الفصل الثالث

الدوال المثلثية
Trigonometry

(١ , ٣) الزوايا والقياس الدائري
Angles & Circular Measure

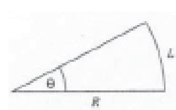
تُعَّرف الزاوية على أنها مقياس دوران مستقيم وتقاس عادة بالدرجات ، ومقدار الدورة الكاملة يساوي 360° ، ولذا فإن مقياس الزاوية القائمة يساوي 90° ومقياس الزاوية المستقيمة يساوي 180° وهكذا. وعلى الرغم من شيوع الدرجات لقياس الزوايا ، إلاّ أن التقدير الدائري (الراديان) هو المقياس الأكثر استخداماً في الرياضيات وهو كمية عديمة البعد يمكن تعريفها على النحو التالي ، إذا دورنا نصف قطر R بزاوية مقدارها θ بحيث يكون طول القوس الناتج عن هذا الدوران يساوي L فإن[١]

$$\theta = \frac{L}{R} \qquad (٣ , ١)$$

وبما أن محيط الدائرة يساوي $2\pi R$ فإن 360° تساوي 2π راديان ، والزاوية القائمة تساوي $\frac{\pi}{2}$ راديان.

---

(١)



وبصورة عامة ، من الممكن تحويل الزاوية الُمقاسة بالدرجات إلى قياس دائري بضرب قيمتها بالمقدار $\frac{\pi}{180}$. أي أن الراديان يساوي 57.3° تقريباً. سنفترض في هذا الكتاب (مالم يُذكر صراحة) أن مقياس الزوايا هو الراديان.

(٢ , ٣) الجيب وجيب التمام والظل

Sine, Cosine & Tangent

إن أبسط تعريف للجيب وجيب التمام والظل هو الُمقَدم كنِسب بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. أي ، إذا كان r هو طول الوتر وكان x طول الضلع المجاور للزاوية θ وكان y طول الضلع المقابل لها فإن[٢]

(٣ , ٢)
$$sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad , \quad cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad , \quad tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

استناداً إلى هذا التعريف نستطيع أن نجد علاقة بين قيم الدوال المثلثية الثلاث

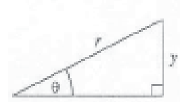
(٣ , ٣)
$$tan(\theta) = \frac{sin\ (\theta)}{cos\ (\theta)}$$

وبما أن قيمة الزاوية بين y و r تساوي $90^{\circ} - \theta$ (مجموع زوايا مثلث يساوي 180°) فإن العلاقة بين جيب وجيب تمام زاويتين حادتين هي

(٣ , ٤)
$$sin(\theta) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

---

(٢)



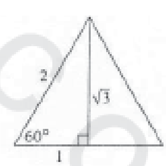
إذا كانت θ صغيرة جداً فإن طول y يكون صغيراً جداً ويكون r و x متقاربين في الطول ، وعليه ، نجد استناداً إلى (٢ , ٣) و (٣ , ٤) أن $sin(0) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ وأن $cos(0) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

باستخدام مثلث قائم الزاوية مناسب ومُبرهنة فيثاغورس نجد أن $sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ وأن $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [٣] وأن $sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [٤]. وعليه فنجد استناداً إلى (٣ , ٣) أن $tan(0) = 0$ وأن $tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ وأن $tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ وأن $tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ وأن $tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty$.

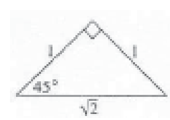
لقد قصرنا دراستنا لحد الآن على الحالة $0^{\circ} \leq \theta \leq 90^{\circ}$ ولكنه من السهل تعميم ذلك لأي قيمة للزاوية θ ، ويتم ذلك بتعميم تعريف x و y و r في المعادلة (٢ , ٣) حيث تمثل الإحداثيات والمسافة من نقطة الأصل والنقطة التي إزاحتها الزاويّة مقاسة باتجاه عكس عقارب الساعة مع الاتجاه الموجب لمحور x تساوي θ (تأخذ θ قيمة سالبة إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة). عندئذ ، نستطيع إيجاد قيم الجيب وجيب التمام والظل لأي زاوية θ باستخدام زاوية حادة (مع تجاهل إشارة السالب).[٥]

