨).

أما التكاملات التي تحتوي على الحد $a^2 - x^2$ حيث a ثابت فغالباً مايكون التعويض $x = asin\theta$ أو $x = acos\theta$ ملائماً، وإذا احتوى التكامل الحد $a^2 + x^2$ فالتعويض المناسب هو $x = a\tan\theta$، وإذا احتوى الحد $x^2 - a^2$ فالتعويض الملائم هنا هو $x = a\sec\theta$. وأحياناً يكون من المناسب محاولة استخدام التعويض $t = tan\left({}^{x}/_{2}\right)$ لتكاملات دوال كسرية بسطها ومقامها دوال مثلثية[٩].

وأخيراً، يمكن معالجة الحالة الخاصة التي تكون فيها الدالة المكاملة حاصل ضرب $u = g(x)$ مع $\frac{du}{dx}$ بالإستعانة بقاعدة السلسلة المقدمة في البند (٤,٥) لتبسيط التكامل[١٠]

---

(٨)
$$\int_0^{\pi/2} sin^4 x cos^3 x\, dx = \int_0^1 u^4(1 - u^2)\, du$$
حيث $u = sinx$

(٩) إذا كان $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ فإن
$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$
$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(١٠)
$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = ln(x^2 - 1) + C$$

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du \qquad (٥,١١)$$

ومع الخبرة لا نحتاج عادة إلى إجراء التعويض $u = g(x)$ بالتفصيل ، ولكننا نقوم بحساب التكامل مباشرة لتوفير الوقت. فمثلاً، تكامل الدالة $x\,exp(-x^2)$ يساوي $\frac{-1}{2}exp(-x^2)$ لأن تفاضل $-x^2$ يساوي $-2x$. أما تكامل $exp(-x^2)$ فليس بالأمر اليسير.

(٥,٥) الكسور الجزئية
Partial Fractions

ناقشنا في البند (١,٧) الكسور الجزئية حيث قمنا بتجزيء دالة كسرية جبرية إلى مجموع دوال كسرية أبسط (غير قابلة للتحليل). إن هذا التجزيء يساعدنا على إجراء العديد من التكاملات ، كمثال بسيط لاحظ أن

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

حيث استخدمنا الكسور الجزئية للدالة $\frac{1}{x(x+1)}\frac{1}{x(x+1)}$ والخاصية الخطية (٥,٦) للتكامل للحصول على الطرف الأيمن. ومن ثم فكل من تكاملي الطرف الأيمن هو لوغاريتم مقام كل منهما.

(٥ , ٦) التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

إن تكامل المساواة (٤ , ٩) (قاعدة الإشتقاق لحاصل ضرب دالتين) يؤدي إلى العلاقة العامة التالية

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx \tag{٥ , ١٢}$$

حيث u و v دالتان في المتغير x. والدالة المُكامَلة هنا هي حاصل ضرب دالتين u و $\frac{dv}{dx}$ بحيث يكون من السهل اشتقاق u ومن السهل تكامل $\frac{dv}{dx}$. تُسمى المساواة (٥ , ١٢) ، التكامل بالأجزاء ، وتُستخدم هذه الطريقة إذا كان التكامل في الطرف الأيمن أبسط من التكامل في الطرف الأيسر.

كمثال على ذلك ، دعنا نقوم بحساب التكامل $\int x\ln x\, dx$. بما أن تكامل x هو $\frac{x^2}{2}$ وتفاضل $\ln x$ هو $\frac{1}{x}$ فباستخدام المساواة (٥ , ١٢) نجد أن

$$\int x\ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx$$

حيث قيمة تكامل الطرف الأيمن هي $\frac{x^2x^2}{4\ 4}$. بهذه الطريقة نستطيع أيضاً حساب تكامل $\ln x \ln x$ بكتابتها على الصورة $1 \times \ln x 1 \times \ln x$[١١].

(١١)
$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$$

(٥,٧) صيغ الاختزال

Reduction Formulae

لنفرض أن لدينا التكامل I_n حيث n تقابل قوة المتغير x في الدالة المُكاملة

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \qquad (٥,١٣)$$

إذا كان $n = 0$ فإن $x^n = 1$ ونجد بسهولة أن $I_0 = 1$. أما إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً كبيراً فإننا نستطيع حساب I_n بدلالة I_0 وذلك باستخدام متكرر للتكامل بالأجزاء. ولرؤية ذلك لاحظ أن

$$I_n = [-x^n e^{-x}]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

حيث كاملنا e^{-x}(١٢) وقمنا باشتقاق x^n. قيمة الحد الأول في الطرف الأيمن تساوي صفراً؛ لأن $x^n e^{-x}$ يساوي صفراً عند كلا الحدين الأعلى والأسفل للمقدار. ومن تعريف التكامل في المساواة (٥,١٣) نجد أن

$$I_n = n I_{n-1} \qquad (٥,١٤)$$

على سبيل المثال، إذا كان $n = 7$ فإن $I_7 = 7I_6$، وبتطبيق المساواة (٥,١٤) مرة أُخرى فإننا نحصل على $I_6 = 6I_5$، وهكذا حتى نصل إلى $I_1 = I_0 = 1$. ولذا فإننا

---

(١٢) $\int_0^\infty e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^\infty = 1$

نستنتج أن $I_n = n!$. هذا التعريف للمضروب $n!$[١٣] يُسمى دالة جاما $\Gamma(n+1)$ وتؤكد لنا ادعائنا في البند (٥ , ١) من أن $0! = 1$.