---

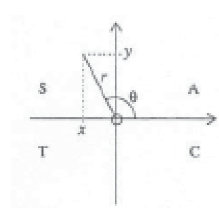
(٣)



(٤)



(٥)



ولرؤية ذلك ، لاحظ أولاً أن الدوال المثلثية هي دوال دورية أي أن قيمها تتكرر مع كل دورة (دورة كل من الجيب وجيب التمام هي 360° ، ودورة الظل هي 180°).

$$\begin{aligned} sin(\theta) &= sin\,(\theta + 2\pi N) \\ cos(\theta) &= cos\,(\theta + 2\pi N) \\ tan(\theta) &= tan\,(\theta + 2\pi N) \end{aligned} \qquad (٣,٥)$$

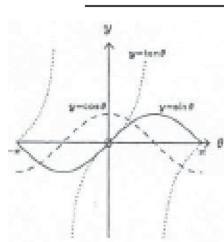
حيث N عدد صحيح.

إذا كانت $90^{\circ} < \theta \leq 180^{\circ}$ فإن x سالب و y موجب ، ومن ثم فإن $\frac{y}{x} = tan(\theta)$ يساوي القيمة السالبة للنسبة بين المقابل إلى المجاور في مثلث قائم الزاوية إحدى زواياه الزاوية المتممة $180^{\circ} - \theta$. أي أن $tan(\theta) = -tan(\pi - \theta)$. وبالمثل فإن $sin(\theta) = sin(\pi - \theta)$ وأن $cos(\theta) = -cos(\pi - \theta)$. ويتكرار ذلك للحالتين $180^{\circ} < \theta \leq 270^{\circ}$ و $270^{\circ} < \theta \leq 360^{\circ}$ نجد أن قيم الجيب وجيب التمام والظل تساوي قيم دوال مثلثية لزاوية بين نصف القطر ومحور x قيمتها أصغر مع ملاحظة أن الإشارة تعتمد على الربع الواقعة به الزاوية θ.

إن أفضل طريقة لتذكر الإشارة هي استخدام كلمة (CAST) حيث حروفها مكونة من الحروف الأولى للكلمات cosine و all و sine و tangent على التوالي، وذلك بوضع الحرف C بالربع الرابع ، A بالربع الأول ، S بالربع الثاني ، T بالربع الثالث. هذه الحروف تبين أن قيمة الدالة المثلثية التي يمثلها موجبة في الربع المعين. على سبيل المثال ، $tan(210^{\circ}) = tan(30^{\circ})$ و $tan(300^{\circ}) = -tan(60^{\circ})$.

قبل أن ننهي هذا البند نقدم الدوال المثلثية الأخرى وهي دالة ظل التمام (cotangent) ودالة القاطع (secent) ودالة قاطع التمام (cosecant) وتُعَّرف على النحو التالي[٦]

(٦)



$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta}\,, \qquad cosec\theta = \frac{1}{sin\theta}\,, \qquad cot\theta = \frac{1}{tan\theta} \tag{٣,٦}$$

لقد بينا سابقاً أن $sin(0) = 0$ و $cos(0) = 1$ و $tan(0) = 0$ ولكن بملاحظة أن القطاع الدائري في التعريف الدائري للدوال المثلثية يشبه إلى حد بعيد مثلث قائم الزاوية عندما تقترب θ من الصفر فنجد أن

$$sin\theta \approx \theta\,, \qquad tan\theta \approx \theta\,, \qquad cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \tag{٣,٧}$$

عندما تكون $|\theta| \ll 1$ ومقاسه بالراديان. ومن الممكن التحقق من ذلك أيضاً بالنظر إلى بيان الدوال المثلثية بجوار $\theta = 0$.

(٣,٣) متطابقات فيثاغورية

Pythagorean Identities

إن إحدى خصائص المثلث القائم الزاوية هي مبرهنة فيثاغورس وتنص على أن $x^2 + y^2 = r^2$ حيث r هو طول الوتر و x و y طولا ضلعي القائمة.

وبقسمة طرفي المعادلة على r^2 نحصل على $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$. وبالتعويض في المعادلة (٣,٢) نحصل على المتطابقة

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \tag{٣,٨}$$

حيث استخدمنا الاصطلاح المتفق عليه $sin^2\theta = (sin\theta)^2$. هذه الصيغة وصيغ أخرى مشابهة تُكتب عادة باستخدام $\equiv$ بدلاً من المساواة (=) لتدل على أنها متطابقة.

أي أنها صائبة دائماً لجميع قيم θ وهي تختلف عن المساواة الاعتيادية $(sin\theta = cos\theta)$. الآن ، بقسمة متطابقة فيثاغورس على x و y بدلاً من r نحصل بطريقة مشابهة على المتطابقتين

$$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta\,, \qquad cot^2\theta + 1 = cosec^2\theta \qquad (٣,٩)$$

إذا وضعنا $x = acos\theta$ و $y = bsin\theta$ في المعادلة (٣,٨) فنحصل على المعادلة (٢,١٠) ، ولذا فهاتان المعادلتان تسميان المعادلتان الوسيطيتان للقطع الناقص. وبالمثل المعادلتان الوسيطيتان للدائرة التي مركزها نقطة الأصل هما $x = Rcos\theta$ و $y = Rsin\theta$.

(٣,٤) الزوايا المركبة

Compound Angles

إذا كانت زاوية تساوي مجموع زاويتين، مثل ، $\theta = A + B\theta = A + B$ فمن الممكن التعبير عن قيمة $sin\theta sin\theta$ بدلالة قيم مثلثية لكل من AA و BB. ومع أن برهان هذه الصيغة يتطلب بعض المعلومات الهندسية والجبرية ، إلاّ أنه من السهل تذكرها(٧)

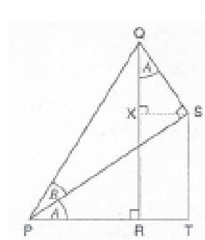
$$sin(A + B) = sinAcosB + cosAsinB \qquad (٣,١٠)$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $A = BA = B$ نحصل على صيغة ضعف الزاوية للجيب

---

(٧)

$$\begin{aligned} sin(A+B) &= \frac{QR}{PQ} \\ &= \frac{QX + ST}{PQ} \\ &= \frac{QScosA + PSsinA}{PQ} \\ &= \frac{QS}{PQ}cosA + \frac{PS}{PQ}sinA \\ &= sinBcosA + cosBsinA \end{aligned}$$



$$sin2A = 2sinAcosA \qquad (٣,١١)$$

ومن الممكن الحصول على صيغة لجيب الفرق $sin(A-B)$ من المعادلة (٣,١٠) وذلك بملاحظة أن $sin(-\theta) = -sin\theta$ وأن $cos(-\theta) = cos\theta$

$$sin(A-B) = sinAcosB - cosAsinB \qquad (٣,١٢)$$

وبشكل هندسي مشابه وعمليات جبرية مشابهة نحصل على الصيغتين التاليتين لمجموع وفرق زاويتين لدالة جيب التمام

$$cos(A \pm B) = cosAcosB \mp sinAsinB \qquad (٣,١٣)$$

حيث الإشارة الموجبة في الطرف الأيسر تقابل الإشارة السالبة في الطرف الأيمن والعكس صحيح. إذا كانت $A = BA = B$ فإننا نحصل على صيغة ضعف الزاوية لجيب التمام

$$cos2A = cos^2A - sin^2A \qquad (٣,١٤)$$

وباستخدام المعادلة (٣,٨) يمكن التعبير عن هذه الصيغة باستخدام الجيب فقط أو جيب التمام فقط

$$cos2A = 2cos^2A - 1 = 1 - 2sin^2A \qquad (٣,١٥)$$

وباستخدام المعادلات (٣,٣)، (٣,١٠)، (٣,١٢)، (٣,١٣) وقسمة مناسبة نستطيع الحصول على صيغتين لمجموع وفرق دالة الظل

$$tan(A \pm B) = \frac{tanA \pm tanB}{1 \mp tanAtanB} \qquad (٣ ,١٦)$$

وبوضع $A = B$ نحصل على $tan2A = \frac{2tanA}{1-tan^2A}$.