إن الهدف الرئيسي من الحساب المقدم أعلاه هو توضيح كيفية استخدام صيغة الإختزال في المساواة (١٤ , ٥). يوجد العديد من صيغ الاختزال المماثلة التي تساعدنا على التعبير عن تكاملات I_n من الرتبة n بدلالة تكاملات I_m حيث $m < n$.

(٥ , ٨) التماثل والجداول والتكامل العددي

Symmetry, Tables & Numerical Integration

في نهاية هذا الفصل نؤكد قولنا أن حساب التكامل يعتمد على قدرتنا على اكتشاف دالة مشهورة مُشتقتها هي الدالة المُكاملة، وطرق التكامل، كالتكامل بالتعويض والتكامل بالأجزاء غالباً ما تساعدنا على تحويل تكاملات صعبة إلى تكاملات يسهل التعامل معها. أحياناً نحتاج لاستخدام الطريقة أكثر من مرة لإتمام عملية حساب التكامل.

إن أفضل الطرق لحساب التكامل في التطبيقات العملية (وليس لغرض الاختبارات) هي استخدام جداول التكاملات. ومع وجود هذه الجداول لمساعدتنا على حساب قيمة التكاملات، إلاّ أن العديد من التكاملات لا يمكن حسابها باستخدام الجداول؛ لعدم وجود صيغة جبرية بسيطة لها، ولكن من الممكن حساب التكاملات المحدودة عددياً وذلك بحساب المساحة تحت المنحنى باستخدام مجاميع المساواة (١ , ٥)، على سبيل المثال، يمكن حساب تكامل الدالة $exp(-x^2)$

من 0 إلى متغير (عادة يُسمى دالة الخطأ) بالاستعانة بجداول معدة مسبقاً.

---

(١٣)
$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

في نهاية هذا البند نلفت النظر إلى إمكانية حساب بعض التكاملات بالاعتماد على تماثل الدالة فإذا كانت الدالة فردية ، أي $f(-x) = -f(x)$ ، مثل $f(x) = x$ و $f(x) = sin\, x$ فهذه الدوال متماثلة حول نقطة الأصل ولذلك تكون قيمة التكامل من $-a$ إلى a تساوي صفراً.

إذا كان $f(-x) = -f(x)$ فإن $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad (٥,١٥)$$

ويمكن إثبات ذلك جبرياً باستخدام المعادلتين (٥,٧) و (٥,٨) أو بملاحظة أن مساحة المنطقة تحت المنحنى وعلى يسار $x = 0$ تساوي في المقدار (بإشارة مخالفة) مساحة المنطقة على يمين $x = 0$. أما إذا كانت الدالة زوجية ، أي $f(-x) = f(x)$ مثل ، $f(x) = x^2$ و $f(x) = \cos x$ فإنها متماثلة حول المستقيم $x = 0$ ، وعليه تكون قيمة تكاملها من $-a$ إلى a يساوي ضعف قيمة التكامل من 0 إلى a.

إن معظم الدوال لا فردية ولا زوجية ولذا فإنها ليست متماثلة حول الأصل أو محور الصادات ولذلك لا نستطيع تطبيق خاصية التماثل لحساب تكاملاتها.

تمارين

(٥ , ١) احسب قيمة تكامل الدوال التالية بالنسبة للمتغير xx

(١) $x+\sqrt{x}-\frac{1}{x}$

(٢) $\sqrt{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$

(٣) 2^x

(٤) e^{2x}

(٥) $\frac{1}{2x-1}$

(٦) $sin(2x)+cos(3x)$

(٧) $tan\,x$

(٨) $sin^2(x)$

(٩) $\frac{x}{1+x^2}$

(١٠) $\frac{1}{1+x^2}$

(٥ , ٢) جد قيمة التكاملات المحدودة التالية

(١) $\int_0^{\pi/2} sin^4 x \cos x\, dx$

(٢) $\int_0^{\pi/2} sin^4 x dx$

(٣) $\int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}} dx$

(٥,٣) احسب تكاملات صيغ الكسور الجزئية الثلاث المقدمة في التمرين (١,١٢) بالنسبة إلى x.

(٥,٤) باستخدام التكامل بالأجزاء (مرتين للفقرة ii) ، أثبت أن

(١) $$\int x \sin x \, dx = C - x \cos x + \sin x$$

(٢) $$\int x \sin x \, e^{-x} dx = C - \frac{(\sin x + \cos x)e^{-x}}{2}$$

(٥,٦) إذا كان

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

حيث $n \geq 1$ فأثبت أن $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ، ثم استخدم I_0 و I_1 لحساب I_5 و I_8.

(٥,٦) أثبت المساواة (٥,١٥) جبرياً وأثبت المساواة الأخرى المقابلة للدوال المتماثلة حول محور الصادات.