(٣ ,٥) صيغ خارج القسمة

Factor Formulae

من الممكن استخدام صيغ البند السابق للحصول على صيغ تربط المجموع والفرق مع الضرب ، على سبيل المثال ، بإضافة المعادلة (٣ ,١٠) إلى (٣ ,١٢) نحصل على

$$sin(A + B) + sin(A - B) = 2sinAcosB \qquad (٣ ,١٧)$$

وبوضع $X = A + B$ و $Y = A - B$ نحصل على

$$sinX + sinY = 2sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)cos\left(\frac{X-Y}{2}\right) \qquad (٣ ,١٨)$$

ومع أن هاتين الصيغتين متكافئتين ، إلاّ أن الأولى مناسبة لتفريق الضرب إلى جمع والثانية تكون مناسبة للعملية العكسية.

بطرح المعادلتين (٣ ,١٠) و (٣ ,١٢) نحصل على صيغتين مشابهتين للصيغتين (٣ ,١٧) و (٣ ,١٨) وتختلفان فقط بوجود إشارة سالبة بالطرف الأيسر وتبديل مواقع $sinsin$ و $coscos$ في الطرف الأيمن.[٨]

---

(٨) $sinX - sinY = 2cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)sin\left(\frac{X-Y}{2}\right)$ $cosX - cosY = 2sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)sin\left(\frac{X-Y}{2}\right)$

وبصورة مشابهة نحصل من المعادلة (١٣ , ٣) على الصيغتين التاليتين لجيب التمام

$$cos(A+B)+cos(A-B)=2cosAcosB \qquad (٣ , ١٩)$$

$$cos(A+B)-cos(A-B)=-2sinAsinB \qquad (٣ , ٢٠)$$

كما نحصل على صيغة مشابهة للصيغة المُقدمة في المتطابقة (١٨ , ٣) بالتعويض عن X و Y كما في السابق.

(٦ , ٣) الدوال المثلثية العكسية

Inverse Trigonometric Function

إذا علمنا أن جيب زاوية θ في مثلث قائم الزاوية يساوي $\frac{1}{2}$ فإننا نستنتج أن $\theta = 30^{\circ}$.
إن هذا مثالاً على استخدام معكوس الدالة المثلثية. أي أنه يمكن تعميم ذلك إلى تعريف عام

$$y = sin\theta \Leftrightarrow \theta = sin^{-1}y \qquad (٣ , ٢١)$$

حيث نحذر أن القوة -1 لا تعني المقلوب ولكنها رمز شائع للدوال العكسية، وفي بعض الأحيان يستخدم الرمز $arcsin$ عوضاً عن sin^{-1} منعاً للإلتباس. وبصورة مشابهة تماماً للتعريف (٢١ , ٣) نحصل على تعاريف لمعكوس بقية الدوال المثلثية حيث $arccosy = cos^{-1}y$ و $arctany = tan^{-1}y$ وهكذا.[٩]

---

(٩) $cos^{-1}(1/2) = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{3}, \cdots \qquad tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \pm \pi, \cdots$

وللحصول على بيان $\theta = sin^{-1}y$ نقوم بتدوير بيان $y = sin\theta$ بزاوية دوران 90°، بحيث يكون محور y هو الأفقي ومحور θ هو الرأسي. وبالمثل لكل من $\theta = cos^{-1}y$ و $\theta = tan^{-1}y$ بالنسبة إلى بياني cos و tan. ولذا فإن الدوال المثلثية العكسية دوال متعددة القيم؛ لأنه من الممكن الحصول على قيمة معينة لكل من sin، cos، tan من العديد من الزوايا. على سبيل المثال، إذا كان $sin\theta = \frac{1}{2}$ فإنه من الممكن أن تكون $\theta = 30^{\circ}$ أو $\theta = 150^{\circ}$ أو أي مضاعف للزاوية 360° مضافاً إليه إحدى هاتين القيمتين. والملاحظة المهمة الأخرى هي أن $sin^{-1}y$ و $cos^{-1}y$ غير معرفتين إذا كانت القيمة المطلقة للقيمة y أكبر من 1، لأن $|sin\theta| \leq 1$ و $|cos\theta| \leq 1$ لكل θ، ولكن ذلك لاينطبق على $tan^{-1}y$ لأن $-\infty < tan\theta < +\infty$.

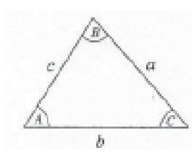
(٣,٧) قاعدتا الجيب وجيب التمام
The Sine & Cosine Rules

ننهي هذا الفصل بتقديم قاعدتين للجيب وجيب التمام تبين العلاقة بين أطوال أضلاع أي مثلث وزواياه (وبرهانهما سيصبح مباشر بعد تقديم مفهوم المتجهات).

إذا كانت زوايا مثلث هي A، B، C فجرت العادة أن نرمز لأطوال الأضلاع المقابلة بالرموز a، b، c على التوالي.[١٠] باستخدام هذا الترميز يمكن إثبات أن

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} \qquad (٣,٢٢)$$

(١٠)



وأن

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA \qquad (٣,٢٣)$$

وتسميان قاعدتا الجيب وجيب التمام.

لاحظ أن (٣,٢٢) عبارة عن ثلاث معادلات. كما أنه يمكن الحصول على معادلتين مشابهتين للمعادلة (٣,٢٣) بتبديل مواقع الرموز، فمثلاً، $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\ cosB$.

تمارين

(٣,١) حوّل الزوايا التالية من راديان إلى درجات مع توضيح اتجاهاتها بيانياً $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{5}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

(٣,٢) جد قيم sin ، cos ، tan للزوايا $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$. جد أيضاً قيم هذه الدوال المثلثية للزوايا $\pm\frac{2\pi}{3}$، $\pm\frac{3\pi}{4}$، $\pm\frac{5\pi}{6}$، $\frac{5\pi}{4}$، $\frac{4\pi}{3}$، $-\frac{\pi}{6}$.

(٣,٣) باستخدام تعريف الراديان و sin ، بيّن لماذا $sin\theta \approx \theta$ عندما تكون θ صغيرة. ثم بيّن لماذا المعادلة (٣,١٥) تؤدي إلى أن $cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

(٣,٤) إذا كان $t = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ فجد كل من $tan\theta$ ، $cos\theta$ ، $sin\theta$ بدلالة t.

(٣,٥) حل المعادلات التالية في المجال $-\pi \leq \theta \leq \pi$ $tan\theta = -\sqrt{3}$ ، $sin3\theta = -1$ ، $4cos^3\theta = cos\theta$.

(٣,٦) أثبت أنه يمكن كتابة $asin\theta + bcos\theta$ على الصورة $Asin(\theta + \varphi)$ حيث A و φ يُعبر عنهما بدلالة a و b. ثم حل المعادلة $sin\theta + cos\theta = \sqrt{3/2}$.

(٣,٧) أثبت أن $cos4\theta = 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1$ ومن ثم اكتب $sin4\theta$ بدلالة $sin\theta$ و $cos\theta$.

(٣,٨) أثبت أن $8sin^4\theta = cos4\theta - 4cos2\theta + 3$ ثم جد صيغة مشابهة للمقدار $cos^4\theta$.

(٣,٩) باستخدام صيغة خارج القسمة ، جد قيم θ بين 0 و π التي تحقق المعادلة $cos\theta = cos2\theta + cos4\theta$.

(٣,١٠) أثبت أن $cos\theta + cos3\theta + cos5\theta + cos7\theta = 4cos\theta cos2\theta cos4\theta$.

(٣,١١) طولا رابطي جزيء ثلاثي الذرة هما $1.327A$ و $1.514A$ وزاوية الربط هي 107.5°. جد المسافة بين الذرتين الآخرتين.